Հ. Ժ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ
Հ. Գ. ՄՈՎՍԵՍՅԱՆ

ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հ. Ց. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Հ. Գ. ՄՈՎՍԵՍՅԱՆ

ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2017

ՀՏԴ 519.6(076.1)
ԳՄԴ 22.176g7
Հ 177

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը:*

Հակոբյան Հ. Ց., Մովսեսյան Հ. Գ.

Հ 177 Բուլյան ֆունկցիաներ: Խնդիրների ժողովածու: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ/ Հակոբյան Հ. Ց., Մովսեսյան Հ. Գ.: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2017, 80 էջ:

Խնդրագրքում ներկայացված է դիսկրետ մաթեմատիկայի հիմնական բաժիններից մեկի՝ բուլյան ֆունկցիաների տեսության վերաբերյալ խնդիրների բավական ընդգրկուն շրջանակ:

ՀՏԴ 519.6(076.1)
ԳՄԴ 22.176g7

ISBN 978-5-8084-2263-6

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկում ներառված են խնդիր-ներ, որոնք առնչվում են Երևանի պետական համալսարանի «Ին-ֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի» (ԻԿՄ) ֆակուլ-տետի ուսումնական ծրագրերում, մասնավորապես, «Դիսկրետ մաթեմատիկա» և «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի հիմունք-ներ» դասընթացների շրջանակներում ուսումնասիրվող թեմա-ներին:

Մեր համոզմամբ, այն օգտակար կլինի ոչ միայն ԻԿՄ ֆա-կուլտետի, այլև դիսկրետ մաթեմատիկայի հարցերով հե-տաքրքրվող այլ ուսանողների, ասպիրանտների, հետազոտողնե-րի համար:

Շնորհակալություն ենք հայտնում ԵՊՀ ԻԿՄ ֆակուլտետի «Դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի» ամ-բիոնի ասիստենտ, ֆիզ.-մաթ. գիտությունների թեկնածու Պ. Պետրոսյանին խնդրագրքի խմբագրման աշխատանքներին ակտիվ մասնակցության և արժեքավոր դիտողությունների համար:

Հ. Յ. Հակոբյան
Հ. Գ. Մովսեսյան

I. ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ՏՐՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

Հիմնական սահմանումներ, գաղափարներ, նշանակումներ

$\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ հավաքածուն, որտեղ $\alpha_i \in \{0,1\}$, $1 \le i \le n$ կոչվում է n *-չափանի երկուական* կամ *բուլյան վեկտոր*: Երբեմն այն նշանակում են պարզապես $\widetilde{\alpha}$ -ով: Հավաքածուի տարրերն անվանում են վեկտորի կոորդինատներ: n թիվը կոչվում է վեկտորի երկարություն: $\|\widetilde{\alpha}^n\|$ -ով նշանակում են $\widetilde{\alpha}^n$ -ի 1 կոորդինատների քանակը, որն անվանում են վեկտորի *կշիռ*: Այլ կերպ ասած՝ $\|\widetilde{\alpha}^n\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$:

$\nu(\widetilde{\alpha}^n)$ -ով նշանակում են այն թիվը, որի համար $\widetilde{\alpha}^n$ վեկտորը նրա 2-ական ներկայացումն է, այսինքն՝ $\nu(\widetilde{\alpha}^n) = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$: $\nu(\widetilde{\alpha}^n)$ թիվը կոչվում է $\widetilde{\alpha}^n$ վեկտորի *համար*:

$B^n = \{\widetilde{\alpha}^n \mid \alpha_i \in \{0,1\}\}$ բազմությունը, այսինքն՝ n -չափանի բոլոր բուլյան վեկտորների բազմությունը անվանում են n *-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմություն*, համապատասխանաբար՝ n -չափանի բուլյան վեկտորներն անվանում են նաև n *-չափանի միավոր խորանարդի գագաթներ*:

$B_k^n = \{\tilde{\alpha}^n \mid \tilde{\alpha}^n \in B^n; \|\tilde{\alpha}^n\| = k\}$ բազմությունն անվանում են n *-չափանի միավոր խորանարդի* k *-րդ շերտ* $(0 \le k \le n)$:

$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$ կոչվում է $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ վեկտորների *հեմինգյան հեռավորություն* կամ պարզապես *հեռավորություն*: Երբ $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ կոչվում են *հարևան վեկտորներ*: Երբ $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = n$, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ կոչվում են *հակադիր վեկտորներ*: $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ վեկտորի հակադիր վեկտորը նշանակում են $\overline{\widetilde{\alpha}}^n = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n)$:

Ասում են, որ $\widetilde{\alpha}$ -ն նախորդում է $\widetilde{\beta}$ -ին և նշանակում են $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, եթե $\alpha_i \le \beta_i$, $1 \le i \le n$:

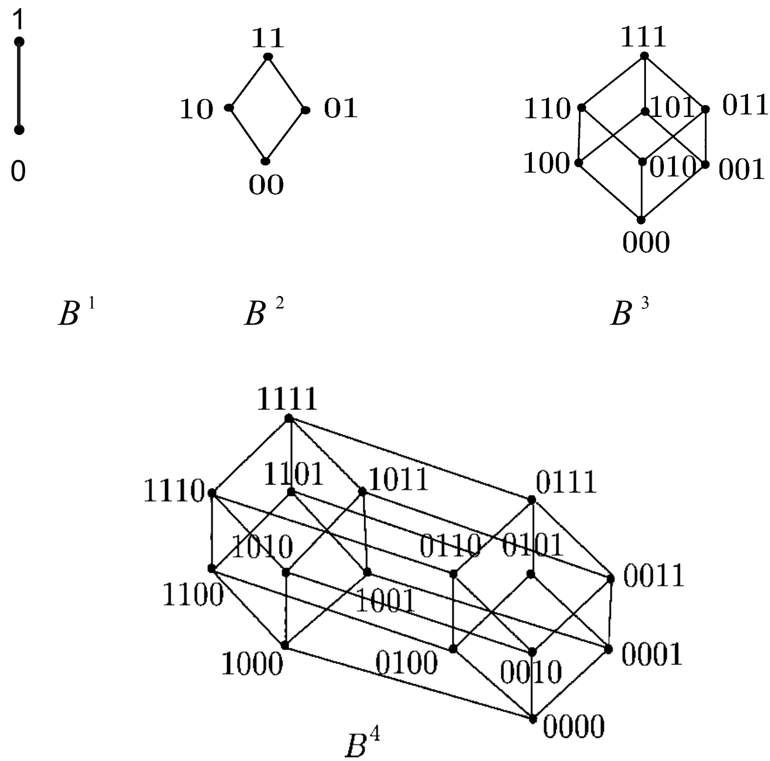
Եթե $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$ կամ $\widetilde{\beta} \preceq \widetilde{\alpha}$, ապա $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ վեկտորները կոչվում են *համեմատելի վեկտորներ*: Հակառակ դեպքում դրանց անվանում են *անհամեմատելի վեկտորներ*:

Նախորդման $\preceq$ հարաբերությունը մասնակի կարգի հարաբերություն է B^n բազմության վրա:

n *-չափանի միավոր խորանարդ* անվանում են այն գրաֆը, որի գագաթների բազմությունը B^n -ն է, կողերի բազմությունը՝ E^n -ը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$E^n = \{(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \mid \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^n, \ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1\} :$$

Նկար 1-ում պատկերված են n -չափանի միավոր խորանարդներ n =1, 2, 3, 4 դեպքերում: Նկար 1-ում $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ հավաքածուները ներկայացված են $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ տեսքով:



Նկար 1

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ ֆունկցիան, որը որոշված է B^n բազմության վրա և ընդունում է արժեքներ {0,1} բազմությունից, կոչվում է n փոփոխականներից կախված կամ n -տեղանի *բուլ-*

յան ֆունկցիա: Այն երբեմն նշանակում են նաև՝ $f(\widetilde{x}^n)$: Բոլոր բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը նշանակում են P_2 -ով: Բոլոր n -տեղանի բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը նշանակում են P_2^n -ով: 0 -տեղանի բուլյան ֆունկցիաները հաստատուն 0 և հաստատուն 1 ֆունկցիաներն են: n -տեղանի բուլյան ֆունկցիան, երբ $n \geq 1$, կարելի է ներկայացնել 2^n տողերով և 2 սյուներով աղյուսակով (տե՛ս նկար 2):

$(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$	$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$
$(0, 0, ..., 0, 0)$	$f(0, 0, ..., 0, 0)$
$(0, 0, ..., 0, 1)$	$f(0, 0, ..., 0, 1)$
……………	………………
$(1, 1, ..., 1, 0)$	$f(1, 1, ..., 1, 0)$
$(1, 1, ..., 1, 1)$	$f(1, 1, ..., 1, 1)$

Նկար 2

Այն դեպքում, երբ աղյուսակի ձախ սյունում բուլյան վեկտորները դասավորված են ըստ իրենց համարների աճման կարգի, աղյուսակի աջ սյունը կոչվում է բուլյան ֆունկցիայի *վեկտորային ներկայացում*.

$$f(\widetilde{x}^n) = (f(0,0,...,0,0), f(0,0,...,0,1),..., f(1,1,...,1,1)):$$

Երկու n -տեղանի բուլյան ֆունկցիաներ, որոնք կախված են միևնույն $x_1, x_2, ..., x_n$ փոփոխականներից, կոչվում են *հավասար*, եթե նրանց աղյուսակները համընկնում են:

$N_f = \{\tilde{\alpha}^n \mid f(\tilde{\alpha}^n) = 1,\ \tilde{\alpha}^n \in B^n\}$ բազմությունը կոչվում է $f(\tilde{x}^n)$ բուլյան ֆունկցիայի 1-երի կետերի բազմություն: Ասում են, որ $f(\tilde{x}^n)$ բուլյան ֆունկցիան տրված է երկրաչափորեն, եթե n -չափանի միավոր խորանարդի վրա նշված են բոլոր այն գագաթները, որոնք պատկանում են N_f բազմությանը:

0, 1 և 2 տեղանի բուլյան ֆունկցիաները կոչվում են *տարրական բուլյան ֆունկցիաներ*: Նկար 3-ում և 4-ում, համապատասխանաբար, ներկայացված է դրանց մի մասը:

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Նկար 3

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \equiv x_2$	$x_1 \uparrow x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0

Նկար 4

Տարրական ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ անվանումները.

x - *նույնական* x ֆունկցիա,

$\overline{x}$ - x -ի *ժխտում,*

$x_1 \& x_2$ - *կոնյունկցիա,*

$x_1 \vee x_2$ - *դիզյունկցիա,*

$x_1 \to x_2$ - *իմպլիկացիա,*

$x_1 \oplus x_2$ - *գումար ըստ մոդուլ 2-ի,*

$x_1 \equiv x_2$ - *համարժեքություն,*

$x_1 \uparrow x_2$ - *Շեֆֆերի ֆունկցիա,*

$x_1 \downarrow x_2$ - *Պիրսի ֆունկցիա:*

Օգտագործված նշանները կոչվում են *տրամաբանական կապեր:*

Նշված տրամաբանական կապերն օգտագործվում են նաև բուլյան վեկտորների նկատմամբ գործողություններ սահմանելու համար: Մասնավորապես, սահմանվում են՝

$$\widetilde{\alpha}^n \oplus \widetilde{\beta}^n = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, ..., \alpha_n \oplus \beta_n),$$

$$\widetilde{\alpha}^n \& \widetilde{\beta}^n = (\alpha_1 \& \beta_1, \alpha_2 \& \beta_2, ..., \alpha_n \& \beta_n),$$

և այլ գործողություններ բուլյան վեկտորների միջև:

Դիտարկենք փոփոխականների $X = \{x_1, x_2, ... x_n, ...\}$ բազմությունը: Փոփոխականների X բազմության և տարրական բուլյան ֆունկցիաների բազմության համար սահմանվում է «բանաձևի» գաղափարը մակածման եղանակով, այն է՝

1. ցանկացած $x_i \in X$ բանաձև է, հաստատուն 0, 1 բուլյան ֆունկցիաները բանաձևեր են,

2. եթե A -ն, B -ն բանաձևեր են, ապա հետևյալ արտահայտությունները նույնպես բանաձևեր են.

$(\overline{A})$, $(A*B)$, որտեղ $*$ -ը վերը նշված տրամաբանական կապերից որևէ մեկն է,

3. այլ բանաձևեր չկան:

Եթե $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ֆունկցիայի որևէ փոփոխականի փոխարեն տեղադրվում է որևէ ֆունկցիա, ապա այդ գործողությունն անվանում են տեղադրություն կամ սուպերպոզիցիա: Դժվար չէ տեսնել, որ բանաձևի սահմանման մեջ 2-րդ՝ հիմնական կետը, որը բանաձևի կառուցման հիմնական եղանակն է, հենց տեղադրությունն է:

Ասում են, որ բանաձևը իրացնում է բուլյան ֆունկցիա հետևյալ սկզբունքով.

1. Ցանկացած $x_i \in X$ տեսքի բանաձև իրացնում է նույնական x_i ֆունկցիան:

2. Հաստատուն 0, 1-ը՝ որպես բանաձևեր, իրացնում են հենց համապատասխան հաստատուն բուլյան ֆունկցիաները:

3. Եթե A -ն և B -ն բանաձևեր են, որոնք իրացնում են համապատասխանաբար f_1 , f_2 ֆունկցիաները, ապա $(\overline{A})$, $(A*B)$ բանաձևերը իրացնում են, համապատասխանաբար $\overline{f}_1$ $f_1 * f_2$ ֆունկցիաները, որտեղ $*$ -ը վերը նշված տրամաբանական կապերից որևէ մեկն է:

Ասում են, որ $*$ տրամաբանական կապն ունի.

ա) իդեմպոտենտության հատկություն, եթե

$$(A*A) = A ,$$

բ) կոմուտատիվության հատկություն, եթե

$$(A*B)=(B*A)\ ,$$

գ) ասոցիատիվության հատկություն, եթե

$$((A*B)*C)=(A*(B*C)):$$

Բանաձևում փակագծերի առատությունից խուսափելու նպատակով մտցվում են որոշ պայմանավորվածություններ: Նախ, պայմանավորվում են բաց թողնել բանաձևի արտաքին փակագծերը: Երկրորդ, տրամաբանական կապերի միջև սահմանվում է առաջնահերթություն: Առաջնային է ժխտում կապը, այնուհետ՝ կոնյունկցիան, հետո՝ դիզյունկցիան, հետո՝ մյուսները: Փակագծերը բաց են թողնվում նաև այն դեպքերում, երբ բանաձևում ձախից աջ նույն առաջնահերթության կապեր են:

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ ֆունկցիայի x_k փոփոխականը կոչվում է *էական փոփոխական*, եթե գոյություն ունեն $\widetilde{\alpha}^n=(\alpha_1,...,\alpha_{k-1},0,\alpha_{k+1},...,\alpha_n)$ և $\widetilde{\beta}^n=(\alpha_1,...,\alpha_{k-1},1,\alpha_{k+1},...,\alpha_n)$ վեկտորներ, այնպես, որ

$f(\widetilde{\alpha}^n)\neq f(\widetilde{\beta}^n)$: Հակառակ դեպքում x_k -ը կոչվում է *կեղծ* (*ոչ էական*): $f(\widetilde{x}^n)$ և $g(\widetilde{y}^m)$ ֆունկցիաները կոչվում են հավասար, եթե դրանցից մեկը ստացվում է մյուսից կեղծ փոփոխականներ ավելացնելով կամ հեռացնելով:

Սահմանենք մի քանի հայտնի բուլյան ֆունկցիաներ:

$f(\widetilde{x}^n)$ -ը կանվանենք ***շղթայական ֆունկցիա***, եթե $N_f=\{\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,...,\widetilde{\alpha}_{m+1}\}$, որտեղ $\rho(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{i+1})=1$, $i=\overline{1,m}$ և $\rho(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_j)>1$, երբ $i+1\neq j$:

$f(\widetilde{x}^n)$ -ը կանվանենք ***ցիկլիկ ֆունկցիա***, եթե $N_f = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, ..., \widetilde{\alpha}_{2m}\}$, որտեղ $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, $i = \overline{1, 2m-1}$, $\rho(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_{2m}) = 1$ և $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) > 1$ մնացած i, j -երի համար:

$f(\widetilde{x}^n)$ -ը կանվանենք ***գոտկային ֆունկցիա***, եթե $N_f = \bigcup_{i=k}^{m} B_i^n$, և այն կնշանակենք $S^{k,m}(\widetilde{x}^n)$ -ով:

$S^{k,k}(\widetilde{x}^n)$ -ն կանվանենք ***տարրական սիմետրիկ ֆունկցիա***:

Ցանկացած $i_1, i_2, ..., i_l$ ոչ բացասական ամբողջ թվերի համար, որոնք բավարարում են $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_l \le n$ պայմանին, $S^{i_1,i_1}(\widetilde{x}^n) \vee S^{i_2,i_2}(\widetilde{x}^n) \vee ... \vee S^{i_l,i_l}(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիան կանվանենք ***սիմետրիկ ֆունկցիա***:

Ընդունված է հետևյալ նշանակումը.

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{եթե } \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \text{եթե } \sigma = 0 : \end{cases}$$

Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը, որը կոչվում է բուլյան ֆունկցիայի վերլուծություն՝ ըստ առաջին k փոփոխականների.

$$f(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) =$$

$$\bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k) \in B^k} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, ... x_k^{\sigma_k} \,\&\, f(\sigma_1, ... \sigma_k, x_{k+1}, ... x_n) :$$

Երբ $k = n$, ունենում ենք՝

$$f(x_1,...,x_n)=\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...\sigma_n)\in N_f} x_1^{\sigma_1}\,\&\,x_2^{\sigma_2}\,\&\ldots\&\,x_n^{\sigma_n}\ :$$

Այս ներկայացումը կոչվում է բուլյան ֆունկցիայի *կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձև* (կատարյալ ԴՆՁ): Այս բանաձևով կարող է ներկայացվել ցանկացած բուլյան ֆունցիա, որը նույնաբար 0 չէ:

Ցանկացած բուլյան ֆունցիա, որը հաստատուն 1 չէ, կարող է ներկայացվել

$$f(x_1,...,x_n)=\mathop{\&}_{(\sigma_1,\sigma_2,...\sigma_n)\notin N_f}(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee x_2^{\bar{\sigma}_2}\vee\ldots\vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$

բանաձևով, որը կոչվում է բուլյան ֆունկցիայի *կատարյալ կոնյունկտիվ նորմալ ձև* (կատարյալ ԿՆՁ):

Ցանկացած բուլյան ֆունցիա կարող է ներկայացվել նաև

$$f(x_1,...,x_n)=\bigoplus_{\substack{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n\\ \{i_1,i_2,...,i_k\}\subseteq\{1,2,...,n\}}} c_{i_1i_2...i_k}\,\&\,x_{i_1}\,\&\,x_{i_2}\,\&\ldots\&\,x_{i_k}\oplus c_0$$

բանաձևով, որտեղ c_0 և $c_{i_1i_2...i_k}$ գործակիցները {0,1} բազմությունից են: Այս բանաձևը կոչվում է *Ժեգալկինի բազմանդամ*: Առավելագույն k -ն, որի համար $c_{i_1i_2...i_k}=1$ կոչվում է *Ժեգալկինի բազմանդամի աստիճան*:

1. ԲՈՒԼՅԱՆ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ, n - ՉԱՓԱՆԻ ՄԻԱՎՈՐ ԽՈՐԱՆԱՐԴ

1.1 Գտնել՝

1) (1010), (10101), (111000) վեկտորների համարները,

2) B^{10} բազմության 1, 11, 111 համարների վեկտորները,

3) B_1^n բազմության վեկտորների համարները,

4) B_k^n բազմության այն $\widetilde{\alpha}$ վեկտորների քանակը, որոնց համար $2^{n-1} \le \nu(\widetilde{\alpha}) \le 2^n$, $n \ge 1$:

1.2 Գտնել հետևյալ բազմությունների տարրերի քանակը.

1) $\{\widetilde{\beta} \mid \widetilde{\beta} \in B^n\}$,

2) $\{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B^n, \|\tilde{\beta}\| = k, k = 0,1,\ldots,n\}$,

3) $\{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B^n, \|\tilde{\beta}\| \le k, k = 0,1,\ldots,n\}$,

4) $\{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B^n, 1 \le \|\tilde{\beta}\| \le k\}$, որտեղ $0 \le l \le k \le n$,

5) $\{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B^n, \beta_1 \le \beta_2 \le \ldots \le \beta_n\}$:

1.3 Ցույց տալ, որ B^n բազմության $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ վեկտորները հակադիր են միայն այն դեպքում, երբ $\nu(\widetilde{\alpha}) + \nu(\widetilde{\beta}) = 2^n - 1$:

1.4 Ցույց տալ, որ B^n բազմության կամայական $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ և $\widetilde{\gamma}$ վեկտորների համար՝

1) $0 \le \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \le n$,

2) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 0$ միայն այն դեպքում, երբ $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}$,

3) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = n$ միայն այն դեպքում, երբ $\widetilde{\alpha}$ և $\widetilde{\beta}$ վեկտորները հակադիր են,

4) $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\alpha})$,

5) $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta}) \geq \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$,

6) $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\gamma},\widetilde{\beta} \oplus \widetilde{\gamma})$,

7) $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \left\|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}\right\|$,

8) $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \left\|\widetilde{\alpha}\right\| + \left\|\widetilde{\beta}\right\| - 2\left\|\widetilde{\alpha} \,\&\, \widetilde{\beta}\right\|$ ։

1.5 Գտնել n -չափանի միավոր խորանարդի՝

1) բոլոր կողերի քանակը,

2) այն կողերի քանակը, որոնք միացնում են B_k^n և B_{k+1}^n շերտերի վեկտորները $(k = 0,1,\ldots,n)$ ։

1.6 Գտնել B^n բազմության հետևյալ ենթաբազմությունների տարրերի քանակը.

1) $\{\widetilde{\beta} \mid \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = r\}$, որտեղ $\widetilde{\alpha} \in B^n$ որևէ տրված վեկտոր է,

2) $\{\widetilde{\beta} \mid \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \leq r\}$, որտեղ $\widetilde{\alpha} \in B^n$ որևէ տրված վեկտոր է,

3) $\{\widetilde{\gamma} \mid \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta}) = m\}$, որտեղ $\widetilde{\alpha} \in B^n$, $\widetilde{\beta} \in B^n$ տրված վեկտորներ են, և $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = m$,

4) $\{\widetilde{\gamma} \mid \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta}) = m+1\}$, որտեղ $\widetilde{\alpha} \in B^n$, $\widetilde{\beta} \in B^n$ տրված վեկտորներ են, և $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = m$,

5) $\{\widetilde{\gamma} \mid \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta}) = m+2\}$, որտեղ $\widetilde{\alpha} \in B^n$, $\widetilde{\beta} \in B^n$ տրված վեկտորներ են, և $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = m$ ։

1.7 Դիցուք, $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$: Գտնել հետևյալ բազմությունների տարրերի քանակը.

1) $\{\widetilde{\beta} \mid \widetilde{\beta} \in B_{k-1}^n,\ 1 \le k \le n,\ \ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 3\}$,

2) $\{\widetilde{\beta} \mid \widetilde{\beta} \in B_{k+1}^n,\ 0 \le k \le n-1,\ \ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 3\}$,

3) $\{\widetilde{\beta} \mid \widetilde{\beta} \in B_{k-1}^n,\ 1 \le k \le n,\ \ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \le 3\}$,

4) $\{\widetilde{\beta} \mid \widetilde{\beta} \in B_{k-2}^n,\ 2 \le k \le n,\ \ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 4\}$,

5) $\{\widetilde{\beta} \mid \widetilde{\beta} \in B_{k+2}^n,\ 0 \le k \le n-2,\ \ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \le 4\}$:

1.8 Դիցուք, $\widetilde{\alpha} \in B^n$, $\widetilde{\beta} \in B^n$ տրված վեկտորներ են, այնպիսին, որ $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = m$: Գտնել B^n բազմության հետևյալ ենթաբազմությունների տարրերի քանակը.

1) $\{\widetilde{\gamma} \mid \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = r,\ \ \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}) = k\}$,

2) $\{\widetilde{\gamma} \mid \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = r,\ \ \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}) \le k\}$,

3) $\{\widetilde{\gamma} \mid \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \le r,\ \ \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}) \le k\}$:

1.9 Գտնել B^n բազմության զույգ առ զույգ հակադիր վեկտորների առավելագույն քանակը:

1.10 Գտնել B_k^n բազմության զույգ առ զույգ ոչ հակադիր վեկտորների առավելագույն քանակը:

1.11 n -ի և k -ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում B_k^n բազմությունը չի պարունակի հակադիր վեկտորներ:

1.12 Գտնել B^n բազմության $\tilde{\alpha}$ և $\tilde{\beta}$ վեկտորներից կազմված բոլոր չկարգավորված $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ զույգերի քանակը, որոնց համար՝

1) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = r$,

2) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$ և $\left|\nu(\tilde{\alpha}) - \nu(\tilde{\beta})\right| = 1$,

3) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$ և $\left|\nu(\tilde{\alpha}) - \nu(\tilde{\beta})\right| = 2$:

1.13 Գտնել՝

1) $\max\limits_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B_k^n} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ 3) $\min\limits_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B_k^n} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$

2) $\max\limits_{\tilde{\alpha} \in B_k^n, \tilde{\beta} \in B_{k+1}^n} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ 4) $\min\limits_{\tilde{\alpha} \in B_k^n, \tilde{\beta} \in B_{k+1}^n} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$

1.14 Գտնել B^n բազմության այն ենթաբազմությունների քանակը, որոնք՝

1) չեն պարունակում միևնույն կշիռ ունեցող վեկտորներ;
2) չեն պարունակում հակադիր վեկտորներ;
3) պարունակում են ճիշտ k հատ հակադիր վեկտորների զույգեր:

1.15 Դիցուք, $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ և $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = m$: Գտնել B^n բազմության այն $\tilde{\gamma}$ վեկտորների քանակը, որ $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\gamma} \preceq \tilde{\beta}$:

1.16 Դիցուք, $\tilde{\alpha} \in B_k^n$: Գտնել հետևյալ բազմությունների տարրերի քանակը.

1) $\{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B_m^n, \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}\}$, որտեղ $k \le m$,

2) $\{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B^{n}_{m}, \tilde{\beta} \preceq \tilde{\alpha}\}$, որտեղ $k \geq m$,

3) $\{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B^{n}, \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}\} \cup \{\tilde{\beta} \mid \tilde{\beta} \in B^{n}, \tilde{\beta} \preceq \tilde{\alpha}\}$:

1.17 Գտնել բոլոր $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, ..., \widetilde{\alpha}_n$ հաջորդականությունների քանակը, որտեղ $\widetilde{\alpha}_k \in B^n_k, k = \overline{0,n}$, և որոնց համար $\widetilde{\alpha}_0 \prec \widetilde{\alpha}_1 \prec \widetilde{\alpha}_2 \prec ... \prec \widetilde{\alpha}_n$:

1.18 Գտնել 1.17 խնդրի հաջորդականություններից այնպիսիների քանակը, որոնք պարունակում են տրված $\widetilde{\alpha}_k \in B^n_k$ վեկտորը:

1.19 Դիցուք, $\widetilde{\alpha} \in B^n_k$, $\widetilde{\beta} \in B^n_m$ տրված վեկտորներ են, $(k < m)$ և $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = r$: Գտնել B^n բազմության այն վեկտորների քանակը, որոնք՝

1) համեմատելի են $\widetilde{\alpha}$ -ի և $\widetilde{\beta}$ -ի հետ, եթե $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$;
2) համեմատելի են $\widetilde{\alpha}$ -ի և $\widetilde{\beta}$ -ի հետ, եթե $\widetilde{\alpha}$ -ն և $\widetilde{\beta}$ -ն անհամեմատելի են:

1.20 Դիցուք, $\widetilde{\alpha} \in B^n_k$, $\widetilde{\beta} \in B^n_m$ տրված վեկտորներ են և $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = r$: Գտնել հետևյալ բազմությունների տարրերի քանակը.

1) $\{i \mid \alpha_i = \beta_i = 1\}$,
2) $\{i \mid \alpha_i = \beta_i = 0\}$,
3) $\{i \mid \alpha_i = 0, \beta_i = 1\}$,
4) $\{i \mid \alpha_i = 1, \beta_i = 0\}$:

1.21 Դիցուք, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^{3m}$ և $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$=2m: Գտնել B^{3m}-ի այն $\widetilde{\gamma}$ վեկտորների քանակը, որ $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta}) = 2m$:

1.22 Դիցուք, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^{4m}$ և $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$=2m: Գտնել B^{4m}-ի այն $\widetilde{\gamma}$ վեկտորների քանակը, որ $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta}) = 2m$:

2. ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿԱՅԻՆ, ՎԵԿՏՈՐԱՅԻՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐԸ

2.1 Պարզել՝ կարող են արդյոք հետևյալ վեկտորները լինել որևէ բուլյան ֆունկցիայի վեկտորային ներկայացում.

1) $\widetilde{\alpha} = (000000)$,
2) $\widetilde{\alpha} = (0000111100\ 00)$:

2.2 Կառուցել $f(\widetilde{x}^3)$ ֆունկցիայի աղյուսակը, եթե հայտնի է, որ այն 1 արժեք է ընդունում միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = 1$ կամ երբ $x_1 < x_2$ և $x_2 \neq x_3$:

2.3 Կառուցել $f(\widetilde{x}^4)$ ֆունկցիայի աղյուսակը, եթե հայտնի է, որ այն 0 արժեք է ընդունում միայն այն դեպքում, երբ $2x_1 + x_2 > x_3 + 2x_4$:

2.4 Գտնել n փոփոխականից կախված բուլյան ֆունկցիաների քանակը, որոնք.

1) ցանկացած հարևան վեկտորների վրա ընդունում են նույն արժեքը,
2) ցանկացած հարևան վեկտորների վրա ընդունում են տարբեր արժեքներ,
3) ոչ բոլոր հարևան վեկտորների վրա են ընդունում նույն արժեքը,
4) առնվազն երկու հարևան վեկտորների վրա ընդունում են նույն արժեքը,
5) ցանկացած հաջորդական համարներ ունեցող վեկտոր-ների վրա ընդունում են նույն արժեքը,

6) ցանկացած հաջորդական համարներ ունեցող վեկտոր-ների վրա ընդունում են տարբեր արժեքներ,
7) ոչ բոլոր հաջորդական համարներ ունեցող վեկտոր-ների վրա են ընդունում նույն արժեքը,
8) ընդունում են նույն արժեքը առնվազն երկու հաջորդա-կան համարներ ունեցող վեկտորների վրա:

2.5 Գտնել n փոփոխականից կախված բուլյան ֆունկցիաների քանակը, որոնք.

1) հակադիր վեկտորների վրա ընդունում են նույն ար-ժեքը,
2) ճիշտ k հատ վեկտորների վրա ընդունում են 1 արժեք,
3) ընդունում են 1 արժեք k-ից ոչ ավել վեկտորների վրա,
4) ընդունում են 1 արժեք նույն կշիռն ունեցող վեկտորնե-րից միայն մեկի վրա,
5) ընդունում են նույն արժեքը կենտ կշռով վեկտորների վրա,
6) ընդունում են նույն արժեքը նույն կշիռն ունեցող բոլոր վեկտորների վրա (սիմետրիկ են),
7) ընդունում են 1 արժեք բոլոր այն $\widetilde{\alpha}$ վեկտորների վրա, որոնց համար՝ $k \le \|\widetilde{\alpha}\| \le s$, որտեղ $0 \le k < s \le n$:

2.6 Գտնել n փոփոխականից կախված բուլյան ֆունկցիաների քանակը, որոնք ցանկացած $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in B^n$-ի համար բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

1) $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n) = f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, ..., \alpha_n)$,
2) $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$,
3) $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1 \cdot \alpha_2, \alpha_1 \cdot \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$:

2.7 Գտնել 2n փոփոխականից կախված բուլյան ֆունկցիանե-րի քանակը, որոնք ցանկացած $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}) \in B^{2n}$ -ի համար բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } \|\tilde{\alpha}\| > \mathrm{n}, \\ 0, & \text{եթե } \|\tilde{\alpha}\| < n : \end{cases}$$

2.8 Գտնել $f(\tilde{x}^n)$ բուլյան ֆունկցիաների քանակը, որոնց 1-երի կետերը բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

1) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = k$,

2) $x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^n x_n = 0$:

3 ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ: ՏԵՂԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆ: ԲԱՆԱՁԵՎԱՅԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐ

3.1 Պարզել՝ հետևյալ տարրական ֆունկցիաներից որոնք ունեն կոմուտատիվության, ասոցիատիվության, իդեմպոտենտության հատկություններ.

$$x \& y,\ x \vee y,\ x \to y,\ x \oplus y,\ x \equiv y,\ x \uparrow y,\ x \downarrow y:$$

3.2 Համարժե՞ք են արդյոք հետևյալ բանաձևերը.

1) $x_1 \vee x_2$ և $(x_1 \to x_2) \to x_2$,

2) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$ և $(x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)$,

3) $(x_1 \downarrow x_2) \to ((x_2 \oplus (x_1 \vee x_3)) \uparrow x_3)$ և

$(x_1 \vee x_2) \equiv (x_1 \to (x_2 \oplus (x_1 x_3)))$,

4) $x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_2 x_3)$ և

$(x_1 \vee (x_2 \to x_3))(x_1 \oplus x_2$,

5) $x_1 \vee \bar{x}_2) \downarrow (\bar{x}_1 \to (x_2 \to x_3)$ և $\overline{x_2 \to (x_1 \vee x_3)}$:

3.3 Ապացուցել հետևյալ բանաձևերի համարժեքությունը՝ կիրառելով տարրական ֆունկցիաների համարժեք ձևափոխություններ .

1) $x \equiv y$ և $(x \to y)(y \to x)$,

2) $x \downarrow y$ և $((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)) \uparrow (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y))$,

3) $x \vee (y \equiv z)$ և $(x \vee y) \equiv (x \vee z)$,

4) $x(y \equiv z)$ և $(xy \equiv xz) \equiv x$,

5) $x \to (y \equiv z)$ և $(x \to y) \equiv (x \to z)$,

6) $x \vee (y \to z)$ և $(x \vee y) \to (x \vee z)$,

7) $x(y \to z)$ և $(x \to y) \to xz$,

8) $x \to (y \vee z)$ և $(x \to y) \vee (x \to z)$,

9) $x \to yz$ և $(x \to y)(x \to z)$,

10) $x \to (y \to z)$ և $(x \to y) \to (x \to z)$ ։

3.4 Փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով $\{0, 1, x\}$ բազմության ֆունկցիաներ, հետևյալ ֆունկցիաներից ստանալ x ֆունկցիան.

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$,

2) $\widetilde{\alpha}_f = (10110111)$ ։

3.5 $f(x_1, x_2) = (0100)$ և $g(x_1, x_2) = (1101)$ ֆունկցիաների վեկտորային ներկայացումների միջոցով կառուցել $h(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_2, x_1))$ ֆունկցիայի արժեքների վեկտորը։

3.6 Դիցուք, $\widetilde{\alpha}_f = (10111010)$, $\widetilde{\alpha}_g = (01110010)$ և $\widetilde{\alpha}_h = (11110101)$ ։ Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների արժեքների վեկտորները.

1) $f(x_2, x_3, x_1)$,

2) $f(x_1, g(x_1, x_2, x_3), x_3)$,

3) $f(x_3, g(x_1, x_2, x_1), h(x_1, x_2, x_3))$,

4) $g(x_2, h(x_1, x_1, x_1), f(x_1, x_2, g(x_1, x_2, x_1)))$ ։

3.7 Արտահայտել $f(x, y)$ ֆունկցիան A դասի ֆունկցիաների միջոցով.

1) $f(x, y) = x \to y$, $A = \{\neg, \vee\}$,

2) $f(x, y) = x \vee y$, $A = \{\to\}$,

3) $f(x, y) = x \equiv y$, $A = \{\&, \to\}$,

4) $f(x,y) = x \uparrow y$, $A = \{\downarrow\}$:

3.8 Ցույց տալ, որ $f(x) = \overline{x}$ ֆունկցիան հնարավոր չէ արտահայտել $\{\&, \vee, \to, \equiv\}$ դասի ֆունկցիաների միջոցով:

3.9 Ցույց տալ, որ $f(x,y)$ ֆունկցիան հնարավոր չէ արտահայտել A դասի ֆունկցիաների միջոցով.

1) $f(x,y) = x \oplus y$, $A = \{\&\}$,
2) $f(x,y) = x \vee y$, $A = \{\equiv\}$,
3) $f(x,y) = x \,\&\, y$, $A = \{\vee, \to\}$,
4) $f(x,y) = x \to y$, $A = \{\&, \vee\}$:

3.10 Դիցուք, բուլյան ֆունկցիայի բանաձևը պարունակում է միայն համարժեքություն տարրական ֆունկցիան: Ապացուցել, որ այդ ֆունկցիան հաստատուն 1 է միայն այն դեպքում, երբ բանաձևում յուրաքանչյուր փոփոխական գրված է զույգ անգամ:

3.11 Դիցուք, բուլյան ֆունկցիայի բանաձևը պարունակում է միայն համարժեքություն և ժխտում տարրական ֆունկցիաները: Ապացուցել, որ այդ ֆունկցիան հաստատուն 1 է միայն այն դեպքում, երբ բանաձևում յուրաքանչյուր փոփոխական գրված է զույգ անգամ, և ժխտման նշանների քանակը զույգ է:

3.12 Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների 1-երի քանակը.

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to \ldots \to (x_{n-1} \to x_n)\ldots))$,
2) $f(\widetilde{x}^n) = (\ldots((x_1 \to x_2) \to x_3) \to \ldots) \to x_n$,
3) $f(\widetilde{x}^n) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n$,
4) $f(\widetilde{x}^n) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$,

5) $f(\tilde{x}^{2k}) = x_1x_2 \oplus x_3x_4 \oplus \ldots \oplus x_{2k-1}x_{2k}$,

6) $f(\tilde{x}^{2k+1}) = x_1x_2 \oplus x_3x_4 \oplus \ldots \oplus x_{2k-1}x_{2k} \oplus x_{2k+1}$,

7) $f(\tilde{x}^{n}) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \ldots \vee x_{n-1}x_n$,

8) $f(\tilde{x}^{n}) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \ldots \vee x_{n-1}x_n \vee x_nx_1$,

9) $f(\tilde{x}^{2k}) = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee \ldots \vee x_{2k-1}x_{2k}$,

10) $f(\tilde{x}^{2k}) = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)\ldots(x_{2k-1} \vee x_{2k})$,

11) $f(\tilde{x}^{2k+1}) = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee \ldots \vee x_{2k-1}x_{2k} \vee x_{2k+1}$,

12) $f(\tilde{x}^{2k}) = (x_1 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_{2k-1})(x_2 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_{2k})$,

13) $f(\tilde{x}^{2k}) = (x_1 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_{2k-1}) \vee (x_2 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_{2k})$,

14) $f(\tilde{x}^{2k}) = (x_1 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_{2k-1}) \rightarrow (x_2 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_{2k})$,

15) $f(\tilde{x}^{2k}) = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus x_4)\ldots(x_{2k-1} \oplus x_{2k})$,

16) $f(\tilde{x}^{2k}) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_3 \oplus x_4) \vee \ldots \vee (x_{2k-1} \oplus x_{2k})$,

17) $f(\tilde{x}^{n}) = (x_1 \oplus x_2)(x_2 \oplus x_3)\ldots(x_{n-1} \oplus x_n)$,

18) $f(\tilde{x}^{n}) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \oplus x_3) \vee \ldots \vee (x_{n-1} \oplus x_n)$:

4 ԷԱԿԱՆ ԵՎ ԿԵՂԾ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐ

4.1 Ապացուցել, որ x_1-ը կեղծ փոփոխական է f ֆունկցիայի համար՝ ներկայացնելով ֆունկցիան այնպիսի բանաձևով, որը x_1 չի պարունակում.

1) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \to x_1)(x_2 \downarrow x_2)$,

2) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3)\overline{x_3 \to x_2}$,

3) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2\overline{x_3}) \equiv (\overline{x_1} \to \overline{x_2}x_3))(x_2 \downarrow x_3)$,

4) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_4)) \equiv \overline{x_1}(x_2 \to x_3)\overline{x_4}$:

4.2 Պարզել՝ ստորև բերված ֆունկցիաների որ փոփոխականներն են էական, որոնք՝ կեղծ: Հեռացնելով կեղծ փոփոխականները՝ ստանալ միայն էական փոփոխականներից կախված համարժեք ֆունկցիաներ.

1) $\tilde{\alpha}_f = (1011101100100010)$,

2) $\tilde{\alpha}_f = (0101101001011010)$:

4.3 Դիցուք, $f(x_1, x_2) = (1010)$: Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների վեկտորային ներկայացումները.

1) $g(z, x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$,

2) $g(x_1, z, x_2) = f(x_1, x_2)$,

3) $g(x_1, x_2, z) = f(x_1, x_2)$:

4.4 Կեղծ փոփոխականների հեռացման միջոցով պարզել՝ հավասար են արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները.

1) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$ և $\tilde{\alpha}_g = (11001011)$,

2) $\tilde{\alpha}_f = (0110)$ և $\tilde{\alpha}_g = (0110110111100011)$:

4.5 Ապացուցել, որ եթե $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիան ունի k հատ ոչ էական փոփոխական, ապա նրա 1-երի կետերի քանակը՝ $|N_f|$ բաժանվում է 2^k-ի: Ճի՞շտ է արդյոք հակառակ պնդումը:

4.6 Գտնել ճիշտ k հատ ոչ էական փոփոխական ունեցող $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը:

4.7 Ապացուցել, որ եթե $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիայի իսկության վեկտորի մեկ կոորդինատը 0 է, իսկ մնացածը՝ 1, կամ մի կոորդինատը՝ 1, իսկ մնացածը՝ 0, ապա այդ ֆունկցիան էապես է կախված իր բոլոր փոփոխականներից:

4.8 Գտնել բոլոր $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնց բոլոր փոփոխականներն էական են:

4.9 Գտնել բոլոր $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնց բոլոր փոփոխականները կեղծ են:

4.10 Գտնել բոլոր $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնք ունեն ճիշտ մեկ կեղծ փոփոխական:

4.11 Ապացուցել, որ ցանկացած հաստատունից տարբեր սիմետրիկ ֆունկցիա էապես կախված է իր բոլոր փոփոխականներից:

4.12 Պարզել՝ n -ի ($n \geq 2$) որ արժեքների դեպքում հետևյալ ֆունկցիաները էապես են կախված իրենց բոլոր փոփոխականներից.

1) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee ... \vee x_n) \to (x_1 \vee x_2)...(x_{n-1} \vee x_n)(x_n \vee x_1)$,

2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1} x_n \vee x_n x_1) \rightarrow (x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_n x_1)$,

3) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_3) \oplus \ldots . \oplus (x_{n-1} \vee x_n) \oplus (x_n \vee x_1)$,

4) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow \ldots . (x_{n-1} \rightarrow x_n) \ldots)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_n)(x_2 \rightarrow x_n) \ldots (x_{n-1} \rightarrow x_n)$,

5) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_1) \oplus (x_2 \rightarrow x_3)(x_3 \rightarrow x_2) \oplus \ldots . \oplus (x_n \rightarrow x_1)(x_1 \rightarrow x_n)$,

6) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_3) \ldots . (x_{n-1} \rightarrow x_n)(x_n \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1)$:

5 ՀԱՏՈՒԿ ՏԵՍՔԻ ԲԱՆԱՁԵՎԱՅԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐ. ԴԻԶՅՈՒՆԿՏԻՎ ՆՈՐՄԱԼ ՁԵՎ (ԴՆՁ), ԿՈՆՅՈՒՆԿՏԻՎ ՆՈՐՄԱԼ ՁԵՎ (ԿՆՁ), ԺԵԳԱԼԿԻՆԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄ

5.1 Հետևյալ ֆունկցիաները վերլուծել ըստ x_1 փոփոխականի.

1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \to \bar{x}_2$,

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)(x_2 \uparrow x_3)$,

3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \oplus x_3)$,

4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$,

5) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_1x_2x_3$:

5.2 5.1-ում բերված ֆունկցիաները վերլուծել ըստ x_1 և x_2 փոփոխականների:

5.3 Հիմնական տարրական ֆունկցիաները ներկայացնել կատարյալ ԴՆՁ և կատարյալ ԿՆՁ տեսքերով:

5.4 Հետևյալ ֆունկցիաները ներկայացնել կատարյալ ԴՆՁ և կատարյալ ԿՆՁ տեսքերով.

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$,

2) $\widetilde{\alpha}_f = (00010111)$,

3) $\widetilde{\alpha}_f = (0000111100100001)$:

5.5 Ստանալ ԴՆՁ-ով ներկայացում հետևյալ ֆունկցիաների համար՝ կատարելով բանաձևերի համարժեք ձևափոխություններ.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1x_3 \vee x_2)$,

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \downarrow x_3)$,

3) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{(x_1 \to x_2 x_3)} \oplus (x_1 \uparrow (x_2 \oplus x_3))$,

4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)(x_2 \uparrow x_3)$,

5) $f(\widetilde{x}^3) = (\bar{x}_1 x_2 \oplus x_3)(x_1 x_3 \to x_2)$,

6) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \to x_3) \to (x_2 \to x_4)$,

7) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \uparrow x_2) x_3 \downarrow (x_3 \vee x_4)$:

5.6 Գտնել այն $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնց համար կատարյալ ԿՆՁ-ն նաև ԴՆՁ է:

5.7 Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների կատարյալ ԴՆՁ-երի երկարությունը.

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus .... \oplus x_n$,

2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee ... \vee \bar{x}_n)$,

3) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3). \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus ... \oplus x_n$:

5.8 Գտնել այն $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնց կատարյալ ԴՆՁ-ում՝

1) յուրաքանչյուր տարրական կոնյունկցիա պարունակում է առնվազն 2 փոփոխականի ժխտում,
2) յուրաքանչյուր տարրական կոնյունկցիա պարունակում է զույգ թվով փոփոխականի ժխտումներ,
3) յուրաքանչյուր տարրական կոնյունկցիայում ժխտումով փոփոխականների քանակը չի գերազանցում առանց ժխտման փոփոխականների քանակը:

5.9 Հիմնական տարրական ֆունկցիաները ներկայացնել Ժեգալկինի բազմանդամով:

5.10 Հետևյալ ֆունկցիաները ներկայացնել Ժեգալկինի բազմանդամով՝ կիրառելով անորոշ գործակիցների մեթոդը.

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \uparrow x_2$,
2) $f(\tilde{x}^3) = x_1(x_2 \vee \bar{x}_3)$,
3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \to x_3)$,
4) $f(\tilde{x}^3) = (00000111)$,
5) $f(\tilde{x}^3) = (01101010)$,
6) $f(\tilde{x}^4) = (0000100010010000)$:

5.11 Հետևյալ ֆունկցիաները ներկայացնել Ժեգալկինի բազմանդամով՝ օգտվելով դրանց կատարյալ ԴՆՁ-ից.

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$,
2) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \to (\bar{x}_3 \to x_2)$,
3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$,
4) $f(\tilde{x}^3) = (11000011)$,
5) $f(\tilde{x}^4) = (0100000000010001)$,
6) $f(\tilde{x}^4) = (1010101010001000)$:

5.12 Հետևյալ ֆունկցիաները ներկայացնել Ժեգալկինի բազմանդամով՝ կատարելով համարժեք ձևափոխություններ.

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1(x_2 \equiv x_1\bar{x}_2)$,
2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3))((x_1 \to x_2) \to x_3))$,
3) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \downarrow x_3)$,
4) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)(x_2 \uparrow x_3)$,
5) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2) \uparrow (x_2 \downarrow x_3)$,
6) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to x_2) \to (x_3 \to x_3 x_4)$,

7) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_1x_2x_3$ ։

5.13 Գտնել Ժեգալկինի բազմանդամով տրված հետևյալ ֆունկցիաների 1-երի քանակը.

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus \ldots \oplus x_1x_n$, $(n \geq 2)$,

2) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n$, $(n \geq 3)$,

3) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_4 \ldots \oplus x_n$, $(n \geq 4)$,

4) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2x_3 \oplus x_4 \ldots \oplus x_n$, $(n \geq 4)$,

5) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \ldots x_k \oplus x_{k+1} \ldots x_n$, $(1 \leq k < n)$,

6) $f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots x_1x_2 \ldots .x_n$ ։

5.14 Ապացուցել, որ $f(\tilde{x}^n)$ բուլյան ֆունկցիայի համար x_i փոփոխականը էական է միայն այն դեպքում, երբ այն ներկայացված է նրա Ժեգալկինի բազմանդամում:

5.15 Գտնել բոլոր այն $f(\tilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը $(n \geq 3)$, որոնց Ժեգալկինի բազմանդամի աստիճանը՝

1) փոքր է կամ հավասար 3-ից,

2) հավասար է 3-ի,

3) հավասար է r-ի:

5.16 Գտնել բոլոր այն $f(\tilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնց Ժեգալկինի բազմանդամն ունի k երկարություն:

5.17 Գտնել բոլոր այն $f(\tilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնց Ժեգալկինի բազմանդամն ունի k երկարություն, և $f(00...0) = f(11...1) = 1$ ։

5.18 Գտնել բոլոր այն $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնց Ժեգալկինի բազմանդամի երկարությունը 2^n անգամ մեծ է նրա կատարյալ ԴՆՁ-ի երկարությունից $(n \geq 1)$:

5.19 Ապացուցել, որ եթե $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիայի Ժեգալկինի բազմանդամն ունի k>0 երկարություն, ապա այն 1 արժեք է ընդունում առնվազն 2^{n-k} վեկտորների վրա B^n-ից:

II. ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐ: ՓԱԿՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԼՐԻՎՈՒԹՅՈՒՆ

Հիմնական սահմանումներ, գաղափարներ, նշանակումներ

Բուլյան ֆունկցիաների H դասի *փակում* $[H]$ կոչվում է այդ դասի ֆունկցիաներից բոլոր հնարավոր տեղադրությունների միջոցով ստացվող բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը:

$H \subseteq P_2$ դասը կոչվում է *փակ*, եթե $[H] = H$:

$H \subseteq P_2$ դասը կոչվում է *լրիվ*, եթե $[H] = P_2$:

$H \subset P_2$ դասը կոչվում է *նախալրիվ*, եթե $[H] \neq P_2$, սակայն ցանկացած $f \notin H$ բուլյան ֆունկցիայի համար $[H \cup \{f\}] = P_2$:

$H \subset P_2$ դասը կոչվում է *բազիս* P_2 -ի համար, եթե $[H] = P_2$, սակայն ցանկացած $f \in H$ բուլյան ֆունկցիայի համար $[H \setminus \{f\}] \neq P_2$:

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ բուլյան ֆունկցիան կոչվում է *0-ն պահպանող*, եթե $f(0,0,...,0) = 0$: 0-ն պահպանող ֆունկցիաների դասը նշանակվում է T_0 -ով:

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ բուլյան ֆունկցիան կոչվում է *1-ը պահպանող*, եթե $f(1,1,...,1)=1$: 1-ը պահպանող ֆունկցիաների դասը նշանակվում է T_1 -ով:

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ բուլյան ֆունկցիայի *երկակի ֆունկցիա* կոչվում է $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)}$ ֆունկցիան:

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ բուլյան ֆունկցիան կոչվում է *ինքնաերկակի*, եթե $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$: Ինքնաերկակի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է S -ով:

Երկակիության սկզբունքը.

Ցանկացած $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_1(y_1, y_2, ..., y_k)$, $g_2(y_1, y_2, ... y_k)$, ... $g_n(y_1, y_2, ..., y_k)$ բուլյան ֆունկցիաների համար, եթե՝

$$\Phi(y_1, y_2, ..., y_k) = f(g_1(y_1, y_2, ..., y_k), g_2(y_1, y_2, ... y_k), ..., g_n(y_1, y_2, ..., y_k)),$$

ապա՝

$$\Phi^*(y_1, y_2, ..., y_k) = f^*(g_1^*(y_1, y_2, ..., y_k), g_2^*(y_1, y_2, ... y_k), ..., g_n^*(y_1, y_2, ..., y_k)):$$

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ բուլյան ֆունկցիան կոչվում է *գծային*, եթե նրան համապատասխանող Ժեգալկինի բազմանդամը ունի $f(\tilde{x}^n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \ldots \oplus c_n x_n$ տեսքը: Գծային ֆունկցիաների դասը նշանակվում է L -ով:

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ բուլյան ֆունկցիան կոչվում է *մոնոտոն*, եթե ցանկացած $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n$ հավաքածուների համար $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ պայմանից հետևում է, որ $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$: Մոնոտոն ֆունկցիաների դասը նշանակվում է M -ով:

Պոստի թեորեմը (լրիվության հայտանիշը).

$H \subseteq P_2$ դասը լրիվ է միայն այն դեպքում, եթե այն T_0, T_1, S, L, M դասերից ոչ մեկի ենթաբազմությունը չէ:

6 ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐԻ ՓԱԿՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԼՐԻՎՈՒԹՅՈՒՆ

6.1 Ապացուցել, որ բուլյան ֆունկցիաների ցանկացած A, B, C դասերի համար տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.

1) $A \subseteq [A]$,
2) $[[A]] = [A]$,
3) եթե $A \subseteq B$ ապա $[A] \subseteq [B]$,
4) եթե $B = [A]$ և $A \subseteq C$ ապա $B \subseteq [C]$,
5) եթե $A = [A]$ և $B = [B]$ ապա $A \cap B = [A \cap B]$,
6) եթե $A = [A]$ և $B = [B]$ ապա $A \cup B = [A \cup B]$,
7) $[A] \cup [B] \subseteq [A \cup B]$:

6.2 Ապացուցել, որ P_2-ի ցանկացած փակ դաս, որը պարունակում է հաստատունից տարբեր ֆունկցիա, պարունակում է նաև նույնական ֆունկցիան:

6.3 Դիցուք, $* \in \{\cup, \cap, \setminus, \Delta\}$: Պարզել, թե* գործողության որ արժեքների դեպքում $T_0 * S$ դասը կլինի փակ:

6.4 Դիցուք, $A \subseteq B \subseteq S$ և $[A \cup \{1\}] = [B \cup \{1\}]$: Ապացուցել, որ այդ դեպքում՝ $[A] = [B]$:

6.5 Պարզել՝ փակ են արդյոք բուլյան ֆունկցիաների հետևյալ դասերը.

1) մեկ փոփոխականի բոլոր բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը,

2) երկու փոփոխականի բոլոր բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը,
3) բոլոր սիմետրիկ ֆունկցիաների բազմությունը,
4) բոլոր այն n փոփոխականի ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց Ժեգալկինի բազմանդամի աստիճանը չի գերազանցում 1-ը,
5) բոլոր այն n փոփոխականների ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց Ժեգալկինի բազմանդամի աստիճանը չի գերազանցում 2-ը:

6.6 Ցույց տալ, որ $f \in [A]$, արտահայտելով՝ f-ը A-ի բանաձևերով.

1) $f = \bar{x}$, $A = \{0, x \to y\}$,
2) $f = x \oplus y$, $A = \{x \downarrow y\}$,
3) $f = x$, $A = \{x \oplus y\}$,
4) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{x \equiv y\}$,
5) $f = 0$, $A = \{xy \oplus z\}$,
6) $f = x$, $A = \{xy\}$,
7) $f = x \vee y$, $A = \{\bar{x} \vee \bar{y}\}$,
8) $f = x$, $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$,
9) $f = xy$, $A = \{xy \oplus z\}$,
10) $f = xyz \vee t(x \vee y \vee z)$, $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$,
11) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{\bar{x}, xy \vee yz \vee zx\}$,
12) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}x\}$,
13) $f = x \oplus y$, $A = \{x\bar{y}, x \vee \bar{y}\}$,
14) $f = x \vee y$, $A = \{x \to y\}$,
15) $f = xy$, $A = \{x \vee y, x \oplus y\}$:

6.7 Պարզել՝ արդյոք $f \in [A]$.

1) $f = x \to y$, $A = \{\bar{x}, x \equiv y, x \oplus y \oplus z, 0, 1\}$,

2) $f = x \oplus y$, $A = \{\overline{x}, x \oplus y \oplus z, xy \vee yz \vee xz\}$,

3) $f = x \equiv y$, $A = \{x \oplus y \oplus z, x \vee y \vee z\}$,

4) $f = xy$, $A = \{x \vee y, x \oplus y\}$,

5) $f = (01010111)$, $A = \{0, 1, xy, x \vee y\}$:

6.8 Նկարագրել $[A]$ դասի ֆունկցիաները.

1) $A = \{\overline{x}, xy\}$,

2) $A = \{\overline{x}, x \vee y\}$,

3) $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$,

4) $A = \{x \uparrow y\}$,

5) $A = \{x \oplus y, 1\}$,

6) $A = \{x \oplus y \oplus z, 1\}$,

7) $A = \{x \oplus y, xy, 1\}$,

8) $A = \{x \to y, x \oplus y\}$,

9) $A = \{x \to y, \overline{x}\}$,

10) $A = \{x \oplus y, xyz\}$,

11) $A = \{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$,

12) $A = \{x \vee y, x \equiv y\}$,

13) $A = \{x \vee y, xy\}$,

14) $A = \{f / f \in P_2, f(\widetilde{0}) \geq f(\widetilde{1})\}$:

6.9 Գտնել n փոփոխականից կախված բուլյան ֆունկցիաների քանակը, որոնք պատկանում են հետևյալ դասերին.

1) $[\{x_1\}]$,

2) $[\{\overline{x}_1\}]$,

3) $[\{x_1 \& x_2\}]$,

4) $[\{x_1 \vee x_2\}]$,

5) $[\{x_1 \oplus x_2\}]$,

6) $[\{x_1 \uparrow x_2\}]$,

7) $\left[\{x_1 \equiv x_2\}\right]$,

8) $\left[\overline{\{x_1 \vee x_2\}}\right]$:

6.10 Ապացուցել, որ.

1) $\left[\{x_1 \vee x_2\}\right] \cap \left[\{x_1 \,\&\, x_2\}\right] = [\{x_1\}]$,

2) $[\{x_1\}] \subseteq \left[\{x_1 \vee x_2\}\right] \subseteq \left[\{x_1 \to x_2\}\right]$,

3) $\left[\{x_1 \,\&\, x_2\}\right] \not\subset [\{x_1 \to x_2\}]$,

4) $[\{x_1 \to x_2\}] \not\subset \left[\{x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}\right]$:

7 ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԸ ՊԱՀՊԱՆՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

7.1 Ապացուցել, որ հաստատունը պահպանող ֆունկցիաների դասերը փակ են:

7.2 Պարզել՝ պատկանում են արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները $T_0 \setminus T_1$ բազմությանը.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_1)$,

2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \vee x_1$:

7.3 Պարզել՝ որ n-երի դեպքում են հետևյալ ֆունկցիաները պատկանում $T_0 \setminus T_1$ բազմությանը.

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$,

2) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$:

7.4 Ապացուցել, որ.

1) $\left[\{x_1 \,\&\, x_2\}\right] \subseteq T_0$,

2) $\left[\{x_1 \,\&\, x_2\}\right] \subseteq T_1$:

7.5 Ապացուցել, որ.

1) $\left[\{x \vee y, x \oplus y\}\right] = T_0$,

2) $\left[\{xy \oplus z \oplus t\}\right] = T_0 \cap T_1$:

8 ԻՆՔՆԱԵՐԿԱԿԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

8.1 Ապացուցել, որ ցանկացած f բուլյան ֆունկցիայի համար $(f^*)^* = f$:

8.2 Ապացուցել երկակիության սկզբունքը.
Եթե $h(\tilde{y}^k) = f(g_1(\tilde{y}^k),\dots g_n(\tilde{y}^k))$, ապա
$h^*(\tilde{y}^k) = f^*(g_1{}^*(\tilde{y}^k),\dots g_n{}^*(\tilde{y}^k))$:

8.3 Ապացուցել, որ ինքնաերկակի ֆունկցիաների դասը փակ է:

8.4 Ապացուցել, որ եթե $A \subseteq B \subseteq S$ և $[A \cup \{1\}] = [B \cup \{1\}]$, ապա $[A] = [B]$;

8.5 Օգտվելով երկակիության սկզբունքից՝ ներկայացնել f^*-ը բանաձևային տեսքով, եթե f -ը ներկայացվում է՝ $f(\tilde{x}^3) = (x_1\bar{x}_2 \vee x_3)(x_2 \oplus (x_1 \uparrow x_3))$ տեսքով:

8.6 Թվարկել երկու փոփոխականից կախված բոլոր ինքնաերկակի ֆունկցիաները:

8.7 Պարզել՝ ինքնաերկակի են արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները.

1) $f = xy \vee yz \vee zx$,

2) $f = x \oplus y \oplus z \oplus 1$,

3) $f = (x \vee \bar{y} \vee z)t \vee x \cdot \bar{y} \cdot z$,

4) $\tilde{\alpha}_f = (1010)$,

5) $\tilde{\alpha}_f = (10010110)$,

6) $\widetilde{\alpha}_f = (10110101)$,

7) $\widetilde{\alpha}_f = (1100100101101100)$:

8.8 * -ները փոխարինել 0-ներով կամ 1-երով այնպես, որ ստացվի ինքնաերկակի ֆունկցիայի իսկության վեկտոր.

1) $(*01*)$,

2) $(**01**11)$,

3) $(*1*1*0*1)$,

4) $(1001****1111****)$,

5) $(******01**101100)$:

8.9 Փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով x կամ $\bar{x}$՝ հետևյալ ֆունկցիաներից ստանալ հաստատուն ֆունկցիա.

1) $\widetilde{\alpha}_f = (10110110)$,

2) $\widetilde{\alpha}_f = (11011000)$,

3) $\widetilde{\alpha}_f = (11001110)$,

4) $\widetilde{\alpha}_f = (1000110100\ 0101100)$:

8.10 Ապացուցել, որ եթե $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիան ինքնաերկակի է, ապա նրա 1-երի կետերի քանակը՝ $|N_f| = 2^{n-1}$: Ճի՞շտ է արդյոք հակառակ պնդումը:

8.11 Պարզել՝ որ n-երի դեպքում ($n \geq 2$) հետևյալ ֆունկցիաները կլինեն ինքնաերկակի.

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$,

2) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$,

3) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$:

8.12 Ապացուցել, որ գոյություն չունի ճիշտ երկու փոփոխականից էապես կախված ինքնաերկակի ֆունկցիա:

8.13 Ապացուցել, որ x_i փոփոխականը էական է ֆունկցիայի համար միայն այն դեպքում, երբ այն էական է նրա երկակի ֆունկցիայի համար:

8.14 Գտնել n փոփոխականից ինքնաերկակի ֆունկցիաների քանակը, որոնց բոլոր փոփոխականներն էական են:

8.15 Թվարկել երեք փոփոխականից կախված բոլոր ինքնաերկակի ֆունկցիաները, որոնց երեք փոփոխականներն էլ էական են:

8.16 Ապացուցել, որ $\left[\{x_1 \vee x_2\}\right] \cap S = [\{x_1\}]$:

9 ԳԾԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

9.1 Ապացուցել, որ գծային ֆունկցիաների դասը փակ է:

9.2 Թվարկել երկու փոփոխականից կախված բոլոր գծային ֆունկցիաները:

9.3 Պարզել՝ գծային են արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները.

1) $f = \overline{x \to y} \oplus \overline{x} \cdot y$,
2) $f = xy \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \vee z$,
3) $f = (x \to y) \cdot (y \to x)) \sim z$,
4) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$,
5) $\widetilde{\alpha}_f = (1101)$,
6) $\widetilde{\alpha}_f = (10110101)$,
7) $\widetilde{\alpha}_f = (0110100101\ \ 101001)$:

9.4 * -ները փոխարինել 0-ներով կամ 1-երով այնպես, որ ստացվի գծային ֆունկցիայի իսկության վեկտոր.

1) $(10*1)$,
2) $(*0*1**00)$,
3) $(1**11*0*)$,
4) $(*1******00*1*1**)$,
5) $(1**********0*110)$:

9.5 Ապացուցել, որ եթե $f(x_1, x_2 ..., x_n)$ ֆունկցիան ցանկացած երկու հարևան վեկտորների վրա ընդունում է հակադիր արժեքներ, ապա այն գծային է: Ճի՞շտ է արդյոք հակառակ պնդումը:

9.6 Ապացուցել, որ եթե $f(x_1, x_2 ..., x_n)$ գծային ֆունկցիան հաստատունից տարբեր է, ապա նրա 1-երի կետերի քանակը՝ $|N_f| = 2^{n-1}$: Ճի՞շտ է արդյոք հակառակ պնդումը:

9.7 Փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով $\{0, 1, x, y\}$ բազմության ֆունկցիաներ՝ հետևյալ ֆունկցիաներից ստանալ $x \& y, x \& \overline{y}, \overline{x} \& y$ ֆունկցիաներից որևէ մեկը.

1) $\widetilde{\alpha}_f = (01100111)$,
2) $\widetilde{\alpha}_f = (11010101)$,
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_3} \cdot x_1$,
4) $\widetilde{\alpha}_f = (1101111111\ 001111)$:

9.8 Ապացուցել, որ, եթե $f(\widetilde{x}^n)$-ը գծային ֆունկցիա է, այնպիսին որ $f(\widetilde{x}^n) \notin T_0$ և $f(\widetilde{x}^n) \notin T_1$, ապա նրա 1-երի կետերի քանակը՝ $|N_f| = 2^{n-1}$:

9.9 Գտնել $f(\widetilde{x}^n)$ գծային ֆունկցիաների քանակը, որոնք.

1) ներկայացվում են ճիշտ k փոփոխականներով,
2) բավարարում են $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{1}) = 1$ պայմանին:

9.10 Գտնել բոլոր այն $f(\widetilde{x}^n)$ ֆունկցիաների քանակը, որոնք գծային չեն, և որոնց 1-երի կետերի քանակը՝ $|N_f| = 2^{n-1}$: Դրանցից քանի՞սն են ինքնաերկակի:

9.11 Ապացուցել, որ $[\{x_1 \oplus x_2\}] \subseteq L$:

9.12 Ապացուցել, որ $[\{x_1 \& x_2\}] \cap L = [\{x_1\}]$:

10 ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

10.1 Ապացուցել, որ եթե $f(\widetilde{x}^n)$-ը մոնոտոն չէ, ապա գոյություն ունեն $\widetilde{\alpha}^n$, $\widetilde{\beta}^n$ հարևան վեկտորներ, այնպիսիք, որ $\widetilde{\alpha}^n \prec \widetilde{\beta}^n$, բայց $f(\widetilde{\alpha}^n) > f(\widetilde{\beta}^n)$:

10.2 Ապացուցել, որ մոնոտոն ֆունկցիաների դասը փակ է:

10.3 Թվարկել երկու փոփոխականից կախված բոլոր մոնոտոն ֆունկցիաները:

10.4 Պարզել՝ մոնոտոն են արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները.

1) $f = (x \oplus y) \cdot (x \sim y)$,
2) $f = xy \oplus xz \oplus zy$,
3) $f = x_1 \to (x_2 \to x_3)$,
4) $f = x_1 \oplus (x_2 \to x_3) \oplus x_4$,
5) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2$,
6) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus$,
7) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 x_3 \oplus x_2 x_4$,
8) $f(\widetilde{x}^5) = x_1 x_3 \oplus x_2 x_4$,
9) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$,
10) $\widetilde{\alpha}_f = (10110111)$,
11) $\widetilde{\alpha}_f = (00010111)$,
12) $\widetilde{\alpha}_f = (0010001101\ 11111)$:

10.5 Պարզել, ո՞ր n-երի դեպքում ($n \geq 2$) հետևյալ ֆունկցիաները կլինեն մոնոտոն.

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$,

2) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$:

10.6 Ապացուցել, որ $[\{x_1 \& x_2\}] \subseteq M$:

10.7 Ապացուցել, որ $[\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}] \subseteq M$: Ապացուցել, որ հաստատունից տարբեր f ֆունկցիայի մոնոտոնության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ներկայացվի միայն կոնյունկցիա և դիզյունկցիա պարունակող բանաձևով:

10.8 Ապացուցել, որ եթե $f \in M$, ապա $f^* \in M$:

10.9 Ապացուցել, որ ցանկացած մոնոտոն ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee$$

$$\vee f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n), \text{ որտեղ } 1 \le i \le n :$$

10.10 Ապացուցել, որ մոնոտոն ֆունկցիաների քանակը փոքր չէ $2^{C_n^{[n/2]}}$ -ից:

10.11 Ցույց տալ, որ *T₀, T₁, L, S, M* դասերից ոչ մեկը ընկած չէ մյուսում:

10.12 Ցույց տալ, որ *T₀, T₁, L, S, M* դասերը իրարից տարբեր են և տարբեր են ամբողջ P_2 -ից:

10.13 Ցույց տալ, որ *T₀, T₁, L, S, M* դասերից յուրաքանչյուրը պարունակում է ֆունկցիա, որի բոլոր փոփոխականներն էական են:

10.14 Պարզել՝ արդյոք T_0, T_1, L, S, M դասերից յուրաքանչյուրը պարունակում է ֆունկցիա, որի բոլոր փոփոխականները կեղծ են:

10.15 Պարզել՝ գոյություն ունի արդյոք բուլյան ֆունկցիա, որ $f \triangleright T_0$, $f \triangleright T_1$, $f \triangleright L$, $f \triangleright S$, $f \triangleright M$, որտեղ $\triangleright$ -ը կարող է ընդունել կամայական արժեք $\{\in, \notin\}$ բազմությունից (օրինակ՝ պարզել՝ գոյություն ունի արդյոք f բուլյան ֆունկցիա, որ. $f \notin T_0, f \notin T_1, f \in L, f \in S, f \in M$):

10.16 Գտնել n փոփոխականներից կախված բուլյան ֆունկցիաների քանակը, որոնք պատկանում են A բազմությանը.

1) $A = T_0 \setminus T_1$,
2) $A = T_0 \cap T_1$,
3) $A = T_0 \cup T_1$,
4) $A = T_0 \cap S$,
5) $A = T_1 \cup S$,
6) $A = S \cap T_0 \cap T_1$,
7) $A = T_0 \cap L$,
8) $A = T_1 \cap L$,
9) $A = L \cap S$,
10) $A = L \cap S \cap T_0 \cap T_1$,
11) $A = L \cup S \cup T_0$,
12) $A = (L \setminus T_0) \cap S$,
13) $A = (L \setminus T_0) \cap S$,
14) $A = L \cap M$,
15) $A = L \setminus (S \cup M)$,
16) $A = (L \cap (T_1 \Delta S)) \setminus M$,
17) $A = T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M$,
18) $A = \overline{T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M}$:

11 ԼՐԻՎ ԵՎ ՆԱԽԱԼՐԻՎ ԴԱՍԵՐ: ԲԱԶԻՍ

11.1 Գտնել երկու փոփոխականից բոլոր այն ֆունկցիաները, որոնք առանձին վերցրած կազմում են լրիվ դաս:

11.2 Բերել լրիվ դասի օրինակ, որը կազմված է.
1) մեկ երեք փոփոխականի ֆունկցիայից,
2) մեկ n փոփոխականի ֆունկցիայից ($n \geq 2$):

11.3 Դիցուք, $A \subset P_2^n$, ընդ որում՝ $|A| > 2^{2^n - 1}$: Ապացուցել, որ $[A] = P_2^n$:

11.4 Պարզել՝ լրիվ է արդյոք A դասը.
1) $A = \{f_1 = (0110), f_2 = (11000011), f_3 = (10010110)\}$,
2) $A = \{f_1 = (0111), f_2 = (01011010), f_3 = (01111110)\}$,
3) $A = \{\bar{x}, x \equiv y, 0\}$,
4) $A = \{\bar{x}, x \oplus y, 1\}$,
5) $A = \{\bar{x}, x \equiv y, xy\}$,
6) $A = \{x \equiv y, x \to y, 0\}$,
7) $A = \{\bar{x}, xy \vee yz \vee zx\}$,
8) $A = \{\bar{x}y \vee yz \vee z\bar{x}\}$,
9) $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y, xy \vee yz \vee zx\}$,
10) $A = \{\bar{x}, x \oplus y \oplus z\}$,
11) $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$,
12) $A = \{(x \to y) \to z\}$,
13) $A = \{(x \downarrow y) \downarrow z\}$:

11.5 Պարզել՝ լրիվ է արդյոք A դասը.

1) $A=(S\cap M)\cup(L\setminus M)$,

2) $A=(L\cap T_1\cap T_0)\cup(S\setminus(T_1\cup T_0))$,

3) $A=(L\cap T_1)\cup(S\cap M)$,

4) $A=(L\cap T_1)\cup(S\setminus T_0)$,

5) $A=(M\setminus T_0)\bigcup(L\setminus S)$,

6) $A=(M\setminus T_0)\bigcup(S\setminus L)$,

7) $A=(L\cap M)\cup(S\setminus T_0)$,

8) $A=((L\bigcap M)\setminus T_1))\bigcup(T_1\cap S)$,

9) $A=(M\setminus S)\bigcup(L\cap S)$,

10) $A=(M\cap S)\cup(T_0\setminus M)\bigcup(T_1\cap S)$:

11.6 Պարզել, լրի՞վ է արդյոք $A=\{f_1,f_2\}$ դասը.

1) $f_1\in S\setminus M$, $f_2\notin L\cup S$, $f_1\to f_2\equiv 1$,

2) $f_1\notin L\cup T_0\cup T_1$, $f_2\in M\cap L$, $f_1\to f_2\equiv 1$,

3) $f_1\notin L\cup T_0$, $f_2\notin S$, $f_1\to f_2\equiv 1$,

4) $f_1\in(S\cap L)\setminus T_0$, $f_2\in M\setminus(T_1\cap L)$, $f_1\to f_2\equiv 1$:

11.7 Ապացուցել, որ եթե $A=\{f_1,f_2,\ldots,f_k\}$ դասը լրիվ է, ապա լրիվ է նաև $A^*=\{f_1^*,f_2^*,\ldots,f_k^*\}$ դասը, որտեղ f_i^*-ը f_i-ի երկակի ֆունկցիան է $(i=\overline{1,k})$:

11.8 Ստուգել՝ արդյոք A դասը բազիս է P_2-ի համար.

1) $A=\{x\oplus y, x\vee y, x\to y\}$,

2) $A=\{0,1,x\vee y, x\oplus y\oplus z\}$,

3) $A=\{x\oplus y\oplus 1, x\oplus y\oplus yz\}$,

4) $A=\{xy \oplus z, xy \vee z, xy \equiv z\}$,

5) $A=\{x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus 1, xy \oplus xz \oplus yz, \overline{x}\}$,

6) $A=\{x \oplus y \oplus z, xy \oplus xz \oplus yz, 0, 1\}$,

7) $A=\{x \oplus y, x \equiv yz\}$,

8) $A=\{0, 1, x \vee y, xy \oplus yz \oplus zt\}$:

11.9 $[A]$ լրիվ դասից անջատել բոլոր հնարավոր բազիսները.

1) $A=\{0,\ 1,\ \ \overline{x}\}$,

2) $A=\{x \oplus y, x \equiv y,\ 1\}$,

3) $A=\{x, x \oplus y, x \oplus y \oplus z\}$,

4) $A=\{xy, x \vee y, xy \vee z\}$,

5) $A=\{x \vee y, x \to y\}$,

6) $A=\{x\overline{y}, xy\}$,

7) $A=\{x \oplus y \oplus z, x.\overline{y} \vee \overline{y}.\overline{z} \vee \overline{z}.x, \overline{x}\}$,

8) $A=\{xy, xy \vee \overline{x}.z\}$,

9) $A=\{x, x \vee y, x \vee y \vee z, xy \vee z\}$,

10) $A=\{1, x \equiv y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$:

11.10 Ցույց տալ, որ P_2-ի ցանկացած բազիս պարունակում է չորսից ոչ ավել ֆունկցիաներ:

11.11 Բերել P_2-ի բազիսների օրինակներ, որոնք կազմված են մեկ, երկու, երեք և չորս ֆունկցիաներից:

11.12 Ցույց տալ, որ $[\{f\}]=P_2$ միայն այն դեպքում, երբ $f \notin T_0, f \notin T_1, f \notin S$:

11.13 Գտնել բոլոր այն $f \in P_2^2$ ֆունկցիաները, որտեղ $[\{f\}] = P_2$: Գտնել բոլոր այն $f \in P_2^n$ ֆունկցիաների քանակը, որտեղ $[\{f\}] = P_2^n$:

11.14 Դիցուք, $f \in M$ և f-ը էապես կախված է առնվազն երկու փոփոխականից: Ապացուցել, որ այդ դեպքում՝ $[\{0, \bar{f}\}] = P_2$: Ո՞ր դեպքերում է $[\{\bar{f}\}] = P_2$:

11.15 Ապացուցել, որ P_2-ում ցանկացած նախալրիվ դաս պարունակում է նույնական ֆունկցիա:

11.16 Ապացուցել, որ T_0, T_1, L, S, M դասերը նախալրիվ դասեր են:

11.17 Ապացուցել, որ P_2-ում փակ ցանկացած դաս, որը տարբեր է P_2-ից, ընկած է որևէ նախալրիվ դասի մեջ:

11.18 Ապացուցել, որ T_0, T_1, L, S, M դասերից տարբեր այլ նախալրիվ դասեր չկան:

11.19 Ցույց տալ, որ T_0, T_1, L, S, M դասերից յուրաքանչյուրը պարունակում է ֆունկցիա, որի բոլոր փոփոխականները էական են:

11.20 Պարունակու՞մ են արդյոք հետևյալ փակ դասերը ֆունկցիա, որի բոլոր փոփոխականները կեղծ են. T_0, T_1, L, S, M, $[\{x \oplus y\}]$, $[\{x \to y\}]$, $[\{x \equiv y\}]$:

11.21 Գոյությո՞ւն ունեն արդյոք այնպիսի f_1 և f_2 բուլյան ֆունկցիաներ, որոնք բավարարեն միաժամանակ հետևյալ երեք պայմաններին.

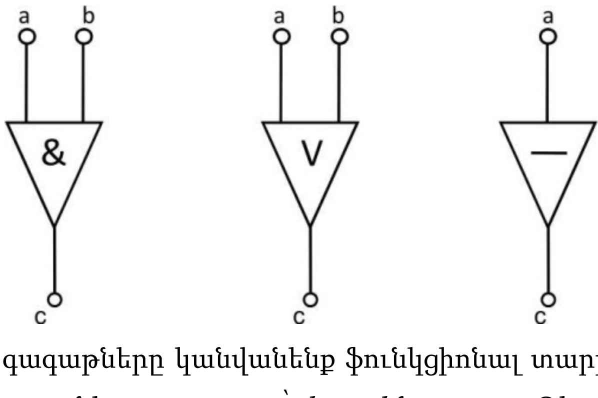
1) Գոյություն ունի նախալրիվ դաս, որը պարունակում է f_1-ը և չի պարունակում f_2-ը:
2) Գոյություն ունի նախալրիվ դաս, որը չի պարունակում f_1-ը և պարունակում է f_2-ը:
3) Գոյություն չունի P_2-ի բազիս, որը միաժամանակ պարունակի և f_1-ը, և f_2-ը:

III. ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՐԱՑՈՒՄԸ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՏԱՐՐԵՐԻ ՍԽԵՄԱՆԵՐՈՎ

Հիմնական սահմանումներ, գաղափարներ, նշանակումներ

Ֆունկցիոնալ տարրերի սխեման (ՖՏՍ) բուլյան ֆունկցիաների իրացման եղանակներից է: ՖՏՍ սահմանելու համար ֆիքսվում է փոփոխականների $X=\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ բազմություն և բուլյան ֆունկցիաների որևէ լրիվ համակարգ: Կդիտարկենք, այսպես կոչված, «ստանդարտ» համակարգը՝ $\{\&,\ \vee,\ -\}$:

Հետևյալ պատկերներից յուրաքանչյուրը կանվանենք ֆունկցիոնալ տարր.

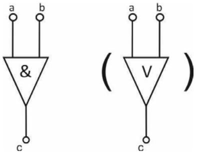


a, b զագաթները կանվանենք ֆունկցիոնալ տարրի *մուտքային* զագաթներ, c զագաթը՝ *ելքային* զագաթ: Դիտարկվում են նաև առանձին n հատ զագաթներ, որոնց վերագրված են համապատասխանաբար $x_1, x_2, \ldots x_n$ փոփոխականները, և որոնք կոչվում են *մուտք – գագաթներ*:

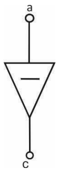
ՖՏՍ-ի սահմանումը տրվում է մակածման եղանակով.

1) մուտք - գագաթների բազմությունը ՖՏՍ է,

2) եթե E -ն ՖՏՍ է, ապա ՖՏՍ է նաև այն պատկերը, որը ստացվում է E -ի ցանկացած երկու գագաթ նույնացնելով երկու մուտքերով որևէ ֆունկցիոնալ տարրի



մուտքային գագաթների հետ և վերագրելով այդ ֆունկցիոնալ տարրի ելքային գագաթին $f_1 \& f_2 (f_1 \vee f_2)$ ֆունկցիան, պայմանով, որ E ՖՏՍ-ի նույնացվող երկու գագաթներին վերագրված էին f_1 և f_2 ֆունկցիաները, եթե E -ն ՖՏՍ է, ապա ՖՏՍ է նաև այն պատկերը, որը ստացվում է E -ի ցանկացած մեկ գագաթ նույնացնելով մեկ մուտքով ֆունկցիոնալ տարրի



մուտքային գագաթի հետ և վերագրելով այդ ֆունկցիոնալ տարրի ելքային գագաթին $\bar{f}$ ֆունկցիան, պայմանով, որ E ՖՏՍ-ի նույնացվող գագաթին վերագրված էր f ֆունկցիան.

3) այլ ՖՏՍ-ներ չկան:

Ինչպես տեսնում ենք, ՖՏՍ-ի յուրաքանչյուր գագաթին վերագրված է բուլյան ֆունկցիա:

Կասենք, որ E ՖՏՍ-ն *իրացնում է* f բուլյան ֆունկցիան, եթե նրա որևէ գագաթին վերագրված է f -ը:

E ՖՏՍ-ի ֆունկցիոնալ տարրերի քանակը կոչվում է E -ի *բարդություն* և նշանակվում է $l(E)$:

$f \in P_2^n$ *բուլյան ֆունկցիայի բարդություն* կոչվում է այդ ֆունկցիան իրացնող E_f ՖՏՍ-երից մինիմալ բարդության

ՖՏՍ-ի բարդությունը: Այն նշանակվում է $l(f)$. $l(f)=\min\limits_{E_f} l(E_f)$, որտեղ min -ը վերցված է ըստ բոլոր E_f ՖՏՍ-երի, որոնք իրացնում են f -ը: P_2^n -ում «վատագույն»՝ ամենամեծ բարդությունն ունեցող ֆունկցիայի բարդությունն անվանում են *Շենոնի ֆունկցիա*: Այն նշանակվում է $L(n)$. $L(n)=\max\limits_{f\in P_2^n} l(f)$:

Շենոնի ֆունցիայի համար հայտնի է հետևյալ վերին գնահատականը (***Շենոնի թեորեմ***).

$$\forall\varepsilon\ \exists N(n>N)(L(n)\le\frac{2^{n+3}}{n}(1+\varepsilon)),$$

ինչպես նաև հայտնի է հետևյալ ստորին գնահատականը.

$$\forall\varepsilon\ \exists N(n>N)(L(n)>\frac{2^{n-1}}{n}(1-\varepsilon)):$$

Նշված գնահատականները լավագույնը չեն: Հայտնի են, օրինակ, հետևյալ ստորին և վերին գնահատականները (Լուպանովի թեորեմ).

$$\forall\varepsilon\ \exists N(n>N)((1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}<L(n)<(1+\varepsilon)\frac{2^n}{n}):$$

12 ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՏԱՐՐԵՐԻ ՍԽԵՄԱՆԵՐ (ՖՏՍ): ՍԽԵՄԱՅԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆ

12.1 Հետևյալ ֆունկցիաների համար կառուցել դրանք իրացնող ՖՏՍ-ներ, որոնց բարդությունը չի գերազանցում m-ը.

1) $f(\widetilde{x}^2) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$, $m = 2$

2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \equiv x_2$, $m = 4$

3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_3$, $m = 4$

4) $f(\widetilde{x}^5) = (x_1 \vee x_2 \cdot x_3)((x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_4) \vee (x_3 \vee \overline{x_4}) \cdot$
$\cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_4 \cdot x_5))$, $m = 6$

5) $f(\widetilde{x}^3) = (01111110)$, $m = 6$

6) $f(\widetilde{x}^3) = (10001001)$, $m = 6$

7) $f(\widetilde{x}^3) = (01111011)$, $m = 6$

8) $f(\widetilde{x}^3) = (10111111)$, $m = 3$

9) $f(\widetilde{x}^3) = (01011100)$, $m = 5$

10) $f(\widetilde{x}^3) = (00011111)$, $m = 2$

11) $f(\widetilde{x}^3) = (10001101)$, $m = 4$

12) $f(\widetilde{x}^3) = (01101001)$, $m = 8$

13) $f(\widetilde{x}^3) = (01101000)$, $m = 10$:

12.2 Հետևյալ ֆունկցիաների համար ստանալ լավագույն ԴՆՁ-եր և դրանց հիման վրա կառուցել այդ ֆունկցիաներն իրացնող մինիմալ ՖՏՍ-ներ.

1) $f(\widetilde{x}^2) = (x \oplus y) \to xy$,

2) $f(\widetilde{x}^2) = xy \to (x \oplus y)$,

3) $f(\widetilde{x}^3) = x \to (y \to z)$,

4) $f(\widetilde{x}^3) = x \to (y \oplus z)$,

5) $f(\widetilde{x}^3)=(x\oplus y)\to z$,

6) $f(\widetilde{x}^3)=x\oplus(y\to z)$,

7) $f(\widetilde{x}^3)=x\vee(y\to z)$,

8) $f(\widetilde{x}^3)=x(y\to z)$,

9) $f(\widetilde{x}^3)=(x\to y)\to z$,

10) $f(\widetilde{x}^3)=xy\to z$ ։

12.3 Հետևյալ ֆունկցիաների համար կառուցել դրանք իրացնող ՖՏՍ-ներ, որոնց բարդությունը չի գերազանցում m-ը.

1) $f(\widetilde{x}^n)=x_1^{\sigma_1}\ \&\ x_2^{\sigma_2}\ \&\ldots\&\ x_n^{\sigma_n}$, որտեղ $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in B^n$, $m=n$,

2) $f(\widetilde{x}^n)=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n$, $m=4(n-1)$,

3) $f(\widetilde{x}^n)=x_1\to(x_2\to(x_3\to\ldots\to(x_{n-1}\to x_n)\ldots))$, $m=n$,

4) $f(\widetilde{x}^n)=(\ldots((x_1\to x_2)\to x_3)\to\ldots)\to x_n$, $m=[3n/2]$,

5) $f(\widetilde{x}^n)=x_1\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3\oplus\ldots\oplus x_1x_2\ldots x_n$, $m=[3n/2]$,

6) $f(\widetilde{x}^n)=(x_1\oplus x_2)(x_2\oplus x_3)\ldots(x_{n-1}\oplus x_n)(x_n\oplus x_1)$,
$m=2n+1$, եթե n -ը զույգ է և $m=2$, եթե n -ը կենտ է։

12.4 Հետևյալ ֆունկցիաների համար կառուցել դրանք իրացնող ՖՏՍ-ներ, կիրառելով՝ կասկադների մեթոդը.

1) $f(\widetilde{x}^4)=x_1x_3x_4\vee(x_2\oplus x_3)(x_1\to x_4)$,

2) $f(\widetilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_1x_3$,

3) $f(\widetilde{x}^4)=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_1x_4$,

4) $f(\widetilde{x}^3)=(x_1\to(x_2\oplus x_3))\vee x_1\bar{x}_3$,

5) $f(\widetilde{x}^4)=(x_1\bar{x}_3\vee x_2\bar{x}_4)(x_2x_3x_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\vee\bar{x}_3x_4)$,

6) $f(\widetilde{x}^4)=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_4\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_1x_4\oplus$

$\oplus x_2x_3 \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_4$,

7) $f(\widetilde{x}^n) = (\bigoplus_k x_{2k+1}) \vee (\bigoplus_k x_{2k})$:

12.5 Հաշվել 1 և 2 փոփոխականներից կախված բոլոր ֆունկ-ցիաների բարդությունները: Հաշվել L(1) և L(2) թվերը:

12.6 Կառուցել $m = 3$ բարդության ՖՏՍ, որն իրացնում է մեկ փոփոխականից կախված բոլոր բուլյան ֆունկցիաների դասը:

12.7 Հետևյալ ֆունկցիաների դասի համար կառուցել այն իրացնող ՖՏՍ, որի բարդությունը չի գերազանցում m-ը.

1) $\Phi = \{\overline{x},\ \overline{xy},\ \overline{xyz},\ 1\}$, $m = 6$,

2) $\Phi = \{xy \vee yz \vee xz,\ \ x \oplus y \oplus z\}$, $m = 9$:

12.8 Հետևյալ ֆունկցիաների դասի համար կառուցել այն իրացնող ՖՏՍ-եր, հաշվել դրանց բարդությունը.

1) $\{x_{i_1} \,\&\, x_{i_2} \,\&\, ... \,\&\, x_{i_k} \,|\, 1 \le i_1 < i_2 < ... i_k \le n\}$,

2) $\{x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee ... \vee x_{i_k} \,|\, 1 \le i_1 < i_2 < ... i_k \le n\}$:

12.9 Ապացուցել, որ եթե f^*-ը $f \in P_2^n$ ֆունկցիայի երկակի ֆունկցիան է, ապա $L(f^*) = L(f)$:

12.10 Ապացուցել, որ ցանկացած մոնոտոն ֆունկցիա կարելի է իրացնել ՖՏՍ -ով, որը չի պարունակում ոչ մի ժխտում:

12.11 Ապացուցել, որ ցանկացած $S^{(k,m)}(\widetilde{x}^n)$ գոտկային ֆունկ-ցիա կարելի է իրացնել ՖՏՍ -ով, որը պարունակում է 1-ից ոչ ավելի ժխտում:

12.12 Ապացուցել, որ ցանկացած սիմետրիկ ֆունցիա կարելի է իրացնել ՖՏՍ-ով, որը պարունակում է [n+1/2]-ից ոչ ավելի ժխտում:

12.13 Ապացուցել, որ $\{S^{(0,0)}(\widetilde{x}^3),\ S^{(1,1)}(\widetilde{x}^3),\ S^{(2,2)}(\widetilde{x}^3),\ S^{(3,3)}(\widetilde{x}^3)\}$ ֆունկցիաների դասը կարելի է իրացնել ՖՏՍ-ով, որը պա-րունակում է ճիշտ 2 ժխտում:

12.14 Ապացուցել, որ $\{\overline{x_1},\ \overline{x_2},\ \overline{x_3}\}$ ֆունկցիաների դասը կա-րելի է իրացնել ՖՏՍ-ով, որը պարունակում է ճիշտ 2 ժխտում:

IV. ԴԻԶՅՈՒՆԿՏԻՎ ՆՈՐՄԱԼ ՁԵՎԵՐԻ ՄԻՆԻՄԱՑՈՒՄ

Հիմնական սահմանումներ, գաղափարներ, նշանակումներ

$K = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, ... \,\&\, x_{i_r}^{\sigma_r}$ բանաձևը, որտեղ $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$, կոչվում է *տարրական կոնյունկցիա*: r թիվը կոչվում է տարրական կոնյունկցիայի *երկարություն*: Հաստատուն 1-ը կհամարենք 0 երկարության տարրական կոնյունկցիա: $N_K \subseteq B^n$ կանվանենք $(n-k)$ *չափանի միջակայք*: n-չափանի միավոր խորանարդում այն գրաֆը, որի գագաթները N_K միջակայքի վեկտորներն են, կողերը՝ n-չափանի միավոր խորանարդի բոլոր այն կողերը, որոնք միացնում են N_K-ի գագաթները, կանվանենք $(n-k)$ *չափանի ենթախորանարդ* n-չափանի միավոր խորանարդում:

$D = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_s$ բանաձևը, որտեղ $K_i \neq K_j$ $(i \neq j)$ կոչվում է *դիզյունկտիվ նորմալ ձև* (ԴՆՁ): s թիվը կոչվում է *ԴՆՁ-ի երկարություն*: $s = 0$ դեպքում ընդունում ենք $D = 0$:

Ակնհայտ է, որ եթե f բուլյան ֆունկցիան իրացվում է D ԴՆՁ-ով, ապա $N_f = N_D = \bigcup_{i=1}^{s} N_{K_i}$:

Այսինքն՝ f բուլյան ֆունկցիայի՝ որևէ ԴՆՁ-ով իրացման խնդիրը կարելի է ձևակերպել «երկրաչափորեն»՝ որպես n չափանի միավոր խորանարդի վրա N_f գագաթների բազմությունը այնպիսի $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots, N_{Ks}$ միջակայքերով ծածկելու խնդիր, որտեղ $N_{Ki} \subseteq N_f$, $i = \overline{1,s}$. $N_f = \bigcup_{i=1}^{s} N_{K_i}$: Նաև՝ հակառակը՝ N_{K_1}, N_{K_2}, ..., N_{Ks} միջակայքերով N_f -ի ցանկացած ծածկույթին, որտեղ $N_{Ki} \subseteq N_f$, $i = \overline{1,s}$, կարելի է համապատասխանեցնել f բուլյան ֆունկցիան իրացնող ԴՆՁ:

$f(\widetilde{x}^n)$ բուլյան ֆունկցիան իրացնող ԴՆՁ-երից այն ԴՆՁ-ն (ԴՆՁ-երը), որն ունի նվազագույն երկարություն կոչվում է f ֆունկցիայի *կարճագույն ԴՆՁ*:

$f(\widetilde{x}^n)$ բուլյան ֆունկցիան իրացնող ԴՆՁ-երից այն ԴՆՁ-ն (ԴՆՁ-երը), որն ունի նվազագույն քանակով փոփոխականների տառեր, կոչվում է f ֆունկցիայի *մինիմալ ԴՆՁ*:

K_1 և K_2 տարրական կոնյունկցիաները կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե $K_1 \& K_2 = 0$, կամ որ նույնն է՝ $N_{K_1} \cap N_{K_2} = \varnothing$:

N_K միջակայքը կոչվում է *թույլատրելի միջակայք* f ֆունկցիայի համար, եթե $N_K \subseteq N_f$:

N_K միջակայքը կոչվում է *մաքսիմալ միջակայք* f ֆունկցիայի համար, եթե՝

ա) այն թույլատրելի է f ֆունկցիայի համար, բ) գոյություն չունի այնպիսի N_{K^*} թույլատրելի միջակայք f ֆունկցիայի համար, որ $N_K \subset N_{K^*}$:

f ֆունկցիայի N_K մաքսիմալ միջակայքին համապատասխանող տարրական կոնյունկցիան կանվանենք f ֆունկցիայի *պարզագույն կոնյունկցիա*:

f ֆունկցիայի բոլոր պարզագույն կոնյունկցիաներից կազմված ԴՆՁ-ն կոչվում է f ֆունկցիայի *կրճատված ԴՆՁ*:

f ֆունկցիան իրացնող ԴՆՁ-ն կոչվում է *փակուղային*, եթե նրա բոլոր կոնյունկցիաները պարզագույն են, և հնարավոր չէ դրանցից որևէ մեկը հեռացնելուց հետո ստանալ f ֆունկցիան իրացնող ԴՆՁ:

f ֆունկցիայի K պարզագույն կոնյունկցիան (ինչպես նաև նրան համապատասխանող N_K մաքսիմալ միջակայքը) կոչվում է *միջուկային*, եթե գոյություն ունի $\tilde{\alpha}$ հավաքածու, որ $K(\tilde{\alpha}) > \mathop{\&}\limits_{l=1}^{s} K_i\,(\tilde{\alpha})$, որտեղ K_i-երը ($\overline{i=1,s}$) f-ի բոլոր մնացած պարզագույն կոնյունկցիաներն են: Այլ կերպ ասած՝ f ֆունկցիայի N_K մաքսիմալ միջակայքը միջուկային է, եթե $N_K \not\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{s} N_{K_i}$, որտեղ N_{K_i}-երը ($\overline{i=1,s}$) f-ի բոլոր մնացած մաքսիմալ միջակայքերն են:

13 ԴՆՁ-ԵՐԻ ՄԻՆԻՄԱՑՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒՄԸ

13.1 Դիցուք, $\tilde{\alpha} \in B^n$, $\tilde{\beta} \in B^n$ տրված վեկտորներ են և $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = r$ ։ Ցույց տալ, որ $\{\tilde{\gamma} \mid \tilde{\gamma} \in B^n, \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + \rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) = r\}$ բազմության վեկտորները կազմում են r -չափանի ենթախորանարդ:

13.2 Ցույց տալ, որ n -չափանի միավոր խորանարդի երկու ենթախորանարդների ոչ դատարկ հատումը ենթախորանարդ է:

13.3 Ցույց տալ, որ B^n բազմության $m,\ m+1,\ m+2, \ldots,\ m+2^k-1$ համարներով վեկտորները կազմում են k -չափանի ենթախորանարդ միայն այն դեպքում, երբ $m = lk, \quad l = 0,1,\ldots,\left[\dfrac{n+1-2^k}{k}\right]$ ։

13.4 Գտնել n -չափանի միավոր խորանարդի՝

1) k -չափանի ենթախորանարդների քանակը,
2) բոլոր ենթախորանարդների քանակը,
3) k -չափանի ենթախորանարդների քանակը, որոնք պարունակում են տրված $\tilde{\alpha} \in B^n$ վեկտորը,
4) k -չափանի ենթախորանարդների քանակը, որոնք պարունակում են տրված l -չափանի ենթախորանարդը,
5) k -չափանի ենթախորանարդների քանակը, որոնք չեն հատվում տրված l -չափանի ենթախորանարդի հետ:

13.5 Գտնել n - չափանի միավոր խորանարդում բոլոր $S_0, S_1, S_2, ..., S_n$ հաջորդականությունների քանակը, որտեղ S_i -ն i -չափանի ենթախորանարդ է ($i=\overline{0,n}$) և $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset ... \subset S_n$:

13.6 Դիցուք, S_i -ն n - չափանի միավոր խորանարդում i - չափանի ենթախորանարդ է $(i=\overline{0,n})$, և $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset ... \subset S_n$: Գտնել բոլոր այն $S_0, S_1, S_2, ..., S_n$ հաջորդականությունների քանակը, որոնք պարունակում են տրված S_r-ը:

13.7 Գտնել $S^{(k.m)}(\tilde{x}^n)$ գոտկային ֆունկցիայի բոլոր այն մաքսիմալ միջակայքերի քանակը, որոնք պարունակում են տվյալ $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$ կետը:

13.8 Ցույց տալ, որ n -չափանի միավոր խորանարդում $(n \geq 2)$ գոյություն ունի ցիկլ, որը պարունակում է յուրաքանչյուր գագաթ ճիշտ մեկ անգամ:

13.9 Ցույց տալ, որ n -չափանի միավոր խորանարդում գոյություն չունի կենտ երկարության ցիկլ:

13.10 n -չափանի միավոր խորանարդում երկու ենթախորանարդներ կոչվում են *անհամեմատելի*, եթե դրանցից ոչ մեկը մյուսի ենթաբազմությունը չէ: Ցույց տալ, որ.

1) n -չափանի միավոր խորանարդում գոյություն ունեն առնվազն $\binom{n}{[n/3]}\binom{n-[n/3]}{[n/3]}$ զույգ առ զույգ անհամեմատելի ենթախորանարդներ:

2) n -չափանի միավոր խորանարդում զույգ առ զույգ անհամեմատելի ենթախորանարդների ցանկացած բազմության հզորությունը չի գերազանցում $\binom{n}{[n/3]}\cdot 2^{n-[n/3]}$ -ը:

13.11 Ցույց տալ, որ n -չափանի միավոր խորանարդում գոյություն ունի $\widetilde{\alpha}$ և $\widetilde{\beta}$ գագաթները միացնող համիլտոնյան ճանապարհ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\left|\,\|\widetilde{\alpha}\|-\|\widetilde{\beta}\|\,\right|$ թիվը կենտ է:

13.12 Հաշվել $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականներից բոլոր ԴՆՁ-երի քանակը:

13.13 Հաշվել $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականներից բոլոր այն ԴՆՁ-երի քանակը, որոնք պարունակում են կենտ քանակությամբ կոնյունկցիաներ, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի ճիշտ երեք երկարություն և պարունակում է միայն ժխտումներով փոփոխականներ:

13.14 Հաշվել x_1 , x_2 ,…, x_n փոփոխականներից այն ԴՆՁ-երի քանակը, որոնք պարունակում են զույգ քանակությամբ կոնյունկցիաներ, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի ճիշտ չորս երկարություն և պարունակում է միայն առանց ժխտումների փոփոխականներ:

13.15 Հաշվել x_1 , x_2 ,…, x_n փոփոխականներից այն ԴՆՁ-երի քանակը, որոնք պարունակում են n հատ կոնյունկցիաներ, որոնց երկարությունները զույգ առ զույգ տարբեր են:

13.16 Հաշվել x_1 , x_2 ,…, x_n փոփոխականներից այն ԴՆՁ-երի քանակը, որոնց կոնյունկցիաներն ունեն նույն երկարությունը:

14 ԿՐՃԱՏՎԱԾ ԴՆՁ: ՓԱԿՈՒՂԱՅԻՆ ԴՆՁ-ԵՐ

14.1 Տրված A բազմության տարրական կոնյունկցիաներից յուրաքանչյուրի համար պարզել՝ արդյոք այն տրված f բուլյան ֆունկցիայի պարզագույն կոնյունկցիա է.

1) $A=\{x_1,\bar{x}_3,x_1x_2,x_2\bar{x}_3\}$, $f(\tilde{x}^3)=(00101111)$

2) $A=\{x_1\bar{x}_2,x_2x_3,x_1x_2x_3\}$, $f(\tilde{x}^3)=(01111110)$

3) $A=\{x_1,\bar{x}_4,x_2\bar{x}_3,\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\}$, $f(\tilde{x}^4)=(1010111001011110):$

14.2 Կառուցել տրված բուլյան ֆունկցիայի կրճատված ԴՆՁ-ն.

1) $f(\tilde{x}^4)=(0000111111110110)$,

2) $f(\tilde{x}^4)=(111111011111110)$,

3) $f(\tilde{x}^4)=(0000111101111111)$,

4) $f(\tilde{x}^4)=(0001101111011011)$,

5) $f(\tilde{x}^4)=(0001101111011011):$

14.3 Ապացուցել, որ մոնոտոն ֆունկցիայի կրճատված ԴՆՁ-ն չի պարունակում փոփոխականի ժխտում:

14.4 Գտնել հետևյալ բուլյան ֆունկցիաների կրճատված ԴՆՁ-ի երկարությունը.

1) $f(\tilde{x}^n)=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n$,

2) $f(\tilde{x}^n)=(x_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\oplus x_4\oplus\ldots\oplus x_n$,

3) $f(\widetilde{x}^n)=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$,

4) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$,

5) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee \ldots \vee x_k)(x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n)$,

6) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \bar{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$,

7) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)\ldots(x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$,

8) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$,

9) $f(\widetilde{x}^{2n})=(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)\ldots(x_{2n-1} \vee x_{2n})$:

14.5 $S^{k,m}(\widetilde{x}^n)$ գոտկային ֆունկցիայի համար գտնել.

1) նրա բոլոր մաքսիմալ միջակայքերի քանակը,
2) այն մաքսիմալ միջակայքերի քանակը, որոնք պարունակում են տրված $\widetilde{\alpha}^n \in B_l^n \quad (k \le l \le m)$ վեկտորը,
3) k -ի և և m -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում նրա մաքսիմալ միջակայքերի քանակը առավելագույն հնարավորն է:

14.6 Գտնել 14.4 խնդրի ֆունկցիաների միջուկային կոնյունկցիաների քանակը:

14.7 Ապացուցել, որ մոնոտոն ֆունկցիայի ցանկացած պարզագույն կոնյունկցիա միջուկային է:

14.8 Ապացուցել, որ ֆունկցիայի պարզագույն կոնյունկցիան միջուկային է միայն այն դեպքում, երբ այն մտնում է այդ ֆունկցիայի բոլոր փակուղային ԴՆՁ-երի մեջ:

14.9 Ապացուցել, որ եթե ֆունկցիայի N_K մաքսիմալ միջակայքը բավարարում է $N_K \subseteq \bigcup_{l=1}^{s} N_{K_i}$, որտեղ N_{K_i} -երը ($\overline{i=1,s}$) f -ի միջուկային միջակայքեր են, ապա N_K -ն չի մտնում ֆունկցիայի ոչ մի փակուղային ԴՆՁ-ին համապատասխանող ծածկույթի մեջ:

14.10 Հետևյալ ֆունկցիաների համար կառուցել դրանց բոլոր փակուղային ԴՆՁ-երը.

1) $D = \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}zw \vee x\bar{y}w \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{w},$

2) $D = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{w} \vee \bar{y}\bar{z}\bar{w}$,

3) $D = \bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{w}$:

14.11 Հետևյալ ֆունկցիաների համար կառուցել դրանց բոլոր փակուղային ԴՆՁ-երը.

1) $f(\tilde{x}^4) = (0000111111110110)$,

2) $f(\tilde{x}^4) = (1111111101111110)$,

3) $f(\tilde{x}^4) = (1111010010011111)$,

4) $f(\tilde{x}^4) = (0000111101111111)$,

5) $f(\tilde{x}^4) = (0001101111100111)$:

14.12 Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների փակուղային ԴՆՁ-երի քանակը.

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$,

2) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n$,

3) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$,

4) $f(\tilde{x}^4) = (0111111111111110)$,

5) $f(\tilde{x}^n) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5 \vee \ldots \vee x_n)(x_1 \vee \ldots \vee x_n)$,

6) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$,

7) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_k)(x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n)$:

14.13 Ապացուցել, որ $f(\tilde{x}^n)$ շղթայական ֆունկցիայի համար, որի համար $N_f = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{m+1}\}$, որտեղ $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, $i = \overline{1,m}$ և $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) > 1$, երբ $i \neq j$, բոլոր փակուղային ԴՆՁ-երի քանակը՝ $\eta(m)$-ը հավասար է.

$$\eta(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \leq 3 \\ \eta(m-2) + \eta(m-3), & \text{եթե } m > 3 : \end{cases}$$

14.14 Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների տրված կրճատված ԴՆՁ-ից այն պարզագույն կոնյունկցիաները, որոնք չեն պատկանում նրա $D_{\cup T}$ -ին.

1) $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_3 x_4$,

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1 x_3 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$:

15 ՄԻՆԻՄԱԼ ԵՎ ԿԱՐՃԱԳՈՒՅՆ ԴՆՁ-ԵՐ

15.1 Ապացուցել, որ ֆունկցիայի ցանկացած մինիմալ ԴՆՁ-ի ցանկացած կոնյունկցիա պարզագույն է այդ ֆունկցիայի համար:

15.2 Ապացուցել, որ գոյություն ունի ֆունկցիայի այնպիսի կարճագույն ԴՆՁ, որի ցանկացած կոնյունկցիա պարզագույն է այդ ֆունկցիայի համար:

15.3 Ապացուցել, որ մոնոտոն ֆունկցիայի կրճատված ԴՆՁ-ն մինիմալ է:

15.4 Գտնել 14.12 խնդրի ֆունկցիաների բոլոր մինիմալ ԴՆՁ-երի քանակները:

15.5 Հաշվել ցիկլիկ ֆունկցիայի մինիմալ ԴՆՁ-երի քանակը:

15.6 Հաշվել շղթայական ֆունկցիայի մինիմալ ԴՆՁ-երի քանակը:

15.7 Կառուցել f_1 և f_2 ֆունկցիաներ, որոնց համար գոյություն ունենա K պարզագույն կոնյունկցիա, այնպիսին, որ $S_4(K, D_c(f_1)) = S_4(K, D_c(f_c))$, սակայն $K \in D_{\cup M}(f_1)$ և $K \notin D_{\cup M}(f_2)$, որտեղ $D_c(f_1)$ և $D_c(f_1)$ համապատասխանաբար f_1 և f_2 ֆունկցիաների կրճատված ԴՆՁ-երն են, $S_4(K, D_c(f_1))$ և $S_4(K, D_c(f_c))$ -ը՝ K -ի 4-րդ կարգի շրջակայքերը $D_c(f_1)$ և $D_c(f_1)$ -ում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Տոնոյան Ռ. Ն., Դիսկրետ մաթեմատիկայի դասընթաց, ԵՊՀ հրատ., Երևան, 1999:
2. Алексеев В. Б., Алешин С. В., Буевич В. А., Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., А. А. Сапоженко, Яблонской С. В. Методическая разработка по курсу “Математическая логика и дискретная математика”, Саратовский университет, Саратов, 1982.
3. Алексеев В. Е., Киселева Л. Г., Смирнова Т. Г., Сборник задач по дискретной математике, электронное учебно-методическое пособие. Нижегородский университет, Нижний Новгород, 2012.
4. Андерсон Дж., Дискретная математика и комбинаторика, изд. Вильямс, Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2004.
5. Аниськов В. В., Близнец И. В., Бородич Р. В., Дискретная математика, практическое пособие. Гомелевский государственный университет, Гомель, 2011.
6. Белоусов А. И., Ткачев С. Б., Дискретная математика, издание 3-е, “МГТУ им. Баумана”, 2004.
7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А., Задачи и упражнения по дискретной математике, “Физматлит”, Москва, 2006.
8. Гиндикин С. Г., Алгебра логики в задачах, “Наука”, Москва, 1972.
9. Дехтарь М.И., “Булевы функции: лекции по дискретной математике”.
10. Ерусалимский Я. М., Дискретная математика: теория, задачи, приложения, “Вузовская книга”, Москва, 2000.
11. Ерусалимский Я. М., Уховский М. Р., Козак А. В., Задачи и упражнения по математической логике и теории множеств, часть 1-ая, “Ростовский ГУ”,Ростов-на-Дону, 1980.
12. Жданов С. А., Матросов В. Л., Стеценко В. А., Сборник задач по дискретной математике, МПГУ, Москва, 2005.
13. Киселева Л. Г., Смирнова Т. Г., Функции алгебры логики в примерах и задачах: учебно-методическое пособие, Нижегородской ГУ, Нижний Новгород, 2008.
14. Клюшин А. В., Кожухов И. Б., Олейник Т. А., Сборник задач по дискретной математике, МИЭТ, Москва, 2008.

15. Лавров И. А., Максимова Л. Л., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, изд. 5-ое, Физматлит, Москва, 2004.
16. Лупанов О. Б., Кострикин И. А. (под ред.), Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики, "МГУ им. Ломоносова", Москва, 1992.
17. Марченков С. С., Замкнутые классы булевых функций, Физматлит, Москва, 2000.
18. Новиков Ф. А., Дискретная математика для программистов, учебник, 2-ое издание, Изд. "Питер", Санкт-Петербург, 2007.
19. Очан Ю. С., Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного, "Просвещение", Москва, 1963.
20. Плотников А. Д., Дискретная математика, Изд. "Новое знание", Москва, 2005.
21. Порошенко Е. Н., Сборник задач по дискретной математике, учебное пособие, 2-ое издание, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 2013.
22. Столл Р.Р. "Множества. Логика. Аксиоматические теории", "Просвещение", Москва, 1968.
23. Таран Т. А., Мыценко Н. А., Темникова Е. Л., Сборник задач по дискретной математике, 2-ое изд., "Инрес", Киев, 2005.
24. Хаггарти Р., Дискретная математика для программистов, "Техносфера", Москва, 2003.
25. Шиханович Ю. А., Введение в современную математику, "Наука", 1965.
26. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, "Наука", Москва, 1966.
27. Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, изд. 4-ое, "Высшая школа", Москва, 2003.
28. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. (под ред.), Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, том 1, "Наука", Москва, 1974.
29. Gries David, Schneider Fred B., A Logical Approach to Discrete Math, Springer-Verlang, New York, 1994.
30. Grimaldi Ralph P., Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, 5-th edition, Pearson Education Ltd, 2014.

31. Rosen Kenneth H., Discrete mathematics and Its Applications, 7-th edition, McGraw- Hill, 2006.
32. Wegener I., The complexity of Boolean Functions, John Wiley &Sons Ltd, Stuttgart, 1987.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հ. Ց. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Հ. Գ. ՄՈՎՍԵՍՅԱՆ

ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Լ. Հովհաննիսյանի

Ստորագրված է տպագրության՝ 20.12.2017:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլը՝ 5:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2017
publishing.ysu.am