ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Անահիտ Գույան, Ելենա Գևորգյան

ԱԿՏՈՒԱՐԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

մաս-1

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Անահիտ Գուլյան
Ելենա Գևորգյան

ԱԿՏՈՒԱՐԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ՄԱՍ-1

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2024

ՀՏԴ 519.22:368(076.1)
ԳՄԴ 65.271-861.1զ631գ7
Գ 954

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:

Գուլյան Ա., Գևորգյան Ե.
Գ 954 Ակտուարական մաթեմատիկա: Խնդրագիրք: Մաս 1 / Ա. Գուլյան, Ե. Գևորգյան.- Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2024.- 94 էջ:

Խնդրագիրքը ներառում է «Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկա» առարկայի մաս կազմող «Ակտուարական մաթեմատիկայի հիմունքներ» դասընթացի դասախոսությունների և գործնական պարապմունքների անցկացման համընդհանուր նյութեր: Յուրաքանչյուր գլխում հակիրճ ներկայացված են տվյալ թեմայի շրջանակներում քննարկվող մեծությունների ֆիզիկական իմաստը, կապը կյանքի տևողությունը բնութագրող այլ մեծությունների հետ, ակտուարական մաթեմատիկայում հաճախ օգտագործվող բանաձևեր, միջազգային ակտուարական նշանակումները:

Սույն ձեռնարկը նախատեսված է «Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկա» առարկայի դասախոսություններ և գործնական պարապմունքներ վարող դասախոսների և ակտուարական մաթեմատիկա մասնագիտացմամբ սովորող ուսանողների համար:

ՀՏԴ 519.22:368(076.1)
ԳՄԴ 65.271-861.1զ631գ7

ISBN 978-5-8084-2691-7
https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808426917

Բովանդակություն

ԵՊՀ ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկայի ամբիոնի հիմնադրման 20-ամյակին ընդառաջ

Նախաբան

Ֆինանսական համակարգում կյանքի ապահովագրությամբ զբաղվող ընկերությունները և կենսաթոշակային ֆոնդերը կարևորագույն տեղ են զբաղեցնում՝ խթանելով երկարաժամկետ ներդրումները և այդ ֆոնդերից օգտվող անձանց բարեկեցությունը: Սույն խնդրագրքում քննարկվում են կյանքի ապահովագրության և պայմանական անուիտետների մոդելավորման համար հիմք հանդիսացող կյանքի տևողության ֆունկցիաները:

Կյանքի տևողությունը՝ որպես պատահական մեծություն, վերջին տարիներին իր կիրառությունն է գտնում ոչ միայն բուն կյանքի ապահովագրության և անուիտետների մոդելներում, այլ նաև ցանկացած երևույթի համար՝ մինչև նախապես սահմանված իրադարձության ի հայտ գալու ժամանակահատվածի (Time to Event) մոդելավորման համար:

Կյանքի տևողության ուսումնասիրության մաթեմատիկական հիմքը հավանականությունների տեսությունն է, որտեղ որպես պատահական մեծություն ի հայտ է գալիս ապահովագրված անձի կյանքի տևողությունը, և ուսումնասիրվում են այդ մեծության բաշխման բնութագրիչները: Կյանքի տևողության բաշխման որոշման առաջին քայլերից է եղել մահացության աղյուսակների կառուցումը, որոնք այժմ կարող են կիրառվել նաև տարբեր ռիսկայնություն ունեցող անձանց համար առանձին-առանձին:

Խնդրագիրքը կազմված է 8 գլուխներից, որոնցից յուրաքանչյուրը յուրացնելու համար անհրաժեշտ է տիրապետել նախորդ գլուխներին: Առաջին և երկրորդ գլուխներում ընթերցողը ծանոթանում է կյանքի տևողության գաղափարին՝ որպես պատահական մեծություն, և ուսումնասիրում է այդ մեծության հետ կապված բաշխման հիմնական բնութագրիչների՝ բաշխման ֆունկցիայի, մահացության կորի և մահացության ինտենսիվության հետ: Հաջորդ՝ երրորդ գլուխը նվիրված է կյանքի տևողության բաշխման հայտնի մոդելներին և դրանց տրամաբանական զարգացմանը: Կյանքի տևողության բաշխման անալիտիկ մոդելներից առաջինը և մյուս մոդելների զարգացման համար հիմք հանդիսացող մոդելը Դե Մուավրի (հավասարաչափ բաշխման) մոդելն է, որին ուրույն տեղ է հատկացված ձեռնարկում ներկայացված խնդիրներում: Առկա են նաև խնդիրներ՝ ամենազարգացած համարվող Վեյբուլի և Էրլանգի մոդելների վերաբերյալ: Խնդրագրքի չորրորդ և հինգերերդ գլուխներում անդրադարձ է կատարվել կյանքի միջին տևողության թեմաներին և տարբեր տարիքներում դրանց միջև առկա կապերին: Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ ի սկզբանե հետազոտողին հայտնի են լինում վիճակագրական արդյունքները, և անհրաժեշտ է երկու տարիքների միջև գնահատել մահացության կամ գոյատևման ֆունկցիան, սույն ձեռնարկի վեցերորդ գլխում ներկայացված են կոտորակային տարիքներում մոտարկման ամենահայտնի երեք ենթադրությունները՝ մահերի հավասարաչափ բաշխում, հաստատուն մահացության ինտենսիվություն և հիպերբոլիկ կամ Բալդուչիի ենթադրություն: Խնդրագրքի յոթերորդ գլուխը նվիրված է ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներին, որոնց կիրառությունը կյանքի ապահովագրությամբ զբաղվող ակտուարների համար ռիսկի հաշվարկման հիմնաքարերից մեկն է: Ձեռնարկի եզրափակիչ՝ ութերորդ գլխում ընթերցողին ներկայացված է կյանքի կարճաժամկետ ապահովագրության մոդելը, որը կարող է արտապատկերվել նաև ոչ կյանքի ապահովագրության մոդելներում՝ կատարելով համապատասխան ենթադրություններ և ձևափոխություններ:

Հատուկ շնորհակալություն ԵՊՀ ֆինանսական մաթեմատիկա մասնագիտության 2023-2024 ուստարվա երկրորդ կուրսի ուսանողներին՝ խնդրագրքի նախնական տարբերակի ուսումնասիրության և բարելավման աշխատանքներին մասնակցելու համար:

Գլուխ 1
Գոյատևման ֆունկցիա, մահացության աղյուսակներ

Կյանքի ապահովագրության մեջ ռիսկի հիմնական գործոնը մահվան պահի անորոշությունն է: Հենց այդ է պատճառը, որ կյանքի ապահովագրության համար տեսության ստեղծումը պետք է սկսվի այն մեծությունների սահմանումից և ուսումնասիրությունից, որոնք թույլ կտան ճիշտ դատողություններ անել կյանքի տևողության մասին:

Որևէ կոնկրետ անձի մահվան պահի վերաբերյալ ոչինչ ասել չենք կարող: Սակայն, եթե գործ ունենք անհատների մեծ համասեռ խմբի հետ և չենք հետաքրքրվում այդ խմբի առանձին անհատների ճակատագրով, ապա մենք գործ ունենք հավանականությունների տեսության՝ որպես զանգվածային պատահական երևույթների գիտության հետ, որն օժտված է հաճախականությունների կայունության հատկությամբ: Այսպիսով, մենք կարող ենք խոսել **կյանքի տևողության**՝ որպես **T պատահական մեծության** մասին:

Հավանականությունների տեսության մեջ ցանկացած T պատահական մեծության ստոխաստիկ բնույթը նկարագրվում է $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայով, որը սահմանվում է որպես հավանականություն, որ T պատահական մեծությունը փոքր է x թվից՝

$$F(x) = P(T < x):$$

Ակտուարական մաթեմատիկայում ընդունված է աշխատել ոչ թե բաշխման ֆունկցայի, այլ բաշխման ֆունկցիայի լրացման հետ, այն է՝ $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$: Այսպիսով, բաշխման ֆունկցիայի լրացումն այն հավանականությունն է, որ անձը կգոյատևի մինչև x տարեկան: Ակտուարական մաթեմատիկայում այս ֆունկցիան անվանում են **գոյատևման ֆունկցա** և նշանակում $\boldsymbol{s(x)}$:

$$s(x) = 1 - F(x) = P(T \geq x):$$

Գոյատևման ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1. $s(x)$ նվազող է, երբ $x \geq 0$:
2. $s(0) = 1$:
3. $s(+\infty) = 0$:
4. $s(x)$-ը անընդհատ է:

Կյանքի տևողության աղյուսակներում, սովորաբար, ենթադրում են, որ գոյություն ունի որոշակի **սահմանային տարիք** (limiting age) $\boldsymbol{\omega}$ (որպես կանոն այն ընդունվում է 100-ից 120 տարեկան), և համապատասխանաբար $s(x) = 0$, երբ $x > \omega$: Մահացությունը անալիտիկ օրենքներով նկարագրելիս, սովորաբար, ենթադրում են, որ կյանքի տևողությունը սահմանափակ չէ: Այնուամենայնիվ, օրենքների տեսքն ու պարամետրերն ընտրվում են այնպես, որ որոշակի տարիքից բարձր ապրելու հավանականությունն անվերջ փոքր է:

Գոյատևման ֆունկցիան ունի պարզ վիճակագրական իմաստ: Ենթադրենք, մենք ուսումնասիրում ենք l_0 նորածիններից բաղկացած խումբ (որպես կանոն՝ l_0= 100,000) և կարող ենք նրանց մահվան պահերը ֆիքսել: Այդ խմբում x տարեկանում **ողջ անհատների քանակը** նշանակենք $\boldsymbol{L(x)}$: Այսպիսով՝

$$l_x \equiv E\, L(x) = l_0 s(x)\, :$$

Այսպիսով, $s(x)$ *գոյատևման ֆունկցիան ցույց է տալիս որոշակի ֆիքսված նորածինների խմբից մինչև* x *տարեկանը գոյատևածների միջին մասնաբաժինը:*

Ակտուարական մաթեմատիկայում հաճախ գործ են ունենում ոչ թե $s(x)$, այլ l_x մեծության հետ:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

l_x	l_0 նորածինների խմբից x տարիքի հասած անձանց միջին քանակը:
d_x	l_0 նորածինների խմբից x տարիքում մահացած անձանց միջին քանակը:
${}_nd_x$	l_0 նորածինների խմբից x-ից $x+n$ տարիքներում մահացած անձանց միջին քանակը:
${}_tp_x$	Հավանականություն, որ x տարեկան անձը կապրի ևս t տարի:
${}_tq_x$	Հավանականություն, որ x տարեկան անձը կմահանա մոտակա t տարիների ընթացքում:
${}_{t\|u}q_x$	Հավանականություն, որ x տարեկան անձը կապրի ևս t տարի և կմահանա t-ին հաջորդող u տարիների ընթացքում:

Խնդիրներ

1.1. Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիան կարող է դիտարկվել որպես գոյատևման ֆունկցիա, և հաշվել հավանականությունը, որ 32 տարեկան անձը կմահանա մոտակա 1 տարվա ընթացքում.

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{10000 - x^2}{10000}, & 0 \le x \le 100 \\ 0, & x > 100: \end{cases}$$

1.2. Կարո՞ղ է արդյոք նշված ֆունցիան դիտարկվել որպես գոյատևման ֆունցիա՝

$$s(x) = e^{x-0.7(2^x-1)}:$$

1.3. Տրված է հետևյալ գոյատևման ֆունկցիան.

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{1/2}, \; 0 \le x \le 100:$$

Հաշվել հավանականությունը, որ 36 տարեկան անձը կմահանա 51-ից 64 տարիքների միջև:

1.4. Աղյուսակում բերված են գոյատևման ֆունկցիայի արժեքները:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{s(x)}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{s(x)}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{s(x)}$
0	1	40	0.949	80	0.432
5	0.985	45	0.936	85	0.280
10	0.983	50	0.915	90	0.142
15	0.982	55	0.883	95	0.050
20	0.977	60	0.837	100	0.012
25	0.971	65	0.771	105	0.002
30	0.965	70	0.682	110	0
35	0.985	75	0.568		

Հաշվել.

ա) $l_0 = 1{,}000$ նորածինների խմբից 50-ից 70 տարեկանում մահացած անձանց միջին քանակը:

բ) $l_0 = 1{,}000$ նորածինների խմբից 50-ից 70 տարեկանում մահացած անձանց քանակի վարիացիան:

1.5. Օգտվելով 1.4 խնդրի աղյուսակի տվյալներից՝ հաշվել հավանականությունը, որ 20 տարեկան անձը կմահանա 60-ից 70 տարեկանում:

1.6. Տրված է հետևյալ մահացության աղյուսակը.

x	l_x	q_x	d_x
50	1,000	0.02	
51			32
52			30
53			28
54		0.028	

50 տարեկան 800 անձից բաղկացած խմբի համար հաշվել 54 տարեկանում մահացողների միջին քանակը:

1.7. Միջատների որոշ տեսակի համար պարզվել է, որ $q_0 = 0.7$, $q_1 = 0.3$, $q_2 = 0.4$, $q_3 = 1$: Կառուցել մահացության աղյուսակը՝ սկսելով $l_0 = 1000$ արժեքից:

1.8. Ապացուցել մաթեմատիկորեն և մեկնաբանել.

ա) $l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots$,

բ) $l_{x+n} = l_x \cdot p_x \cdot p_{x+1} \dots \cdot p_{x+n-1}$,

գ) ${}_{m+n}p_x = {}_n p_x \cdot {}_m p_{x+n}$,

դ) $q_x + p_x q_{x+1} + {}_2 p_x q_{x+2} + \cdots = 1$:

1.9. Նշված պնդումներից ո՞րն է ճիշտ.

ա) ${}_{t+r}p_x \geq {}_{r}p_{x+t}$ $(t,r \geq 0)$,

բ) ${}_{r}q_{x+t} \geq {}_{t|r}q_x$ $(t,r \geq 0)$:

1.10. Տրված է հետևյալ մահացության աղյուսակը.

x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	1,000		0.875	
1				
2	750			0.25
3				
4				
5	200	120		
6				
7		20		1.00

Հաշվել՝ $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot q_6$:

1.11. Նշված հավանականություններից յուրաքանչյուրի համար գրել արտահայտություն.

ա) Հավանակություն, որ 20 տարեկանը կգոյատևի ևս 25 տարի:

բ) Հավանակություն, որ 20 տարեկանը կգոյատևի մինչև 25 տարեկան:

գ) Հավանակություն, որ 20 տարեկանը կմահանա 25 -ից 26 տարեկանում:

դ) Հավանակություն, որ 20 տարեկանը կգոյատևի ևս ամենաքիչը 40 տարի:

ե) Հավանակություն, որ 20 տարեկան երկու անձանցից ոչ ավել, քան մեկը կգոյատևի մինչև 60 տարեկան:

1.12. Տրված են հետևյալ հավանականությունները՝

- Հավանականություն, որ 20 տարեկան անձը կգոյատևի ևս 30 տարի, հավասար է 0.7-ի:

- Հավանականություն, որ 45 տարեկան անձը կմահանա մոտական 5 տարվա ընթացքում, իսկ 40 տարեկան անձը կգոյատևի ևս 5 տարի, հավասար է 0.0475-ի:
- Հավանականություն, որ 20 տարեկան անձը կգոյատևի 20 տարի, իսկ 40 տարեկան անձը կմահանա 5 տարվա ընթացքում, հավասար է 0.04-ի:

Հաշվել հավանականությունը, որ 20 տարեկան անձը կգոյատևի մինչև 45 տարեկանը:

1.13. 25 տարեկան անձանց 80% – ը գոյատևում է մինչև 60 տարեկանը: 25-ից 60 տարեկանում մահացածների 40% – ը մահանում է մինչև 45 տարեկանը: Գտնել հավանականությունը, որ 45 տարեկան անձը կմահանա մինչև 60 տարեկան դառնալը:

1.14. Տրված են հետևյալ հավանականությունները.
- Հավանականություն, որ երկու 70 տարեկան անձանցից երկուսն էլ կգոյատևեն ևս 20 տարի, հավասար է 16%-ի:
- Հավանականություն, որ երկու 80 տարեկան անձանցից երկուսն էլ կգոյատևեն ևս 20 տարի, հավասար է 1%-ի:
- 70 տարեկանների 8%-ը գոյատևում է ևս 30 տարի:
- Բոլոր անձանց կյանքի տևողություններն անկախ են և միատեսակ բաշխված:

Հաշվել հավանականությունը, որ 80 տարեկան անձը կգոյատևի ևս 10 տարի:

1.15. Դիտարկվում են 30 տարեկան 4 անձանց կյանքի տևողությունները.

ա) Գտնել արտահայտություն այն հավանականության համար, որ նրանցից ցանկացած երեքը կգոյատևեն մինչև 60 տարեկանը, մինչդեռ չորրորդը կմահանա 50-ից 55 տարիքների միջև:

բ) Գտնել արտահայտություն այն հավանականության համար, որ նրանցից ամենաքիչը երկուսը կգոյատևեն ոչ ավելի, քան 30 տարի:

1.16. Դիցուք՝ $p_x = 0.95$ բոլոր x-երի համար, գտնել.

ա) p_{20},

բ) ${}_2q_{30}$:

գ) Հավանականություն, որ 20 տարեկան անձը կմահանա 50 տարեկան հասակում:

դ) Հավանականություն, որ 20 տարեկան անձը կմահանա 50-ից 55 տարիքների միջև:

1.17. Տրված են հետևյալ հավանականությունները.

ա) Հավանականություն, որ երկու անձ՝ 35 և 45 տարեկան, կգոյատևեն ևս 10 տարի, հավասար է 0.8-ի:

բ) Հավանականություն, որ 60 տարեկան անձը կմահանա մոտակա 5 տարվա ընթացքում, իսկ 55 տարեկան անձը կգոյատևի ևս 5 տարի, հավասար է 0.05-ի:

գ) Հավանականություն, որ 35 տարեկան անձը կգոյատևի 30 տարի, հավասար է 0.6-ի:

Հաշվել հավանականությունը, որ 35 տարեկան անձը կմահանա 55-ից 60 տարեկանում:

1.18. Հավանականությունը, որ 10 տարեկանը կապրի մինչև 30 տարեկան, հավասար է 0.8-ի: 10-ից 40 տարիքների միջև մահացածների 60%-ը մահանում են 30 տարեկանից հետո: Հավանականությունը, որ 30, 50 և 70 տարեկան երեք անձինք էլ կապրեն ևս 20 տարի, հավասար է 0.2-ի: Գտնել ${}_{50}p_{40}$ – ը:

1.19. Եթե $l_x = 100{,}000\left(\frac{c-x}{c+x}\right)$ և l_{35} =44,000: Գտնել.

ա) c-ի արժեքը:

բ) Սահմանային տարիքը:

գ) Հավանականությունը, որ նորածինը կգոյատնի մինչև 50 տարեկանը:

դ) Հավանականությունը, որ 15 տարեկանը կմահանա 40-ից 50 տարիքների միջև:

1.20. Եթե $l_x = 250\,(64 - 0.8x)^{1/3}$, գտնել հետևյալ մեծություններից յուրաքանչյուրը.

ա) ${}_{70}p_0$,

բ) բնակչության սահմանային տարիքը:

1.21. Տրված է հետևյալ մահացության աղյուսակը.

x	l_x	d_x	${}_{x-60\,\vert}q_{60}$
60	1,000		
61		100	
62			0.07
63	780		

Հաշվել հավանականությունը, որ 60 տարեկան անձը կմահանա մոտակա 1 տարվա ընթացքում:

1.22. Հայտնի է, որ ${}_{t|}q_x = 0.1$, որտեղ $t = 0,1,2,\dots,9$:

Հաշվել ${}_{5}p_{x+2}$ – ը:

1.23. Հայտնի է, որ $f_{70}(15) = 0.05$ և $f_{80}(5) = 0.08$:
Հաշվել ${}_{10}q_{70}$ – ը:

1.24. Էլեկտրական լամպն այրվում է ըստ հետևյալ աղյուսակի.

l_0	1,000,000
l_1	800,000
l_2	600,000
l_3	300,000
l_4	0

Նոր գործարանն ունի 2,500 լամպ: Յուրաքանչյուր տարվա վերջում այրված լամպը փոխարինվում է նոր լամպով: Գտնել 3-րդ տարվա վերջում անհրաժեշտ նոր լամպերի սպասվող քանակը:

1.25. Կյանքի տևողությունը բնութագրվում է $s(x) = \left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/2}$, $0 \le x \le 120$ գոյատևման ֆունկցիայով: Հաշվել 30 տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության մեդիանը:

1.26. Հայտնի է, որ $s(x) = \frac{1}{1+x}$: Հաշվել y տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության մեդիանը:

1.27. Տրված է $s(x) = 1 - 0.01x$, որտեղ $0 < x \le 100$: Հաշվել 10 տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության մեդիանը:

1.28. Հայտնի է, որ $s(x) = \frac{(10-x)^2}{100}$, $0 \le x \le 10$: Հաշվել 1 տարեկանի մահացության ինտենսիվության և 1 տարեկանի՝ 2-ին չհասնելու հավանականության տարբերությունը:

Գլուխ 2
Մահացության կոր, մահացության ինտենսիվություն

Հավանականությունների տեսության մեջ անընդհատ պատահական մեծությունների վիճակագրական բնույթն ընդունված է նկարագրել $f(x)$ խտության ֆունկցիայով, որը կարող է որոշվել որպես բաշխման ֆունկցիայի ածանցյալ: Ակտուարական մաթեմատիկայում կյանքի տևողության խտության ֆունկցիայի գրաֆիկը $f(x) = -s'(x)$ անվանում են **մահացության կոր**: $l_0 \cdot f(x)$ մեծությունն ունի պարզ վիճակագրական իմաստ: Դիտարկենք l_0 նորածիններից բաղկացած խումբ: Այդ խմբում x տարեկանում **մահացածների միջին թիվը՝ $\boldsymbol{d_x}$**, կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձով՝ $d_x \approx l_0 \cdot f(x)$: Գոյատևման ֆունկցիան կարելի է միարժեքորեն վերականգնել խտության ֆունկցիայի միջոցով հետևյալ կերպ.

$$s(x) = \int_x^{\infty} f(u)du:$$

Այսպիսով, մահացության կորը կարող է օգտագործվել որպես կյանքի տևողության առաջնային բնութագրիչ: Այն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

- $f(x) \geq 0$,
- $\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$:

Մահացության ինտենսիվություն կանվանենք հետևյալ մեծությունը.

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{d}{dx}\ln\big(s(x)\big):$$

$f(x)$ ֆունկցիան սահմանվում է որպես x տարիքում մահացության ոչ պայմանական խտության ֆունկցիա, մինչդեռ մահացության μ_x ինտենսիվությունը x տարիքում մահացության պայմանական խտության ֆունկցիան է այն պայմանով, որ անձը կապրի մինչև x տարիքին հասնելը: Փոքր t-ի դեպքում $\mu_x \cdot t$-ն ցույց է տալիս հավանականությունը, որ x տարիքի հասած անձը կմահանա $(x, x+t)$ միջակայքում: Մահացության ինտենսիվությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

- $\mu_x \geq 0$,
- $\int_0^{\infty} \mu_u du = +\infty$:

Մահացության ինտենսիվության կապը կյանքի տևողության այլ բնութագրիչների հետ տրվում է հետևյալ բանաձևերով.

$\mu_x = \dfrac{f(x)}{s(x)} = -\dfrac{d}{dx}\ln\big(s(x)\big)$	$s(x) = \exp\left(-\int\limits_0^x \mu_u du\right)$
${}_tp_x = \exp\left(-\int\limits_0^t \mu_x(u)du\right)$	${}_tp_x = \exp\left(-\int\limits_x^{x+t} \mu_u du\right)$
$\mu_x(t) = -\dfrac{d}{dt}\ln({}_tp_x)$	$f_x(t) = {}_tp_x \cdot \mu_x(t)$
${}_{t\vert u}q_x = \int\limits_t^{t+u} {}_up_x \cdot \mu_x(u)du$	${}_tq_x = \int\limits_0^t {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt$

Խնդիրներ

2.1. Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիան կարող է դիտարկվել որպես մահացության կոր.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2}\, e^{-x/a}, & 0 \le x < \infty \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Գտնել համապատասխան $s(x)$ գոյատևման ֆունկցիան:

2.2. Տրված ${}_tp_x = 1 - \frac{t^2}{100}, 0 < t \le 10$ ֆունկցիայի համար հաշվել μ_{x+5}-ը:

2.3. Տրված $s(x) = e^{-\frac{x^3}{12}},\ x \ge 0$ գոյատևման ֆունկցիայի համար հաշվել μ_x-ը:

2.4. Տրված է հետևյալ գոյատևման ֆունկցիան.

$$s(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 1 - \left(\dfrac{e^x}{100}\right), & 1 \le x < 4.5 \\ 0, & 4.5 \le x: \end{cases}$$

Հաշվել $\mu(4)$-ը:

2.5. Եթե $l_x = 250\,(64 - 0.8x)^{1/3}$, գտնել μ_{70}-ը:

2.6. Եթե $\mu_x = 0.0017$, որտեղ $20 \le x \le 30$, գտնել նշված մեծություններից յուրաքանչյուրը՝

ա) p_{20} ,
բ) ${}_5p_{20}$,
գ) q_{23},
դ) ${}_5q_{23}$,
ե) ${}_{4|}q_{23}$,
զ) ${}_{4|3}q_{23}$:

2.7. Ենթադրելով, որ 30-ից 33 տարեկանում մահացությունը կարող է նկարագրվել $\mu_x = 0.001x$ տեսքով, հաշվել ${}_{2|}q_{30}$-ը:

2.8. Հայտնի է, որ

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}, \qquad 0 < t < 85:$$

Հաշվել ${}_{20}p_x$-ը:

2.9. (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության համար ստանալ բաշխման, խտության և գոյատևման ֆունկցիաները, եթե հայտնի է, որ մահացության ինտենսիվությունը՝ $\mu_x = 2x$:

2.10. Հայտնի է, որ $l_x = 100(k - 0.5x)^{2/3}$ և $\mu_{50} = \frac{1}{48}$: Հաշվել k-ն:

2.11. Հայտնի է, որ $\mu_x = \begin{cases} 0.06, & 30 \leq x < 40 \\ 0.03, & 40 \leq x < 60 \end{cases}$:

Հաշվել ${}_{5|16}q_{30}$-ը:

2.12. 70 տարեկան անձի մահացության ինտենսիվությունն է՝

$\mu_{70}(t) = \begin{cases} 0.01, & t \leq 5 \\ 0.02, & t > 5 \end{cases}$:

Հաշվել ${}_{20}p_{70}$-ը:

2.13. Հայտնի է, որ $\mu_x = 1.5(1.1^x),\ x > 0$: Հաշվել ${}_2p_1$-ը:

2.14. Հետվիրահատական շրջանում 45 տարեկան անձի մահացության ինտենսիվությունը, ի համեմատ միջին վիճակագրական անձի, մոտակա 5 տարիների համար կրում է հետևյալ ձևափոխությունը. 45 տարեկանում այն աճում է 0.002-ով, որից հետո այդ տարբերությունը, համասարաչափ նվազելով, 50 տարեկանում հասնում է 0-ի: Հայտնի է, որ միջին վիճակագրական անձի համար ${}_5p_{45} = 0.98$, հաշվել ${}_5p_{45}$-ը այն անձի համար, որը 45 տարեկանում անցել է վիրահատական պրոցես:

2.15. Հայտնի է, որ $\mu_x = \frac{2x}{10,000-x^2}, 0 \le x \le 100$:

Գտնել q_x-ը:

2.16. Հայտնի է, որ որոշակի տարիքում տղամարդկանց մահացության ինտենսիվությունը կանանց մահացության ինտենսիվության կրկնապատիկն է՝ $\mu_{x+t}^{\text{տ}} = 2\mu_{x+t}^{\text{կ}}$, $0 \le t \le 1$: Արտահայտել մոտակա տարվա ընթացքում x տարեկան կանանց մահվան հավանականությունը՝ $q_x^{\text{կ}}$-ն, տղամարդկանց համար համապատասխան $q_x^{\text{տ}}$ հավանականությամբ:

2.17. Հայտնի է, որ երկու հասարակությունների մահացության ինտենսիվությունները կապված են հետևյալ կերպ.

- $\mu_{x+t}^{*} = \mu_{x+t} - k,\ 0 \le t \le 1$,
- $q_x^{*} = 0$, որտեղ q_x^{*}-ը համապատասխանում է μ_{x+t}^{*} մահացության ինտենսիվության աղյուսակին:

Որոշել k-ի արժեքը:

2.18. Արդյո՞ք տրված $\mu_x = Bc^x$, որտեղ $B > 0,\ 0 < c < 1,\ x \ge 0$ ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ որևէ (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության մահացության ինտենսիվություն: Հիմնավորել պատասխանը:

2.19. Արդյո՞ք տրված $\mu_x = B(x+1)^{-0.5}$, որտեղ $B > 0, x \ge 0$ ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ որևէ (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության մահացության ինտենսիվություն: Հիմնավորել պատասխանը:

2.20. Արդյո՞ք տրված $\mu_x = k(x+1)^n$, որտեղ $k > 0,\ n > 0$, $x \ge 0$ ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ որևէ (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության մահացության ինտենսիվություն: Հիմնավորել պատասխանը:

2.21. Արդյո՞ք տրված $\mu_x = (x+1)^{-3}$, $x \geq 0$ ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ որևէ (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության մահացության ինտենսիվություն: Հիմնավորել պատասխանը:

2.22. Արդյո՞ք տրված $\mu_x = 0.05 \cdot (1.01)^x$, $x \geq 0$ ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ որևէ (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության մահացության ինտենսիվություն: Հիմնավորել պատասխանը:

2.23. Արդյո՞ք տրված $f(x) = e^{-x/2}, x \geq 0$ ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ որևէ (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության խտության ֆունկցիա: Հիմնավորել պատասխանը:

2.24. Արդյո՞ք տրված $\mu_x = a \cdot (b+x)^{-1}$, $a > 0, b > 0$ ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ որևէ (T) կյանքի տևողության պատահական մեծության մահացության ինտենսիվություն: Հիմնավորել պատասխանը:

2.25. Հայտնի է, որ՝

ա) տվյալ հասարակության համար ծննդյան պահին կանանց և տղամարդկանց քանակները հավասար են,

բ) տղամարդկանց համար $\mu^{\text{տ}}(x) = 0.1, x \geq 0$,

գ) կանանց համար $\mu^{\text{կ}}(x) = 0.08, x \geq 0$:

Հաշվել այս հասարակությունից պատահականորեն ընտրված անձի համար q_{60}-ը:

2.26. Հազվադեպ հանդիպող հիվանդության մահացության աղյուսակը ստացվել է «սովորական» մահացության աղյուսակից՝ բոլոր տարիքներում մահացության ինտենսիվությունը կրկնապատկելու միջոցով: «Սովորական» աղյուսակում $q_{75} = 0.12$: Հաշվել նույն մեծությունը նշված հիվանդության աղյուսակի համար:

2.27. Յուրաքանչյուր անձի համար մահացության ինտենսիվությունը հաստատուն է, սակայն տարբեր անձանց դեպքում տարբեր արժեք է ընդունում, և հայտնի է, որ այդ արժեքները հավասարաչափ են բաշխված $(0,2)$ միջակայքում: Հաշվել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված անձը կմահանա մոտակա 1 տարվա ընթացքում:

2.28. Նորածին բադիկների մահացության ինտենսիվությունը կյանքի առաջին ամիսներին նվազող ֆունկցիա է և տրվում է հետևյալ տեսքով՝ $\mu_x = \frac{1}{10+x}$, որտեղ $x \geq 0$, և հաշվարկվում է ամիսներով: Հաշվել հավանականությունը, որ նորածին բադիկը կապրի առնվազն 5 ամիս, սակայն կմահանա դրանից հետո՝ 15 ամիսների ընթացքում:

2.29. 70 տարեկան անձի մահացության ինտենսիվությունը նկարագրվում է հետևյալ տեսքով՝ $\mu_{70}(t) = \begin{cases} 0.1, & t \leq 5 \\ 0.2, & t > 5 \end{cases}$: Հաշվել տվյալ անձի կյանքի տևողության մեդիանը:

2.30. Անձի մնացորդային կյանքի տևողության մահացության ինտենսիվությունն է՝ $\mu_x(t) = \frac{1}{t+50}$: Հաշվել նրա կյանքի մնացորդային տևողության երրորդ քվարտիլը (քառորդիչը):

2.31. Տրված է $\mu(x) = \sqrt{\frac{1}{80-x}}$, $0 \le x \le 80$: Հաշվել 20 տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության մեդիանը:

2.32. Հասարակության 30%-ը ծխողներ են, ում մահացության ինտենսիվությունը հաստատուն է և հավասար է 0.2-ի, իսկ մնացած 70%-ը՝ չծխողների համար՝ 0.1: Գտնել այս հասարակությունից պատահականորեն ընտրված անձի կյանքի տևողության 75 %-անոց քվանտիլը:

Գլուխ 3
Մահացության անալիտիկ օրենքներ

Հաշվարկներն ու տեսական վերլուծությունը հեշտացնելու համար բնական է գոյատևման ֆունկցիայի և մահացության ինտենսիվության վերաբերյալ էմպիրիկ եղանակով ստացված արդյունքները փորձել նկարագրել պարզ անալիտիկ բանաձևերի միջոցով: Կյանքի տևողության համար դիտարկվում են հետևյալ օրենքները.

Դե Մուավրի օրենք (1729թ.)

Ենթադրվում է, որ կյանքի տևողությունը հավասարաչափ է բաշխված $(0, \omega)$ միջակայքում, որտեղ ω-ն կոչվում է սահմանային տարիք: Այս մոդելում կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \qquad F(x) = \frac{x}{\omega}, \qquad s(x) = 1 - \frac{x}{\omega},$$
$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, \qquad \overset{\circ}{e}_x = \frac{\omega - x}{2}, \qquad 0 < x < \omega,$$
$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, \qquad \mu_x(t) = \frac{1}{\omega - x - t},$$
$${}_tp_x = \frac{\omega-x-t}{\omega-x}, \quad {}_tq_x = \frac{t}{\omega-x}, \quad {}_{t|u}q_x = \frac{u}{\omega-x}:$$

Հոմպերցի օրենք (1825թ.)

Այս մոդելում ենթադրվում է, որ մահացության ինտենսիվությունը տարիքից կախված է էքսպոնենտական օրենքով: Կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_x = Be^{ax}, \qquad s(x) = \exp\left(-B\frac{e^{ax} - 1}{a}\right),$$

$$f(x) = B \cdot exp\left(ax - B\frac{e^{ax} - 1}{a}\right), \quad B > 0, \ \ a > 0:$$

Մեյքհեմի առաջին օրենք (1860թ.)

Ի տարբերություն Հոմպերցի օրենքի՝ Մեյքհեմի մոդելում մահացության ինտենսիվությունն ունի նաև ազատ անդամ, որը նախատեսված է դժբախտ պատահարներից մահացությունը նկարագրելու համար կամ, այլ կերպ ասած, այդ բաղադրիչը բնութագրում է այն բոլոր մահերը, որոնք տեղի են ունեցել անկախ տարիքային գործոնից: Մոդելում կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_x = A + Be^{ax}, \qquad s(x) = \exp\left(-Ax - B\frac{e^{ax} - 1}{a}\right),$$

$$f(x) = (A + Be^{ax}) \cdot exp\left(-Ax - B\frac{e^{ax} - 1}{a}\right), \qquad A, B, a > 0:$$

Մեյքհեմի երկրորդ օրենք (1860թ.)

Մեյքհեմի երկրորդ օրենքում ավելանում է ևս մեկ բաղադրիչ, որը ներառում է մահացության այն երևույթները, որոնք ուղիղ համեմատական են տարիքին: Այս դեպքում՝

$$\mu_x = A + Hx + Be^{ax}, \qquad s(x) = \exp\left(-Ax - \frac{Hx^2}{2} - B\frac{e^{ax} - 1}{a}\right),$$

$$f(x) = (A + Hx + Be^{ax}) \cdot exp\left(-Ax - \frac{Hx^2}{2} - B\frac{e^{ax} - 1}{a}\right),$$

$$A, H, B, a > 0:$$

Վեյբուլի օրենք (1939թ.)

Այս մոդելում մահացության ինտենսիվությունը նկարագրվում է պարզապես ցուցչային օրենքով, սակայն փորձը ցույց է տվել, որ իրական մահացությունը նշված օրենքներից ամենալավ կերպով բնութագրում է հենց այս օրենքը: Փոքր տարիքներում (մինչև 1 տարեկանը) այն հակում ունի նվազելու, իսկ մեծ տարիքներում (70-80-ից հետո)՝ ավելի կտրուկ աճելու: Կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_x = kx^n, \qquad s(x) = exp\left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right),$$
$$f(x) = kx^n exp\left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right):$$

Էրլանգի օրենք

Այս օրենքն առավել հայտնի է որպես երկրորդ կարգի Էրլանգյան բաշխում և հանդիսանում է Գամմա բաշխումների դասի մասնակի դեպք: Գամմա բաշխումների առավել լայն դասի ֆունկցիաների կիրառմամբ կարելի է հասնել կյանքի տևողության ավելի լավ մոտարկման: Կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}}, \qquad s(x) = \frac{x+a}{a} e^{-\frac{x}{a}}, \qquad \mu_x = \frac{x}{a(x+a)}:$$

Խնդիրներ

3.1. Հասարակության որոշակի խմբի համար մահացության ինտենսիվությունը հաստատուն է: Գտնել մահացության ինտենսիվությունը, եթե հայտնի է, որ հավանականություն, որ 60 տարեկանը կգոյատևի մինչև 80 տարեկանը, հավասար է 0.1-ի:

3.2. Մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով $\omega = 120$ սահմանային տարիքով: Հաշվել ${}_{4|5}q_{30}$ -ը:

3.3. Մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով $\omega = 105$ սահմանային տարիքով: Հաշվել ${}_{10|20}q_{25}$ -ը:

3.4. Մինչև 80 տարեկանը գոյատևելու հավանականությունը 0.2 է: Մինչև 80 տարեկանը մահացության ինտենսիվությունը հաստատուն է: Գտնել այդ ինտենսիվությունը:

3.5. Մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով: Հայտնի է, որ $q_{10} = \frac{1}{45}$: Գտնել μ_{10}-ը:

3.6. Դիտարկվող հասարակությունը բաղկացած է 20,000 անձից, որոնք բաժանված են երկու ենթախմբի: Առաջին ենթախմբի մեջ ներառվում է 30 տարեկան 10,000 անձ, որոնց մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով $\omega = 100$ սահմանային տարիքով, իսկ երկրորդ ենթախմբի մեջ՝ 40 տարեկան 10,000 անձ, որոնց մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով $\omega = 90$ սահմանային տարիքով: Գտնել դիտարկվող հասարակությունից 50-ից 60 տարեկանում մահացածների միջին թիվը:

3.7. Ա անձի մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով $\omega = 100$ սահմանային տարիքով, իսկ մահացության ինտենսիվությունը μ_x է: Բ անձի մահացության ինտենսիվությունը μ_x^* է, որտեղ $\mu_x^* = \mu_x + K$: Հայտնի է, որ 15 տարեկանում Բ-ի մահանալու հավանականությունը 2 անգամ մեծ է Ա-ի մահանալու հավանականությունից: Գտնել K-ի արժեքը:

3.8. Մահացության ինտենսիվությունը տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\mu_x = \frac{1}{120-x} + \frac{1}{160-x}, \qquad 0 < x < 120:$$

Հաշվել հավանականությունը, որ 60 տարեկանը կմահանա մոտակա 10 տարվա ընթացքում:

3.9. Հայտնի է, որ $\mu_x = \frac{1}{2(100-x)}$: Հաշվել ${}_{40}p_{25}$-ը:

3.10. Մահացության ինտենսիվությունը տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\mu_x = \frac{1}{3(120-x)}\ , \qquad 0 \le x \le 120:$$

Հաշվել ${}_{4|5}q_{30}$-ը:

3.11. Հայտնի է, որ $l_{20} = 97{,}741$, $l_{25} = 97{,}110$, $l_{30} = 96{,}477$, իսկ մահացությունը նկարագրվում է Հոմպերցի օրենքով: Հաշվել.

ա) l_{21}, բ) l_{28}, գ) l_{32}:

3.12. Հայտնի է, որ $l_x = 1{,}000(1 - \frac{x}{120})$: Գտնել հետևյալ մեծություններից յուրաքանչյուրը.

ա) l_0, բ) l_{120}, գ) d_{33}, դ) ${}_{20}p_{30,}$ ե) ${}_{30}q_{20}$:

զ) Հավանականությունը, որ 25 տարեկանը կգոյատևի ևս ամենաքիչը 20 տարի, բայց ոչ ավել քան 25 տարի:

է) Հավանականությունը, որ 25 տարեկան երեք անձանցից բոլորն էլ կգոյատևեն մինչև 80 տարեկանը:

3.13. Մահացության ինտենսիվությունը նկարագրվում է Մեյքհամի օրենքով՝ $\mu_x = A + Be^{ax}$, որտեղ $x \geq 0$, $a = 2, B = 1$: Գտնել A պարամետրի արժեքը, եթե ${}_{0.4}p_0$=0.50 :

3.14. Մահացության ինտենսիվությունն ունի հետևյալ տեսքը՝ $\mu_x = \frac{1}{100-x}$: Հաշվել ${}_{10}p_{50}$-ը:

3.15. Երկու անձանցից մեկի համար մահացության ինտենսիվությունը $\mu_x = kx^2$, իսկ մյուսի համար՝ $\mu_x^* = 2$: Գտնել k-ի այն արժեքը, որի դեպքում ${}_5p_{10}$-ը նույնն է երկու անձանց համար:

3.16. Հայտնի է, որ $\mu_x = A + e^x$, $x \geq 0$ և ${}_{0.5}p_0 = 0.5$: Գտնել A-ի արժեքը:

3.17. Հայտնի է, որ 30 տարեկան անձի համար $\mu_x = 0.02x^{0.5}$, որտեղ $20 \leq x \leq 50$: Հաշվել հավանականությունը, որ նա կապրի 5 տարի և կմահանա դրան հաջորդող 1 տարվա ընթացքում:

3.18. Որոշակի հասարակության համար կյանքի տևողությունը մոդելավորվում է որպես θ պարամետրով էքսպոնենտական բաշխում ունեցող պատահական մեծություն, որտեղ յուրաքանչյուր անձի համար θ-ն (1, 11) միջակայքում հավասարաչափ բաշխումից ստացված պատահական հաստատուն է: Հաշվել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված անձը կմահանա մոտակա 0.5 տարվա ընթացքում:

3.19. Մահացությունը ենթարկվում է Հոմպերցի մոդելին՝ $\mu_x = Bc^x$: Հայտնի է, որ կյանքի տևողության 10 %-անոց քվանտիլը 40 է, իսկ 70 %-անոց քվանտիլը՝ 80: Գտնել c-ն:

Գլուխ 4
Կյանքի միջին տևողություն

Որոշակի x տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության միջին արժեքը՝ $\boldsymbol{E(T_x)}$-ն, ակտուարական մաթեմատիկայում նշանակում են $\mathring{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ և անվանում են **կյանքի միջին մնացորդային տևողություն**: *Կյանքի միջին մնացորդային տևողությունը ցույց է տալիս այն միջին ժամանակահատվածը, որ անձը կապրի x տարիքից հետո.*

$$\mathring{e}_x \equiv E(T_x) = \int_0^\infty P(T_x > t)dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt = \frac{1}{s(x)}\int_x^\infty s(u)du$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt \ :$$

Կյանքի մնացորդային տևողության երկրորդ կարգի մոմենտի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$E(T_x)^2 = 2\int_0^\infty t \cdot {}_tp_x dt = \frac{2}{s(x)}\int_0^\infty t \cdot s(x+t)dt:$$

Համադրելով վերոնշյալ բանաձևերը՝ կստանանք T_x-ի դիսպերսիայի բանաձևը՝

$$Var(T_x) = 2\int_0^\infty t \cdot {}_tp_x dt - \left(\mathring{e}_x\right)^2:$$

$\mathbf{min}(\boldsymbol{T_x}, \boldsymbol{n})$ պատահական մեծության **միջինը**, որտեղ n-ը որոշակի դրական հաստատուն է, անվանում են **կյանքի միջին մասնակի մնացորդային տևողություն** և նշանակում՝ $\mathring{e}_{x:\overline{n|}}$:

Կյանքի միջին մասնակի մնացորդային տևողությունը ցույց է տալիս այն միջին ժամանակահատվածը, որ անձը կապրի $(x, x+n)$ *տարիքային միջակայքում*: Նրա համար տեղի ունի հետևյալ բանաձը՝

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n {}_t p_x dt = \frac{1}{s(x)} \int_x^{x+n} s(u) du:$$

Եթե մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով, ապա ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը՝

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{\omega - x}{2}, \qquad Var(T_x) = \frac{(\omega - x)^2}{12},$$
$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n|}} = n \cdot {}_n p_x + \frac{n}{2} \cdot {}_n q_x, \qquad \overset{\circ}{e}_{x:\overline{1|}} = p_x + 0.5 q_x:$$

Սովորաբար, հասարակությունը ապրած տարիների քանակը հաշվում է ամբողջ արժեքներով, իսկ ապահովագրական ընկերությունները կյանքի ապահովագրության պայմանագրերը կնքում են ամբողջ տարիներով (1, 4, 5 և այլն): Հենց այդ պատճառով բնական է ուսումնասիրել T_x կյանքի տևողության ամբողջ մասը՝ $K_x = [T_x]$: Այսպես, օրինակ, եթե $T_x = 18.75$ տարի (անձը ապրել է 18 տարի և 9 ամիս), ապա $K_x = 18$ տարի: K_x մեծությունն անվանում են կյանքի կլորացված մնացորդային տևողություն: Հարկ է նշել, որ կլորացումը կատարվում է դեպի մոտակա փոքր ամբողջ թիվը:

Քանի որ K_x պատահական մեծությունն ընդունում է միայն ամբողջ արժեքներ, նրա վիճակագրական բնույթը նկարագրվում է դիսկրետ բաշխումով, այսինքն՝ $P(K_x = k)$, $k = 0,1,2, \ldots$ հավանականություններով: Քանի որ $\{K_x = k\}$ պատահույթը համարժեք է $\{k < T_x < k+1\}$ պատահույթին, ապա տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$P(K_x = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}:$$

Կյանքի կլորացված մնացորդային տևողությունը հանդիսանում է պատահական մեծություն, և ուրեմն իմաստ ունի ուսումնասիրել նաև նրա միջին արժեքը, որն ակտուարական մաթեմատիկայում նշանակվում է e_x-ով, և բաշխման այլ մոմենտներ, մասնավորապես՝ դիսպերսիան.

$$e_x = EK_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_{k|}q_x \, e_x = p_x \cdot (1 + e_{x+1}):$$

K_x–ի երկրորդ կարգի մոմենտի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$E(K_x)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \, {}_k p_x :$$

$\mathbf{min}(\boldsymbol{K_x}, \boldsymbol{n})$ պատահական մեծության **միջինը**, որտեղ n-ը որոշակի դրական հաստատուն է, անվանում են **կյանքի կլորացված միջին մասնակի մնացորդային տևողություն** և նշանակում $\boldsymbol{e_{x:\overline{n|}}}$ – ով: Կյանքի միջին մասնակի մնացորդային տևողության համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$e_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_{k|}q_x + n \cdot {}_n p_x:$$

Եթե մահացությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով, ապա ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը՝

$$\mathring{e}_x = e_x + 0.5, \qquad \mathring{e}_{x:\overline{n|}} = e_{x:\overline{n|}} + 0.5 \, {}_n q_x,$$

$$Var(K_x) = Var(T_x) - \tfrac{1}{12}:$$

Խնդիրներ

4.1. 70 տարեկան անձի համար

$$\mu_{70}(t) = \begin{cases} 0.01, & t \leq 5 \\ 0.02, & t > 5 \end{cases}:$$

Հաշվել $\mathring{e}_{70}$-ը:

4.2. Հայտնի է, որ

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.04, & 0 < x < 40 \\ 0.05, & x \geq 40 \end{cases}:$$

Հաշվել $\mathring{e}_{25:\overline{25|}}$-ը:

4.3. (x) տարեկան կնոջ և (y) տարեկան տղամարդու մահացության ինտենսիվությունները համապատասխանաբար $\mu^{\text{կ}}(x) = 0.1$ և $\mu^{\text{տ}}(y) = 0.2$: Որոշել մոտակա 10 տարիների ընթացքում կանանց կյանքի միջին մասնակի մնացորդային տևողության հարաբերությունը տղամարդկանց կյանքի միջին մասնակի մնացորդային տևողությանը:

4.4. Հայտնի է, որ 50 տարեկան անձի կյանքի միջին կլորացված տևողությունը 24 տարի է: Հաշվել նրա մահացության ինտենսիվությունը, եթե հայտնի է, որ այն հաստատուն է անձի ողջ կյանքի ընթացքում:

4.5. Հայտնի է, որ անձի կյանքի տևողությունը բնութագրվում է Դե Մուավրի օրենքով, իսկ 30 տարեկանում նրա կյանքի միջին տևողությունը՝ $\mathring{e}_{30} = 30$: Հաշվել q_{30}-ը:

4.6. Գոյատևման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}, \;\; 0 \leq x \leq 110:$$

Հաշվել.

ա) հավանականությունը, որ 50 տարեկան անձը կմահանա մոտակա մեկ տարվա ընթացքում, բ) 50 տարեկան անձի կյանքի միջին մնացորդային տևողությունը:

4.7. Սառնարանների առաջին սերնդի աշխատաժամանակի վերաբերյալ հայտնի է, որ

$$s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad 0 \leq x \leq \omega \text{ և } \mathring{e}_0 = 20:$$

Նոր սերնդի սառնարանների համար՝

$$s^*(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{\omega - x}{\omega - 5}, & 5 < x \leq \omega : \end{cases}$$

Քանի՞ տարով է ավելացել նոր սերնդի սառնարանների աշխատաժամանակի միջին տևողությունը առաջին սերնդի համեմատ:

4.8. Հավի կյանքի տևողությունը նկարագրվում է $s(m) = 1 - \frac{m}{72}$, $0 \leq m \leq 72$, որտեղ m-ը հաշվարկվում է ամիսներով: Յուրաքանչյուր հավ 1 ամսում միջինում ածում է 30 ձու: Քանի՞ ձու կածեն 12 ամսական 100 հավը մինչև իրենց կյանքի վերջը:

4.9. Դեղամիջոցի փորձարկումը ցույց է տվել, որ 100 սահմանային տարիքով Դե Մուավրի մահացության օրենքի դեպքում 30 տարեկան անձի կյանքի միջին տևողությունն աճում է 4 տարով: Եթե դեղամիջոցի կիրառումից հետո ևս գործում է կյանքի տևողության Դե Մուավրի օրենքը, որքա՞ն կկազմի այդ դեպքում սահմանային տարիքը:

4.10. Հայտնի է, որ որոշակի x տարիքի համար

$${}_tp_x = 1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1.5}, \qquad \text{որտեղ } 0 < t < 100:$$

Հաշվել $\mathring{e}_{30}$-ն:

4.11. Անձի կյանքի տևողությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով: Հայտնի է, որ

- $\mathring{e}_{20:\overline{2n}|} = 25$,
- $\mathring{e}_{20:\overline{4n}|} = 40$,
- $n < (\omega - 20)/4$:

Հաշվել $\mathring{e}_{20:\overline{3n}|}$ – ն:

4.12. Տրված է, որ

- $l_x = (100 - x)^{0.5}$, $0 \le x \le 100$,
- $\mathring{e}_{36:\overline{28}|} = 24.67$:

Հաշվել $\int_0^{28} t \cdot {}_tp_{36} \cdot \mu_{36+t} dt$-ը:

4.13. Գոյատևման ֆունկցիան տրված է հետևյալ տեսքով.

- $s(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^r$, $0 \le x \le \omega$, $r > 0$,
- (y) տարիքի անձի համար $\mu_y = 0.1$ և $\mathring{e}_y = 8.75$, որտեղ $0 \le y < \omega$:

Հաշվել r-ը:

4.14. Հայտնի է, որ գոյատևման ֆունկցիան՝

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^a, \qquad 0 \le x < \omega, \qquad a > 0:$$

Հաշվել $\mu_x \cdot \mathring{e}_x$ -ը:

4.15. Տրված է.

- $s(x) = \frac{\sqrt{k^2 - x}}{k}$, $0 \le x \le k^2$, $k > 0$,
- $\mathring{e}_{40} = 2\mathring{e}_{80}$:

Հաշվել $\mathring{e}_{60}$ -ը:

4.16. Տրված է.

- $s(x) = \frac{(k^3-x)^3}{k}, \ 0 \le x \le k^3, \ k > 0,$
- $\mathring{e}_{40} = 2\mathring{e}_{80}$:

Հաշվել $\mathring{e}_{60}$-ը:

4.17. Անձի կյանքի տևողությունը բնութագրվում է հետևյալ մահացության ինտենսիվությամբ.

$$\mu_x = \frac{1}{200-x} + \frac{1}{100-x}, \ x < 100:$$

Հաշվել անձի կյանքի միջին տևողությունը:

4.18. Գոյատևման ֆունկցիան տրված է հետևյալ տեսքով.

$$s(x) = \frac{\omega - x}{\omega}:$$

Հայտնի է նաև, որ $\mathring{e}_{10:\overline{20|}} = 18$: Գտնել ω-ն:

4.19. Հայտնի է, որ $e_{75} = 10.5$, $e_{76} = 10$, $e_{77} = 9.5$: Հաշվե՛լ հավանականությունը, որ 75 տարեկան անձը կգոյատևի մինչև 77 տարեկանը:

4.20. Ինչպե՞ս կփոխվի կյանքի միջին կլորացված տևողությունը (x) տարեկան անձի համար, եթե մոտակա տարվա ընթացքում նրա մահացության ինտենսիվությունը մեծանա $\delta_t = 0.03 - 0.01t$, $0 < t < 1$ չափով:

4.21. Հայտնի է, որ $q_x = 0.3$, $q_{x+1} = 0.5$, $q_{x+2} = 0.7$, $q_{x+3} = 1$: Հաշվել կյանքի կլորացված մնացորդային տևողության վարիացիան՝ $Var(K_x)$:

4.22. Մահացության հաստատուն μ ինտենսիվության դեպքում հայտնի է, որ $e_{35} = 49$: Հաշվել 35 տարեկան անձի կյանքի կլորացված տևողության միջինը այն դեպքում, երբ մահացության ինտենսիվությունն աճի 0.01 միավորով:

4.23. Ցույց տալ, որ եթե $s(x)$-ը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով, ապա x տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության մեդիանը հավասար է նրա կյանքի մնացորդային տևողության միջինին:

4.24. Էլեկտրական լամպերի աշխատաժամանակը մինչև շարքից դուրս գալը նկարագրվում է հետևյալ օրենքով.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0;\ 4{,}800) \\ \dfrac{t - 4{,}800}{1{,}200}, & t \in (4{,}800;\ 6{,}000), \\ 1, & t > 6{,}000 \end{cases}$$

որտեղ t-ն հաշվարկվում է ժամերով:

Յուրաքանչյուր լամպ օգտագործում է 0.015 կվտ/ժ էլեկտրաէներգիա: Հաշվել, թե միջինում քանի կվտ/ժ էլեկտրաէներգիա կծախսեն 50 նմանատիպ լամպերն իրենց աշխատանքի առաջին 5,000 ժամերի ընթացքում:

4.25. Հայտնի է, որ անձի կյանքի տևողությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով և $\mathring{e}_{20} = 45$: Հաշվել 20 տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության վարիացիան՝ $Var(T_{20})$:

4.26. Հայտնի է, որ անձի կյանքի տևողությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով և $Var(T_{50}) = 192$: Որոշել ω-ն:

4.27. Տրված է $s(x) = 1 - \frac{x}{100}, 0 \leq x \leq 100$: Հաշվել $Var(T_{20})$-ը:

4.28. Հայտնի է, որ $s(x) = \frac{\omega - x}{\omega}$ գոյատևման ֆունկցիայի դեպքում $\omega > 40$ և 30 տարեկան անձի համար 30-ից 40 տարիքների միջև ապրելու տարիների վարիացիան 3.5755 է: Հաշվել ω-ն:

4.29. Տրված $s(x) = e^{-0.05x}$, $x \geq 0$ գոյատևման ֆունկցիայի համար հաշվել.

ա) ${}_{5|10}q_{30}$,

բ) $F(30)$,

գ) $\overset{\circ}{e}_{30}$,

դ) $Var(T_{30})$ ։

4.30. Հայտնի է, որ անձի կյանքի տևողությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով և $Var(T_{15}) = 675$։ Որոշել $\overset{\circ}{e}_{25}$-ը։

4.31. Հայտնի է, որ $\overset{\circ}{e}_0 = 25$, $l_x = \omega - x$, որտեղ $0 \leq x \leq \omega$։ Հաշվել $Var(T_{10})$-ը։

4.32. Գտնել $\overset{\circ}{e}_{35:\overline{10|}}$-ն, եթե

$$\mu_t = \begin{cases} 0.01\,, & \text{եթե } t \in (30{,}40), \\ 0.02\,, & \text{եթե } t \in (40{,}50)\text{։} \end{cases}$$

4.33. Անձի կյանքի տևողությունը 25 տարեկանում բնութագրվում է Դե Մուավրի օրենքով՝ 100 սահմանային տարիքով։ Մոտակա տարում նա պատրաստվում է օդապարիկով թռիչքներ կատարել։ Այդ պատճառով մոտակա տարվա ընթացքում նրա մահացությունը բնութագրվելու է $\mu = 0.1$ հաստատուն ինտենսիվությամբ։ Որոշել, թե որքանով կփոխվի նրա կյանքի միջին մասնակի մնացորդային տևողությունը մոտակա 11 տարվա ընթացքում։

Գլուխ 5
Կյանքի տևողության անդրադարձ բանաձևեր

Օգտվելով մաթեմատիկական սպասման հատկություններից՝ կյանքի միջին տևողության համար կարելի է դուրս բերել հետևյալ անդրադարձ բանաձևերը՝

$$\mathring{e}_x = \mathring{e}_{x:\overline{n|}} + {}_np_x \cdot \mathring{e}_{x+n},$$

$$\mathring{e}_{x:\overline{n|}} = \mathring{e}_{x:\overline{m|}} + {}_mp_x \cdot \mathring{e}_{x+m:\overline{n-m|}}, \qquad m < n$$

$$e_x = e_{x:\overline{n|}} + {}_np_x \cdot e_{x+n} = e_{x:\overline{n-1|}} + {}_np_x \cdot (1 + e_{x+n}),$$

$$e_x = p_x + p_x \cdot e_{x+1} = p_x(e_{x+1} + 1),$$

$$e_{x:\overline{n|}} = e_{x:\overline{m|}} + {}_mp_x \cdot e_{x+m:\overline{n-m|}} = e_{x:\overline{m-1|}} + {}_mp_x \cdot e_{x+m:\overline{n-m|}},$$
$$m < n,$$

$$e_{x:\overline{n|}} = p_x + p_x \cdot e_{x+1:\overline{n-1|}} = p_x\left(e_{x+1:\overline{n-1|}} + 1\right):$$

Խնդիրներ

5.1. Հայտնի է, որ 70 տարեկան անձի համար

$$\mu_{70}(t) = \begin{cases} 0.01, & t \leq 5 \\ 0.02, & t > 5 \end{cases}:$$

Հաշվել $\mathring{e}_{70}$-ն՝ կիրառելով կյանքի միջին տևողության ռեկուրենտ բանաձևը:

5.2. Տրված է հետևյալ աղյուսակը.

x	q_x
65	0.01
66	0.015
67	0.02
68	0.03
69	0.035

Հայտնի է նաև, որ $e_{65} = 24$: Հաշվել e_{68}-ը:

5.3. Կյանքի T տևողության համար հայտնի է, որ

- $\omega > 70$,
- ${}_{40}p_0 = 0.6$,
- $E(T) = 62$,
- $E(\min(T,t)) = t - 0.005t^2,\ 0 < t < 60$:

Հաշվել 40 տարեկան անձի կյանքի տևողությունը:

5.4. Անձի կյանքի տևողությունը նկարագրվում է Դե Մուավրի օրենքով, $\omega = 100$ սահմանային տարիքով: Անձը 25 տարեկան է, և նա ցանկանում է գնել օդապարիկով ճամփորդություն, որի դեպքում միայն տվյալ տարում նրա մահացության ինտենսիվությունը գնահատվել է հաստատուն՝ 0.1 արժեքով: Հաշվել մոտակա 11 տարիների համար կյանքի կլորացված միջին մասնակի մնացորդային տևոդության փոփոխությունը, եթե նա զնա օդապարիկով ճամփորդության:

5.5. Հայտնի է, որ 25 տարեկանում կանանց մահացության ինտենսիվությունն արտահայտվում է նույն տարիքի տղամարդկանց մահացության ինտենսիվությամբ հետևյալ կերպ.

$$\mu_{25}^{\text{կ}}(t) = \begin{cases} \mu_{25}^{\text{տ}}(t) + 0.1(1-t), & 0 \le t \le 1, \\ \mu_{25}^{\text{տ}}(t), & t > 1: \end{cases}$$

Հայտնի է նաև, որ $e_{25}^{\text{տ}} = 10$: Հաշվել $e_{25}^{\text{կ}}$-ը:

5.6. Տրված են $e_{35} = 49$ և $p_{35} = 0.995$: Եթե $35 \le x \le 36$ միջակայքում μ_x-ը կրկնապատկվի, որքա՞ն կկազմի վերահաշվարկված e_{35}-ը:

5.7. Կյանքի կլորացված միջին տևողությունը 50 տարեկան անձի համար՝ $e_{50} = 20$, միևնույն անձի համար՝ $p_{50} = 0.97$: Հաշվել e_{51}-ը:

5.8. Որոշակի հիվանդությունից ապաքինվելու ժամանակաշրջանում ենթադրվում է, որ տվյալ անձանց մահացության ինտենսիվությունն առաջին տարում 10%-ով, իսկ երկրորդ տարում 5%-ով ավելի է, քան առողջ անձանց մահացության ինտենսիվությունը: Իսկ 2 տարի հետո նրա մահացությունը հավասարվում է առողջ անձանց մահացությանը: Հայտնի է, որ $q_x = 0.07$, $q_{x+1} = 0.1$, $q_{x+2} = 0.11$, $e_{x+3} = 5$: Հաշվել, թե հիվանդության պատճառով որքան է կրճատվում կյանքի կլորացված միջին տևողությունը:

5.9. Հայտնի է, որ $\mathring{e}_{40} = 35$, $\mathring{e}_{40:\overline{10|}} = 9$, ${}_{10}p_{40} = 0.85$, ${}_{t}p_{50} = 1 - 0.01t$, $0 \le t \le 1$: Մահացության ինտենսիվության բարելավման արդյունքում 50 տարեկան անձանց համար $_tp_{50} = 1 - 0.009t,\ 0 \le t \le 1$: Վերահաշվարկել $\mathring{e}_{40}$-ն:

5.10. Հայտնի է, որ $s(20) = 0.9$, $s(60) = y$, $\mathring{e}_{20} = 60$, $\mathring{e}_{60} = 25$, գոյատևման ֆունկցիան ենթադրվում է գծային 20-ից 60 տարիքների միջև: Հաշվել y-ը:

5.11. Տրված են $\mathring{e}_{40} = 75$ և $\mathring{e}_{60} = 70$: Մահացության ինտենսիվությունը [40,60] միջակայքում $1/(k-x)$ է: Հաշվել k-ն:

5.12. Կյանքի տևողությունն ունի $f(t) = 2e^{-2t}$, $t \ge 0$ խտության ֆունկցիան: Հաշվել.

ա) $\mathring{e}_x$,

բ) $Var(t)$,

գ) x տարեկան անձի կյանքի մնացորդային տևողության մեդիանը:

Գլուխ 6
Կյանքի տևողության բնութագրիչների մոտարկման մեթոդներ կոտորակային տարիքների համար

Մահացության վերաբերյալ իրական վիճակագրական տվյալները հասանելի են աղյուսակների տեսքով, որոնցում ներառված են q_x, l_x, e_x և այլ մեծություններ x տարիքի ամբողջ արժեքների համար: Սա նշանակում է, որ ակտուարական մաթեմատիկայում բոլոր բանաձևերը պետք է բերվեն այնպիսի տեսքի, որում ներառված են միայն այդ մեծությունները: Սակայն ապահովագրավճարի հաշվարկման բոլոր հիմնական բանաձևերը պարունակում են ինտեգրալ (ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ներառում է $s(x)$ գոյատևման ֆունկցիան): Այսպիսով, մենք պետք է իմանանք գոյատևման ֆունկցիան x արգումենտի ոչ միայն ամբողջ, այլ բոլոր իրական արժեքների համար:

Նման խնդիրը կարող է դիտարկվել որպես մոտարկման խնդիր: Ակտուարական մաթեմատիկայում, սովորաբար, այս խնդիրը լուծում են $s(x)$ գոյատևման ֆունկցիայի այս կամ այն տեսքի վերաբերյալ որոշակի ենթադրություններ անելով: Հիմնական ենթադրությունները երեքն են:

Մահերի հավասարաչափ բաշխում

Ամենապարզ ենթադրությունը գոյատևման ֆունկցիայի գծային մոտարկումն է՝

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1), \text{որտեղ } n \in N,\ t \in (0,1):$$

Մահացության ինտենսիվության համար այս մոտարկման արդյունքում կունենանք՝

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1 - tq_n}, \qquad t \in (0,1)։$$

Գոյատևման ֆունկցիայի գծային մոտարկման կարևորագույն հետևություններից պետք է նշել՝

$$_{t}q_n = tq_n, \qquad t \in (0,1)։$$

Այսպիսով, նշված ենթադրության դեպքում տարվա որոշակի միջակայքի ընթացքում մահանալու հավանականությունը համամասնական է այդ միջակայքի երկարությանը: Ճիշտ է նաև հակառակը, այն է՝ եթե տարվա որոշակի միջակայքում մահանալու հավանականությունը համամասնական է այդ միջակայքի երկարությանը, ապա կոտորակային տարիքների համար գոյատևման ֆունկցիան գծային է.

$$_{t|u}q_n = uq_n։$$

Մահացության հաստատուն ինտենսիվություն

Եթե գոյատևման ֆունկցիան մոտարկենք ցուցչային ֆունկցիայով, ապա

$$s(n+t) = s(n)p_n^t, \qquad t \in (0,1)։$$

Մահացության ինտենսիվության համար այս մոտարկման արդյունքում կունենանք

$$\mu_{n+t} = -\ln p_n :$$

Այսպիսով, դիտարկվող մոտարկմանը համապատասխանում է երկու ծննդյան օրերի միջև հաստատուն մահացության ինտենսիվության մասին ենթադրությունը:

Հիպերբոլիկ կամ Բալդուչիի ենթադրություն

Բալդուչիի մոտարկումը նման է մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրությանը, բայց, ի տարբերություն վերջինիս, գծային ֆունկցիայով մոտարկում ենք ոչ թե $s(x)$, այլ $\frac{1}{s(x)}$ ֆունկցիան.

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)},$$

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n}:$$

Մահացության ինտենսիվության համար այս մոտարկման արդյունքում կունենանք՝

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + tq_n}:$$

Բալդուչիի ենթադրության կարևորագույն հետևություններից պետք է նշել՝

$${}_{1-t}q_{n+t} = (1-t)q_n:$$

Այսպիսով, Բալդուչիի ենթադրության դեպքում մինչև մոտակա ծննդյան օրը մահանալու հավանականությունը համամասնական է մինչև այդ ծննդյան օրն ընկած ժամանակահատվածի երկարությանը: Ճիշտ է նաև հակառակը, այն է՝ եթե մինչև մոտակա ծննդյան օրը մահանալու հավանականությունը համամասնական է մինչև այդ ծննդյան օրն ընկած ժամանակահատվածի երկարությանը, ապա կոտորակային տարիքների համար գոյատևման ֆունկցիան մոտարկված է Բալդուչիի ենթադրությամբ:

Մոտարկման մեթոդներ կոտորակային տարիքների համար			
Ֆունկցիա	Մահերի հավասարաչափ բաշխում	Հաստատուն մահացության ինտենսիվություն	Բալդուչիի կամ հիպերբոլիկ մեթոդ
$s(x+t)$	$(1-t)s(x)+ts(x+1)$	$s(x)p_x^t$	$\frac{s(x+1)}{p_x+t\cdot q_x}$
l_{x+t}	l_x-td_x	$l_x\cdot p_x^t$	$\frac{l_{x+1}}{p_x+t\cdot q_x}$
${}_tq_x$	tq_x	$1-p_x^t$	$\frac{tq_x}{p_x+t\cdot q_x}$
${}_tp_x$	$1-tq_x$	p_x^t	$\frac{p_x}{p_x+t\cdot q_x}$
${}_uq_{x+t}$	$\frac{uq_x}{1-t\cdot q_x}$	$1-p_x^u$	$\frac{uq_x}{p_x+(u+t)\cdot q_x}$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-t\cdot q_x}$	$-\ln p_x$	$\frac{q_x}{p_x+t\cdot q_x}$
${}_tp_x\cdot\mu_{x+t}$	q_x	$-p_x^t(\ln p_x)$	$\frac{p_xq_x}{(p_x+t\cdot q_x)^2}$

Խնդիրներ

6.1. Հայտնի է, որ

- ${}_{0.25}q_{x+0.75} = \frac{3}{31}$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել q_x – ը:

6.2. Հայտնի է, որ

- $q_x = 0.10$,
- $q_{x+1} = 0.15$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել ${}_{0.5}q_{x+0.75}$-ը:

6.3. Հայտնի է, որ

- $q_x = 0.10$,
- $q_{x+1} = 0.15$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել ${}_{0.3|0.5}q_{x+0.4}$ – ը:

6.4. Հայտնի է, որ

- $q_x = 0.10$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել ${}_{0.5}q_{x+0.25}$-ը:

6.5. Հայտնի է, որ

- $q_x = 0.10$,
- կոտորակային տարիքներում մահացությունը ենթարկվում է Բալդուչիի ենթադրությանը:

Հաշվել ${}_{0.5}q_{x+0.25}$-ը:

6.6. Հայտնի է, որ

- կյանքի տևողությունը նկարագրվում է $l_x = 1{,}000\left(1-\left(\frac{x}{100}\right)^2\right)$ ֆունկցիայով, որտեղ $0 \le x \le 100$,
- μ_x-ը նշված գոյատևման բաշխման մահացության ինտենսիվությունն է,
- μ_x^L–ը այն մահացության ինտենսիվությունն է, որը ստացվում է l_x-ի վերաբերյալ մահերի հավասարաչափ բաշխման մասին ենթադրությունն անելիս, երբ $50 \le x \le 51$:

Հաշվել $\mu_{50.25} - \mu_{50.25}^L -$ ը:

6.7. Գոյատևման բաշխման մասին հայտնի է, որ

- $s(k) = \frac{1}{(1+0.01k)^4}$, եթե $k \ge 0$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել ${}_{0.4}q_{20.2}$ -ը :

6.8. Հայտնի է, որ

x	l_x
35	100
36	99
37	96
38	92
39	87

Նշված պնդումներից ո՞րն է ճիշտ, եթե կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում.

ա) ${}_{1/2}q_{36}$=0.091,

բ) $_{0.33}q_{38.5}$=0.021:

6.9. Հայտնի է, որ

- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում,
- $_{0.75}p_x = 0.25$:

Հաշվել՝

ա) $_{0.25}q_{x+0.5}$,

բ) $_{0.5}q_x$,

գ) $\mu_{x+0.5}$:

6.10. Հայտնի է, որ $\mu_{80.5} = 0.0202$, $\mu_{81.5} = 0.0408$, $\mu_{82.5} = 0.0619$, իսկ կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում: Գտնել հավանականությունը, որ 80.5 տարեկան անձը կմահանա մոտակա 2 տարվա ընթացքում:

6.11. Անհատի գլխին 40 տարեկանում մնացել է ընդամենը 3 մազ: Այդ մազերի հետագա «մահացությունը» բնութագրվում է հետևյալ ենթադրություններով.

- $_{k|}q_{40} = 0.1(k+1),\ k = 0,1,2,3,$
- մազաթափությունը կոտորակային տարիքների համար բնութագրվում է Բալդուչիի օրենքով,
- մազաթափության պահերն անկախ են:

Հաշվել հավանականությունը, որ 42.5 տարեկանում անհատը կլինի լիովին ճաղատ:

6.12. Հայտնի է, որ $q_{70} = 0.04$, $q_{71} = 0.05$, իսկ կոտորակային տարիքներում գոյատևման ֆունկցիայի մոտարկման համար օգտագործվում է Բալդուչիի ենթադրությունը: Հաշվել հավանականությունը, որ 70 տարեկան անձը կմահանա 70.5- ից 71.5 տարիքների միջև:

6.13. Հայտնի է, որ $q_{70} = 0.04$, $q_{71} = 0.05$, իսկ կոտորակային տարիքներում գոյատևման ֆունկցիայի մոտարկման համար օգտագործվում է մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրությունը: Հաշվել հավանականությունը, որ 70 տարեկան անձը կմահանա 70.5-ից 71.5 տարիքների միջև:

6.14. Հայտնի է, որ $q_x = 0.12$: Հաշվել.

ա) ${}_{1|3}q_{x+\frac{1}{2}}$ (հավասարաչափ բաշխում),

բ) ${}_{1|3}q_x$ (Բալդուչի),

գ) ${}_{1|2}q_x$ (հաստատուն մահացության ինտենսիվություն):

6.15. Ակտուարը ենթադրում է, որ 95 տարեկան անձանցից բաղկացած 1,000 հոգանոց խմբի համար մոտակա 3 տարվա ընթացքում մահվան պահը հավասարաչափ է բաշխված կյանքի վերջին տարվա ընթացքում: Որոշ արդյունքներ ամփոփված են աղյուսակում:

Աղյուսակ 2

Տարիք	Գոյատևածների քանակը
95	1,000
95.5	800
96	600
96.5	480
97	-
97.5	288
98	-

ա) Վերականգնել ստացված աղյուսակը և գտնել q_{95}, q_{96}, q_{97} արժեքները:

բ) Հաշվել մինչև 97.5 տարեկան գոյատևած անձանց միջին թիվը, եթե կոտորակային տարիքների համար ենթադրվում է հաստատուն մահացության ինտենսիվություն:

6.16. Հայտնի է, որ

- $q_x = 0.1$,
- $q_{x+1} = 0.3$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել $\mathring{e}_{x+0.7:\overline{1}|}$-ը:

6.17. Հայտնի է, որ

- $q_{45} = 0.01$,
- $q_{46} = 0.011$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել 45 տարեկան անձի մոտակա 2 տարվա կյանքի մասնակի մնացորդային տևողության վարիացիան:

6.18. Հայտնի է, որ

- ${}_{10}p_x = 0.2$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել $\mathring{e}_{x:\overline{10}|} - e_{\mathrm{x}:\overline{10}|}$ -ը:

6.19. Հայտնի է, որ

- $q_{60} = 0.020$,
- $q_{61} = 0.022$,

- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասաչափ բաշխում:

Հաշվել $\overset{\circ}{e}_{60:\overline{1.5|}}$-ը:

6.20. Հայտնի է, որ

- $q_{70} = 0.040$,
- $q_{71} = 0.044$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասաչափ բաշխում:

Հաշվել $\overset{\circ}{e}_{70:\overline{1.5|}}$-ը:

6.21. Հայտնի է յուրաքանչյուր տարում բակալավրիատի ուսանողի դուրս մնալու հավանականությունները.

- $q_0 = 0.15$,
- $q_1 = 0.10$,
- $q_2 = 0.05$,
- $q_3 = 0.01$:

Հաշվել 2-րդ կուրսում սովորող ուսանողի՝ մոտակա 1.5 տարվա միջին մասնակի մնացորդային ուսման տևողությունը՝ $\overset{\circ}{e}_{1:\overline{1.5|}}$, եթե յուրաքանչյուր կուրսում սովորելու ընթացքում դուրս մնալն ունի հավասարաչափ բաշխում:

6.22. Հայտնի է, որ

- $\overset{\circ}{e}_{x+0.5:\overline{0.5|}} = \frac{5}{12}$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասաչափ բաշխում:

Հաշվել q_x – ը:

6.23. Հայտնի է, որ

- $\overset{\circ}{e}_{55.2:\overline{0.4|}} = 0.396$,

- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել $\mu_{55.2}$-ը:

6.24. Հայտնի է, որ

- $\overset{\circ}{e}_{20:\overline{20|}} = 18$,
- $d_x = k$, եթե $x = 0,1,2,\dots,\omega - 1$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել ${}_{30|10}q_{30}$ -ը:

6.25. Հայտնի է, որ

- $\mu_{45.5} = 0.5$,
- կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

Հաշվել $\overset{\circ}{e}_{45:\overline{1|}}$ -ն:

6.26. Հայտնի է, որ ${}_{0.25}p_{x+0.25} = \frac{49}{50}$, եթե կոտորակային տարիքների համար արվում է հաստատուն մահացության ինտենսիվության մասին ենթադրությունը: Որքա՞ն կլինի ${}_{0.25}p_{x+0.25}$ արժեքը, եթե կոտորակային տարիքների համար ենթադրվի, որ մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

6.27. Հայտնի է, որ ${}_{0.25}q_{x+0.1} = 0.05$, եթե կոտորակային տարիքների համար արվում է հաստատուն մահացության ինտենսիվության մասին ենթադրությունը: Որքա՞ն կլինի ${}_{0.25}q_{x+0.1}$ արժեքը, եթե կոտորակային տարիքների համար ենթադրվի, որ մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

6.28. Հայտնի է, որ

- $q_x = 0.25$,
- Հաստատուն մահացության ինտենսիվության մասին ենթադրության դեպքում մահացության ինտենսիվությունը տրվում է հետևյալ տեսքով՝ μ_{x+s}^A, եթե $0 < s < 1$,
- մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում մահացության ինտենսիվությունը տրվում է հետևյալ տեսքով՝ μ_{x+s}^B, եթե $0 < s < 1$:

Գտնել այն փոքրագույն s ժամանակահատվածը, որի դեպքում $\mu_{x+s}^A \leq \mu_{x+s}^B$:

6.29. Ուսումնասիրվում է $[x, x+1]$ միջակայքում մահացությունը: Հայտնի է, որ $d_x > 0$: Մահերը հաշվարկվում են ստորև ներկայացված ենթադրություններով:

Մահանալու հավանականություն	**Ենթադրություն**
${}_{0.5}\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{U}}$	Մահերի հավասարաչափ բաշխում
${}_{0.5}\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}}$	Բալդուչիի ենթադրություն
${}_{0.5}\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{C}}$	Հաստատուն մահացության ինտենսիվություն

Նշված պնդումներից որո՞նք են ճիշտ.

ա) ${}_{0.5}q_x^U < {}_{0.5}q_x^B < {}_{0.5}q_x^C$,
բ) ${}_{0.5}q_x^U < {}_{0.5}q_x^C < {}_{0.5}q_x^B$,
գ) ${}_{0.5}q_x^B < {}_{0.5}q_x^C < {}_{0.5}q_x^U$,
դ) ${}_{0.5}q_x^C < {}_{0.5}q_x^U < {}_{0.5}q_x^B$,
ե) ${}_{0.5}q_x^C < {}_{0.5}q_x^B < {}_{0.5}q_x^U$:

6.30. Հայտնի է, որ $1000\ {}_{0.25}q_x = 2$: Հաշվել ${}_{0.25}q_{x+0.75}$, բոլոր 3 ենթադրությունների դեպքում և համեմատել արդյունքները:

6.31. Հայտնի է, որ $l_x = 284$ և $l_{x+1} = 236$:
Կամայական t-ի համար, $0 < t < 1$, հաստատուն մահացության ինտենսիվության ենթադրության դեպքում l_{x+t}= 248:
Կամայական u-ի համար, $0 < u < 1$, մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում l_{x+u}= 248: Հաշվել $t - u$ -ն:

6.32. $(x, x + \frac{1}{2})$ միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի $(x + s)$ տարիք, այնպիսին, որ ${}_{13/16-\,s}q_{x+s}$ մեծությունը $(x, x + 1)$ միջակայքում ընդունում է նույն արժեքը և՛ Բալդուչիի ենթադրության, և՛ մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում: Հաշվել s -ը:

6.33. Հայտնի է, որ

- ${}_{0.5}p_x\mu_{x+0.5} = \frac{12}{49}$,
- կոտորակային տարիքներում մահացությունը ենթարկվում է Բալդուչիի ենթադրությանը:
- $q_x < p_x$:

Հաշվել $q_x -$ ը:

6.34. $(x, x + 1)$ միջակայքում l_{x+s} –ի համար հաստատուն մահացության ինտենսիվության ենթադրության դեպքում նշված պնդումներից որո՞նք են ճիշտ.
ա) ${}_{1/2}q_x = {}_{1/2}q_{x+1/2}$,
բ) ${}_{s}p_x = p_x/(p_x + sq_x)$,
գ) ${}_{s}q_x = s \cdot \mu_{x+s}$,

դ) $l_{x+\frac{1}{2}}=(2\cdot l_x\cdot l_{x+1})/(l_x+l_{x+1})$:

6.35. x-ի ամբողջ արժեքների և $0<s<1$ համար հայտնի է, որ
- μ^U_{x+s}-ը հաշվարկված է մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում,
- μ^B_{x+s}-ը հաշվարկված է Բալդուչիի ենթադրության դեպքում:

Նշված պնդումներից որո՞նք են ճիշտ, եթե

$$0.5\le t<1.$$

ա) $\mu^U_{x+t}=\mathrm{t}d_x/(l_x-\mathrm{t}d_x)$,
բ) $\mu^B_{x+t}=d_x/(l_x-(1-\mathrm{t})d_x)$,
գ) $\mu^U_{x+t}\le\mu^B_{x+t}$:

6.36. Հայտնի է, որ
- $l_x=\frac{100{,}000}{x^2}$, x -ի ամբողջ դրական արժեքների դեպքում,
- $(y,y+1)$ միջակայքում որոշակի y-ի համար Բալդուչիի ենթադրության դեպքում $l_{y+s}=911$, որտեղ $0<s<1$:

Հաշվել ${}_{1-s}q_{y+s}$-ը մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում:

6.37. Հայտնի է, որ
- $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{1|}}=F$ մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում,
- $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{1|}}=G$ Բալդուչիի ենթադրության դեպքում,
- $q_x=0.1$:

Հաշվել $1{,}000(F-G)$-ն:

6.38. Հայտնի է, որ $q_x=0.12$:
Նշված պնդումներից որո՞նք են ճիշտ.

ա) ${}_{\frac{1}{3}}q_{x+\frac{1}{2}} = 0.0426$ մահերի հավասարաչափ բաշխման են-թադրության դեպքում:

բ) ${}_{\frac{1}{3}}q_x = 0.0435$ Բալդուչիի ենթադրության դեպքում:

գ) ${}_{\frac{1}{2}}q_x = 0.0619$ հաստատուն մահացության ինտենսիվու-թյան ենթադրության դեպքում:

6.39. Հայտնի է, որ

- $q_{60} = 0.3$,
- $q_{61} = 0.4$,
- f հավանականությունն է, որ 60 տարեկան անձը կմահանա 60.5-ից 61.5 տարիքային միջակայքում, եթե ենթադրվում է մահերի հավասարաչափ բաշխում,
- g հավանականությունն է, որ 60 տարեկան անձը կմահանա 60.5-ից 61.5 տարիքային միջակայքում, եթե տեղի ունի Բալդուչիի ենթադրությունը:

Հաշվել 10,000$(g - f)$-ը:

Գլուխ 7
Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներ

Կյանքի տևողության վերաբերյալ վիճակագրական տվյալները խմբավորվում են կյանքի տևողության աղյուսակներում, որոնք հաճախ անվանում են **մահացության** կամ **կյանքի աղյուսակներ**։ Կյանքի աղյուսակների պարզագույն օրինակ են հանդիսանում աղյուսակներ, որոնք պարունակում են վիճակագրական տվյալներ՝ պատահականորեն ընտրված անձի կյանքի տևողության վերաբերյալ։ Այդպիսի աղյուսակներն անվանում են **ընդհանուր** կամ պարզեցված աղյուսակներ։ Նման աղյուսակները պարունակում են տեղեկություն ոչ միայն $s(x)$ ֆունկցիայի վերաբերյալ, այլ նաև $l_{x,}q_x, q_x, d_x, \mathring{e}_x$ մեծությունների վերաբերյալ։

Ակնհայտ է, որ Աֆրիկայում բնակվող և Արևմուտքի զարգացած երկրներից մեկում բնակվող անձանց կյանքի տևողության վիճակագրական բնութագրիչները տարբերվում են միմյանցից։ Այդ պատճառով կյանքի տևողության ընդհանրացված աղյուսակներն առանձնակի հետաքրքրություն չեն ներկայացնում ուսումնասիրությունների համար։

Պարզ է նաև, որ նույն երկրում ապրող անձանց համար կյանքի տևողության բնութագրիչները կարող են տարբեր լինել։ Օրինակ՝ տղամարդկանց մահացությունը մի քանի անգամ մեծ է կանանց մահացությունից, լեռնագնացների մահացությունը տարբերվում է տնային տնտեսուհիների մահացությունից և այլն։ Ապահովագրական ընկերությունը գործ ունի ոչ թե աբստրակտ, այլ կոնկրետ անձանց հետ, որոնց մասին հասանելի է որոշակի տեղեկություն (սեռ, տարիք, մասնագիտություն և այլն): Այդ պատճառով պարզ է, որ ընկերությունը պետք է ունենա հասարակության տարբեր խմբերի համար աղյուսակներ: Այդ աղյուսակներն անվանում են ընտրանքով աղյուսակներ կամ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներ: Ընտրանք տերմինը նշանակում է, որ անձիք ընդգրկվում են այդ խմբում որոշակի ընտրություն անցնելուց հետո: Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակները նախատեսված են այն անձանց համար, որոնք տարբերվում են տվյալ տարիքի հասարակության այլ անդամներից իրենց առողջությամբ, առավել ռիսկային մասնագիտությամբ կամ այլ գործոններով: Խմբում ընդգրկված անձանց մահացությունը կախված է ոչ միայն x տարիքից, այլ նրանից, թե երբ է կատարվել ընտրությունը: Այսպիսով, ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներում ընդգրկված մեծություններն ունեն 2 արգումենտ. առաջինը ցույց է տալիս, ընտրության պահին անձի x տարիքը, երկրորդը՝ ընտրության պահից անցած t ժամանակը: Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներում մահվան հավանականությունը կարող է լինել ինչպես ավելի մեծ, քան սովորական աղյուսակներում, այնպես էլ ավելի փոքր:

Ներմուծենք հետևյալ մեծությունները.

$q_{[x]+t} -(x+t)$ տարեկան անձի մոտակա 1 տարում մահանալու հավանականությունն է պայմանով, որ նա խմբի մեջ է ընդգրկվել t տարի առաջ:

$p_{[x]+t} -\ (x+t)$ տարեկան անձի մոտակա 1 տարում ապրելու հավանականությունն է պայմանով, որ նա խմբի մեջ է ընդգրկվել t տարի առաջ:

${}_nq_{[x]+t}-(x+t)$ տարեկան անձի մոտակա n տարում մահանալու հավանականությունն է պայմանով, որ նա խմբի մեջ է ընդգրկվել t տարի առաջ:

${}_{n}p_{[x]+t}$ – $(x+t)$ տարեկան անձի մոտակա n տարում ապրելու հավանականությունն է պայմանով, որ նա խմբի մեջ է ընդգրկվել t տարի առաջ։

${}_{n|m}q_{[x]+t}$ – $(x+t)$ տարեկան անձի մոտակա n տարում ապրելու և n-ին հաջորդող m տարիների ընթացքում մահանալու հավանականությունն է պայմանով, որ անձը խմբի մեջ է ընդգրկվել t տարի առաջ։

${}_{n|}q_{[x]+t}$ – $(x+t)$ տարեկան անձի մոտակա n տարում ապրելու և n-ին հաջորդող 1 տարվա ընթացքում մահանալու հավանականությունն է, պայմանով, որ անձը խմբի մեջ է ընդգրկվել t տարի առաջ։

Վերոնշյալ հավանականությունների միջև կապը կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևերի միջոցով.

$p_{[x]+t} = 1 - q_{[x]+t}$, ${}_{n}p_{[x]+t} = p_{[x]+t} \cdot p_{[x]+t+1} \cdot \dots \cdot p_{[x]+t+n-1}$։

Վիճակագրությունը ցույց է տալիս, որ, սովորաբար, ընտրանքի ազդեցության տևողությունը բավականին երկար է։ Այնուամենայնիվ, որպես կանոն, մահացության բնութագրիչների կախվածությունն ընտրանքից հետո անցած ժամանակից արագ նվազում է, և որոշ ժամանակ անց այդ բնութագրիչները կախված են լինում միայն տվյալ պահին անձի տարիքից։

Այն $\boldsymbol{r}$ ժամանակահատվածը, որից հետո ընտրանքի պահից կախվածությունը կարելի է հաշվի չառնել, կանվանենք **ընտրանքի տևողության ժամանակահատված**։ Սահմանափակ ժամկետով ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներում r ժամկետի ավարտից հետո աղյուսակների տարրերը $[x]+r$ տարիքի անձի համար համընկնում են սովորական աղյուսակում $x+r$ տարեկան անձի համար կիրառվող համապատասխան տարրերի հետ։

Դիտարկենք r ընտրանքի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակ և գտնենք $l_{[x]+t}$ արժեքը հետևյալ բանաձևի միջոցով.

$$l_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{p_{[x]+t}}:$$

Քանի որ ընտրանքի տևողությունը r տարի է, ապա

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}\text{, որտեղ } t \geq r:$$

Ուստի

$$p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}, \qquad q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}},$$

$$_{n|}q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t}}, \qquad _{n|m}q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+n} - l_{[x]+t+n+m}}{l_{[x]+t}}:$$

Խնդիրներ

7.1. «Սովորական» աղյուսակից հայտնի է հետևյալը.

x	q_x
90	0.1
91	0.12
92	0.13
93	0.15
94	0.16

Իսկ 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար տրված են.

- $q_{[x]} = 0.5\, q_x$,
- $q_{[x]+1} = 0.75 q_{x+1}$,
- $l_{[91]}$=10,000:

Հաշվել $l_{[90]}$ – ը:

7.2. Հաշվել $_{1|}q_{[80]+1}$ մեծությունը, եթե 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է

- $q_{[80]+1} = q_{[81]+1}$,
-

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}
80	1,000	950	900
81	-	920	-
82	-		860

7.3. Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ մահացությունը նկարագրվում է Մուավրի օրենքով $\omega = 120$ սահմանային տարիքով և 2 տարի ընտրված ժամանակահատվածի համար $\mu_{[x]+t} = (\mu_{x+t})(t/2)$: Հաշվել $e_{[64]}$-ը:

7.4. Ստորև ներկայացված 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակում կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում:

t	$_{t\|}q_{[30]}$	$_{t\|}q_{[31]}$
0	0.05	0.05
1	0.06	0.07
2	0.08	
3	0.08	

Հաշվել $_{2}q_{[31]+0.5}$-ը:

7.5. Որոշակի 3 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	l_{x+3}	$x+3$
70	-	-	-	7,600	73
71	-	7,984	-	-	74
72	8,016	-	7,592	-	75

- մահացությունը նկարագրվում է Մուավրի օրենքով,
- $d_{[x]} = d_{[x]+1} = d_{[x]+2}$, $x = 70,\ 71,\ 72$, որտեղ $d_{[x]+t}$=$l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}$:

Հաշվել $1{,}000\left({}_{2|2}q_{[71]}\right)$-ը:

7.6. Որոշակի 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

- $q_{[x]} = (1-2k)q_x$,
- $q_{[x]+1}$=$(1-k)q_{x+1,}$
- $l_{[32]} = 90$,

- $l_{32} = 100$,
- $l_{33} = 90$,
- $l_{34} = 63$:

Հաշվել $l_{[32]+1}$-ը:

7.7. Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}
21	0.00120	0.00150	0.00170	0.00180
22	0.00125	0.00155	0.00175	0.00185
23	0.00130	0.00160	0.00180	0.00195

Հաշվել $l_{[22]-ը}$, եթե $l_{[21]} = 1{,}000{,}000$:

7.8. Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	q_{x+4}
33	0.02	0.015	0.03	0.025	0.035
34	0.01	0.025	0.02	0.03	0.04
35	0.02	0.015	0.03	0.035	0.05
36	0.01	0.025	0.03	0.045	0.04
37	0.02	0.025	0.04	0.035	0.03
38	0.02	0.035	0.03	0.025	0.035
39	0.03	0.025	0.02	0.035	0.045
40	0.02	0.015	0.03	0.04	0.04
41	0.01	0.025	0.035	0.035	0.035
42	0.02	0.03	0.03	0.03	0.035

Հաշվել հավանականությունը, որ 36 տարեկան անձը, ով ապահովագրվել է 2 տարով, կապրի մինչև 40 տարեկան:

7.9. Որոշակի 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

$[x]$	$1{,}000q_{[x]}$	$1{,}000q_{[x]+1}$	$1{,}000q_{x+2}$
40	0.438	0.574	0.699
41	0.453	0.599	0.738
42	0.477	0.634	0.790
43	0.510	0.680	0.856
44	0.551	0.737	0.937

Հաշվել $1{,}000\,{}_{1|2}q_{[41]}$-ը։

7.10. Հասարակությունը բաժանված է 2 խմբի։ Առաջին խումբը բաղկացած է 100,000 անձից՝ յուրաքանչյուրը 30 տարեկան, որոնք ռիսկի խմբի մեջ ընդգրկվել են 30 տարեկանում։ Նրանց մահացությունը նկարագրվում է ստորև ներկայացված աղյուսակով.

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}
29	0.00130	0.00134	0.00138	0.00142
30	0.00132	0.00136	0.00140	0.00144
31	0.00134	0.00138	0.00142	0.00146
32	0.00136	0.00140	0.00144	0.00148

Երկրորդ խումբը նույնպես բաղկացած է 100,000 անձից՝ յուրաքանչյուրը 30 տարեկան՝ վերցված ընհանուր հասարակությունից։ Նրանց մահացությունը նկարագրվում է ստորև ներկայացված աղյուսակով.

t	${}_{t\|}q_{30}$
0	0.00138
1	0.00140
2	0.00144
3	0.00147

Հաշվել երկրորդ խմբի համեմատ առաջին խմբից որքանով ավել անձ կգոյատևի մինչև 32 տարեկանը։

7.11. Որոշակի 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ .

- $q_{[x]+1} = 1.5q_{[x+1]}$,
- $q_{[x]+2} = 1.2 \cdot q_{[x+1]+1}$,

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
24	-	-	42,683	26
25	-	-	35,000	27
26	-	-	26,600	28

Հաշվել $l_{[26]}$-ը:

7.12. Որոշակի 3 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
60	0.09	0.11	0.13	0.15	63
61	0.10	0.12	0.14	0.16	64
62	0.11	0.13	0.15	0.17	65
63	0.12	0.14	0.16	0.18	66
64	0.13	0.15	0.17	0.19	67

- Անձը ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակում ընդգրկվել է 01/01/2000թ.,
- 01/01/2001թ. նա 61 տարեկան է,
- P հավանականությունն է, որ անձը կգոյատևի մինչև 01/01/2006թ.:

Գտնել P-ի արժեքը:

7.13. Որոշակի 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

- $\mu_{[37]+t} = \mu_{37+t} - A,\ 0 \le t \le 2$,

- $\overset{\circ}{e}_{[37]} = 58,$
- $\overset{\circ}{e}_{[37]:\overline{2}|} = 1.9,$
- $\overset{\circ}{e}_{37:\overline{2}|}$=1.7,
- $\overset{\circ}{e}_{37} = 57.5$:

Գտնել A-ն:

7.14. Որոշակի 1 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար $p_{[x]} = p_x + 0.001$: Կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում: $(x+1)$ տարեկանի մնացորդային կյանքի միջինը հավասար է 78-ի:

Հաշվել $\overset{\circ}{e}_{[x]} - \overset{\circ}{e}_x$-ը:

7.15. Որոշակի 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}
90	-	-	-
91	1,250	-	920
92	1,000	900	-

և $q_{[x]+t} = \frac{t+1}{3} q_{x+t}$:

Հաշվել.

ա) $l_{[90]+1}$,

բ) l_{94}:

7.16. Հայտնի է, որ

- x տարեկանում որոշակի ռիսկի խմբում ընդգրկված անձի մահացության ինտենսիվությունը նկարագրվում է հետևյալ տեսքով՝ $\mu_{[x]}(t) = \varphi(x) \cdot \mu(t), t \geq 0$:

- $\varphi(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$,
- $\mu(t) = t, \;\; t \geq 0$,
- $p_{[0]} = 0.96$,
- ${}_3p_{[35]} = 1.25 \cdot {}_3p_{[65]}$:

Հաշվել $\beta_0 -$ ն և β_1-ը:

7.17. Որոշակի 1 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

x	$l_{[x]}$	$d_{[x]}$	$\mathring{e}_{[x]}$
85	1,000	100	5.556
86	850	100	

Ենթադրելով, որ կոտորակային տարիքներում մահերն ունեն հավասարաչափ բաշխում՝ հաշվել $\mathring{e}_{[86]} -$ ն:

7.18. Որոշակի 10 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

- $l_{[30]+t} = \frac{\sqrt{60}}{9}\left(1 - \frac{t}{100}\right), \;\; 0 \leq t \leq 10$,
- $l_{30+t} = \frac{\sqrt{70-t}}{10}, 10 \leq t \leq 70$:

Հաշվել $\mathring{e}_{[30]}$-ը:

7.19. Աղյուսակում ներկայացված են $q_{[x]+t}$ արժեքները.

$[x]$	$t = 0$ $q_{[x]}$	$t = 1$ $q_{[x]+1}$	$t = 2$ $q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x + 3$
30	$103 \cdot 10^{-5}$	$170 \cdot 10^{-5}$	$209 \cdot 10^{-5}$	$229 \cdot 10^{-5}$	33
31	$124 \cdot 10^{-5}$	$186 \cdot 10^{-5}$	$222 \cdot 10^{-5}$	$241 \cdot 10^{-5}$	34
32	$139 \cdot 10^{-5}$	$191 \cdot 10^{-5}$	$231 \cdot 10^{-5}$	$254 \cdot 10^{-5}$	35
33	$154 \cdot 10^{-5}$	$207 \cdot 10^{-5}$	$244 \cdot 10^{-5}$	$267 \cdot 10^{-5}$	36
34	$175 \cdot 10^{-5}$	$212 \cdot 10^{-5}$	$251 \cdot 10^{-5}$	$283 \cdot 10^{-5}$	37

Հաշվել ${}_2q_{[32]+1}$-ը:

7.20. Ստորև ներկայացված աղյուսակի տվյալների հիման վրա պարզել՝ նշված ենթադրություններից որն է ճիշտ, եթե հայտնի է, որ ընտրանքի տևողությունը 2 տարի է։

ա) ${}_{2}p_{[31]} > {}_{2}p_{[30]+1}$,

բ) ${}_{1|}q_{[31]} > {}_{1|}q_{[30]+1}$,

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
30	1,000	998	995	32
31	996	994	988	33
32	994	990	982	33
33	987	983	970	34

գ) ${}_{2}q_{[33]} > {}_{2}q_{[31]+2}$։

7.21. Որոշակի 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի համար հայտնի է, որ

$1-\frac{q_{[x]}}{q_x} = 2\cdot\left(1-\frac{q_{[x]+1}}{q_{x+1}}\right)$,

իսկ $l_{[32]} = 90$, $l_{32} = 100$, $l_{33} = 90$, $l_{34} = 63$։

Հաշվել $l_{[32]+1}$ – ը։

7.22. Ստորև ներկայացված 2 տարի տևողությամբ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակի տվյալների հիման վրա հաշվել ${}_{0.9}q_{[60]+0.6}$-ը, եթե ենթադրվում է, որ մահվան պահը հավասարաչափ է բաշխված կյանքի վերջին տարվա ընթացքում։

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
60	80,625	79,954	78,839	62
61	79,137	78,402	77,252	63
62	77,575	76,770	75,578	64

Գլուխ 8
Կյանքի կարճաժամկետ ապահովագրություն

Ակտուարական մաթեմատիկայում կյանքի ապահովագրության մոդելները պայմանականորեն բաժանում են 2 խոշոր խմբերի՝ կախված այն բանից՝ արդյոք հաշվի են առնվում հավաքագրված ապահովագրավճարների ներդրումից ստացված եկամուտները, թե՝ ոչ: Եթե **ոչ**, ապա մենք գործ ունենք կյանքի **կարճաժամկետ** ապահովագրության հետ: Սովորաբար այդ «կարճ» ժամանակահատվածը դիտարկվում է **մինչև 1 տարի** տևողությունը: Հակառակ դեպքում գործ ունենք երկարաժամկետ ապահովագրության հետ: Կյանքի ապահովագրության պարզագույն մոդելը հետևյալն է՝

- Ապահովադիրը վճարում է ապահովագրական ընկերությանը **p** պ.մ.գումար (այդ գումարն անվանում են **ապահովագրավճար**):
- Ապահովադիր կարող է հանդիսանալ հենց ապահովագրված անձը կամ այլ անձ, օրինակ՝ գործատուն:
- Ապահովագրական ընկերությունը պարտավորվում է շահառուին հատուցել **b** պ.մ. **ապահովագրական գումար**, եթե ապահովագրված անձը մահանա պայմանագրում նշված պատճառներից որևէ մեկի արդյունքում 1 տարվա ընթացքում, և հատուցում չի տրվում, եթե ապահովագրված անձը ողջ լինի նշված ժամանակահատվածի վերջում կամ մահանա այլ պատճառներից, որոնք նշված չեն պայմանագրում: Անհատական հայտի մոդելում *զուտ ապահովագրավճարը հաշվարկվում է որպես սպասվելիք կորստի միջին արժեք:*

Ապահովագրական հատուցման չափը սովորաբար ավելի մեծ է, քան ապահովագրավճարը, և այդ մեծությունների միջև ճիշտ հարաբերակցություն գտնելը ակտուարական մաթեմատիկայի կարևորագույն խնդիրներից մեկն է: Կարևորագույն գործոնը, որ պետք է հաշվի առնել, համարժեքության սկզբունքն է՝

$$p = E(X),$$

որտեղ

- p – զուտ (նետտո) ապահովագրավճարն է,
- X - ապահովագրողի կրած վնասի հնարավոր մեծությունն է, այնպես որ

$$X = \begin{cases} b, & \text{եթե ի հայտ է եկել ապահովագրական դեպք} \\ 0, & \text{եթե ի հայտ չի եկել ապահովագրական դեպք} \end{cases}:$$

Վճարելով p միավոր գումար՝ ապահովադիրը ձեռք է բերում ապահովագրական պայմանագիր՝ այսպիսով ազատելով շահառուին ապահովադրի մահվան պահի անորոշությունից բխող ֆինանսական ռիսկից: Այնուամենայնիվ, այդ ռիսկը չի կորել, այն իր վրա է վերցրել ապահովագրական ընկերությունը:

$p = E(X)$ հավասարությունն իրականում չի արտահայտում ապահովադրի և ապահովագրողի պարտավորությունների համարժեքությունը: Չնայած որ և՛ ապահովադիրը, և՛ ապահովագրողը միջինում վճարում են նույն գումարը, ապահովագրողն ունի ռիսկ, որ ինչ-ինչ պատճառներից ելնելով՝ նա կվճարի $E(X)$ մեծությունից ավել գումար, այնինչ ապահովադիրը նման ռիսկ չունի: Այդ պատճառով արդար կլինի, որ ապահովագրության դիմաց վճարը ներառի որոշակի ***l* հավելավճար**, որը կանվանենք ապահովագրական հավելավճար

(ռիսկային հավելում), իսկ $\boldsymbol{\theta} = \frac{l}{EX}$ – ը՝ **հարաբերական ապահովագրական հավելավճար** (հարաբերական ռիսկային հավելում)։ Ապահովագրական հավելավճարի չափն ընտրվում է այնպես, որ ապահովագրական ընկերության սնանկանալու հավանականությունը լինի բավականին փոքր։

Ապահովագրական հավելավճարի ճշգրիտ հաշվարկը կարելի է իրականացնել ռիսկերի տեսության շրջանակներում։

Ապահովագրական ընկերության գործունեության պարզագույն մոդելը գումարյալ հայտի մոդելն է։

Մոդելը հիմնված է հետևյալ ենթադրությունների վրա.

- դիտարկվում է բավական կարճ ժամանակահատված (սովորաբար մինչև 1 տարի),
- դիտարկվող պայմանագրերի քանակը ֆիքսված է (N) և ոչ պատահական,
- ապահովագրավճարն ամբողջությամբ վճարվում է դիտարկվող ժամանակահատվածի սկզբում, և ընթացքում դրամական հոսք չի ենթադրվում։
- յուրաքանչյուր պայմանագիր դիտարկվում է առանձին, և հայտնի են այդ պայմանագրի գծով անհատական վնասների վիճակագրական հատկանիշները,
- բոլոր ռիսկերն իրարից անկախ են։

Սնանկացումն այն իրադարձությունն է, երբ գումարյալ հայտի մեծությունն ավելի մեծ է, քան տվյալ պահին ընկերության ակտիվները։ Սնանկացման հավանականությունը մոտարկվում է՝ համաձայն կենտրոնական սահմանային թեորեմի՝ ստանդարտ նորմալ բաշխման միջոցով.

$$P(S \le u) \approx \Phi\left(\frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}\right),$$

որտեղ $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$-ը գումարյալ հայտի մեծությունն է, իսկ u-ն՝ ընկերության ակտիվները:

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե որպես ապահովագրավճար վերցնենք նետտո ապահովագրավճարը, ապա սնանկացման հավանականությունը կլինի 0.5, իսկ դա բիզնեսի համար անընդունելի է:

Անհատական հավելավճարի սահմանման մեթոդները բազմազան են, դրանց քանակը մոտ է մեկ տասնյակի, սակայն այստեղ ներկայացված են դրանցից առավել հաճախ օգտագործվող տարբերակները: Ընդհանուր հավելավճարի համար α հավանականությամբ չսնանկանալու դեպքում ընդհանուր ռիսկային հավելումը՝

$l = x_\alpha \cdot \sqrt{VarS}$, որտեղ x_α-ն ստանդարտ նորմալ բաշխման α քվանտիլն է: Ընդհանուր հավելավճարը պետք է տրոհել ապահովագրված անձանց միջև և ստանալ անհատական հավելավճարի մեծությունը:

Մոդելների ուսումնասիրման համար ներմուծենք հետևյալ մեծությունները.

- l_i- i-րդ պայմանագրի գծով ռիսկային հավելում,
- $\theta_i = \frac{l_i}{E\xi_i}$- i-րդ պայմանագրի գծով հարաբերական ռիսկային հավելում,
- k- համամասնության գործակից,
- p_i- i-րդ պայմանագրի գծով նետտո ապահովագրավճար:

Սպասվող վնասի կամ նետտո ապահովագրավճարի համամասնությամբ մոդել

$$l_i = k \cdot E\xi_i$$

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{ES}$$

$$\theta_i = k$$

$$\mathrm{p}_i = E\xi_i \left(1 + x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{ES}\right)$$

Դիսպերսիայի համամասնությամբ մոդել

$$l_i = k \cdot Var\xi_i$$

$$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}}$$

$$\theta_i = \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \cdot \frac{Var\xi_i}{E\xi_i}$$

$$\mathrm{p}_i = E\xi_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \cdot Var\xi_i$$

Միջին քառակուսային շեղման համամասնությամբ մոդել

$$l_i = k \cdot \sqrt{Var\xi_i}$$

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{Var\xi_i}}$$

$$\theta_i = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{Var\xi_i}} \cdot \frac{\sqrt{Var\xi_i}}{E\xi_i}$$

$$\mathrm{p}_i = E\xi_i + x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{Var\xi_i}} \cdot \sqrt{Var\xi_i}$$

Խնդիրներ

8.1. Հայտնի է, որ 1 տարի տևողությամբ կյանքի ապահովագրության պայմանագրի համար ապահովագրական գումարը 100,000 պ.մ. է, իսկ 1 տարվա ընթացքում ապահովադրի մահանալու հավանականությունը՝ 0.0025: Գտնել այդ պայմանագրի գծով հատուցումների վարիացիայի գործակիցը:

8.2. Գտնել 1 տարի տևողությամբ կյանքի ապահովագրության պայմանագրի համար հատուցումների միջին արժեքն ու վարիացիայի գործակիցը, եթե ապահովագրական գումարը կախված է մահման պատճառից: Դժբախտ պատահարից մահանալու դեպքում ապահովագրական գումարը կազմում է 500,000 պ.մ., իսկ բնական պատճառներից մահանալու դեպքում՝ 100,000 պ.մ.: Դժբախտ պատահարից մահանալու հավանականությունը 0.0005 է, իսկ բնական պատճառներից մահանալու հավանականությունը՝ 0.002:

8.3. Ապահովագրական պայուսակը կազմված է կյանքի ապահովագրության 4 միանման պայմանագրերից: Ապահովագրական գումարը կախված է մահվան պատճառից: Եթե մահը տեղի է ունեցել դժբախտ պատահարի արդյունքում, ապա հատուցվում է 250,000 պ.մ., իսկ բնական պատճառներից մահվան դեպքում ապահովագրական գումարը կրկնապատկվում է: Հայտնի է նաև, որ ապահովագրված յուրաքանչյուր անձի կյանքի տևողությունն անկախ է մյուսներից, և մեկ տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից մահվան հավանականությունը 0.1 է, իսկ այլ պատճառներից մահվան հավանականությունը՝ 0.1:

Գտնել գումարյալ հատուցման բաշխումը՝ կիրառելով մատրիցների եղանակը:

8.4. Ապահովագրական պայուսակը կազմված է կյանքի ապահովագրության 4 միանման պայմանագրերից: Ապահովագրական գումարը կախված է մահվան պատճառից: Եթե մահը տեղի է ունեցել դժբախտ պատահարի արդյունքում, ապա հատուցվում է 250,000 պ.մ., իսկ բնական պատճառներից մահվան դեպքում ապահովագրական գումարը կրկնապատկվում է: Հայտնի է նաև, որ ապահովագրված յուրաքանչյուր անձի կյանքի տևողությունն անկախ է մյուսներից, և մեկ տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից մահվան հավանականությունը 0.1 է, իսկ բնական պատճառներից մահվան հավանականությունը՝ 0.1: Գտնել գումարյալ հատուցման բաշխումը՝ կիրառելով ծնորդ ֆունկցիայի եղանակը:

8.5. Ապահովագրական ընկերությունում 3,000 անձ կնքել է կյանքի ապահովագրության պայմանագիր՝ 1 տարի տևողությամբ: Ապահովագրական ընկերությունը վճարում է 250,000 պ.մ., եթե անձը մահանա 1 տարվա ընթացքում, և չի վճարում ոչինչ, եթե այդ անձը գոյատևի մինչև տարվա վերջը: Մեկ տարվա ընթացքում մահանալու հավանականությունը 0.3% է:
Գտնել գումարյալ ապահովագրավճարը, որը բավարար կլինի ապահովելու 95% չսնանկանալու հավանականություն:

8.6. Ապահովագրական ընկերությունում 10,000 անձ կնքել է կյանքի ապահովագրության պայմանագիր՝ 1 տարի տևոդությամբ, հետևյալ պայմաններով՝ ապահովագրական ընկերությունը վճարում է 1,000,000 պ.մ., եթե անձը մահանա 1 տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից, վճարում է 250,000 պ.մ., եթե անձը մահանա բնական պատճառներից, և չի վճարում ոչինչ՝ հակառակ դեպքում: Հայտնի է, որ մոտակա մեկ տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից մահանալու հավանականությունը նույնն է բոլոր ապահովադիրների համար և հավասար է 0.0005-ի, իսկ բնական պատճառներից մահանալու հավանականությունը կախված է տարիքից: Այդ պատճառով ապահովադիրներին բաժանել են 2 տարիքային խմբի՝ առաջին խմբում ներառված է 4,000 անձ, որոնցից յուրաքանչյուրի՝ բնական պատճառներից մահանալու հավանականությունը 0.004 է, իսկ երկրորդ խմբում ներառված է 6,000 անձ՝ 0.002 մահանալու հավանականությամբ: Յուրաքանչյուր խմբի անդամի համար գտնել ապահովագրավճարի չափը, որը բավարար կլինի, որպեսզի ապահովագրական ընկերությունը 95% հավանականությամբ և առանց լրացուցիչ միջոցներ ներգրավելու կատարի իր պարտավորությունները: Ապահովագրական հավելավճարը վերցնել համամասնական նետտո ապահովագրավճարին:

8.7. Ապահովագրական ընկերությունում 10,000 անձ կնքել է կյանքի ապահովագրության պայմանագիր՝ 1 տարի տևողությամբ, նշված պայմաններով՝ ապահովագրական ընկերությունը վճարում է 1,000,000 պ.մ., եթե անձը մահանա 1 տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից, վճարում է 250,000 պ.մ., եթե անձը մահանա բնական պատճառներից, և չի վճարում ոչինչ՝ հակառակ դեպքում: Հայտնի է, որ մոտակա մեկ տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից մահանալու հավանականությունը նույնն է բոլոր ապահովադիրների համար և հավասար է 0.0005-ի, իսկ բնական պատճառներից մահանալու հավանականությունը կախված է տարիքից: Այդ պատճառով ապահովադիրներին բաժանել են 2 տարիքային խմբի՝ առաջին խմբում ներառված է 4,000 անձ, որոնցից յուրաքանչյուրի՝ բնական պատճառներից մահանալու հավանականությունը 0.004 է, իսկ երկրորդ խմբում ներառված է 6,000 անձ՝ 0.002 մահանալու հավանականությամբ: Յուրաքանչյուր խմբի անդամի համար գտնել ապահովագրավճարի չափը, որը բավարար կլինի, որպեսզի ապահովագրական ընկերությունը 95% հավանականությամբ, առանց լրացուցիչ միջոցների ներգրավելու, կատարի իր պարտավորությունները: Ապահովագրական հավելավճարը վերցնել համամասնական հատուցումների վարիացիային:

8.8. Ապահովագրական ընկերությունում 10,000 անձ կնքել է կյանքի ապահովագրության պայմանագիր՝ 1 տարի տևողությամբ, նշված պայմաններով՝ ապահովագրական ընկերությունը վճարում է 1,000,000 պ.մ., եթե անձը մահանա 1 տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից, վճարում է 250,000 պ.մ., եթե անձը մահանա բնական պատճառներից, և չի վճարում ոչինչ՝ հակառակ դեպքում: Հայտնի է, որ մոտակա 1 տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից մահանալու հավանականությունը նույնն է բոլոր ապահովադիրների համար և հավասար է 0.0005-ի, իսկ բնական պատճառներից մահանալու հավանականությունը կախված է տարիքից: Այդ պատճառով ապահովադիրներին բաժանել են 2 տարիքային խմբի՝ առաջին խմբում ներառված է 4,000 անձ, որոնցից յուրաքանչյուրի՝ բնական պատճառներից մահանալու հավանականությունը 0.004 է, իսկ երկրորդ խմբում ներառված է 6,000 անձ՝ 0.002 մահանալու հավանականությամբ: Յուրաքանչյուր խմբի անդամի համար գտնել ապահովագրավճարի չափը, որը բավարար կլինի, որպեսզի ապահովագրական ընկերությունը 95% հավանականությամբ, առանց լրացուցիչ միջոցներ ներգրավելու, կատարի իր պարտավորությունները: Ապահովագրական հավելավճարը վերցնել համամասնական հատուցումների միջին քառակուսային շեղմանը:

8.9. Ապահովագրական ընկերությունն առաջարկում է 1 տարի տևողություն ունեցող կյանքի ապահովագրության պայմանագրեր: Հատուցման մասին տեղեկությունն ամփոփված է ստորև ներկայացված աղյուսակում:

Ապահովագրական գումար	**Մահվան պատճառ**	**Հավանականություն**
500,000	Բնական	0.10
1,000,000	Դժբախտ պատահար	0.01

Հարաբերական հավելավճարը հավասար է 20%-ի: Ենթադրելով, որ ապահովագրական պայմանագրերն անկախ են իրարից և գումարային հատուցումների բաշխման համար ապահովագրողն օգտագործում է նորմալ բաշխման մասին ենթադրությունը, գտնել՝ որքան պայմանագիր պետք է կնքի ապահովագրական ընկերությունը, որպեսզի հավաքագրված ապահովագրավճարը 95% հավանականությամբ ծածկի գումարային հատուցումները:

8.10. Կազմակերպությունը ցանկանում է կնքել խմբային ապահովագրության պայմանագիր իր աշխատակիցների համար: Աշխատողների մասին տեղեկությունն ամփոփված է ստորև ներկայացված աղյուսակում:

Մասնագիտական դաս	**Աշխատակիցների քանակ**	**Ապահովագրական գումար**	**Մահվան հավանականություն**
1	100	1	0.1
2	100	1	0.2
3	200	2	0.1
4	200	2	0.2

Կազմակերպության ղեկավարությունը ենթադրում է ապահովագրական ֆոնդ ներդնել սպասվող ապահովագրական հատուցումներին հավասար գումար: Աշխատակիցներից յուրաքանչյուրն իր հերթին պետք է ներդնի սպասվող ապահովագրական հատուցումների որոշակի p մասնաբաժնին համարժեք գումար: Այդ մասնաբաժնի չափը սահմանվում է այնպես, որ 95% հավանականությամբ ապահովագրական ֆոնդի միջոցները բավարար լինեն ապահովագրական հատուցումները կատարելու համար:

Գտնել 4-րդ մասնագիտական դասի աշխատակիցների համար ներդրման չափը:

Պատասխաններ

Գլուխ 1

1.1. 0.007242:

1.2. Ոչ:

1.3. 0.125:

1.4. ա) 233, բ) 178.71:

1.5. 0.16:

1.6. 19.94:

1.7.

Տարիք	l_x	d_x	q_x
0	1,000	700	0.7
1	300	90	0.3
2	210	84	0.4
3	126	126	1

1.9. ա) Սխալ է, բ) Ճիշտ է:

1.10. 0.06857:

1.11. ա) $\frac{l_{45}}{l_{20}}$, բ) $\frac{l_{25}}{l_{20}}$, գ) $\frac{l_{25}-l_{26}}{l_{20}}$, դ) $\frac{l_{60}}{l_{20}}$, ե) $1-\left(\frac{l_{60}}{l_{20}}\right)^2$:

1.12. 0.736903:

1.13. 0.13043:

1.14. 0.5:

1.15. ա)$4\left(\frac{l_{60}}{l_{30}}\right)^3\left(\frac{l_{50}-l_{55}}{l_{30}}\right)$,

բ) $1-\left(\frac{l_{60}}{l_{30}}\right)^4-4\left(\frac{l_{60}}{l_{30}}\right)^3\left(\frac{l_{30}-l_{60}}{l_{30}}\right)$:

1.16. ա) 0.95, բ) 0.0975, գ) 0.01073, դ) 0.0486:

1.17. 0.16:

1.18. 0.32:

1.19. ա) 90, բ) 90, գ) 0.2857, դ) 0.1385:

1.20. ա) 0.5, բ) 80:

1.21. 0.05:

1.22. 0.6:

1.23. 0.375:

1.24. 970:

1.25. 67.5:

1.26. $1 + y$:

1.27. 45:

1.28. 0.0123:

Գլուխ 2

2.1. $s(x) = \frac{x+a}{a} e^{-x/a}$:

2.2. 0.13333:

2.3. $\frac{x^2}{4}$:

2.4. 1.2026:

2.5. $\frac{1}{30}$:

2.6. ա) 0.9983, բ) 0.99154, գ) 0.00170,
դ) 0.00846, ե) 0.00169, զ) 0.00505:

2.7. 0.03:

2.8. 0.4057:

2.9. $F(x) = 1 - e^{-x^2}, f(x) = 2xe^{-x^2}, s(x) = e^{-x^2}$:

2.10. 41:

2.11. 0.35:

2.12. 0.70469:

2.13. 0.02637:

2.14. 0.9751:

2.15. $\frac{2x+1}{10,000-x^2}$:

2.16. $1-\sqrt{1-q_x^{\text{տ}}}$:
2.17. $-\ln(p_x)$:
2.18. Չի բավարարվում $\int_0^{\infty}\mu_u du=+\infty$ պայմանը:
2.19. Այո:
2.20. Այո:
2.21. Չի բավարարվում $\int_0^{\infty}\mu_u du=+\infty$ պայմանը:
2.22. Այո:
2.23. Չի բավարարվում $\int_0^{\infty}\mu_u du=+\infty$ պայմանը:
2.24. Այո:
2.25. 0.086023:
2.26. 0.2256:
2.27. 0.5677:
2.28. 0.3333:
2.29. 5.9657:
2.30. 150:
2.31. 5.24:
2.32. 11.7835:

Գլուխ 3

3.1. 0.11513:
3.2. $\frac{1}{18}$:
3.3. 0.25:
3.4. 0.02012:
3.5. $\frac{1}{45}$:
3.6. 3,928.57:
3.7. 0.011976:
3.8. 0.25:
3.9. 0.6831:

3.10. 0.01947:

3.11. ա) 97,615, բ) 96,730, գ) 96,223:

3.12. ա) 1,000, բ) 0, գ) $8\frac{1}{3}$, դ) 0.77 ե) 0.3,

զ) 0.05263, է) 0.07465:

3.13. 0.2z:

3.14. 0.8:

3.15. 0.01263:

3.16. 0.08885:

3.17. 0.063533:

3.18. 0.1205:

3.19. 1.06:

Գլուխ 4

4.1. 52.4386:

4.2. 15.599:

4.3. 2.71828:

4.4. 0.040822:

4.5. $\frac{1}{60}$:

4.6. ա) 0.0084, բ) 40:

4.7. 2.5:

4.8. 90,000:

4.9. 108:

4.10. 60:

4.11. 33.75:

4.12. 3.67:

4.13. 7:

4.14. $\frac{a}{a+1}$:

4.15. 40:

4.16. 15:

4.17. $41\frac{2}{3}$:

4.18. 110:

4.19. 0.909:

4.20. Կնվազի 2.5% -ով:

4.21. 0.940975:

4.22. 32.61213:

4.24. 3,737.5:

4.25. 675:

4.26. 98:

4.27. $533\frac{1}{3}$:

4.28. 115:

4.29. ա) 0.3064, բ) 0.77687, գ) 20, դ) 400:

4.30. 40:

4.31. $133\frac{1}{3}$:

4.32. 9.4:

4.33. 0.8047:

Գլուխ 5

5.1. 52.4386:

5.2. 22.0575:

5.3. 50:

5.4. 0.8047:

5.5. 9.5123:

5.6. 48.755:

5.7. 19.6186:

5.8. 0.07278:

5.9. 35.02583:

5.10. 0.8:

5.11. $146\frac{2}{3}$:

5.12. ա) 0.5, բ) 0.25, գ) $\frac{\ln(2)}{2}$:

Գլուխ 6

6.1. 0.3:

6.2. 0.06351:

6.3. 0.059375:

6.4. 0.051282:

6.5. 0.051282:

6.6. -0.000067:

6.7. 0.01315:

6.8. ա:

6.9. ա) 0.5, բ) 0.5, գ) 2:

6.10. 0.07742:

6.11. 0.1183:

6.12. 0.0442:

6.13. 0.044:

6.14. ա) 0.0426, բ) 0.0435, գ) 0.0619:

6.15. ա) $l_{97} = 360$, $l_{98} = 216$,
$q_{95} = q_{96} = q_{97} = 0.4$,
բ) 278.85:

6.16. 0.901451:

6.17. 0.02654:

6.18. 0.4:

6.19. 1.477305:

6.20. 1.45472:

6.21. 1.394375:

6.22. 0.5:
6.23. 0.05:
6.24. $\frac{1}{9}$:
6.25. 0.8:
6.26. 0.980208:
6.27. 0.047250:
6.28. 0.5239:
6.29. բ:
6.30. $B < C < U$:
6.31. -0.03629:
6.32. $\frac{3}{16}$:
6.33. 0.25:
6.34. ա:
6.35. բ:
6.36. 0.100966:
6.37. 1.755:
6.38. Բոլորը ճիշտ են:
6.39. 85.29:

Գլուխ 7

7.1. 11,279.53:
7.2. 0.02992:
7.3. 27.997:
7.4. 0.142007:
7.5. 43.3726:
7.6. 84:
7.7. 998,350:
7.8. 0.8669472:

7.9. 1.336:

7.10. 10.18:

7.11. 36,944:

7.12. 0.458866:

7.13. 0.002681:

7.14. 0.0785:

7.15. ա) 1,564.63, բ) 862.5:

7.16. $\beta_0 = 0.081644$, $\beta_1 = 0.001653$:

7.17. 5.3894:

7.18. 45.5:

7.19. $422 \cdot 10^{-5}$:

7.20. ա:

7.21. 84:

7.22. 0.0103:

Գլուխ 8

8.1. 20:

8.2. 450 պ.մ., 26.76:

8.5. 3,483,750 պ.մ.:

8.6. 2,034 պ.մ., 1356 պ.մ.:

8.7. 1,975 պ.մ.,1,396 պ.մ.:

8.8. 1,951 պ.մ.,, 1,412 պ.մ.:

8.9. 590:

8.10. 0.0658:

РЕЗЮМЕ

Актуарная математика. Задачник. Часть-1

Задачник включает в себя общие материалы для проведения лекций и практических занятий по курсу «Основы актуарной математики», который является частью предмета «Математика страхования жизни». В каждом разделе кратко представлены физический смысл рассматриваемых величин, связь с другими величинами, характеризующими продолжительность жизни, формулы, часто используемые в актуарной математике, международные актуарные обозначения и задачи по соответствующим темам.

Настоящее пособие предназначено для преподавателей, ведущих лекции и практические занятия по предмету «Математика страхования жизни», а также для студентов, обучающихся по специальности актуарная математика.

SUMMARY

Actuarial Mathematics. Problem Book. Part 1

The problem book includes general materials for conducting lectures and practical lessons on the course "Fundamentals of Actuarial Mathematics," which is part of the subject "Mathematics of Life Insurance." Each section briefly presents the physical meaning of the discussed quantities, their relationship with other quantities that characterize life expectancy, formulas commonly used in actuarial mathematics, international actuarial notations, and problems related to the corresponding topics.

This manual is intended for lecturers conducting lectures and practical lessons on the course "Mathematics of Life Insurance," as well as for students studying actuarial mathematics.

Առաջարկվող գրականության ցանկ

[1]. Бауэрс, Н. и др. "Актуарная Математика". Москва, 2001.

[2]. Гербер, Х. "Математика страхования жизни". Москва, 1995.

[3]. Фалин, Г.И. и Фалин, А.И. "Актуарная математика в задачах". Москва : Физматлит, 2003. ISBN 5-9221-0451-9.

[4]. Фалин, Г.И. "Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем". изд.3-е. Москва : Анкил, 2007. ISBN 978-5-86476-235-6.

[5]. Anderson, A.W. "Pension Mathematics for Actuaries". 2nd edition. Winsted, Connecticut : ACTEX Publications, 1992.

[6]. Dickson, D.C.M, Hardy, M.R. and Waters, H.R. "Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks": Cambridge University Press, 2009.

[7]. "Formulae and Tables for Examinations". UK : The Faculty of Actuaries and The Institute of Actuaries, 2002. ISBN 0 901066 57 5.

[8]. Jordan, C.W.Jr. "Life Contingencies". Chicago, Illinois : The Society of Actuaries, 1975.

[9]. Norberg, N. "Basic Life Insurance Mathematics". 2002.

[10]. Parmenter, M.M. "Theory of Interest and Life Cintingencies with Pension Applications".: ACTEX Publications, 1999. ISBN 1-56698-333-9.

[11]. Weishaus, Abraham. "Study Manual for SOA Exam MLC Life Contingencies". Tenth Edition. USA : A.S.M., 2010.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Անահիտ Գևորգի Գուլյան
Ելենա Արկադիի Գևորգյան

ԱԿՏՈՒԱՐԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ՄԱՍ-1

Պատ. խմբագիր՝ Լ. Հովհաննիսյան
Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Ա. Գույումջյանի

Հեղինակները հաստատում են, որ ծանոթ են «ԵՊՀ գրահրատարակչական քաղաքականությանը», և գրքում առկա փաստերը, դիրքորոշումները, կարծիքները շարադրված են հեղինակային իրավունքի և էթիկայի միջազգայնորեն ընդունված սկզբունքների պահպանմամբ:

Տպագրված է «ՄՌԱՎ ՊՐԻՆՏ» ՍՊԸ-ում:
Կոտայքի մարզ, Ջրվեժ, գ. Ձորաղբյուր, 99 թաղ, 41

Ստորագրված է տպագրության՝ 25.11.2024:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլը՝ 5.875:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2024
publishing.ysu.am