

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՆԱՄԱՆԱԲԱՆ

Յուրի Նալոբյան

ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՏԱՐԻՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՆԱՐԱՆ

ՅՈՒՐԻ ՀԱԿՈՒՅԱՆ

ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԱՆԱԼԻԶԻ
ՏԱՐԻԵՐ

Ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2022

ՀՏԳ- 512.643 (07)

ԳՄԳ- 22.143g7

Հ 177

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը:*

Մասն. խմբագիր՝ ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Ս.Լ. Սահակյան

Հակոբյան Յու.Ռ.

Հ 177 Մատրիցային անալիզի տարրեր/Հակոբյան Յու.Ռ.: -Եր., ԵՊՀ հրատ.,
2022, 224 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկում համառոտակի շարադրվում են մատրիցների տեսության այն բաժինները, որոնք լայն կիրառություն ունեն ինչպես մաթեմատիկայի ցանկացած ոլորտում, այնպես էլ բազմաթիվ գործնական խնդիրներ լուծելիս: Ներկայացված նյութը կարելի է դիտարկել որպես գծային հանրահաշվի ավանդական դասընթացի լրացում:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է համալսարանների մաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների, մագիստրանտների և ասպիրանտների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև մաթեմատիկայով և նրա կիրառություններով հետաքրքրվող հարակից ոլորտների մասնագետներին:

Yu.R. Hakopian, *Elements of Matrix Analysis*, YSU Press, Yerevan, 2022, 224 pp.

Ю.Р. Акопян, *Элементы матричного анализа*, Издательство ЕГУ, Ереван, 2022, 224 стр.

ՀՏԳ- 512.643 (07)

ԳՄԳ- 22.143g7

ISBN 978-5-8084-2559-0

© ԵՊՀ հրատ., 2022

© Հակոբյան Յու.Ռ., 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ	7
Գլուխ 1. ՆԵՐԱԾԱԿԱՆ ՄԱՍ-1	9
1.1 Վեկտորական տարածություններ	9
1.2 Մատրիցներ	12
1.3 Սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ	21
1.4 Վանդակային մատրիցներ	25
Խնդիրներ և վարժություններ - 1	27
Գլուխ 2. ՆԵՐԱԾԱԿԱՆ ՄԱՍ-2	31
2.1 Մատրիցի միջուկը և պատկերը	31
2.2 Մատրիցների նմանությունը	35
2.3 Կոնգրուենտ մատրիցներ	38
2.4 Սեփական արժեքների պատիկությունը	40
Խնդիրներ և վարժություններ -2	43
Գլուխ 3. ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴԱՍԵՐ	45
3.1 Հերմիտյան և սիմետրիկ մատրիցներ	45
3.2 Դրական որոշյալ և դրական կիսաորոշյալ մատրիցներ	48
3.3 Ունիտար և օրթոգոնալ մատրիցներ	49
3.4 Պարզ կառուցվածքի մատրիցներ	53
3.5 Նորմալ մատրիցներ	57
3.6 Շուրի լրացումը	61
Խնդիրներ և վարժություններ -3	65
Գլուխ 4. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԵՎ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՆՈՐՄԵՐ	69
4.1 Վեկտորների նորմեր	69
4.2 Մատրիցային նորմեր	71
4.3 Չուգամիտություն նորմավորված տարածություններում	74
4.4 Մատրիցի պայմանավորվածության թիվ	77
4.5 Վերապայմանավորման խնդիրը	82

Խնդիրներ և վարժություններ - 4	86
Գլուխ 5. ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՈՒՆՆԵՐ	89
5.1 Մատրիցի բերումը անկյունագծային տեսքի	89
5.2 Շուրի վերլուծությունը	95
5.3 Մատրիցի LU վերլուծությունը	100
5.4 Խոլեսկու վերլուծությունը	103
5.5 Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը	107
5.6 Մատրիցի QR վերլուծությունը	111
Խնդիրներ և վարժություններ - 5	113
Գլուխ 6. ՄԱՏՐԻՑԻ ՍԻՆԳՈՒԼԱՐ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ	117
6.1 Մատրիցի սինգուլյար թվեր	117
6.2 Սինգուլյար վերլուծությունը	120
6.3 Սինգուլյար թվերի երկրաչափական մեկնաբանությունը	125
6.4 Ցածր ռանգի մատրիցներից հեռավորությունները	127
6.5 Մատրիցի թվային ռանգի որոշումը	130
6.6 Մատրիցի վերլուծումն ըստ «օրթոգոնալ ուղղությունների»	131
Խնդիրներ և վարժություններ - 6	133
Գլուխ 7. ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՒԶԻ ՀԱՎԱԳԱՐՉՈՒՄ	135
7.1 Փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը	135
7.2 Փսևդոհակադարձ մատրից	137
7.3 Փսևդոհակադարձման ընդհանուր բանաձևը	141
7.4 Պենրուզի հավասարումները	145
7.5 Մատրիցի կմախքային վերլուծության օգտագործումը	147
7.6 Աղյուսակով տրված ֆունկցիաների մոտարկումը	149
Խնդիրներ և վարժություններ - 7	152
Գլուխ 8. ՊՐՈՅԵԿՏՄԱՆ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ	155
8.1 Իդեմպոտենտ մատրիցներ	155
8.2 Պրոյեկտորներ	158
8.3 Պրոյեկցիա ենթատարածության վրա	159
Խնդիրներ և վարժություններ - 8	161
Գլուխ 9. ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՏԵՂԱՅՆԱՑՈՒՄ	163
9.1 Գերշգորիմի շրջանները	163
9.2 Անկյունագծային գերիշխումով մատրիցներ-1	168
9.3 Անկյունագծային գերիշխումով մատրիցներ-2	171

9.4 Մատրիցի գրաֆի խիստ կապակցվածության համարժեք բնութագրերը ...	174
9.5 Սեփական արժեքների խտտորումը	178
Խնդիրներ և վարժություններ - 9	181
Գլուխ 10. ՄԱՏՐԻՅԱՅԻՆ ԷՔՍՊՈՆԵՆՏ	183
10.1 Մատրիցային էքսպոնենտի հիմնական հատկությունները	183
10.2 Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր	187
10.3 Չանկյունագծացվող մատրիցների դեպքը	190
Խնդիրներ և վարժություններ - 10	191
Գլուխ 11. ՄԱՏՐԻՅՆԵՐԻ ԿՐՈՆԵԿԵՐՅԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼ	193
11.1 Կրոնեկերյան արտադրյալի հիմնական հատկությունները	193
11.2 Բաղադրված մատրիցների սեփական արժեքները	200
11.3 Սիլվեստրի մատրիցային հավասարումը	206
Խնդիրներ և վարժություններ - 11	208
Գլուխ 12. M-ՄԱՏՐԻՅՆԵՐ	209
12.1 M-մատրիցների սահմանումը	209
12.2 M-մատրիցների հիմնական հատկությունները	212
12.3 M-մատրիցների կիրառությունները	215
Խնդիրներ և վարժություններ - 12	218
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	219
ԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ՑԱՆԿ	221

ՆԱԽԱԲԱՆ

Մատրիցային հաշիվը մեծ կիրառություն ունի մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, մեխանիկայի և մյուս բնագիտական ոլորտայինների ոլորտներում: Դժվար է թերագնահատել նրա դերը հաշվողական ալգորիթմների կառուցման գործում: Մատրիցային մեթոդներն արդեն վաղուց օգտագործվում են որպես հետազոտությունների հիմնական միջոց նաև բազմաթիվ կիրառություններում:

Վերջին տասնամյակներում մաթեմատիկական գրականությունում գործածության մեջ է մտել *մատրիցային անալիզ* եզրույթը: Այս անվան տակ սկսեցին հասկանալ գծային հանրահաշվի ավանդական դասընթացից դուրս գտնվող մատրիցների տեսության այն բաժինները, որոնցում ակտիվորեն օգտագործվում են մաթեմատիկական անալիզին և ֆունկցիոնալ անալիզին բնորոշ հասկացությունները՝ հաջորդականություններ, սահմաններ, զուգամիտություն, անընդհատություն, շարքեր, նորմեր, օպերատորներ և այլն: Այսպիսով, *մատրիցային անալիզ* եզրույթը ավելի ճշգրիտ է արտահայտում մատրիցների տեսության դիտարկվող բաժինների էությունը և մեթոդաբանությունը:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է համալսարանների մաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների, մագիստրանտների և ասպիրանտների համար: Ներկայացված նյութն ընկալելու համար ընթերցողից պահանջվում է գծային հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի հիմունքների իմացություն: Յուրաքանչյուր գլուխ պարունակում է օրինակներ, վարժություններ և խնդիրներ, որոնք գրքի էական մաս են կազմում և նախատեսված են օժանդակելու մատրիցային անալիզի հիմունքները ավելի լավ հասկանալուն: Ձեռնարկը կարող է օգտակար լինել նաև մաթեմատիկայով և նրա կիրառություններով հետաքրքրվող հարակից ոլորտների մասնագետներին:

Առաջարկվող ձեռնարկը ոչ մի դեպքում չի հավակնում նյութի համապարփակության: Այն պարզապես կիրառություններում հաճախ օգտագործվող մատրիցային անալիզի որոշ բաժինների և ասպեկտների համառոտ շարադրանքի փորձ է:

Գրքի հիմնական նյութը բաշխված է հետևյալ կերպ:

1-ին և 2-րդ գլուխները ներածական բնույթի են: Նրանցում տրվում են մի շարք հիմնական սահմանումներ և պնդումներ, որոնց վրա է հենված գրքի հիմնական նյութը:

3-րդ գլխում նկարագրվում են որոշակի տիպի մատրիցներ՝ հերմիտյան, դրական որոշյալ, ունիտար և այլն, որոնք հաճախ են հանդիպում ամենատարբեր կիրառական խնդիրներ լուծելիս և հաշվողական ալգորիթմներ կառուցելիս: Սահմանվում են պարզ կառուցվածքի մատրիցները և նորմալ մատրիցները, դուրս են բերվում դրանց հատկությունները:

4-րդ գլխում ներմուծվում է նորմի հասկացությունը՝ կապված վեկտորների և մատրիցների հետ: Սահմանվում է մատրիցի պայմանավորվածության թիվը, բացահայտվում է նրա դերը գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման գործում:

5-րդ գլուխը նվիրված է մատրիցային վերլուծություններին՝ անկյունագծային ձևի մատրիցի բերմանը, Շուրի վերլուծությանը, *LU*-վերլուծությանը, Խոլեսկո վերլուծությանը և *QR*-վերլուծությանը: Բերվում են այդպիսի վերլուծությունների կիրառության օրինակներ գծային հանրահաշվի թվային մեթոդների կառուցման ժամանակ:

6-րդ գլխում դիտարկվում է առավել հայտնի և լայնորեն կիրառելի մատրիցային վերլուծություններից մեկը՝ սինգուլյար վերլուծությունը, որն ունի կարևոր տեսական և գործնական նշանակություն:

7-րդ գլուխը նվիրված է Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձմանը, որը սովորական մատրիցային հակադարձման ընդհանրացումն է: Մուր-Պենրոուզի հակադարձի միջոցով է լուծվում փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի համար:

8-րդ գլխում համառոտ նկարագրվում են, այսպես կոչված, պրոյեկտորները՝ հատուկ տեսքի մատրիցները, որոնք երկրաչափորեն կարող են մեկնաբանվել վեկտորները ենթատարածությունների վրա պրոյեկտելու իմաստով:

9-րդ գլուխը նվիրված է մատրիցի սեփական արժեքների տեղայնացման խնդրին: Բերվում է Գերշտրեյնի հայտնի թեորեմը: Նրա հիման վրա ուսումնասիրվում է անկյունագծային գերիշխմամբ մատրիցների չվերասերվածության հարցը:

10-րդ գլխում տրվում է մատրիցային էքսպոնենտի սահմանումը: Դուրս են բերվում նրա հիմնական հատկությունները և բերվում են որոշ կիրառություններ:

11-րդ գլխում սահմանվում է կրոնեկերյան արտադրյալը՝ հատուկ գործողություն մատրիցների նկատմամբ, որը թույլ է տալիս բարդ մատրիցային արտահայտությունները որոշ դեպքերում գրել կոմպակտ ձևով: Ներկայացվում է կրոնեկերյան արտադրյալի կիրառություն մատրիցային հավասարումների լուծման ժամանակ:

12-րդ գլուխը նվիրված է կիրառություններում շատ կարևոր *M*-մատրիցներին:

Գրքի վերջում տրվում է օգտագործված գրականության ցանկը: Այստեղ մեջբերված դասագրքերն ու մենագրությունները խորհուրդ է տրվում առարկայի առավել խորը ուսումնասիրության համար:

Սահմանումների, պնդումների, դիտողությունների, օրինակների, նկարների և բանաձևերի համարակալումը ամեն պարագրաֆում ինքնավար է: Ապացույցները, դիտողությունները և օրինակները ավարտվում են □ նշանով:

Հեղինակը հատուկ շնորհակալություն է հայտնում մասնագետ խմբագիր, ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Ս.Լ.Սահակյանին ձեռնարկի բազում քննարկումների ընթացքում կատարած դիտողությունների և օգտակար առաջարկությունների համար, որոնք նպաստել են գրքի բովանդակության էական բարելավմանը:

Գլուխ 1

ՆԵՐԱԾԱԿԱՆ ՄԱՍ-1

Ներկա գլխում սեղմ տեսքով և հիմնականում առանց ապացույցների ներկայացվում են որոշ սահմանումներ և պնդումներ, որոնց վրա է հիմնվում ուսումնական ձեռնարկի հիմնական նյութը: Այդ գաղափարներն ու փաստերն ընդգրկված են գծային հանրահաշվի համալսարանական դասընթացի ծրագրում և դրանց հետ առավել մանրամասն ծանոթության համար ընթերցողը կարող է դիմել [7, 16] դասագրքերին:

1.1 Վեկտորական տարածություններ

Նշանակենք C^n -ով C կոմպլեքս թվերի բազմությունից բաղադրիչներով

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

վեկտորների (*վեկտոր-սյունիքի*) n -չափանի տարածությունը: Եթե վեկտորների բաղադրիչները վերցված են \mathbf{R} իրական թվերի բազմությունից, ապա համապատասխան վեկտորական տարածությունը կնշանակենք \mathbf{R}^n -ով:

Գործողություններ վեկտորների հետ

- Երկու վեկտորների գումար.

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} :$$

- Վեկտորի բազմապատկումը թվով.

$$\alpha x = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} :$$

Կասենք, որ e_1, e_2, \dots, e_k վեկտորների համակարգը *զծորեն անկախ է*, եթե

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k = 0$$

հավասարությունից հետևում է, որ $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$: Հակառակ դեպքում ասում են, որ համակարգի վեկտորները *զծորեն կախված են*:

n -չափանի վեկտորական տարածության n վեկտորներից բաղկացած կամայական զծորեն անկախ համակարգ անվանում են այդ տարածության *բազիս*: Եթե e_1, e_2, \dots, e_n համակարգը տարածության բազիս է, ապա ցանկացած x վեկտորը միարժեքորեն ներկայացվում է հետևյալ տեսքով.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n :$$

\mathbf{C}^n տարածությանը պատկանող

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

վեկտորների *սկալյար արտադրյալ* կանվանենք

$$(x, y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad (1.1.1)$$

թիվը (վերին գծիկը նշանակում է կոմպլեքս համալուծության գործողություն):

Դժվար չէ ստուգել, որ (1.1.1) բանաձևով ներմուծված սկալյար արտադրյալն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

$$\text{CS1. } (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\text{CS2. } (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad (1.1.2)$$

$$\text{CS3. } (\alpha x, y) = \alpha (x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbf{C},$$

$$\text{CS4. } (x + y, z) = (x, z) + (y, z):$$

Այնուհետև, **CS2** և **CS3** հատկություններից հետևում է, որ

$$(x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbf{C} \quad (1.1.3)$$

(այդ հավասարությունը կարելի է ստանալ անմիջապես (1.1.1)-ից):

Քանի որ կոմպլեքս թվերի բազմությունը իր մեջ ներառում է իրական թվերը, ապա սկալյար արտադրյալի (1.1.1) սահմանումը \mathbf{R}^n տարածությունում կընդունի

$$(x, y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i \tag{1.1.4}$$

տեսքը: Համապատասխանաբար (1.1.2) հատկությունները կգրվեն հետևյալ կերպ.

- RS1.** $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- RS2.** $(x, y) = (y, x),$ (1.1.5)
- RS3.** $(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R},$
- RS4.** $(x + y, z) = (x, z) + (y, z):$

Կասենք, որ x և y վեկտորները *օրթոգոնալ են*, եթե $(x, y) = 0$: Այնուհետև, x վեկտորը *նորմավորված է*, եթե $(x, x) = 1$: Մեկից ավելի վեկտոր պարունակող համակարգը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե նրա վեկտորները փոխօրթոգոնալ են: Նորմավորված վեկտորների օրթոգոնալ համակարգը անվանում են *օրթոնորմավորված*:

Թեորեմ 1.1.1 : Ցանկացած $x, y \in \mathbf{C}^n$ վեկտորների համար ճիշտ է

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \tag{1.1.6}$$

անհավասարությունը, ընդ որում՝ հավասարությունը (1.1.6)-ում տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ x և y վեկտորները գծորեն կախված են:

Նշենք, որ (1.1.6) անհավասարությունը կրում է *Կոշի¹ -Բունյակովսկի²-Շվարցի³* անհավասարություն անունը:

Ապացույց: Նախ ենթադրենք, որ $(x, y) \neq 0$ (հակառակ դեպքում թեորեմի պնդումը ակնհայտ է): Դիտարկենք t իրական փոփոխականի

$$f(t) \equiv (x + ty, x + ty) = \begin{aligned} &(x, x) + t(x, y) + t(y, x) + t^2(y, y) \\ &(x, x) + 2t\operatorname{Re}(x, y) + t^2(y, y) \end{aligned}$$

ֆունկցիան: Այն քառակուսի եռանդամ է: Ըստ սկալյար արտադրյալի **CS1** հատկության՝ $f(t) \geq 0$ կամայական t -ի համար: Այդ դեպքում $D \leq 0$, որտեղ D -ն $f(t) = 0$ քառակուսի հավասարման դիսկրիմինանտն է: Ունենք

$$D = 4(\operatorname{Re}(x, y))^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0,$$

¹Կոշի Օգյուստեն Լուի (1789-1857) – ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, կատարել է հիմնարար ներդրում մաթեմատիկական անալիզի, ֆունկցիաների տեսության և մաթեմատիկական ֆիզիկայի զարգացման գործում:

²Բունյակովսկի Վիկտոր Յակովլևիչ (1804-1889) – ռուս մաթեմատիկոս, հիմնական աշխատանքները վերաբերում են թվերի տեսությանը և հավանականությունների տեսությանը:

³Շվարց Կառլ Հերման (1843-1921) – գերմանացի մաթեմատիկոս, հիմնական աշխատությունները նվիրված են մաթեմատիկական անալիզին և երկրաչափությանը:

որտեղից հետևում է

$$(Re(x, y))^2 \leq (x, x)(y, y) \quad (1.1.7)$$

անհավասարությունը: Քանի որ այս անհավասարությունը տեղի ունի x, y վեկտորների կամայական զույգի համար, ապա մենք կարող ենք y վեկտորը փոխարինել $(x, y)y$ վեկտորով: Արդյունքում (1.1.7) անհավասարությունից կատանանք

$$(Re(x, (x, y)y))^2 \leq (x, x)((x, y)y, (x, y)y) \quad (1.1.8)$$

անհավասարությունը: Ունենք

$$Re(x, (x, y)y) = Re(\overline{(x, y)}(x, y)) = Re(|(x, y)|^2) = |(x, y)|^2,$$

$$((x, y)y, (x, y)y) = (x, y)\overline{(x, y)}(y, y) = |(x, y)|^2(y, y) :$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունները (1.1.8)-ի մեջ՝ հանգում ենք

$$|(x, y)|^4 \leq |(x, y)|^2(x, x)(y, y)$$

անհավասարությանը, որից անմիջապես բխում է (1.1.6)-ը:

Վերջապես, դժվար չէ տեսնել, որ (1.1.6) անհավասարության մեջ հավասարությունը հասանելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $x + ty = 0$ ինչ-որ ոչ զրոյական t -ի համար, այսինքն՝ երբ x և y վեկտորները գծորեն կախված են: \square

1.2 Մատրիցներ

Նշանակենք $C^{m \times n}$ -ով կոմպլեքս տարրերով $m \times n$ չափի

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

մատրիցների տարածությունը: Համապատասխանաբար, իրական տարրերով մատրիցների տարածությունը կնշանակենք $R^{m \times n}$ -ով: Եթե $m = n$, ապա A մատրիցը կոչվում է *n-րդ կարգի քառակուսի մատրից*: Ընդհանուր դեպքում մատրիցը կոչվում է *ուղղանկյուն մատրից*: Հետագայում (1.2.1) մատրիցի համար կօգտվենք մաս նրա համատու գրառումից.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} :$$

Նշենք, որ n -չափանի վեկտոր-սյուները կարելի է դիտարկել մաս որպես $n \times 1$ չափի մատրիցներ:

Առանձնացնենք մատրիցների հետևյալ տիպերը.

անկյունագծային մատրից՝ $A = \text{diag} [a_1, a_2, \dots, a_n]$,

միավոր մատրից՝ $I = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ (δ_{ij} -ն *Կրոնեկերի նշանն է*⁴),

զրոյական մատրից՝ $O = [z_{ij}]_{m \times n}$, որտեղ $z_{ij} = 0$ բոլոր i, j ինդեքսների համար:

Գործողություններ մատրիցների հետ

- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ և $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ մատրիցների գումար.

$$A + B = C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad \text{որտեղ } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} :$$

Գումարման հատկությունները.

- ◇ $A + B = B + A$,
- ◇ $A + (B + C) = (A + B) + C$,
- ◇ $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- ◇ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- ◇ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$:

- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ մատրիցի բազմապատկումը α թվով.

$$\alpha A = C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad \text{որտեղ } c_{ij} = \alpha a_{ij} :$$

- $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ և $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ մատրիցների արտադրյալ .

$$AB = C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad \text{որտեղ } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} :$$

Բազմապատկման հատկությունները.

- ◇ $A(BC) = (AB)C$,
- ◇ $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,
- ◇ $(A + B)C = AC + BC$,
- ◇ $C(A + B) = CA + CB$:

Գիցուք A -ն քառակուսի մատրից է: Կամայական p բնական թվի համար մատրիցի աստիճանը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$A^p \equiv \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_p :$$

Ընդ որում՝ ընդունենք, որ $A^0 = I$ ոչ զրոյական մատրիցի համար:

A և B մատրիցները կոչվում են *տեղափոխելի*, եթե $AB = BA$:

⁴Կրոնեկեր Լեոպոլդ (1823-1891) – գերմանացի մաթեմատիկոս, հիմնական աշխատանքները վերաբերում են թվերի տեսությանը և խմբերի տեսությանը:

Մատրիցի որոշիչ

$1, 2, \dots, n$ բնական թվերի կամայական դասավորությունը կոչվում է այդ թվերի *տեղափոխություն*: Հայտնի է, որ n թվերի տեղափոխությունների ընդհանուր քանակը հավասար է $n!$ -ի: Ասում են, որ տվյալ տեղափոխության մեջ i և j թվերը կազմում են *ինվերսիա*, եթե $i > j$, սակայն i -ն գտնվում է j -ից առաջ: Տեղափոխությունը կոչվում է *գույգ*, եթե նրա ինվերսիաների ընդհանուր թիվը գույգ է և *կենտ*՝ հակառակ դեպքում:

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի *որոշիչ* կոչվում է $n!$ թվերի հանրահաշվական գումարը, որը կազմվում է հետևյալ կերպ: Գումարելիները բոլոր հնարավոր արտադրյալներն են, որ կազմված են մատրիցի տարրերով՝ վերցված յուրաքանչյուր տողից և յուրաքանչյուր սյունից մեկական: Ընդ որում՝ $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ անդամը վերցվում է «+» նշանով, եթե j_1, j_2, \dots, j_n տեղափոխությունը գույգ է և «-» նշանով՝ հակառակ դեպքում:

Հետագայում A մատրիցի որոշիչը կնշանակենք որպես $\det A$:

Թվարկենք որոշիչների որոշ հատկություններ:

- ◇ *Եթե մատրիցի որևէ մի տող (սյուն) բաղկացած է գրոներից, ապա նրա որոշիչը հավասար է գրոյի:*
- ◇ *Որոշիչը հավասար է գրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ մատրիցի տողերը (սյուները) գծորեն կախված են:*
- ◇ *Որոշիչը չի փոխվում, եթե մատրիցի որևէ տողին (սյանը) գումարվում է մնացած տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիան:*
- ◇ *Եթե մատրիցի որևէ մի տող (սյուն) բազմապատկվում է ինչ-որ թվով, ապա որոշիչը նույնպես բազմապատկվում է այդ թվով:*
- ◇ *Եթե մատրիցում փոխվում են տեղերով երկու կամայական տող (սյուն), ապա որոշիչը փոխում է իր նշանը:*
- ◇ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$:
- ◇ $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$:

Մատրիցը կոչվում է *չվերասերված*, եթե $\det A \neq 0$ և *վերասերված*՝ հակառակ դեպքում:

Մինորներ և հանրահաշվական լրացումներ

Դիտարկենք (1.2.1)-ում բերված $m \times n$ չափի A մատրիցը:

A մատրիցի k -րդ կարգի *մինոր* կոչվում է այդ մատրիցի $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ համարներով տողերի և $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ համարներով սյունների հատման տեղերում գտնվող տարրերից կազմված մատրիցի որոշիչը և նշանակվում է հետևյալ կերպ.

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} :$$

Հետագա սահմանումները վերաբերում են $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ քառակուսի մատրիցներին:

Նույն համարի տողերով և սյուներով կառուցված միևնույն կոչվում է *գլխավոր* միևնույն.

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} :$$

Առաջին k տողերով և k սյուներով կառուցված գլխավոր միևնույն կոչվում է *անկյունային* միևնույն.

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} :$$

Ընտրելով A մատրիցի a_{ij} տարրը՝ ջնջենք այդ մատրիցի i -րդ տողը և j -րդ սյունը: Մնացած $n - 1$ կարգի M_{ij} միևնույն կոչվում է a_{ij} տարրի *լրացուցիչ միևնույն*: Այնուհետև, a_{ij} տարրի *հանրահաշվական լրացում* անվանում են հետևյալ թիվը.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} :$$

Հատկությունները.

$$\diamond \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

$$\diamond \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} :$$

Տրանսպոնացված և համալուծ մատրիցներ

Կասենք, որ $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$ մատրիցը *տրանսպոնացված* է $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ մատրիցի նկատմամբ, եթե $a_{ij} = a_{ji}$ բոլոր i, j ինդեքսների համար:

Տրանսպոնացման գործողության հատկությունները.

$$\diamond (A^T)^T = A,$$

$$\diamond (A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$\diamond (\alpha A)^T = \alpha A^T,$$

$$\diamond (AB)^T = B^T A^T,$$

$$\diamond \det A^T = \det A :$$

Կասենք, որ $A^* = [\alpha_{ij}]_{n \times m}$ մատրիցը $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ մատրիցի *համալուծ* է, եթե $\alpha_{ij} = \overline{a_{ji}}$ բոլոր i, j ինդեքսների համար:

Համալուծության գործողության հատկությունները.

$$\diamond (A^*)^* = A,$$

$$\diamond (A + B)^* = A^* + B^*,$$

$$\diamond (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*,$$

$$\diamond (AB)^* = B^* A^*,$$

$$\diamond \det A^* = \overline{\det A} :$$

1.1 պարագրաֆում ներմուծված (1.1.1) սկալյար արտադրյալը կարելի է ներկայացնել նաև մատրիցային գործողության միջոցով, այսինքն՝ այն գրել հետևյալ տեսքով.

$$(x, y) = y^* x : \quad (1.2.2)$$

Իրական դեպքում, համաձայն (1.1.4)-ի, կարող ենք գրել

$$(x, y) = y^T x : \quad (1.2.3)$$

Նշենք սկալյար արտադրյալի մեկ կարևոր հատկություն: Կամայական $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի և ցանկացած $x \in \mathbb{C}^n$ և $y \in \mathbb{C}^m$ վեկտորների համար

$$(Ax, y) = (x, A^* y) : \quad (1.2.4)$$

Ապացույցը շատ պարզ է: Իրոք, հաշվի առնելով (1.2.2) արտահայտությունը՝ ունենք

$$(Ax, y) = y^* Ax :$$

Մյուս կողմից՝

$$(x, A^* y) = (A^* y)^* x = y^* Ax :$$

Եթե A մատրիցն իրական է, ապա

$$(Ax, y) = (x, A^T y) : \quad (1.2.5)$$

Հակադարձ մատրից

Գծային հանրահաշվի դասընթացում ապացուցվում է, որ կամայական $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ չվերասերված մատրիցի համար գոյություն ունի միակ A^{-1} մատրից, որի համար

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I :$$

Նշված A^{-1} մատրիցը անվանում են A մատրիցի *հակադարձ* մատրից:

Հակադարձ մատրիցի համար տեղի ունի

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A} \quad (1.2.6)$$

ներկայացումը, որտեղ

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

մատրիցը, այսպես կոչված, *կցված* մատրից է: Նրա A_{ij} -րդ տարրը A մատրիցի a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումն է: Հակադարձ մատրիցի որոշելը անվանում են A մատրիցի *հակադարձում*:

Հակադարձ մատրիցի հատկությունները.

- ◇ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- ◇ $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$,
- ◇ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
- ◇ $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,
- ◇ $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$:

Մատրիցի ռանգ

Գծային հանրահաշվի դասընթացում ցույց է տրվում, որ կամայական $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի համար նրա գծորեն անկախ սյունների մաքսիմալ թիվը հավասար է գծորեն անկախ տողերի մաքսիմալ թվին:

A մատրիցի գծորեն անկախ սյունների (տողերի) մաքսիմալ թիվը կոչվում է այդ մատրիցի *ռանգ* և նշանակվում է որպես $\text{rank} A$: Ընդ որում՝ պարզվում է, որ մատրիցի զրոյից տարբեր միևնույնի ամենաբարձր կարգը հավասար է նրա ռանգին: Ըստ սահմանման՝ $\text{rank} 0 = 0$:

Մատրիցի ռանգի հատկությունները.

- ◇ $\text{rank}(\alpha A) = \text{rank} A \quad \forall \alpha \neq 0$,
- ◇ $\text{rank} A = \text{rank} A^T = \text{rank} A^*$,
- ◇ $\text{rank} A = \text{rank}(A^* A) = \text{rank}(A A^*)$,
- ◇ $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank} A + \text{rank} B$,
- ◇ $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank} A, \text{rank} B)$:

Մատրիցի հետք

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի *հետք* կոչվում է հետևյալ թիվը.

$$\text{tr} A \equiv \sum_{i=1}^n a_{ii} : \quad (1.2.7)$$

Մատրիցի հետքի հատկությունները.

- ◇ $\text{tr} A^T = \text{tr} A$,
- ◇ $\text{tr} A^* = \overline{\text{tr} A}$,
- ◇ $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr} A$,
- ◇ $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$:

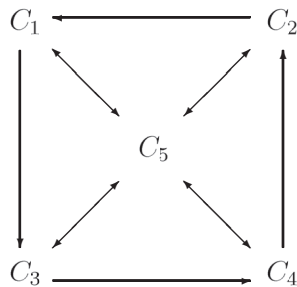
Պատմական տեղեկանք: Մատրիցների մասին առաջին հիշատակումներն, ըստ էության, *կախարդական քառակուսիներն են*, որոնք հանդիպում են չին հնագույն մաթեմատիկոսների աշխատանքներում: Մեզ հասած հիմնական մաթեմատիկական աշխատանքը «Թվաբանություն ինը գլխով» տրակտատն է, որը կազմվել է մ.թ.ա. 2-րդ

դարում այդ ժամանակաշրջանի գիտնական և պետական գործիչ *Չժան Ցանի* կողմից: Նման քառակուսիները հայտնի էին նաև VIII-X դդ. արաբ մաթեմատիկոսներին:

Մատրիցների տեսությունը, որպես մաթեմատիկայի առանձին ուղղություն, սկսեց բուռն զարգացում ապրել XIX դարի կեսերին իռլանդացի մաթեմատիկոս *Ուիլյամ Չամիլտոնի* (1805-1865) և անգլիացի մաթեմատիկոս *Արթուր Քելիի* (1821-1895) աշխատանքներում: Մատրիցների տեսության որոշ հիմնարար արդյունքներ պատկանում են նաև գերմանացի մաթեմատիկոսներ *Կառլ Վայերշտրասին* (1815-1897), *Ֆերդինանդ Ֆրոբենիուսին* (1849-1917) և ֆրանսիացի մաթեմատիկոս *Սարի Էնմոն Ժորդանին* (1838-1922): Իսկ *մատրից* տերմինը ներմուծել է անգլիացի մաթեմատիկոս *Ջեյմս Սիլվեսթրը* (1814-1897):

Վերջում բերենք օրինակներ, որոնք ցուցադրում են մատրիցային հաշվի կիրառում գործնական խնդիրներում:

Օրինակ 1.2.1 : Ավիարնկերությունն իրականացնում է ուղևորների փոխադրումներ C_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ քաղաքների միջև: Նկ. 1.2.1-ում տրված է կատարվող չվերթների սխեման:



Նկ. 1.2.1. Չվերթների սխեմա:

Կազմենք ավիափոխադրումների $S = [s_{ij}]_{5 \times 5}$ կապակցվածության մատրիցն ըստ հետևյալ կանոնի. մատրիցի s_{ij} տարրը հավասար է մեկի, եթե կա C_i քաղաքից C_j քաղաք չվերթ, հակառակ դեպքում $s_{ij} = 0$: Ըստ 1.2.1 սխեմայի՝ մեր մատրիցն այսպիսին է:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} :$$

Այս մատրիցից կարելի է դուրս բերել զանազան տեղեկություններ: Օրինակ՝ $\sum_{j=1}^5 s_{ij}$ գումարը C_i քաղաքից դեպի այլ քաղաքներ իրականացվող չվերթների թիվն է, իսկ $\sum_{i=1}^5 s_{ij}$ գումարը հավասար է C_j քաղաք ժամանող չվերթների թվին:

Հաշվենք S^2 մատրիցը.

$$S^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} :$$

Այս մատրիցը պարունակում է տեղեկություններ երկփուլային երթուղիների մասին (մեկ տեղափոխումով թռիչքներ): Այսինքն՝ S^2 մատրիցի (i, j) -րդ տարրը հավասար է C_i քաղաքից C_j քաղաքը երկփուլային երթուղիների թվին: Գա պարզ երևում է

$$(S^2)_{ij} = \sum_{k=1}^5 S_{ik}S_{kj}$$

բանաձևից: Նմանապես, S^3 մատրիցը տեղեկացնում է երկու տեղափոխումներով թռիչքների թվի մասին: Իրոք՝

$$(S^3)_{ij} = \sum_{k=1}^5 (S^2)_{ik}S_{kj} = \sum_{k=1}^5 \sum_{r=1}^5 S_{ir}S_{rk}S_{kj} :$$

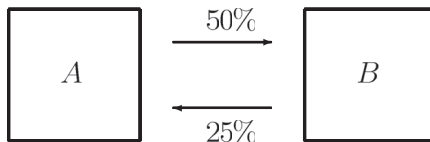
Մեր կապակցվածության մատրիցի համար ունենք

$$S^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} :$$

Ցանկության դեպքում S մատրիցից կարելի է քաղել նաև այլ լրացուցիչ տեղեկություններ: Կապակցվածության մատրիցի օգտագործումը առավել արդյունավետ է քաղաքների մեծ թվի առկայության դեպքում, երբ երթուղիները ակնադիտականորեն հսկելը էապես բարդանում է: \square

Օրինակ 1.2.2 Դիտարկենք A և B երկու հարևան երկրների երկկողմանի գաղթի պարզեցված մոդելը: Դիցուք A երկրի բնակչության 50% տարեկան տեղափոխվում է B երկիրը և նույն ժամանակ B երկրի 25% վերաբնակվում է A երկրում՝ ինչպես սխեմատիկորեն ցույց է տրված Նկ.1.2.2-ում:

Բնակիչների նախնական համամասնական բաշխումը, ըստ A և B երկրների, նշանակենք համապատասխանաբար a_0 -ով և b_0 -ով, ընդ որում՝ $a_0 + b_0 = 1$:



Նկ. 1.2.2. Բնակչության գաղթի ընթացքը:

Դիցուք գաղթի k -րդ տարվա վերջում A երկրում բնակվում է երկու երկրների ընդհանուր բնակչության a_k -րդ մասը, իսկ B երկրում՝ b_k -րդ մասը, ընդ որում՝ $a_k + b_k = 1$: Համաձայն տվյալների

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 0.5a_k + 0.25b_k, \\ b_{k+1} &= 0.5a_k + 0.75b_k : \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Ներմուծենք բնակչության վեկտորը և գաղթի մատրիցը.

$$p_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} :$$

Այդ դեպքում (1.2.8) առնչությունը կգրվի $p_{k+1} = Mp_k$ տեսքով: Այստեղից՝

$$p_k = M^k p_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} :$$

Հաշվենք M մատրիցի մի քանի աստիճան՝ սահմանափակվելով տասնորդական կետից հետո երեք նիշով.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.312 \\ 0.625 & 0.687 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 0.344 & 0.328 \\ 0.656 & 0.672 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 0.328 & 0.332 \\ 0.672 & 0.668 \end{bmatrix},$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0.334 & 0.333 \\ 0.666 & 0.667 \end{bmatrix}, \quad M^6 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.333 \\ 0.667 & 0.667 \end{bmatrix}, \quad M^7 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.333 \\ 0.667 & 0.667 \end{bmatrix} :$$

Ինչպես տեսնում ենք, $M^7 = M^6$ (մատրիցի տարրերի ներկայացման պայմանավորված ճշգրտությամբ): Հետագա հաշվարկները գործնականորեն չեն բերում էական փոփոխությունների: Սրանից ելնելով (ցավոք առանց խիստ անալիտիկ հիմնավորման) հանգում ենք այն եզրակացությանը, որ

$$M^k \rightarrow M^\infty \equiv \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

երբ $k \rightarrow \infty$: Ուստի k -ի մեծ արժեքների համար կարող ենք ընդունել, որ

$$p_k \approx M^\infty p_0 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \equiv p_\infty :$$

Միաժամանակ նշենք, որ $M^\infty p_\infty = p_\infty$: Այսպիսով, որոշ ժամանակ անց (գործնականորեն 7-8 տարուց հետո) երկրների երկողմանի գաղթի ընթացքը կկայունանա, ընդ որում, A երկրում կբնակվի երկու երկրների բնակիչների ընդհանուր թվի $1/3$ մասը, իսկ B երկրում՝ $2/3$ մասը: Ընդգծենք, որ ստացված արդյունքը կախված չէ բնակիչների նախնական հարաբերակցությունից, այսինքն՝ a_0 և b_0 մեծություններից: \square

1.3 Սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ

Պարագրաֆի վերնագրում նշված տերմինները գծային հանրահաշվի և մատրիցների տեսության հիմնարար հասկացություններ են:

λ թիվը կոչվում է $A \in C^{n \times n}$ մատրիցի *սեփական արժեք*, եթե գոյություն ունի այնպիսի ոչ զրոյական x վեկտոր, որ

$$Ax = \lambda x : \quad (1.3.1)$$

Նշված $x \neq 0$ վեկտորը անվանում են A մատրիցի λ սեփական արժեքին համապատասխանող *սեփական վեկտոր*: Մատրիցի բոլոր սեփական արժեքների բազմությունը կոչվում է նրա *սպեկտր* և նշանակվում է $\text{sp}A$ -ով:

Տեղի ունի հեշտությամբ ապացուցվող հետևյալ պնդումը:

◇ λ թիվը A մատրիցի սեփական արժեք է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\det(\lambda I - A) = 0 : \quad (1.3.2)$$

Դիտարկենք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի *բնութագրիչ որոշիչը*.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} : \quad (1.3.3)$$

Բացելով այն և խմբավորելով անդամները, ըստ λ -ի աստիճանների, կստանանք

$$P(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n \quad (1.3.4)$$

բնութագրիչ բազմանդամը, որի գործակիցները որոշվում են ըստ

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.5)$$

բանաձևերի: Մասնավորապես՝

$$p_1 = \text{tr} A, \quad p_n = \det A : \quad (1.3.6)$$

Այսպիսով, մատրիցի սեփական արժեքները բնութագրիչ բազմանդամի արմատներն են: Հիմնվելով բազմանդամների արմատների վերաբերյալ հայտնի փաստի վրա (տե՛ս, օրինակ՝ [7, 16])՝ կարող ենք պնդել, որ n -րդ կարգի մատրիցն ունի ճիշտ n հաստ սեփական արժեք՝ ընդհանուր դեպքում կոմպլեքս (այն պայմանով, որ յուրաքանչյուր

սեփական արժեքը հաշվվում է այնքան անգամ, որքան իր պատիկությունն է որպես բնութագրիչ բազմանդամի արմատ): Նշենք նաև, որ $A \in R^{n \times n}$ մատրիցի կոմպլեքս սեփական արժեքները կոմպլեքս համալուծ են:

Գիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ բնութագրիչ բազմանդամի արմատներն են: Այդ դեպքում տեղի ունի բնութագրիչ բազմանդամի

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (1.3.7)$$

վերլուծությունը: Բաղդատելով այս վերլուծությունը (1.3.4) գրառման հետ՝ կստանանք

$$p_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad p_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i : \quad (1.3.8)$$

Այսպիսով, (1.3.6) և (1.3.8) հավասարություններից հետևում է, որ

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr} A, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A : \quad (1.3.9)$$

Գիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, որտեղ $k \leq n$, մատրիցի բոլոր զույգ առ զույգ իրարից տարբեր սեփական արժեքներն են: Այդ դեպքում (1.3.7)-ից կստանանք

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad (1.3.10)$$

որտեղ α_i աստիճանի ցուցիչը կոչվում է λ_i սեփական արժեքի *հանրահաշվական պատիկություն* կամ ուղղակի *պատիկություն*: Ընդ որում՝ $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$:

Հետագայում λ սեփական արժեքի հանրահաշվական պատիկությունը նշելու համար կօգտագործենք $a(\lambda)$ նշանակումը:

Օրինակ 1.3.1 : Պահանջվում է գտնել

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքները: Կազմենք այդ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ -2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda^2 + \lambda + 2) :$$

Հաշվելով արմատները՝ կստանանք

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i : \quad \square$$

Ստորև բերվող հատկությունների ապացուցումը դժվարություն չի ներկայացնում:

- ◊ $\lambda = 0$ թիվը մատրիցի սեփական արժեք է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ մատրիցը վերասերված է:
- ◊ Եթե λ թիվը A չվերասերված մատրիցի սեփական արժեք է, ապա λ^{-1} թիվը A^{-1} մատրիցի սեփական արժեք է:
- ◊ Եթե λ թիվը A մատրիցի սեփական արժեք է, ապա λ^k թիվը A^k մատրիցի սեփական արժեք է ($k = 2, 3, \dots$):
- ◊ A և A^T մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են:
- ◊ A և A^* մատրիցների սեփական արժեքները կոմպլեքս համալուծ են:
- ◊ Անկյունագծային, վերին եռանկյուն և ստորին եռանկյուն մատրիցների սեփական արժեքները այդ մատրիցների անկյունագծային տարրերն են:

A մատրիցի սպեկտրալ շառավիղ կոչվում է

$$\rho(A) \equiv \max_{\lambda \in \text{sp}A} |\lambda| \tag{1.3.11}$$

թիվը: Այսպիսով, $\rho(A)$ -ն կոմպլեքս հարթության մեջ A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները պարունակող ամենափոքր շրջանի շառավիղն է (մենք նկատի ունենք կոորդինատների սկզբնակետում գտնվող կենտրոնով շրջաններ):

Թեորեմ 1.3.1 : Չույզ առ զույգ իրարից տարբեր սեփական արժեքներին համասպատասխանող սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են:

Ապացույց: Գիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ թվերը A մատրիցի զույգ առ զույգ իրարից տարբեր սեփական արժեքներ են, իսկ e_1, e_2, \dots, e_m ՝ համասպատասխան սեփական վեկտորները, այն է՝ $Ae_i = \lambda_i e_i, i = 1, 2, \dots, m$: Ենթադրենք հակառակը, որ նշված սեփական վեկտորները գծորեն կախված են: Առանց ընդհանրության սահմանափակման կարող ենք համարել, որ e_1, e_2, \dots, e_k վեկտորները, որտեղ $k < m$, գծորեն անկախ են, իսկ մնացած e_{k+1}, \dots, e_m վեկտորները գծորեն արտահայտվում են նրանց միջոցով: Մասնավորապես՝

$$e_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i :$$

Այդ դեպքում՝

$$Ae_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i Ae_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i e_i :$$

Մյուս կողմից՝

$$Ae_m = \lambda_m e_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_m e_i :$$

Վերջին երկու վերլուծություններից բխում է, որ

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) e_i = 0 :$$

Քանի որ e_1, e_2, \dots, e_k վեկտորները գծորեն անկախ են և սեփական արժեքները իրարից տարբեր են, ապա $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, այսինքն՝ $e_m = 0$: Իսկ սա հակասություն է, քանի որ e_m -ը սեփական վեկտոր է: \square

Պարագրաֆի վերջում համառոտակի քննարկենք սեփական վեկտորների հաշվման խնդիրը: Դիցուք λ -ն A մատրիցի արդեն հաշվված սեփական արժեք է: Համապատասխան սեփական վեկտորը կարելի է գտնել (1.3.1) հավասարումից: Այն հանգում է վերասերված մատրիցով

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (1.3.12)$$

գծային հավասարումների համասեռ համակարգի, որտեղ x_1, x_2, \dots, x_n անհայտները սեփական վեկտորի բաղադրիչներն են:

Օրինակ 1.3.2 : Պահանջվում է հաշվել ստորև բերված մատրիցի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} :$$

Կազմենք բնութագրիչ բազմանդամը.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 4) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 :$$

Այս բազմանդամի արմատները $\lambda_1 = 2$ և $\lambda_2 = 5$ թվերն են: Սեփական վեկտորները գտնելու նպատակով ամեն մի սեփական արժեքի համար կազմենք (1.3.12) համակարգը:

Երբ $\lambda_1 = 2$, կունենանք

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

համակարգը: Վերցնելով $x_1 = 1$ կգտնենք $x_2 = -1$: Այսպիսով, $\lambda_1 = 2$ սեփական արժեքին համապատասխանում է $[1, -1]^T$ սեփական վեկտորը:

Համանմանորեն գտնում ենք $\lambda_2 = 5$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորը: Ունենք

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

համակարգը: Ենթադրելով $x_1 = 1$ գտնում ենք $x_2 = 2$: Արդյունքում կստանանք $[1, 2]^T$ սեփական վեկտորը: \square

Սեփական վեկտորների հաշվման ցուցաբերված մոտեցումը կիրառելի է հիմնականում ցածր կարգի մատրիցների դեպքում: Բարձր կարգի մատրիցների համար մշակված են մատրիցների որոշակի հատկությունները և կառուցվածքը հաշվի առնող հատուկ մեթոդներ:

1.4 Վանդակային մատրիցներ

Բարձր կարգի մատրիցների հետ գործողություններ կատարելիս որոշ դեպքերում կատարվում է նրանց տրոհում ըստ *վանդակների*: Դա պարզ, սակայն չափազանց օգտակար գործողություն է, որը կիրառվում է տարբեր խնդիրներ լուծելիս՝ պնդումների ապացուցման համար, հաշվողական ալգորիթմների մշակման ժամանակ և այլն:

Դիցուք ունենք $A \in C^{m \times n}$ մատրից: Ներկայացնենք այն

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix} \tag{1.4.1}$$

տեսքով, որտեղ A_{ij} վանդակները $m_i \times n_j$ չափի մատրիցներ են, ընդ որում՝

$$\sum_{i=1}^p m_i = m, \quad \sum_{j=1}^q n_j = n :$$

Օրինակ՝

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 8 & 11 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 2 & 11 & 13 & 8 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} :$$

Վանդակային մատրիցների օգտագործումը հարմար է այնքանով, որ նրանց հետ գործողությունները կատարվում են ձևականորեն՝ ինչպես սովորական մատրիցների դեպքում: Նույն չափի և միանման տրոհումով վանդակային մատրիցները անվանում են *համաձև*:

- Մատրիցների գումարումը:

Դիցուք տրված են երկու համաձև մատրիցներ.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pq} \end{bmatrix} :$$

Այդ դեպքում՝

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1q} + B_{1q} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2q} + B_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} + B_{p1} & A_{p2} + B_{p2} & \dots & A_{pq} + B_{pq} \end{bmatrix} :$$

- Մատրիցի թվով բազմապատկումը:

Վերը տրված (1.4.1) վանդակային մատրիցի համար

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1q} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \dots & \alpha A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha A_{p1} & \alpha A_{p2} & \dots & \alpha A_{pq} \end{bmatrix} :$$

- Մատրիցների բազմապատկումը:

Գիցուք տրված են վանդակային մատրիցներ՝

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{ps} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m \times k}, \quad \begin{array}{l} A_{il} \in \mathbf{C}^{m_i \times k_l}, \\ \sum_{i=1}^p m_i = m, \quad \sum_{l=1}^s k_l = k \end{array}$$

և

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{sq} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{k \times n}, \quad \begin{array}{l} B_{lj} \in \mathbf{C}^{k_l \times n_j}, \\ \sum_{l=1}^s k_l = k, \quad \sum_{j=1}^q n_j = n : \end{array}$$

Բազմապատկման արդյունքում կստանանք

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p1} & C_{p2} & \dots & C_{pq} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m \times n}, \quad \begin{array}{l} C_{ij} \in \mathbf{C}^{m_i \times n_j}, \\ \sum_{i=1}^p m_i = m, \quad \sum_{j=1}^q n_j = n \end{array}$$

մատրիցը, որի վանդակները հաշվվում են հետևյալ բանաձևով.

$$C_{ij} = \sum_{t=1}^s A_{it} B_{tj}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q :$$

Վանդակային գործողությունների օգտագործումը բերում է ոչ միայն մատրիցային գործողությունների և բանաձևերի կոմպակտ գրառման, այլև որոշ դեպքերում թույլ է տալիս արդյունավետ լուծել մատրիցային անալիզի տարբեր խնդիրներ:

Գիցուք A և B քառակուսի մատրիցներից առաջինը m կարգի է, իսկ երկրորդը՝ n կարգի: Կազմենք $m+n$ կարգի

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (1.4.2)$$

մատրիցը: Այժմ մեզ հետաքրքրում է M մատրիցի սեփական արժեքների հարցը: Գրենք այս մատրիցի բնութագրիչ որոշիչը.

$$\det(\lambda I_{m+n} - M) = \begin{vmatrix} \lambda I_m - A & 0 \\ 0 & \lambda I_n - B \end{vmatrix},$$

որտեղ I_{m+n} , I_m և I_n համապատասխան կարգի միավոր մատրիցներ են: Ակնհայտ է, որ

$$\det(\lambda I_{m+n} - M) = \det(\lambda I_m - A) \cdot \det(\lambda I_n - B),$$

որտեղից հետևում է, որ M մատրիցի սեփական արժեքների բազմությունը A և B մատրիցների սեփական արժեքների բազմությունների միավորում է (հաշվի առնելով պատիկությունները):

Վերջում ձևակերպենք և ապացուցենք մեկ հետաքրքիր փաստ:

Թեորեմ 1.4.1 : Կամայական $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցների համար AB և BA մատրիցները ունեն նույն բնութագրիչ բազմանդամները և, հետևաբար, համընկնող սպեկտրներ:

Ապացույց: Ներմուծենք երեք վանդակային մատրիցներ՝

$$K = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & \sqrt{\lambda} I \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} I & A \\ B & \sqrt{\lambda} I \end{bmatrix},$$

որտեղ λ -ն կամայական դրական թիվ է: Ակնհայտ է, որ $\det K = \det L = (\sqrt{\lambda})^n$: Այնուհետև դիտարկենք KM և LM արտադրյալները: Համաձայն հայտնի կանոնի՝

$$\det(KM) = \det K \cdot \det M = (\sqrt{\lambda})^n \det M,$$

$$\det(LM) = \det L \cdot \det M = (\sqrt{\lambda})^n \det M :$$

Այսպիսով, $\det(KM) = \det(LM)$: Ունենք՝

$$KM = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} I & A \\ 0 & \lambda I - BA \end{bmatrix}, \quad LM = \begin{bmatrix} \lambda I - AB & 0 \\ B & \sqrt{\lambda} I \end{bmatrix} :$$

Հավասարեցնելով այդ մատրիցների որոշիչները՝ կստանանք

$$(\sqrt{\lambda})^n \det(\lambda I - BA) = (\sqrt{\lambda})^n \det(\lambda I - AB),$$

որտեղից հետևում է

$$\det(\lambda I - BA) = \det(\lambda I - AB)$$

հավասարությունը կամայական դրական λ -ի համար: Սակայն այս հավասարությունը ճիշտ է նաև ցանկացած կոմպլեքս λ -ի համար, քանի որ եթե երկու n -րդ աստիճանի բազմանդամ համընկնում են $n + 1$ հատ տարբեր կետերում, ապա նրանք համընկնում են նույնաբար: \square

Խնդիրներ և վարժություններ - 1

1. Դիցուք \mathbb{C}^n տարածությունում տրված է e_1, e_2, \dots, e_n օրթոնորմալ համակարգը, և x, y վեկտորների համար գրված են

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$$

վերլուծությունները: Ապացուցել, որ

8. Ապացուցել, որ ստորին (վերին) եռանկյուն մատրիցի հակադարձը նույնպես ստորին (վերին) եռանկյուն մատրից է:
9. Դիցուք $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ և $\text{rank } A = 1$: Ցույց տալ, որ այդ մատրիցը կարելի է ներկայացնել $A = ab^T$ տեսքով, որտեղ $a, b \in \mathbf{R}^n$:
10. Ապացուցել, որ եթե $\text{rank } A = 1$, ապա $A^2 = \text{tr } A \cdot A$:
11. Ապացուցել, որ $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցը զրոյական է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\text{tr}(AA^*) = 0$:
12. Դիցուք A -ն կամայական քառակուսի մատրից է: Ապացուցել, որ գոյություն չունի այնպիսի X մատրից, որ $AX - XA = I$:
13. Դիցուք $\lambda = 1$ թիվը A մատրիցի սեփական արժեք չէ: Ապացուցել, որ

$$A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A:$$

14. Գտնել $B = A^2 - 3A + 2I$ մատրիցի սեփական արժեքները, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}:$$

15. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը:

16. $U \in \mathbf{R}^{n \times n}$ մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար են 1-ի: Գտնել այդ մատրիցի սեփական արժեքները:
17. Դիցուք λ և μ թվերը ինչ-որ մատրիցի սեփական արժեքներ են, ընդ որում՝ $\lambda \neq \mu$: Ապացուցել, որ այդ սեփական արժեքներին չի կարող համապատասխանել նույն սեփական վեկտորը:
18. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 4 & 14 & 8 \\ -8 & -32 & -18 \end{bmatrix}$$

մատրիցների սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները:

19. Տրված է

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

վանդակային մատրիցը, որտեղ A և B քառակուսի մատրիցներ են: Որո՞նք են M մատրիցի սեփական արժեքները:

20. Օգտվելով

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{և} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{0} & \frac{-1}{0} \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

մատրիցների տրված վանդակային տրոհումից՝ գտնել AB արտադրյալը:

21. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գտնել A^{300} :

22. Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցները չվերասերված են: Համոզվել, որ ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները.

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}:$$

Գլուխ 2

ՆԵՐԱԾԱԿԱՆ ՄԱՍ-2

Ներկա գլխում, ինչպես նախորդում, մենք կդիտարկենք մատրիցների տեսության որոշ հիմնարար գաղափարներ, որոնք հաճախ կօգտագործվեն ուսումնական ձեռնարկի հաջորդ բաժիններում: Ի տարբերություն առաջին գլխի, այստեղ հարցերը կուսումնասիրենք առավել մանրակրկիտ, կապացուցենք որոշ կարևոր պնդումներ և կհաստատենք ուսումնասիրվող առարկաների մի շարք հատկություններ:

2.1 Մատրիցի միջուկը և պատկերը

Ցանկացած $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրից կարելի է դիտարկել որպես գծային օպերատոր, որն արտապատկերում է \mathbb{C}^n տարածությունը \mathbb{C}^m տարածության մեջ:

A մատրիցի *միջուկ* կոչվում է

$$\ker A \equiv \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\} \quad (2.1.1)$$

բազմությունը: Գծվար չէ ստանալ, որ $\ker A$ -ն \mathbb{C}^n տարածության ենթատարածություն է:

A մատրիցի *պատկեր* կոչվում է

$$\operatorname{im} A \equiv \{y \in \mathbb{C}^m : \exists x \in \mathbb{C}^n, y = Ax\} \quad (2.1.2)$$

բազմությունը: Ինչպես և միջուկի դեպքում, հեշտ կարելի է ցույց տալ, որ $\operatorname{im} A$ -ն \mathbb{C}^m տարածության ենթատարածություն է:

Ակներևության համար ստորև բերված է Նկ. 2.1.1-ը:

Նախ պարզենք $\ker A$ և $\operatorname{im} A$ ենթատարածությունների չափողականությունների հարցը: Հետագայում տարածության, ինչպես և ենթատարածության, չափողականությունը նշելու համար կօգտագործենք \dim սիմվոլը:

Դիցուք ունենք a_1, a_2, \dots, a_k վեկտորների համակարգը: Նշված վեկտորների բոլոր գծային կոմբինացիաների բազմությունը կոչվում է այդ համակարգի *գծային թաղանթ* և նշանակվում է $\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$: Ակնհայտ է, որ թաղանթը ենթատարածություն է: Նրա չափողականությունը հավասար է համակարգի գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն թվին:

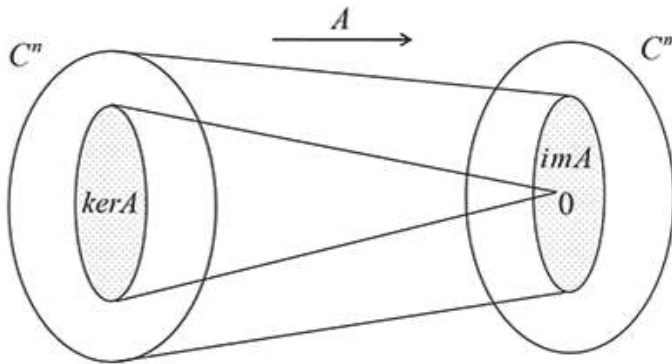
Նշանակենք $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ -ով $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի սյունները: Պարզվում է, որ

$$\text{im}A = \text{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} : \quad (2.1.3)$$

Պնդումը հեշտությամբ բխում է

$$Ax = x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \dots + x_nA^{(n)}$$

հավասարությունից, որտեղ x_1, x_2, \dots, x_n թվերը $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի բաղադրիչներն են:



Նկ. 2.1.1. Մատրիցի միջուկը և պատկերը:

Թեորեմ 2.1.1 : Կամայական $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի համար

$$\dim(\text{im}A) = \text{rank}A, \quad \dim(\text{ker}A) = n - \text{rank}A : \quad (2.1.4)$$

Ապացույց: Թեորեմի առաջին պնդումը հետևում է (2.1.3) առնչությունից: Իրոք՝

$$\dim(\text{im}A) = \dim(\text{span}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}) = \text{rank}A :$$

Այնուհետև, դիցուք e_1, e_2, \dots, e_k , որտեղ $k \leq n$, $\text{ker}A$ ենթատարածության որևէ մաքսիմալ գծորեն անկախ համակարգ է: Լրացնենք այդ համակարգը մինչև \mathbb{C}^n տարածության բազիս՝

$$e_1, e_2, \dots, e_k \mid e_{k+1}, \dots, e_n : \quad (2.1.5)$$

Յույց տանք, որ

$$Ae_{k+1}, \dots, Ae_n \quad (2.1.6)$$

վեկտորները կազմում են $\text{im}A$ ենթատարածության մաքսիմալ գծորեն անկախ համակարգ: Նախ ապացուցենք, որ (2.1.6) համակարգը գծորեն անկախ է: Դիցուք

$$\alpha_{k+1}Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = 0 :$$

Այստեղից

$$A(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0,$$

այսինքն՝ $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker A$: Ուստի՝

$$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k :$$

Գրենք վերջին հավասարությունը

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k - \alpha_{k+1} e_{k+1} - \dots - \alpha_n e_n = 0$$

տեսքով, որտեղից հետևում է, որ բոլոր գործակիցները և մասնավորապես $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ հավասար են զրոյի:

Այժմ վերցնենք կամայական $y \in \text{im} A$ վեկտոր: Գոյություն ունի այնպիսի $x \in \mathbb{C}^n$, որ $y = Ax$: Վերլուծենք x վեկտորն ըստ (2.1.5) բազիսի.

$$x = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_k e_k + \gamma_{k+1} e_{k+1} + \dots + \gamma_n e_n :$$

Այդ դեպքում՝

$$y = \gamma_1 A e_1 + \dots + \gamma_k A e_k + \gamma_{k+1} A e_{k+1} + \dots + \gamma_n A e_n = \gamma_{k+1} A e_{k+1} + \dots + \gamma_n A e_n,$$

ինչը ապացուցում է, որ (2.1.6)-ը $\text{im} A$ ենթատարածության մաքսիմալ գծորեն անկախ համակարգ է: Իսկ քանի որ մենք արդեն գիտենք, թե ինչի է հավասար $\text{im} A$ -ի չափողականությունը, ապա $n - k = \text{rank} A$, այսինքն՝ $\dim(\ker A) = k = n - \text{rank} A$: \square

Նախքան նյութի շարադրանքի շարունակումը տանք մի քանի սահմանում:

Կասենք, որ L գծային տարածությունը իր L_1, L_2, \dots, L_m ենթատարածությունների *ուղիղ գումարն է* և կգրենք

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_m, \quad (2.1.7)$$

եթե ցանկացած $x \in L$ տարր միարժեքորեն ներկայացվում է

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

գումարի տեսքով, որտեղ $x_i \in L_i$, $i = 1, 2, \dots, m$:

Գիցուք L տարածության մեջ ներմուծված է սկալյար արտադրյալ: Այդ տարածության X և Y ենթաբազմությունները կանվանենք *օրթոգոնալ*, եթե ցանկացած երկու տարր՝ $x \in X$ և $y \in Y$ օրթոգոնալ են: Այդ փաստը կգրենք որպես $X \perp Y$:

L տարածության L_1, L_2, \dots, L_m ենթատարածությունների (2.1.7) ուղիղ գումարը կոչվում է *օրթոգոնալ* և գրվում է

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m \quad (2.1.8)$$

տեսքով, եթե այդ ենթատարածությունները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են:

Բացահայտենք կապ A և A^* մատրիցների միջուկների և պատկերների միջև:

Թեորեմ 2.1.2 : Ցանկացած $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի համար տեղի ունեն հետևյալ վերլուծությունները.

$$\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \operatorname{im} A^*, \quad \mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \operatorname{im} A : \quad (2.1.9)$$

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ $\ker A \perp \operatorname{im} A^*$: Վերցնենք երկու կամայական վեկտոր. $x \in \ker A$ և $z \in \operatorname{im} A^*$: Ըստ սահմանման՝ գոյություն ունի այնպիսի $y \in \mathbb{C}^m$ վեկտոր, որ $z = A^*y$: Այդ դեպքում՝

$$(x, z) = (x, A^*y) = (Ax, y) = (0, y) = 0 :$$

Հաշվի առնելով 2.1.1 թեորեմը՝ ընտրենք $\ker A$ -ում ոչ զրոյական օրթոգոնալ վեկտորների համակարգ e_1, e_2, \dots, e_{n-r} , որտեղ $r \equiv \operatorname{rank} A$, իսկ $\operatorname{im} A^*$ -ում՝ նույնպիսի f_1, f_2, \dots, f_r համակարգ: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, f_1, f_2, \dots, f_r$$

միացյալ համակարգը կազմում է օրթոգոնալ բազիս \mathbb{C}^n տարածությունում: Ուստի ցանկացած $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորը ներկայացվում է

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-r} e_{n-r} + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_r f_r$$

տեսքով, այսինքն՝

$$x = x_1 + x_2, \quad (2.1.10)$$

որտեղ $x_1 \equiv \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-r} e_{n-r} \in \ker A$, իսկ $x_2 \equiv \beta_1 f_1 + \dots + \beta_r f_r \in \operatorname{im} A^*$: Ընդ որում՝ (2.1.10) վերլուծությունը որոշվում է միարժեքորեն: Այսպիսով, \mathbb{C}^n տարածության (2.1.9) տեսքի վերլուծությունը ապացուցված է: Ծիշտ նույն ճանապարհով կարելի է ստանալ նաև \mathbb{C}^m տարածության նման վերլուծությունը (փաստորեն դատողություններում բավարար է տեղերով փոխել A և A^* մատրիցները): \square

Ապացուցենք ևս երկու օգտակար պնդում:

Թեորեմ 2.1.3 : Ծիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$\ker(A^*A) = \ker A : \quad (2.1.11)$$

Ապացույց: Այն, որ $\ker A \subseteq \ker(A^*A)$, ակնհայտ է: Այժմ ենթադրենք, որ $x \in \ker(A^*A)$, այսինքն՝ $A^*Ax = 0$: Այդ դեպքում՝

$$(Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = 0,$$

որտեղից, ըստ սկալյար արտադրյալի CS1 հատկության (տե՛ս (1.1.2)), կստանանք, որ $Ax = 0$: \square

Թեորեմ 2.1.4 : Ծիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$\operatorname{rank}(A^*A) = \operatorname{rank} A : \quad (2.1.12)$$

Ապացույց: Պնդումն անմիջապես բխում է

$$\dim(\ker(A^*A)) = n - \operatorname{rank}(A^*A), \quad \dim(\ker A) = n - \operatorname{rank} A$$

հավասարություններից (տե՛ս (2.1.4)-ը) և (2.1.11)-ից: \square

2.2 Սատրիցների նմանությունը

Կասենք, որ A և B մատրիցները *նման են* և կգրենք $A \sim B$, եթե գոյություն ունի այնպիսի չվերասերված S մատրից, որ

$$A = S^{-1}BS : \quad (2.2.1)$$

Ակնհայտ է, որ նմանության հարաբերությունը սիմետրիկ է. եթե $A \sim B$, ապա $B \sim A$: Իրոք, (2.2.1)-ից հետևում է, որ $B = SAS^{-1}$: Սահմանված եղանակով մեկ մատրիցից մյուսին անցումը կոչվում է *նմանության ձևափոխություն*: S մատրիցը անվանենք *ձևափոխող մատրից*:

Բացահայտենք նման մատրիցների որոշ հատկություններ:

Թեորեմ 2.2.1 : *Նման մատրիցների սեփական արժեքները նույն են:*

Ապացույց: Գիցուք A և B մատրիցները նման են և λ թիվը A մատրիցի սեփական արժեքն է, այսինքն՝ $Ax = \lambda x$, որտեղ $x \neq 0$ համապատասխան սեփական վեկտորն է: Այդ դեպքում՝ $S^{-1}BSx = \lambda x$ կամ $B(Sx) = \lambda(Sx)$: Պարզ է, որ $Sx \neq 0$, քանի որ S մատրիցը չվերասերված է: Գրանով իսկ λ -ն B մատրիցի սեփական արժեք է:

Ավելին, A և B մատրիցների բնութագրիչ բազմանդամները համընկնում են: Իրոք՝

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - S^{-1}BS) = \det[S^{-1}(\lambda I - B)S] = \\ &= \det S^{-1} \cdot \det(\lambda I - B) \cdot \det S = \det(\lambda I - B) : \quad \square \end{aligned}$$

Հակառակը ճիշտ չէ, որովհետև մատրիցները կարող են ունենալ նույն սպեկտրը՝ չլինելով նման: Օրինակ՝

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են: Բայց քանի որ, ցանկացած չվերասերված S մատրիցի համար ակնհայտորեն $S^{-1}IS = I$, ապա A և I մատրիցները նման չեն:

Թեորեմ 2.2.2 : *Նման մատրիցների որոշիչները հավասար են:*

Ապացույց: Գիցուք A և B մատրիցները նման են: Այդ դեպքում

$$\det A = \det(S^{-1}BS) = \det S^{-1} \cdot \det B \cdot \det S = \det B. \quad \square$$

Թեորեմ 2.2.3 : *Նման մատրիցների հետքերը հավասար են:*

Ապացույց: Իրոք՝

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(S^{-1}BS) = \operatorname{tr}(S^{-1}(BS)) = \operatorname{tr}((BS)S^{-1}) = \operatorname{tr} B : \quad \square$$

Պարզվում է, որ մատրիցների նմանությունը ներկայացնում է վերջավոր չափանի տարածություններում գծային ձևափոխությունների կարևոր բնութագիր:

Բաղդատելով ստացված վերլուծությունը (2.2.7)-ի հետ՝ գտնում ենք, որ

$$\begin{aligned} \beta_1 &= s_{11}\alpha_1 + s_{12}\alpha_2 + \dots + s_{1n}\alpha_n, \\ \beta_2 &= s_{21}\alpha_1 + s_{22}\alpha_2 + \dots + s_{2n}\alpha_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_n &= s_{n1}\alpha_1 + s_{n2}\alpha_2 + \dots + s_{nn}\alpha_n : \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով (2.2.8) համապատասխանությունները՝ հանգում ենք

$$[x]_f = S[x]_e \tag{2.2.9}$$

հավասարությանը:

Վերցնենք L^n տարածության մեջ որևէ գծային ձևափոխություն.

$$\Phi : L^n \rightarrow L^n :$$

Առաջին բազիսում այդ ձևափոխությունը միարժեքորեն տրվում է

$$\begin{aligned} \Phi e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ \Phi e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi e_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

հավասարությունների համակարգի միջոցով: Դրանք սահմանում են Φ գծային ձևափոխության մատրիցը առաջին բազիսում.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} :$$

Յուրաքանչյուր $x \in L^n$ տարրի համար, ելնելով (2.2.6) ներկայացումից և օգտվելով (2.2.10) հավասարություններից, կստանաք

$$\begin{aligned} \Phi x &= \alpha_1 \Phi e_1 + \alpha_2 \Phi e_2 + \dots + \alpha_n \Phi e_n = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n)e_1 + \\ &(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n)e_2 + \dots + (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)e_n \end{aligned}$$

կամ

$$[\Phi x]_e = A[x]_e : \tag{2.2.11}$$

Համանմանորեն, երկրորդ բազիսում նույն գծային ձևափոխությունը ներկայանում է մի այլ մատրիցով՝

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

ընդ որում՝

$$[\Phi x]_f = B[x]_f : \quad (2.2.12)$$

Այսպիսով, հաշվի առնելով (2.2.12) և (2.2.9) առնչությունները, ունենք՝

$$[\Phi x]_f = B[x]_f = BS[x]_e : \quad (2.2.13)$$

Մյուս կողմից, (2.2.9)-ից և (2.2.11)-ից հետևում է, որ

$$[\Phi x]_f = S[\Phi x]_e = SA[x]_e : \quad (2.2.14)$$

Բաղդատելով (2.2.13)-ը և (2.2.14)-ը՝ կստանանք $SA = BS$ հավասարությունը կամ էլ՝ $A = S^{-1}BS$:

Այսպիսով, մնան մատրիցները կարելի է մեկնաբանել որպես նույն գծային ձևափոխությունը տարբեր բազիսներում սահմանող մատրիցներ: Միաժամանակ, մեկ բազիսից մյուսին անցման մատրիցը հենց ձևափոխող մատրիցն է:

Նման մատրիցների սպեկտրների համընկնումը կիրառվում է գծային հանրահաշվի հաշվողական մեթոդները մշակելիս: Դրանց հիմքում ընկած է նախնական մատրիցի բերումը մի այնպիսի մնան մատրիցի, որի համար սեփական արժեքների խնդրի լուծումը իրականացվում է զգալիորեն ավելի հեշտ (տե՛ս, օրինակ՝ [6, 21, 28, 29]):

2.3 Կոնգրուենտ մատրիցներ

Դիտարկենք ևս մեկ մատրիցային ձևափոխություն, որն արտաքնապես հիշեցնում է մնանության ձևափոխությունը, սակայն, ըստ էության, նրանից տարբերվում է:

Կասենք, որ $A, B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցները *կոնգրուենտ են*, եթե գոյություն ունի այպիսի չվերասերված S մատրից, որ

$$A = S^*BS : \quad (2.3.1)$$

Իրական դեպքում, երբ $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$, մատրիցները *կոնգրուենտ են*, եթե

$$A = S^TBS : \quad (2.3.2)$$

Կոնգրուենտության հարաբերությունը սիմետրիկ է: Իրոք, (2.3.1)-ից բխում է, որ

$$B = (S^*)^{-1}AS^{-1} = (S^{-1})^*AS^{-1} :$$

Վերը սահմանված եղանակով մեկ մատրիցից մյուսին անցումը կոչվում է *կոնգրուենտության ձևափոխություն*: S մատրիցը անվանենք *ձևափոխող մատրից*:

Կոնգրուենտության ձևափոխությունը ներկայացնում է որոշակի կապ վերջավոր չափանի տարածության տարբեր բազիսներում երկգծային ձևի մատրիցների միջև:

Դիցուք ունենք ինչ-որ n -չափանի գծային \mathbf{L}^n տարածություն՝ կոմպլեքս կամ իրական: Երկու արգումենտներից կախված φ թվային ֆունկցիան (կոմպլեքս կամ իրական) կոչվում է *երկգծային ձև*, եթե ցանկացած $x, y, z \in \mathbf{L}^n$ տարրերի և α, β թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z),$$

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, z) :$$

Առաջին առնչությունը նշանակում է ձևի գծայնությունը ըստ առաջին արգումենտի, իսկ երկրորդը՝ ըստ երկրորդ արգումենտի: Երկգծային ձևը կոչվում է *սիմետրիկ*, եթե $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ բոլոր $x, y \in \mathbf{L}^n$ տարրերի համար:

Որոշակիության համար սահմանափակվենք կոմպլեքս դեպքով: Դուրսբերումների ընթացքում մենք կօգտագործենք 2.2 պարագրաֆում ստացված առնչությունները: Դիցուք \mathbf{L}^n տարածության մեջ տրված են երկու տարբեր բազիսներ՝ ինչպես (2.2.2)-ում և (2.2.3)-ում:

Վերլուծենք կամայական $x, y \in \mathbf{L}^n$ տարրերն ըստ (2.2.2) բազիսի տարրերի.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n,$$

ընդ որում $[x]_e = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$, $[y]_e = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^T$: Ունենք՝

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_j \beta_i \varphi(e_j, e_i) :$$

Ներմուծենք

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

մատրիցը, որտեղ $a_{ij} = \varphi(e_j, e_i)$: Այդ մատրիցը կոչվում է առաջին բազիսում *երկգծային ձևի մատրից*: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_j \beta_i &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) \beta_i = \sum_{i=1}^n (A[x]_e)_i \beta_i = (A[x]_e, [y]_e) = [y]_e^* A[x]_e : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$\varphi(x, y) = [y]_e^* A[x]_e : \quad (2.3.3)$$

Համանմանորեն, վերլուծելով \mathbf{L}^n տարածության տարրերն ըստ (2.2.3) բազիսի տարրերի, կստանանք

$$\varphi(x, y) = [y]_f^* B[x]_f \quad (2.3.4)$$

առնչությունը, որտեղ

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \quad b_{ij} = \varphi(f_j, f_i)$$

մատրիցը *երկգծային ձևի մատրից է* երկրորդ բազիսում:

Համեմատենք ստացված (2.3.3) և (2.3.4) առնչությունները: Դրա համար օգտվենք (2.2.9) հավասարությունից: Ելնելով (2.3.4)-ից՝ կստանանք՝

$$\varphi(x, y) = (S[y]_e)^* BS[x]_e = [y]_e^* S^* BS[x]_e :$$

Ուստի $A = S^* BS$: Դա նշանակում է, որ A և B մատրիցները կոնգրուենտ են ըստ (2.3.1) սահմանման:

Այսպիսով, կոնգրուենտ մատրիցները կարելի է դիտարկել որպես նույն երկգծային ձևը տարբեր բազիսներում սահմանող մատրիցներ: Այստեղ ձևափոխող մատրիցը մեկ բազիսից մյուսին անցման մատրիցն է:

2.4 Սեփական արժեքների պատիկությունը

Նախորդ գլխի 1.3 պարագրաֆում մենք սահմանել ենք մատրիցի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները: Նույն տեղում ներմուծվել է սեփական արժեքի հանրահաշվական պատիկության հասկացությունը որպես մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամի արմատի պատիկություն:

Այժմ դիմենք մատրիցի սեփական վեկտորներին: Սեփական արժեքին համապատասխանող վեկտորը միարժեքորեն չի որոշվում: Իրոք, (1.3.1)-ից երևում է, որ եթե x -ը սեփական վեկտոր է, ապա ցանկացած ոչ զրոյական c հաստատունի համար cx վեկտորը նույնպես կլինի սեփական վեկտոր: Սակայն դա չի նշանակում, որ սեփական վեկտորները միշտ համագիծ են: Բերենք մի պարզ օրինակ: n -րդ կարգի I միավոր մատրիցն ունի ընդհանր մեկ սեփական արժեք՝ $\lambda = 1$, որի հանրահաշվական պատիկությունը հավասար է n -ի: Միաժամանակ այդ մատրիցն ունի n հատ գծորեն անկախ սեփական վեկտոր՝

$$e_i = [0 \dots 0 1 0 \dots 0]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(միավորը կանգնած է i -րդ տեղում): Ավելին, այդ վեկտորները օրթոգոնալ են:

Այս կարճ նախաբանից հետո տանք հետևյալ սահմանումը. λ սեփական արժեքին համապատասխանող գծորեն անկախ սեփական վեկտորների առավելագույն թիվը կոչվում է նրա *երկրաչափական պատիկություն* և նշանակվում է $g(\lambda)$ -ով:

Դիցուք e_1, e_2, \dots, e_m ($m \equiv g(\lambda)$)՝ λ սեփական արժեքին համապատասխանող գծորեն անկախ սեփական վեկտորների համակարգ է, այն է՝ $Ae_i = \lambda e_i, i = 1, 2, \dots, m$: Ներմուծենք C^n տարածության մեջ

$$L_\lambda \equiv \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

ենթատարածությունը, որը կանվանենք A մատրիցի λ սեփական արժեքին համապատասխանող *սեփական ենթատարածություն*: Հեշտ է ցույց տալ, որ ցանկացած $x \in L_\lambda$ վեկտորի համար $Ax = \lambda x$: Այսինքն՝ L_λ ենթատարածության բոլոր վեկտորները, բացառությամբ զրոյական վեկտորի, A մատրիցի սեփական վեկտորներ են:

Ճիշտ է

$$L_\lambda = \ker(\lambda I - A) \tag{2.4.1}$$

հավասարությունը, որն ակնհայտորեն բխում է $Ax = \lambda x$ և $(\lambda I - A)x = 0$ գրառումների համարժեքությունից: Վերջինից ստանում ենք արտահայտություն երկրաչափական պատկերության համար: Իրոք,

$$g(\lambda) = \dim(L_\lambda) = \dim(\ker(\lambda I - A))$$

հավասարությունից, օգտվելով (2.1.4) բանաձևից, կստանանք՝

$$g(\lambda) = n - \text{rank}(\lambda I - A) : \tag{2.4.2}$$

Սեփական արժեքի հանրահաշվական և երկրաչափական պատկերությունների միջև կապը բացահայտելու համար նախ ապացուցենք երկու օժանդակ պնդում:

Լեմմա 2.4.1 : *Կամայական A մատրիցի համար զրո թիվը $a(0) \geq n - \text{rank}A$ հանրահաշվական պատկերությամբ սեփական արժեք է:*

Ապացույց: Նշանակենք $r \equiv \text{rank}A$: A մատրիցի r -ից բարձր կարգ ունեցող բոլոր միներները հավասար են զրոյի: Ուստի այդ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամի (1.3.4) գրառման մեջ $p_{r+1} = \dots = p_n = 0$: Արդյունքում, բազմանդամն ընդունում է

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^r p_r \lambda^{n-r} = \lambda^{n-r}(\lambda^r - p_1\lambda^{r-1} + \dots + (-1)^r p_r)$$

«կրճատված» տեսքը, որից հետևում է լեմմայի պնդումը: \square

Լեմմա 2.4.2 : *Եթե μ թիվը A մատրիցի սեփական արժեք է, ապա զրոն նույն հանրահաշվական պատկերության $\mu I - A$ մատրիցի սեփական արժեք է:*

Ապացույց: Ունենք A մատրիցի $P_A(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A)$ բնութագրիչ բազմանդամը: Ըստ պայմանի $P_A(\mu) = 0$: Այնուհետև, $P_{\mu I - A}(\lambda) \equiv \det(\lambda I - (\mu I - A))$ բազմանդամը $\mu I - A$ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամն է: Չնափոխենք այն և գրենք

$$P_{\mu I - A}(\lambda) = \det((\lambda - \mu)I + A) = (-1)^n \det((\mu - \lambda)I - A)$$

տեսքով, կամ՝

$$P_{\mu I - A}(\lambda) = (-1)^n P_A(\mu - \lambda) : \quad (2.4.3)$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$P_{\mu I - A}(0) = (-1)^n P_A(\mu) = 0 :$$

Նշանակենք $k \equiv a_A(\mu)$: Այդ դեպքում $P_A(\lambda)$ բազմանդամի մինչև $(k-1)$ -րդ կարգը ներառյալ բոլոր ածանցյալները μ կետում հավասար են զրոյի, իսկ k -րդ ածանցյալը նույն կետում զրոյին հավասար չէ, այսինքն՝

$$P_A^{(s)}(\mu) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k-1, \quad P_A^{(k)}(\mu) \neq 0 : \quad (2.4.4)$$

Վերը ստացված (2.4.3) հավասարությունից ունենք՝

$$P_{\mu I - A}^{(s)}(\lambda) = (-1)^{n+s} P_A^{(s)}(\mu - \lambda) :$$

Ուստի, հաշվի առնելով (2.4.4)-ը, կստանանք, որ

$$P_{\mu I - A}^{(s)}(0) = (-1)^{n+s} P_A^{(s)}(\mu) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k-1$$

և $P_{\mu I - A}^{(k)}(0) = (-1)^{n+k} P_A^{(k)}(\mu) \neq 0$: \square

Հաջորդ պնդումը պատասխանում է սեփական արժեքների հանրահաշվական և երկրաչափական պատկերությունների միջև հարաբերության վերաբերյալ հարցին:

Թեորեմ 2.4.1 : *A մատրիցի ցանկացած λ սեփական արժեքի համար $a(\lambda) \geq g(\lambda)$:*

Ապացույց: Հաջորդաբար օգտվելով 2.4.2 և 2.4.1 լեմմաներից, ինչպես նաև (2.4.2) բանաձևից, կստանանք՝

$$a(\lambda) = a_A(\lambda) = a_{\lambda I - A}(0) \geq n - \text{rank}(\lambda I - A) = g(\lambda) : \quad \square$$

Օրինակ՝

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

երկանկյունագծային մատրիցն ունի ընդամենը մեկ սեփական արժեք՝ $\lambda = 1$, որի հանրահաշվական պատկերությունը հավասար է n -ի: Մատրիցի սեփական վեկտորները հետևյալն են՝ $e = [\alpha 0 \dots 0]^T$, որտեղ $\alpha \neq 0$: Հետևաբար սեփական արժեքի երկրաչափական պատկերությունը հավասար է մեկի:

Ապացուցենք ևս մեկ օգտակար պնդում:

Թեորեմ 2.4.2 : A և A^* մատրիցների համապատասխան սեփական արժեքների հանրահաշվական (երկրաչափական) պատիկությունները հավասար են:

Ապացույց: Գիցուք λ թիվը A մատրիցի սեփական արժեք է: Այդ դեպքում $\bar{\lambda}$ թիվը կլինի A^* մատրիցի սեփական արժեք: Հանրահաշվական պատիկությունների համընկնումը հետևում է

$$\det(\bar{\lambda}I - A^*) = \det(\lambda I - A)^* = \overline{\det(\lambda I - A)}$$

հավասարությունից: Ինչ վերաբերում է երկրաչափական պատիկություններին, ապա

$$g_{A^*}(\bar{\lambda}) = n - \text{rank}(\bar{\lambda}I - A^*) = n - \text{rank}(\lambda I - A)^* = n - \text{rank}(\lambda I - A) = g_A(\lambda) : \quad \square$$

Խնդիրներ և վարժություններ - 2

1. Ապացուցել, որ $\ker(AB) \supseteq \ker B$ և $\text{im}(AB) \subseteq \text{im} A$:
2. Ապացուցել, որ եթե $\ker(A^2) = \ker A$, ապա բոլոր $k = 3, 4, \dots$ արժեքների համար $\ker(A^k) = \ker A$:
3. Գտնել հետևյալ մատրիցների միջուկը և պատկերը.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} :$$

4. Գիցուք $Ax = b$ համակարգի աջ մասը այնպիսին է, որ $y^*b = 0$ ցանկացած $y \in \ker A^*$ վեկտորի համար: Ապացուցել, որ համակարգը համատեղելի է:
5. Գիցուք A քառակուսի մատրիցը տրված է վանդակային տեսքով.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} :$$

Հայտնի է, որ $\ker A_1 = \text{im} A_2^T$: Ապացուցել, որ A մատրիցը չվերասերված է:

6. Գիցուք $A \in C^{m \times p}$ և $B \in C^{m \times q}$: Ապացուցել, որ $\text{im}[A \ B] = \text{im} A + \text{im} B$:
7. Ապացուցել, որ եթե $A \sim B$ և $B \sim C$, ապա $A \sim C$:
8. Ապացուցել, որ եթե $A \sim B$, ապա $k \geq 2$ արժեքների համար $A^k \sim B^k$:
9. Տրված $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ բազմանդամի համար սահմանենք $P(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k$ մատրիցային բազմանդամը: Ապացուցել, որ եթե $A \sim B$, ապա $P(A) \sim P(B)$:

10. Յույց տալ, որ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

մատրիցները նման են: Գտնել ձևափոխող մատրիցը:

11. Դիցուք $x = [x_1, x_2]^T$ վեկտորների \mathbf{R}^2 տարածության մեջ տրված է գծային ձևափոխություն.

$$\Phi x = [x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2]^T :$$

Գրել այդ ձևափոխության մատրիցը $e_1 = [1, 1]^T$, $e_2 = [1, 2]^T$ բազիսում:

12. Դիցուք $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ վեկտորների \mathbf{R}^3 տարածության մեջ տրված է

$$\Phi x = [x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3]^T$$

գծային ձևափոխությունը: Գրել այդ ձևափոխության մատրիցը $e_1 = [1, 0, 1]^T$, $e_2 = [0, 1, 1]^T$ և $e_3 = [1, 1, 0]^T$ բազիսում:

13. Դիցուք $x = [x_1, x_2]^T$ վեկտորների \mathbf{R}^2 տարածության մեջ տրված է

$$\Phi x = [x_2, -2x_1 + 3x_2]^T$$

գծային ձևափոխությունը: Դիտարկվում են երկու տարբեր բազիսներ՝ $e_1 = [1, 0]^T$, $e_2 = [0, 1]^T$ և $f_1 = [1, 1]^T$, $f_2 = [1, 2]^T$: Գրել այդ ձևափոխության մատրիցները յուրաքանչյուր բազիսում: Յույց տալ, որ այդ մատրիցները նման են:

14. Երկրորդ աստիճանի բազմանդամների H_2 դասում տրված է գծային ձևափոխություն.

$$\Phi P(x) = 2P(x) + P'(x) :$$

Գրել ձևափոխության մատրիցները $e_0(x) \equiv 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$ և $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = 1 + x + x^2$ բազիսներում: Համոզվել, որ այդ մատրիցները նման են:

15. Գտնել հետևյալ մատրիցների սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 4 & 14 & 8 \\ -8 & -32 & -18 \end{bmatrix} :$$

Հաշվել սեփական արժեքների հանրահաշվական և երկրաչափական պատկերությունները:

16. Յույց տալ, որ նմանության ձևափոխությունը պահպանում է յուրաքանչյուր սեփական արժեքի երկրաչափական պատկերությունը:

Գլուխ 3

ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴԱՍԵՐ

Ներկա բաժնում ընթերցողին կժանոթացնենք որոշակի տիպի մատրիցների հետ, որոնք մատրիցների տեսությունում կազմում են կարևոր բաղկացուցիչ մաս: Նրանք հաճախ հանդիպում են բազմաթիվ կիրառական խնդիրների լուծման և գծային հանրահաշվի հաշվողական ալգորիթմների կառուցման ժամանակ: Բացահայտվում են այդ մատրիցների մի շարք առանձնահատկություններ:

3.1 Հերմիտյան և սիմետրիկ մատրիցներ

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը կոչվում է *հերմիտյան*¹, եթե $A = A^*$: Այլ կերպ հերմիտյան մատրիցը անվանում են *ինքնահամալուծ*: Իրական հերմիտյան մատրիցը *սիմետրիկ* մատրից է, որովհետև $A^* = A^T$:

Հերմիտյան մատրիցները օժտված են հետևյալ հատկությամբ.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n : \quad (3.1.1)$$

Դա անմիջապես հետևում է (1.2.4) առնչությունից: Հերմիտյան մատրիցների համար (Ax, x) սկալյար արտադրյալը իրական թիվ է: Իրոք՝

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} :$$

Ստորև բերված են հերմիտյան մատրիցների կարևոր հատկությունները:

- ◇ Հերմիտյան մատրիցի անկյունագծային տարրերը իրական թվեր են:
- ◇ Հերմիտյան մատրիցի որոշիչը իրական թիվ է:
- ◇ Եթե A չվերասերված մատրիցը հերմիտյան է, ապա A^{-1} հակադարձը նույնպես հերմիտյան մատրից է:
- ◇ Հերմիտյան մատրիցների արտադրյալը հերմիտյան է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ մատրիցները տեղափոխելի են:

¹Անվանումը կապված է հայտնի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Շարլ Հերմիտի (1822-1901) անվան հետ:

Այդ պնդումների ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

Թեորեմ 3.1.1 : *Հերմիտյան մատրիցի սեփական արժեքները իրական թվեր են:*

Ապացույց: Դիցուք λ -ն A մատրիցի սեփական արժեք է, իսկ x -ը՝ համապատասխան սեփական վեկտոր, այսինքն՝ $Ax = \lambda x$: Օգտվենք (3.1.1) հավասարումից.

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) :$$

Իսկ քանի որ $(x, x) \neq 0$, ապա $\lambda = \bar{\lambda}$. \square

Թեորեմ 3.1.2 : *Հերմիտյան մատրիցի տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները օրթոգոնալ են:*

Ապացույց: Դիցուք λ և μ թվերը A մատրիցի տարբեր սեփական արժեքներ են, որոնց համապատասխանում են x և y սեփական վեկտորները, այսինքն՝ $Ax = \lambda x$ և $Ay = \mu y$: Այդ դեպքում

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y),$$

իսկ քանի որ $\lambda \neq \mu$, ապա $(x, y) = 0$: \square

Նշված հատկություններից բացի՝ հերմիտյան մատրիցները ունեն ևս մեկ կարևոր հատկություն:

Թեորեմ 3.1.3 : *Ցանկացած n -րդ կարգի հերմիտյան մատրիցն ունի n հատ փոխօրթոգոնալ սեփական վեկտորներ, որոնք կազմում են \mathbb{C}^n տարածության բազիս:*

Այս փաստի ապացույցը մենք այստեղ չենք բերելու: Այն կարելի է գտնել գծային հանրահաշվին և մատրիցների տեսությանը նվիրված բազմաթիվ դասագրքերում և մենագրություններում (տե՛ս, օրինակ՝ [7, 10, 16]): Թեորեմի իրական տարբերակը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 3.1.4 : *Ցանկացած n -րդ կարգի սիմետրիկ մատրից ունի n հատ փոխօրթոգոնալ սեփական վեկտորներ, որոնք կազմում են \mathbb{R}^n տարածության բազիս:*

Կամայական սեփական վեկտոր կարելի է դարձնել նորմավորված: Իրոք, դիցուք $Ax = \lambda x$, բայց $(x, x) \neq 1$: Այդ դեպքում մենք կարող ենք անցնել $y = \alpha^{-1}x$ սեփական վեկտորին, որտեղ $\alpha = \sqrt{(x, x)}$: Ակնհայտ է, որ $(y, y) = 1$: Այսպիսով, հերմիտյան (սիմետրիկ) մատրիցի համար կարելի է նշել սեփական վեկտորների e_1, e_2, \dots, e_n օրթոնորմավորված համակարգ, որը կազմում է ամբողջ վեկտորական տարածության բազիս: Եթե $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ -ով նշանակենք A -ի համապատասխան սեփական արժեքները, ապա

$$\begin{aligned} Ae_i &= \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ (e_i, e_j) &= \delta_{ij} \quad (\text{Կրոնեկերի նշանն է}) : \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Վերջում ներկայացնենք հերմիտյան մատրիցների սեփական արժեքների, այսպես կոչված, *էքստրեմալ հատկությունները*:

Թեորեմ 3.1.5 : *Դիցուք $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը հերմիտյան է: Ցանկացած ոչ զրոյական $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար ճիշտ են*

$$\lambda_{\min} \leq \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \lambda_{\max} \quad (3.1.3)$$

անհավասարությունները, որտեղ λ_{\min} և λ_{\max} մատրիցի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն սեփական արժեքներն են, ընդ որում՝

$$\lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} : \quad (3.1.4)$$

Ապացույց: Կարգավորենք A մատրիցի սեփական արժեքները.

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max} :$$

Եթե e_1, e_2, \dots, e_n համապատասխան սեփական վեկտորների օրթոնորմավորված համակարգն է (տե՛ս (3.1.2)-ը), ապա ցանկացած x վեկտոր գրվում է

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$(x, x) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$$

և

$$(Ax, x) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \alpha_i \bar{\alpha}_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 :$$

Այնուհետև,

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$$

ակնհայտ գնահատականներից հետևում է, որ

$$\lambda_{\min}(x, x) \leq (Ax, x) \leq \lambda_{\max}(x, x) : \quad (3.1.5)$$

Ենթադրելով, որ $x \neq 0$, գալիս ենք (3.1.3) անհավասարություններին: Իսկ (3.1.4) առնչությունները հեշտությամբ բխում են $(Ae_1, e_1) = \lambda_1(e_1, e_1)$ և $(Ae_n, e_n) = \lambda_n(e_n, e_n)$ հավասարություններից: \square

Կարելի է տալ (3.1.4) առնչությունների մի այլ համարժեք գրառում.

$$\lambda_{\min} = \min_{(x,x)=1} (Ax, x), \quad \lambda_{\max} = \max_{(x,x)=1} (Ax, x) : \quad (3.1.6)$$

Հատուկ նշենք, որ

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

արտահայտությունը հայտնի է որպես *Ռելեյի հարաբերություն*²:

²Ռելեյ Ջոն Ուիլյամ, լորդ Սթրեթ (1842-1919) – անգլիացի ֆիզիկոս, տատանումների մաթեմատիկական տեսության հիմնադիրներից է:

3.2 Դրական որոշյալ և դրական կիսատրոշյալ մատրիցներ

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ հերմիտյան մատրիցը կոչվում է *դրական որոշյալ* և նշանակվում է $A > 0$, եթե $(Ax, x) > 0$ ցանկացած ոչ զրոյական $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ հերմիտյան մատրիցը կոչվում է *դրական կիսատրոշյալ* և նշանակվում է $A \geq 0$, եթե $(Ax, x) \geq 0$ ցանկացած $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար:

Դրական որոշյալ մատրիցների բազմությունը դրական կիսատրոշյալ մատրիցների բազմության ենթաբազմություն է: Մատրիցների այդ երկու տիպերի բնորոշ տարբերությունն այն է, որ դրական կիսատրոշյալ մատրիցների համար $(Ax, x) = 0$ հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ նաև որոշ ոչ զրոյական վեկտորների համար: Ստորև բերված երկու մատրիցներից առաջինը դրական որոշյալ է, իսկ երկրորդը՝ դրական կիսատրոշյալ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}:$$

Դիտարկում 3.2.1 : Երբ A հերմիտյան մատրիցը իրական է (այլ կերպ ասած, երբ A -ն սիմետրիկ մատրից է), վերը տրված դրական որոշյալության և դրական կիսատրոշյալության սահմանումներում բավական է սահմանափակվել միայն $x \in \mathbb{R}^n$ վեկտորներով: \square

Քննարկվող տիպի մատրիցների ստորև բերված կարևոր հատկությունների ապացուցումը մենք թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

- ◇ *Դրական որոշյալ մատրիցի անկյունագծային տարրերը դրական են, իսկ դրական կիսատրոշյալ մատրիցինը՝ ոչ բացասական:*
- ◇ *Դրական որոշյալ մատրիցի սեփական արժեքները դրական են, իսկ դրական կիսատրոշյալ մատրիցինը՝ ոչ բացասական:*
- ◇ *Դրական որոշյալ մատրիցի որոշիչը դրական է, իսկ դրական կիսատրոշյալ մատրիցինը՝ ոչ բացասական:*
- ◇ *Եթե A մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա նրա A^{-1} հակադարձ մատրիցը նույնպես դրական որոշյալ է:*
- ◇ *Կամայական $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի համար $A^*A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ և $AA^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ մատրիցները դրական կիսատրոշյալ են: Ավելին, եթե $\text{rank} A = n$, ապա $A^*A > 0$, իսկ եթե $\text{rank} A = m$, ապա $AA^* > 0$:*

Վերադարձանք վերը թվարկված հատկություններից երկրորդին՝ դրական որոշյալ և դրական կիսատրոշյալ մատրիցների սեփական արժեքների վերաբերյալ: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը:

- ◇ *Եթե հերմիտյան մատրիցի սեփական արժեքները դրական են, ապա այդ մատրիցը դրական որոշյալ է, իսկ եթե նրանք ոչ բացասական են՝ մատրիցը դրական կիսատրոշյալ է:*

Այս փաստի ապացույցը հեշտությամբ բխում է (3.1.5)-ում ստացված անհավասարությունից, այն է՝ $(Ax, x) \geq \lambda_{\min}(x, x)$ անհավասարությունը:

Մատրիցի դրական որոշյալությունը պարզելու համար հայտնի է ստորև ներկայացված *Միլլեստրի չափանիշը*:

Թեորեմ 3.2.1 : $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ հերմիտյան մատրիցը դրական որոշյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա բոլոր անկյունային միներները դրական են, այսինքն՝

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n : \quad (3.2.1)$$

Այս փաստի ապացույցը կարելի է գտնել, օրինակ, [10, 16] գրքերում:

Դիտարկություն 3.2.2 : Համանմանությամբ չի կարելի ենթադրել, որ հերմիտյան մատրիցը դրական կիսատորոշյալ է, երբ նրա բոլոր անկյունային միներները ոչ բացասական են: Օրինակ՝

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

սիմետրիկ մատրիցի անկյունային միներները հավասար են զրոյի, մինչդեռ ցանկացած $x = [x_1 x_2]^T$ վեկտորի համար $(Ax, x) = -x_2^2 \leq 0$: Բայց ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Հերմիտյան մատրիցը դրական կիսատորոշյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա բոլոր գլխավոր միներները ոչ բացասական են:

Վերոնշյալ օրինակի մատրիցն այդ պայմանին չի բավարարում: \square

3.3 Ունիտար և օրթոգոնալ մատրիցներ

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը կոչվում է *ունիտար*, եթե $A^{-1} = A^*$: Իրական ունիտար մատրիցը անվանում են *օրթոգոնալ*, նրա համար $A^{-1} = A^T$:

Որպես օրինակ բերենք

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

մատրիցները, որոնցից առաջինը ունիտար է, իսկ երկրորդը՝ օրթոգոնալ:

Թվարկենք ունիտար մատրիցների որոշ հատկություններ: Դրանց ապացուցումը մենք թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

- ◊ Եթե A մատրիցն ունիտար է, ապա A^* մատրիցը ևս ունիտար է:
- ◊ Ունիտար մատրիցի սեփական արժեքները մոդուլով հավասար են մեկի:
- ◊ Ունիտար մատրիցի որոշիչը մոդուլով հավասար է մեկի:
- ◊ Ունիտար մատրիցների արտադրյալն ունիտար մատրից է:

Ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.3.1 : $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը ունիտար է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա սյունները կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ \mathbb{C}^n տարածությունում:

Ապացույց: Նշանակենք A մատրիցի սյունները՝ $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$: Ունենք

$$A^*A = [A^{(i)*} A^{(j)}]_{n \times n} = [(A^{(j)}, A^{(i)})]_{n \times n},$$

որտեղից բխում է թեորեմի պնդումը: \square

Դիտողություն 3.3.1 : Դիշտ է նաև այն, որ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը ունիտար է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տողերը կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ վեկտոր-տողերի n -չափանի տարածությունում: Եթե A_1, A_2, \dots, A_n -ով նշանակենք A մատրիցի տողերը, ապա պնդումը հետևում է $AA^* = [A_i A_j^*]_{n \times n}$ գրառումից: \square

Նշենք ունիտար և օրթոգոնալ մատրիցների մի քանի կարևոր տիպեր, որոնք լայնորեն կիրառվում են վեկտորական տարածություններում տարբեր ձևափոխությունների իրականացման ժամանակ, ինչպես նաև գծային հանրահաշվի հաշվողական ալգորիթմները մշակելիս:

Տեղափոխության մատրիցներ

Տեղափոխության մատրից կոչվում է այն մատրիցը, որի յուրաքանչյուր տող և յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ մեկ միավոր, իսկ մնացած բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի:

Տեղափոխության մատրիցները օրթոգոնալ են ըստ 3.3.1 թեորեմի: Կամայական մատրիցի բազմապատկումը աջից (ձախից) տեղափոխության մատրիցով համարժեք է նրա համապատասխան սյունների (տողերի) տեղափոխությանը: Օրինակ՝ դիտարկենք

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

մատրիցը և

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

տեղափոխության մատրիցները: A մատրիցը ձախից P_1 մատրիցով բազմապատկելիս կստանանք

$$P_1 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix},$$

իսկ աջից P_2 մատրիցով բազմապատկելիս՝

$$A P_2 = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} :$$

տիպի մատրիցներն են, որոնք տարբերվում են միավոր մատրիցից ընդամենը չորս տարբերով՝ զետեղված i և j համարներով տողերի և սյուների հատման տեղերում, որտեղ $c^2 + s^2 = 1$: Վերջին պայմանը թույլ է տալիս c և s մեծությունները մեկնաբանել որպես ինչ-որ α անկյան կոսինուս և սինուս՝ $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$:

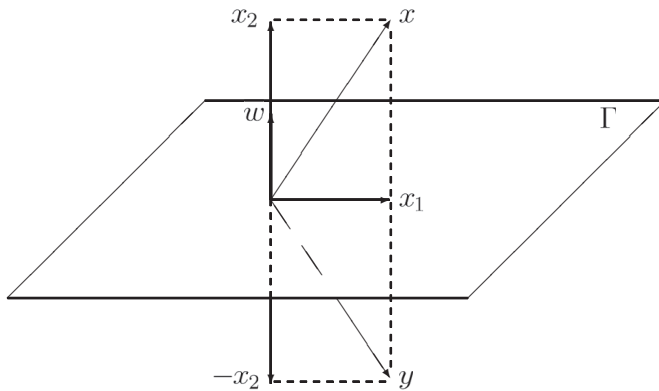
Պատման մատրիցները անվանում են նաև *Գիվենսի մատրիցներ*³, իսկ այդ մատրիցներով որոշվող ձևափոխությունները՝ *Գիվենսի պտույտներ*:

Նշենք, որ երկչափ տարածության մեջ (3.3.1) տեսքի երկու պտտման մատրիցների արտադրյալը նույնպես պտտման մատրից է: Սակայն ավելի բարձր չափողականության տարածություններում դա միշտ չէ որ այդպես է: Պտույտը n -չափանի տարածությունում, երբ $n \geq 3$, պետք է հասկանալ որպես հարթ պտույտների հաջորդականություն:

Արտացոլման մատրիցներ

Գիցուք C^n տարածությունում տրված է w նորմավորված վեկտոր, այն է՝ $w^*w = 1$: Գիտարկենք այդ վեկտորին օրթոգոնալ վեկտորների Γ ենթատարածությունը: Այդ ենթատարածությունը, որի չափողականությունը հավասար է $n - 1$ -ի (տե՛ս, օրինակ՝ [7, 16]), անվանում են *հիպերհարթություն*:

Տրված $x \in C^n$ վեկտորը կարելի է գրել $x = x_1 + x_2$ տեսքով, որտեղ $x_1 \in \Gamma$, $x_2 \perp \Gamma$: Այնուհետև սահմանենք $y = x_1 - x_2$ վեկտորը, որը կմեկնաբանենք որպես x վեկտորի *արտացոլում* Γ հիպերհարթության նկատմամբ (Նկ. 3.3.2): Ստանանք այդ ձևափոխության մատրիցը:



Նկ. 3.3.2. Արտացոլում հիպերհարթության նկատմամբ:

Գրենք y արտացոլված վեկտորը $y = x - 2x_2$ տեսքով: Քանի որ x_2 վեկտորը օրթոգոնալ է Γ հիպերհարթությանը, ապա $x_2 = w\alpha$, որտեղ α -ն ինչ-որ թիվ է: Ունենք՝

$$w^*x_2 = w^*w\alpha = \alpha :$$

³Գիվենս Ջեյմս Ուոլես (1910-1993) – ամերիկացի գիտնական, հայտնի մասնագետ կիրառական մաթեմատիկայի բնագավառում:

Մյուս կողմից՝

$$w^*x_2 = w^*(x - x_1) = w^*x - w^*x_1 = w^*x :$$

Ուստի $\alpha = w^*x$, և հետևաբար $x_2 = ww^*x$: Արդյունքում կստանանք, որ

$$y = x - 2ww^*x = (I - 2ww^*)x :$$

Այսպիսով,

$$y = Hx, \tag{3.3.3}$$

որտեղ

$$H \equiv I - 2ww^* \tag{3.3.4}$$

արտացոլման մատրիցն է, որը անվանում են նաև *Հատուհողղերի մատրից*⁴: Իսկ (3.3.3) ձևավորությունը կրում է *Հատուհողղերի արտացոլում* անունը:

Գիցուք $w = [w_1w_2 \dots w_n]^T$: Գրենք արտացոլման մատրիցն ընդլայնված տեսքով.

$$H = \begin{bmatrix} 1 - 2|w_1|^2 & -2w_1\overline{w_2} & \dots & -2w_1\overline{w_n} \\ -2w_2\overline{w_1} & 1 - 2|w_2|^2 & \dots & -2w_2\overline{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2w_n\overline{w_1} & -2w_n\overline{w_2} & \dots & 1 - 2|w_n|^2 \end{bmatrix} :$$

Ինչպես ակնհայտորեն հետևում է (3.3.4)-ից, H մատրիցը հերմիտյան է: Ցույց տանք, որ այն նաև ունիտար է: Իրոք,

$$HH^* = H^2 = I - 4ww^* + 4ww^*ww^* = I - 4ww^* + 4ww^* = I,$$

այսինքն՝ $H = H^* = H^{-1}$:

Կարելի է ցույց տալ, որ երկու արտացոլման մատրիցների արտադրյալը նույնպես արտացոլման մատրից է (տե՛ս, օրինակ՝ [20, 28]):

3.4 Պարզ կառուցվածքի մատրիցներ

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը կոչվում է *պարզ կառուցվածքի մատրից*, եթե այն ունի n հաստ գծորեն անկախ սեփական վեկտոր:

Որպես 1.3.1 թեորեմի հետևանք ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

- ◊ *Եթե մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները զույգ առ զույգ տարրեր են, ապա այդ մատրիցն ունի պարզ կառուցվածք:*

Մյուս կարևոր պնդումը բխում է 3.1.3 թեորեմից:

- ◊ *Հերմիտյան մատրիցը պարզ կառուցվածքի մատրից է:*

⁴Հատուհողղեր էլստոն Աբոբ (1904-1993) – ամերիկացի մաթեմատիկոս, հայտնի է գծային հանրահաշվի և նրա կիրառությունների ոլորտում իր աշխատություններով:

մատրիցը (գրառման մեջ մենք նշել ենք մատրիցի սյունները): Այնուհետև, կազմենք

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

մատրիցը, որը հայտնի է որպես *Վանդերմոնդի մատրից*⁵: Քանի որ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ թվերը իրարից տարբեր են, ապա այդ մատրիցը չվերասերված է: Բազմապատկենք F և V մատրիցները՝ որպես վանդակային մատրիցներ: Հաշվի առնելով (3.4.4)-ը և (3.4.5)-ը՝ կստանանք, որ

$$FV = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} :$$

Այստեղից $F = \mathbf{0} \cdot V^{-1} = \mathbf{0}$, այսինքն՝ F մատրիցը գրոյական է: Հետևաբար գրոյական են (3.4.3)-ում սահմանված f_i վեկտորները: Իսկ դա նշանակում է, որ (3.4.2) գծային կոմբինացիայի բոլոր գործակիցները հավասար են գրոյի: \square

Նշենք, որ նախկինում բերված 1.3.1 թեորեմը նոր ապացուցված թեորեմի մասնավոր դեպքն է:

Թեորեմ 3.4.2 : *Մատրիցն ունի պարզ կառուցվածք այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա յուրաքանչյուր սեփական արժեքի հանրահաշվական և երկրաչափական պատիկությունները հավասար են:*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք, որ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցն ունի պարզ կառուցվածք, և

$$e_1, e_2, \dots, e_n \tag{3.4.6}$$

վեկտորները կազմում են գծորեն անկախ սեփական վեկտորների համակարգ: Այնուհետև, դիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ թվերը մատրիցի բոլոր իրարից տարբեր սեփական արժեքներն են: Յուրաքանչյուր $i = 1, 2, \dots, k$ արժեքի համար μ_i -ով նշանակենք λ_i սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորների թիվը (3.4.6) համակարգում: Ըստ երկրաչափական պատիկության սահմանման՝ $\mu_i \leq g(\lambda_i)$: Հաշվի առնելով հանրահաշվական և երկրաչափական պատիկությունների միջև առնչությունը (տե՛ս 2.4.1 թեորեմը)՝ ունենք՝

$$n = \sum_{i=1}^k \mu_i \leq \sum_{i=1}^k g(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^k a(\lambda_i) = n :$$

Այստեղից գալիս ենք այն եզրակացության, որ

$$\sum_{i=1}^k g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k a(\lambda_i),$$

⁵Վանդերմոնդ Ալեքսանդր Թեոֆիլ (1735-1796) – ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, երաժիշտ և քաղաքական գործիչ:

որտեղից հետևում են $g(\lambda_i) = a(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ հավասարությունները:

Բավարարություն: Դիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ թվերը A մատրիցի բոլոր գույգ առ գույգ տարբեր սեփական արժեքներն են, և $g(\lambda_i) = a(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$: Այնուհետև, դիցուք յուրաքանչյուր $i = 1, 2, \dots, k$ արժեքի համար

$$e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im_i}, \quad m_i \equiv g(\lambda_i) \quad (3.4.7)$$

համակարգը λ_i սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորների մաքսիմալ գծորեն անկախ համակարգ է: Համաձայն 3.4.1 թեորեմի՝

$$\{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im_i}\}_{i=1}^k$$

վեկտորների համախմբությունը կազմում է գծորեն անկախ համակարգ \mathbf{C}^n տարածության մեջ: Ընդ որում՝

$$\sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k a(\lambda_i) = n,$$

որտեղից էլ բխում է մեր պնդումը: \square

Օրինակ՝

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

մատրիցն ունի երկու սեփական արժեք՝ $\lambda_1 = 1$ և $\lambda_2 = 2$: Այդ սեփական արժեքների հանրահաշվական պատկերությունը հավասար է մեկի: Համապատասխան սեփական վեկտորներն են՝ $e_1 = [\alpha, 0]^T$ ($\alpha \neq 0$) և $e_2 = [-\beta, \beta]^T$ ($\beta \neq 0$): Երկու դեպքում էլ երկրաչափական պատկերությունը նույնպես հավասար է մեկի:

Սեփական վեկտորների (3.4.7) համակարգի

$$L_i \equiv \text{span}\{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im_i}\}$$

գծային թաղանթը A մատրիցի λ_i սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածություն է: Ինչպես հետևում է 3.4.2 թեորեմից՝

$$\mathbf{C}^n = L_1 + L_2 + \dots + L_k :$$

Այսպիսով, միայն պարզ կառուցվածքի մատրիցների դեպքում է ամբողջ վեկտորական տարածությունը ներկայացվում որպես այդ մատրիցի սեփական ենթատարածությունների ուղիղ գումար:

Վերջում ապացուցենք ևս երկու պնդում:

Թեորեմ 3.4.3 : Եթե $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցն ունի պարզ կառուցվածք, ապա A^T -ն նույնպես պարզ կառուցվածքի մատրից է:

Ապացույց: Նախ հիշենք, որ A և A^T մատրիցները ունեն նույն սեփական արժեքները (տե՛ս 1.3 պարագրաֆը): Օգտվելով (2.4.2) բանաձևից՝ ցանկացած λ սեփական արժեքի համար ունենք՝

$$g_{A^T}(\lambda) = n - \text{rank}(\lambda I - A^T) = n - \text{rank}(\lambda I - A)^T = n - \text{rank}(\lambda I - A) = g_A(\lambda) : \quad \square$$

Թեորեմ 3.4.4 : Եթե $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցն ունի պարզ կառուցվածք, ապա A^* -ը նույնպես պարզ կառուցվածքի մատրից է:

Ապացույց: A և A^* մատրիցների սեփական արժեքները կոմպլեքս համալուծ են (տե՛ս 1.3 պարագրաֆը): Միևնույն ժամանակ՝

$$g_{A^*}(\bar{\lambda}) = n - \text{rank}(\bar{\lambda}I - A^*) = n - \text{rank}(\lambda I - A)^* = n - \text{rank}(\lambda I - A) = g_A(\lambda) : \quad \square$$

Նշենք, որ պարզ կառուցվածքի մատրիցները կազմում են մատրիցների բազմության բավականաչափ լայն և կարևոր ենթադաս:

3.5 Նորմալ մատրիցներ

Կասենք, որ A -ն նորմալ մատրից է, եթե $A^*A = AA^*$: Իրական մատրիցների դեպքում նորմալության պայմանը գրվում է $A^T A = A A^T$ տեսքով:

Բերենք նորմալ մատրիցի օրինակ.

$$A = \begin{bmatrix} 5 + i & -2i \\ 2 & 4 + 2i \end{bmatrix} :$$

Ճիշտ են հետևյալ հեշտ ապացուցվող պնդումները:

- ◊ Անկյունագծային մատրիցը նորմալ է:
- ◊ Հերմիտյան մատրիցը նորմալ է:
- ◊ Ունիտար մատրիցը նորմալ է:

Նախքան նորմալ մատրիցների հիմնարար հատկությունների բացահայտումը ապացուցենք մեկ պնդում:

Լեմմա 3.5.1 : Եթե $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը նորմալ է, ապա $\ker A^* = \ker A$ և $\text{im} A^* = \text{im} A$:

Ապացույց: Համաձայն 2.1.3 թեորեմի՝ $\ker A^* A = \ker A$: Ճիշտ է նաև $\ker A A^* = \ker A^*$ հավասարությունը: Իսկ քանի որ A մատրիցը նորմալ է, հանգում ենք միջուկների վերաբերյալ լեմմայի պնդմանը: Ինչ վերաբերում է լեմմայի երկրորդ պնդմանը, ապա այն անմիջապես հետևում է 2.1.2 թեորեմից: Իրոք, ըստ (2.1.9) վերլուծությունների, $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \text{im} A^*$ և, մյուս կողմից, $\mathbb{C}^n = \ker A^* \oplus \text{im} A$: Քանի որ $\ker A = \ker A^*$, ապա և $\text{im} A^* = \text{im} A$: \square

Այսպիսով, նորմալ մատրիցների համար

$$\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \text{im} A :$$

Թեորեմ 3.5.1 : Եթե $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը նորմալ է, ապա A և A^* մատրիցներն ունեն նույն սեփական վեկտորները, ընդ որում, A և A^* մատրիցների ընդհանուր սեփական վեկտորին համապատասխանող սեփական արժեքները կոմպլեքս համալուծ են:

Ապացույց: Եթե A մատրիցը նորմալ է, ապա ցանկացած λ թվի համար $\lambda I - A$ մատրիցը նույնպես կլինի նորմալ: Մա հետևում է

$$(\lambda I - A)^*(\lambda I - A) = (\overline{\lambda}I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + A^*A,$$

$$(\lambda I - A)(\lambda I - A)^* = (\lambda I - A)(\overline{\lambda}I - A^*) = |\lambda|^2 I - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + AA^*$$

հավասարություններից: Օգտվենք 3.5.1 լեմմայից, որի համաձայն

$$\ker(\lambda I - A) = \ker(\lambda I - A)^* = \ker(\overline{\lambda}I - A^*) :$$

Ապացույցն ավարտելու համար միայն մնում է հիշել, որ $\ker(\lambda I - A)$ և $\ker(\overline{\lambda}I - A^*)$ ենթատարածությունների ոչ զրոյական վեկտորները՝ համապատասխանաբար A և A^* մատրիցների սեփական վեկտորներն են (տե՛ս (2.4.1) առնչությունը): \square

Թեորեմ 3.5.2 *Որպեսզի $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը լինի նորմալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ունենա սեփական վեկտորների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ:*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Գիցուք A -ն նորմալ մատրից է: Ըստ 3.5.1 թեորեմի A և A^* մատրիցներն ունեն e_1 ընդհանուր սեփական վեկտոր: Կարող ենք համարել, որ այդ վեկտորը նորմավորված է: Այսպիսով, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ և $A^*e_1 = \overline{\lambda_1} e_1$, որտեղ λ_1 և $\overline{\lambda_1}$ թվերը համապատասխան սեփական արժեքներն են: Գիցուք $S_1 = \text{span}\{e_1\}$, և

$$T_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : (x, e_1) = 0\}$$

ենթատարածությունը S_1 -ի օրթոգոնալ լրացումն է: Պարզվում է, որ T_1 -ը ինվարիանտ է A և A^* մատրիցների նկատմամբ: Իրոք, եթե $x \in T_1$, ապա

$$(Ax, e_1) = (x, A^*e_1) = (x, \overline{\lambda_1}e_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0$$

և

$$(A^*x, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = \overline{\lambda_1}(x, e_1) = 0 :$$

Ստացանք, որ Ax և A^*x վեկտորները նույնպես պատկանում են T_1 -ին: Ուստի A և A^* մատրիցներն ունեն $e_2 \in T_1$ ընդհանուր նորմավորված սեփական վեկտոր (տե՛ս, օրինակ՝ [10, 21]), ընդ որում՝ $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ և $A^*e_2 = \overline{\lambda_2} e_2$, որտեղ λ_2 և $\overline{\lambda_2}$ թվերը համապատասխան սեփական արժեքներն են:

Նկարագրենք հաջորդ քայլը: Գիցուք $S_2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$, և

$$T_2 = \{x \in \mathbb{C}^n : (x, e_i) = 0, i = 1, 2\}$$

ենթատարածությունը S_2 -ի օրթոգոնալ լրացումն է: Համանմանորեն կարելի է ցույց տալ, որ T_2 ենթատարածությունը ինվարիանտ է A և A^* մատրիցների նկատմամբ: Հետևաբար A և A^* մատրիցները ունեն $e_3 \in T_2$ ընդհանուր նորմավորված սեփական վեկտոր, այնպես որ $Ae_3 = \lambda_3 e_3$ և $A^*e_3 = \overline{\lambda_3} e_3$, որտեղ λ_3 և $\overline{\lambda_3}$ թվերը համապատասխան սեփական արժեքներ են:

Շարունակելով նման ձևով՝ մենք կստանանք A և A^* մատրիցների e_1, e_2, \dots, e_n ընդհանուր սեփական վեկտորների օրթոնորմավորված համակարգը, ընդ որում՝

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad A^*e_i = \overline{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (3.5.1)$$

Բավարարություն: Դիցուք e_1, e_2, \dots, e_n մատրիցի սեփական վեկտորների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգն է: Նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ -ով համապատասխան սեփական արժեքները, այնպես որ

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (3.5.2)$$

Կազմենք

$$y_i \equiv A^*e_i - \overline{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.3)$$

վեկտորները: Դիտարկենք (3.5.3) տեսքի կամայական y_i վեկտորը: Ցանկացած $k = 1, 2, \dots, n$ արժեքի համար ունենք՝

$$\begin{aligned} (e_k, y_i) &= (e_k, A^*e_i - \overline{\lambda_i} e_i) = (e_k, A^*e_i) - (e_k, \overline{\lambda_i} e_i) = \\ &= (Ae_k, e_i) - \lambda_i (e_k, e_i) = \lambda_k (e_k, e_i) - \lambda_i (e_k, e_i) = (\lambda_k - \lambda_i) (e_k, e_i): \end{aligned}$$

Սեփական վեկտորների օրթոգոնալությունից բխում է $(e_k, y_i) = 0$ հավասարությունը բոլոր $k = 1, 2, \dots, n$ արժեքների համար: Սեփական վեկտորների համակարգը լրիվ է, ուստի $y_i = 0$, և (3.5.3)-ից կստանանք, որ

$$A^*e_i = \overline{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (3.5.4)$$

Հաշվի առնելով (3.5.2) և (3.5.4) հավասարությունները՝ կարող ենք գրել, որ

$$\begin{aligned} A^*Ae_i &= A^*(\lambda_i e_i) = \lambda_i A^*e_i = \lambda_i \overline{\lambda_i} e_i = |\lambda_i|^2 e_i, \\ AA^*e_i &= A(\overline{\lambda_i} e_i) = \overline{\lambda_i} Ae_i = \overline{\lambda_i} \lambda_i e_i = |\lambda_i|^2 e_i: \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$A^*Ae_i = AA^*e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

որտեղից բխում է $A^*Ax = AA^*x$ հավասարությունը ցանկացած $x \in \mathbf{C}^n$ վեկտորի համար, այսինքն՝ $A^*A = AA^*$: \square

Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ *նորմալ մատրիցները պարզ կառուցվածքի մատրիցներ են*, քանի որ սեփական վեկտորների օրթոնորմավորված համակարգը, բնականաբար, գծորեն անկախ է:

Ինչպես վերը ասվեց, հերմիտյան և ունիտար մատրիցները նորմալ մատրիցների մասնավոր դեպքերն են: Պարզենք, թե ինչպիսի լրացուցիչ հատկություններով են օժտված այդ մատրիցները և ինչով են նրանք առանձնանում նորմալ մատրիցների դասում: Նախասպես ասենք, որ նշված մատրիցների յուրահատկությունը պայմանավորված է նրանց սեփական արժեքների հատկություններով:

Թեորեմ 3.5.3 : $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը հերմիտյան է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունի սեփական վեկտորների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ և նրա բոլոր սեփական արժեքներն իրական թվեր են:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Քանի որ հերմիտյան մատրիցը նորմալ է, ապա այն ունի սեփական վեկտորների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ (թեորեմ 3.5.2): Հայտնի է նաև, որ հերմիտյան մատրիցի սեփական արժեքները իրական թվեր են (թեորեմ 3.1.1):

Բավարարություն: Դիցուք A մատրիցի e_1, e_2, \dots, e_n սեփական վեկտորները կազմում են լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ, և

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

որտեղ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ թվերը համապատասխան իրական սեփական արժեքներն են: Այդ դեպքում A մատրիցը նորմալ է՝ ըստ 3.5.2 թեորեմի: Այնուհետև, 3.5.1 թեորեմից հետևում է, որ

$$A^*e_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n:$$

Այսպիսով, $Ae_i = A^*e_i$, $i = 1, 2, \dots, n$: Դրանով իսկ $Ax = A^*x$ ցանկացած $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար, այսինքն՝ $A = A^*$: \square

Թեորեմ 3.5.4 : $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը ունիտար է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունի սեփական վեկտորների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ և նրա բոլոր սեփական արժեքները մոդուլով հավասար են մեկի:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Քանի որ ունիտար մատրիցը նորմալ է, ապա այն ունի սեփական վեկտորների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ (թեորեմ 3.5.2): Բացի այդ, ունիտար մատրիցի սեփական արժեքները մոդուլով հավասար են մեկի (տե՛ս 3.3 պարագրաֆում բերված պնդումը):

Բավարարություն: Դիցուք A մատրիցի e_1, e_2, \dots, e_n սեփական վեկտորները կազմում են լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ: Ուստի A մատրիցը նորմալ է՝ ըստ 3.5.2 թեորեմի: Նշված սեփական վեկտորներին համապատասխանում են $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ սեփական արժեքները, այսինքն՝

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ընդ որում՝ $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$: Այնուհետև, 3.5.1 թեորեմից հետևում է, որ

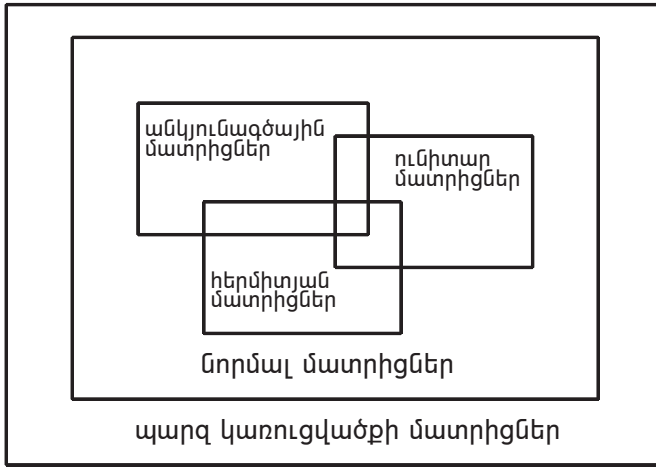
$$A^*e_i = \overline{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n:$$

Այդ դեպքում՝

$$A^*Ae_i = A^*(\lambda_i e_i) = \lambda_i A^*e_i = \lambda_i \overline{\lambda_i} e_i = |\lambda_i|^2 e_i = e_i$$

բոլոր $i = 1, 2, \dots, n$ արժեքների համար: Դրանով իսկ $A^*Ax = x$ ցանկացած $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար, այսինքն՝ $A^*A = I$: \square

Նկ. 3.5.1-ում տրված է սույն գլխում նկարագրված մատրիցների դասերի հարաբերակցությունները և ստորակարգությունը մեկնաբանող սխեմա:



Նկ. 3.5.1. Մատրիցների դասերի հարաբերակցությունները:

Նշենք, որ իրական անկյունագծային մատրիցները հերմիտյան են, ինչը չի կարելի ասել կոմպլեքս անկյունագծային տարրերով մատրիցների մասին: Միավոր մատրիցը միաժամանակ անկյունագծային է, հերմիտյան է և ուղիտար:

3.6 Շուրի լրացումը

Ներկայացնենք n -րդ կարգի A մատրիցը

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{3.6.1}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ A_{ij} , $i, j = 1, 2$ վանդակները $n_i \times n_j$ չափի մատրիցներ են և $n_1 + n_2 = n$: Ենթադրելով, որ $\det A_{22} \neq 0$, սահմանենք

$$S_{11} \equiv A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \tag{3.6.2}$$

մատրիցը, որը կոչվում է A_{22} վանդակի Շուրի լրացում⁶: Նման կերպով, եթե $\det A_{11} \neq 0$, սահմանվում է A_{11} վանդակի Շուրի լրացումը.

$$S_{22} \equiv A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} : \tag{3.6.3}$$

Նոր հասկացությունը խաղում է կարևոր դեր ինչպես մատրիցների տեսության մեջ, այնպես էլ գծային հանրահաշվի հաշվողական ալգորիթմներ կառուցելիս: Որպես օրինակ դիտարկենք (3.6.1) վանդակային մատրիցով

$$Ax = b$$

⁶Շուր Իսայ (1875-1941) – գերմանացի մաթեմատիկոս, մեծ ներդրում ունի մատրիցների տեսության և նրա կիրառությունների զարգացման գործում:

համակարգի լուծման հետևյալ եղանակը: Գրենք այս համակարգը որպես

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (3.6.4)$$

որտեղ x_1, x_2 և b_1, b_2 վեկտորները x և b վեկտորների ենթավեկտորներն են: Փաստորեն մենք ունենք մատրիցա-վեկտորական հավասարումների համակարգ.

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 : \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Գիցուք A_{22} մատրիցը չվերասերված է: Համակարգի երկրորդ հավասարումից արտահայտենք x_2 վեկտորը x_1 վեկտորով, այսինքն՝ գրենք

$$x_2 = A_{22}^{-1}(b_2 - A_{21}x_1) :$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունը (3.6.5) համակարգի առաջին հավասարման մեջ հաջորդաբար ստանում ենք.

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}A_{22}^{-1}(b_2 - A_{21}x_1) &= b_1, \\ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 &= b_1 - A_{12}A_{22}^{-1}b_2, \\ S_{11}x_1 &= b_1 - A_{12}A_{22}^{-1}b_2 : \end{aligned}$$

Արդյունքում հանգում ենք (3.6.4) համակարգի լուծման հետևյալ ընթացակարգին.

1. հաշվվում է $c_1 = b_1 - A_{12}A_{22}^{-1}b_2$ վեկտորը,
2. լուծվում է $S_{11}x_1 = c_1$ համակարգը,
3. հաշվվում է $x_2 = A_{22}^{-1}(b_2 - A_{21}x_1)$ վեկտորը:

Նշենք, որ (3.6.4) համակարգի լուծման այդպիսի եղանակը իմաստ ունի կիրառել այն դեպքում, երբ մենք կարող ենք արդյունավետորեն լուծել A_{22} և S_{11} մատրիցներով համակարգերը:

Ներկայացնենք Շուրի լրացման ևս մեկ կիրառություն: Մատրիցի որոշիչի հաշվումը կարելի է հանգեցնել ավելի ցածր կարգի մատրիցների որոշիչների հաշվման: Իրոք,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

հեշտ ստուգվող հավասարությունից բխում է, որ

$$\det A = \det S_{11} \det A_{22} :$$

Այժմ բացահայտենք Շուրի լրացման որոշ կարևոր հատկություններ: Հետագայում կենթադրենք, որ A մատրիցը հերմիտյան է: Գա նշանակում է, որ (3.6.1) վանդակային ներկայացման մեջ $A_{11}^* = A_{11}$, $A_{22}^* = A_{22}$ և $A_{12}^* = A_{21}$:

Լեմմա 3.6.1 : Եթե A մատրիցը դրական որոշյալ է (կիսատրոշյալ), ապա A_{11} և A_{22} վանդակները նույնպես դրական որոշյալ (կիսատրոշյալ) մատրիցներ են:

Ապացույց: Վերցնենք n_1 երկարության x_1 և n_2 երկարության x_2 կամայական ոչ գրոյական վեկտորներ: Սահմանենք n երկարության

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

վեկտորները: Լեմմայի պնդումը բխում է

$$u^* A u = x_1^* A_{11} x_1 \quad \text{և} \quad v^* A v = x_2^* A_{22} x_2$$

հեշտությամբ ստացվող հավասարություններից: \square

Դիցուք A մատրիցը դրական որոշյալ է: Դիտարկենք n երկարության կամայական x վեկտոր: Տրոհենք այդ վեկտորը x_1 և x_2 ենթավեկտորների՝

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} :$$

Լեմմա 3.6.2 : Ճիշտ է

$$x^* A x = x_1^* S_{11} x_1 + (x_2 + z_2)^* A_{22} (x_2 + z_2) \tag{3.6.6}$$

հավասարությունը, որտեղ

$$z_2 \equiv A_{22}^{-1} A_{21} x_1 : \tag{3.6.7}$$

Ապացույց: Օգտվելով A մատրիցի և x վեկտորի վանդակային ներկայացումներից՝ ունենք.

$$x^* A x = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^* A_{11} x_1 + x_1^* A_{12} x_2 + x_2^* A_{21} x_1 + x_2^* A_{22} x_2 :$$

Եթե (3.6.7) պայմանը գրենք $A_{22} z_2 = A_{21} x_1$ տեսքով, ապա $z_2^* A_{22} = x_1^* A_{12}$: Այդ դեպքում

$$x^* A x = x_1^* A_{11} x_1 + z_2^* A_{22} x_2 + x_2^* A_{22} (x_2 + z_2) :$$

Այնուհետև, քանի որ $A_{11} = S_{11} + A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$, ապա

$$\begin{aligned} x^* A x &= x_1^* S_{11} x_1 + x_1^* A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} x_1 + z_2^* A_{22} x_2 + x_2^* A_{22} (x_2 + z_2) \\ &= x_1^* S_{11} x_1 + z_2^* A_{22} z_2 + z_2^* A_{22} x_2 + x_2^* A_{22} (x_2 + z_2) \\ &= x_1^* S_{11} x_1 + z_2^* A_{22} (x_2 + z_2) + x_2^* A_{22} (x_2 + z_2) \\ &= x_1^* S_{11} x_1 + (x_2 + z_2)^* A_{22} (x_2 + z_2) : \quad \square \end{aligned}$$

Հետևյալ պնդումը 3.6.1 և 3.6.2 լեմմաների պարզ հետևանքն է:

ձեռնարկ 3.6.1 : *ճիշտ է*

$$x^*Ax \geq x_1^*S_{11}x_1 \quad (3.6.8)$$

հավասարությունը:

Պարզվում է, որ Շուրի լրացումը ժառանգում է մատրիցի հետևյալ հատկությունը:

Թեորեմ 3.6.1 : *Եթե A մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա S_{11} Շուրի լրացումը նույնպես դրական որոշյալ մատրից է:*

Ապացույց: Այն, որ S_{11} մատրիցը հերմիտյան է, բխում է (3.6.2) սահմանումից: Այնուհետև, կամայական ոչ գրոյական x_1 վեկտորի համար ընտրենք x_2 վեկտորը

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = 0$$

պայմանից, այսինքն՝ վերցնենք

$$x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1 :$$

Արդյունքում կունենանք

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ոչ գրոյական վեկտոր: Ըստ ընտրության՝ $x_2 = -z_2$, որտեղ z_2 -ը (3.6.7)-ում սահմանված վեկտորն է: Այդ դեպքում $x_2 + z_2 = 0$, և (3.6.6) հավասարությունից կստանանք, որ

$$x_1^*S_{11}x_1 = x^*Ax > 0 : \quad \square$$

Դիցուք ունենք n -րդ կարգի A և B դրական որոշյալ համաձև վանդակային մատրիցներ.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} : \quad (3.6.9)$$

Այս երկու մատրիցները տարբերվում են միայն մեկ անկյունագծային վանդակով:

Լեմմա 3.6.3 : $\lambda = 1$ *թիվը*

$$Ax = \lambda Bx \quad (3.6.10)$$

ընդհանրացված սեփական արժեքների խնդրի լուծում է:

Ապացույց: Դիտարկենք

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

վեկտորը, որտեղ x_2 -ը n_2 երկարության որևէ ոչ գրոյական վեկտոր է: Այդ դեպքում, ըստ մատրիցների (3.6.9) կառուցվածքի՝

$$Ax = \begin{bmatrix} A_{12}x_2 \\ A_{22}x_2 \end{bmatrix}, \quad Bx = \begin{bmatrix} A_{12}x_2 \\ A_{22}x_2 \end{bmatrix} :$$

Ուստի՝ $Ax = Bx$: \square

Թեորեմ 3.6.2 : *Լրացուցիչ պայմանով*

$$Ax = \lambda Bx, \quad \lambda \neq 1 \tag{3.6.11}$$

ընդհանրացված սեփական արժեքների խնդրի լուծումները

$$S_{11}z = \lambda \hat{S}_{11}z \tag{3.6.12}$$

ընդհանրացված սեփական արժեքների խնդրի լուծումներ են, որտեղ S_{11} և \hat{S}_{11} մատրիցները՝ համապատասխանաբար A և B մատրիցների A_{22} վանդակի Շուրի լրացումներն են:

Ապացույց: Եթե λ -ն (3.6.11) խնդրի լուծումն է, ապա գոյություն ունի այնպիսի ոչ զրոյական վեկտոր

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

որի համար

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = \lambda(B_{11}x_1 + A_{12}x_2), \tag{3.6.13}$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = \lambda(A_{21}x_1 + A_{22}x_2): \tag{3.6.14}$$

Քանի որ $\lambda \neq 1$, ապա (3.6.14)-ից հետևում է, որ $A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = 0$: Պարզ է, որ $x_1 \neq 0$ (հակառակ դեպքում $A_{22}x_2 = 0$ հավասարությունից կհետևի, որ $x_2 = 0$): Ուստի՝ $x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1$: Տեղադրելով այս արտահայտությունը (3.6.13) հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 = \lambda(B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1$$

կամ $S_{11}x_1 = \lambda \hat{S}_{11}x_1$ առնչությունը: \square

Օգտագործելով 3.6.3 լեմման և 3.6.2 թեորեմը՝ հանգում ենք հետևյալ պնդմանը:

Հետևանք 3.6.2 : Եթե (3.6.12) խնդրի սեփական արժեքները պատկանում են $[\alpha, \beta]$ հատվածին, որտեղ $\alpha > 0$, ապա (3.6.10) խնդրի սեփական արժեքները պատկանում են $[a, b]$ հատվածին, որտեղ $a = \min(1, \alpha)$, $b = \max(1, \beta)$:

Ստացված արդյունքները մենք կօգտագործենք մյուս գլխի 4.5 պարագրաֆում:

Խնդիրներ և վարժություններ - 3

1. Ապացուցել, որ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ հերմիտյան մատրիցի էքստրեմալ սեփական արժեքները բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին.

$$\lambda_{\min} \leq \min_{1 \leq i \leq n} a_{ii}, \quad \lambda_{\max} \geq \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii} :$$

2. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց համար

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցները դրական որոշյալ են:

3. Ապացուցել, որ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & -3-i & 11 \end{bmatrix}$$

մատրիցը դրական որոշյալ է:

4. Ապացուցել, որ

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2.5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 4.5 & 5 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & \frac{4n-3}{2} \end{bmatrix}$$

մատրիցը դրական որոշյալ է:

5. Ապացուցել, որ $a_{ij} = \min\{i, j\}$ տարրերով $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը դրական որոշյալ է:

6. Ապացուցել, որ եթե A մատրիցը դրական կիսատրոշյալ է, ապա

$$M = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

վանդակային մատրիցը նույնպես կլինի դրական կիսատրոշյալ:

7. Դիցուք $A \geq 0$: Ապացուցել, որ եթե այդ մատրիցի որևէ անկյունագծային տարր հավասար է զրոյի, ապա զրոյական են նաև համապատասխան տողի և սյան բոլոր տարրերը:

8. Դիցուք A -ն հերմիտյան մատրից է: Ապացուցել, որ $I + \varepsilon A$ մատրիցը բավականաչափ փոքր ε թվի համար դրական որոշյալ է:

9. Ապացուցել, որ եթե $A > 0$ և $B = B^*$, ապա AB մատրիցի սեփական արժեքները իրական թվեր են:

10. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Ցույց տալ, որ կամայական $x \neq 0$ վեկտորի համար $(Ax, x) > 0$: Գտնել մատրիցի սեփական արժեքները:

11. Տրված է

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գտնել ամենափոքր ε թիվը, որի համար այդ մատրիցը դրական կիսատրոշյալ է:

12. Գտնել a և b պարամետրերի այն արժեքները, որոնց համար

$$\begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix}$$

մատրիցը օրթոգոնալ է:

13. Օրթոգոնալ մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար են կամ $1/4$ -ի կամ էլ $-1/4$ -ի: Ինչի՞նչ է հավասար այդ մատրիցի չափը:

14. Գտնել օրթոգոնալ մատրիցը, որի առաջին երկու սյունները հետևյալն են.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

15. Գտնել x -ի և y -ի այն արժեքները, որոնց համար

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & iy \\ x & 0 & iy & 0 \\ 0 & iy & 0 & x \\ iy & 0 & x & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցը ունիտար է:

16. Գտնել (3.3.1)-ում տրված G մատրիցի սեփական արժեքները: Ինչպիսի՞նչ α -ների համար սեփական արժեքները իրական են:

17. $[xyz]^T$ վեկտորների \mathbf{R}^3 տարածությունում կատարվում է արտացոլում $z = 0$ հարթության նկատմամբ: Գրել արտացոլման մատրիցը:

18. $[xyz]^T$ վեկտորների \mathbf{R}^3 տարածությունում կատարվում է արտացոլում $x + y = 0$ հարթության նկատմամբ: Գրել արտացոլման մատրիցը:

19. Դիցուք $H = I - 2ww^*$ արտացոլման մատրից է, և $x \in \mathbf{C}^n$ վեկտորը այնպիսին է, որ $Hx = x$: Ապացուցել, որ x վեկտորը օրթոգոնալ է w վեկտորին: Տալ գրաֆիկական բացատրություն:

20. Ապացուցել, որ արտացոլման մատրիցի սեփական արժեքներից միայն մեկն է հավասար -1 -ի, մինչդեռ մնացած բոլորը հավասար են 1 -ի:

21. Ապացուցել, որ պարզ կառուցվածքի մատրիցի պատկերը նրա ոչ զրոյական սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորների գծային թաղանթ է:
22. Դիցուք A -ն պարզ կառուցվածքի մատրից է, և $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ -ը կամայական բազմանդամ է: Յույց տալ, որ $P(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k$ մատրիցը նույնպես ունի պարզ կառուցվածք:
23. Նորմալ է արդյոք հետևյալ մատրիցը.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} :$$

24. Ապացուցել, որ

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

իրական տարրերով մատրիցը նորմալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն կամ սիմետրիկ է ($c = b$) կամ էլ շեղ սիմետրիկ ($c = -b$):

25. Ապացուցել, որ ցանկացած $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \in \mathbf{C}^{n \times n}$ անկյունագծային մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի D ունիտար անկյունագծային մատրից, որ $\Lambda^* = D\Lambda = \Lambda D$:
26. Ապացուցել, որ A մատրիցը նորմալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $A^* = AU$, որտեղ U -ն ունիտար մատրից է:
27. Յույց տալ, որ եռանկյուն մատրիցը նորմալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն անկյունագծային է:
28. Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցը նորմալ է և ունի

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

վանդակային տեսքը, որտեղ A_{11} և A_{22} քառակուսի մատրիցներ են: Ապացուցել, որ $A_{12} = 0$, իսկ A_{11} և A_{22} մատրիցները նորմալ են:

29. Դիցուք A , B և AB մատրիցները նորմալ են: Ապացուցել, որ BA մատրիցը նույնպես նորմալ է:

Գլուխ 4

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԵՎ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՆՈՐՄԵՐ

Գծային տարածությունների հետ կապված բազմաթիվ ուսումնասիրություններում և խնդիրներում անհրաժեշտություն է ծագում տարածության տարրերի միմյանց հետ համեմատումը: Օրինակ՝ ասել, որ տարածության մի տարրը ինչ-որ իմաստով փոքր է մեկ ուրիշի համեմատ: Այդ նպատակով ներմուծվում է տարրի *նորմի* գաղափարը, որը թվի բացարձակ մեծության ընդհանրացումն է: Նորմը կարելի է սահմանել տարրեր եղանակներով՝ կախված դիտարկվող խնդրի բնույթից: Մասնավորապես, այդ վերաբերում է վեկտորներին և մատրիցներին: Չուտ տեսական կարևորությունից բացի՝ նորմի օգտագործումը գործնականորեն անխուսափելի է գծային հանրահաշվի թվային մեթոդների վերլուծության և նրանց որակի գնահատման ժամանակ:

4.1 Վեկտորների նորմեր

$\|x\|$ իրական թիվը կոչվում է $x \in C^n$ վեկտորի *նորմ*, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$\text{VN1. } \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\text{VN2. } \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in C, \quad (4.1.1)$$

$$\text{VN3. } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{եռանկյան անհավասարություն}):$$

Վեկտորական տարածությունում նորմը կարող է ներմուծվել տարբեր ձևերով: Առավել գործածելի են հետևյալ նորմերը.

$$l_\infty \text{ նորմ: } \|x\|_\infty \equiv \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (4.1.2)$$

$$l_1 \text{ նորմ: } \|x\|_1 \equiv \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (4.1.3)$$

$$l_2 \text{ նորմ: } \|x\|_2 \equiv \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}: \quad (4.1.4)$$

Հեշտ է նկատել l_2 նորմի կապը սկալյար արտադրյալի հետ.

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}: \quad (4.1.5)$$

Ինչո՞վ են պայմանավորված (4.1.2) – (4.1.4) նորմերի նշանակումները: Բանն այն է, որ այդ նորմերը՝

$$\|x\|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (4.1.6)$$

Հյուլերի¹ l_p նորմի մասնավոր դեպքերն են: Դա ակնհայտ է l_1 և l_2 նորմերի համար: Ինչ վերաբերում է l_∞ նորմին, ապա այն l_p նորմի սահմանային դեպքն է, երբ $p \rightarrow \infty$: Իրոք, յուրաքանչյուր $x \in \mathbf{C}^n$ վեկտորի համար տեղի ունեն

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

անհավասարությունները: Վերջինից հետևում է, որ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty :$$

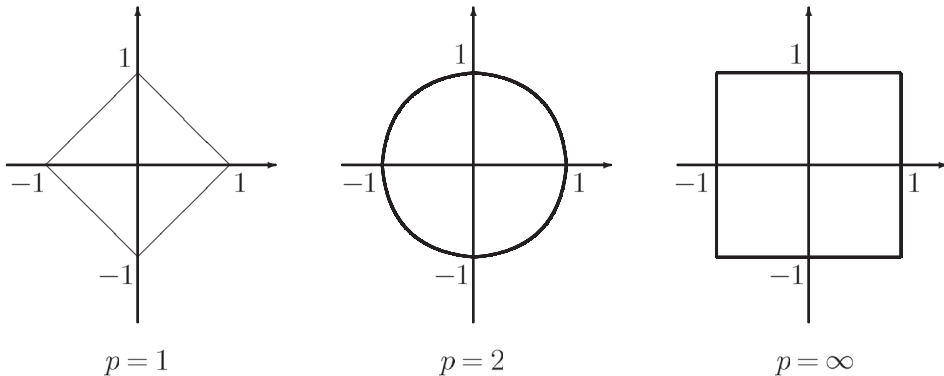
Նշենք, որ եռանկյան անհավասարությունը l_p նորմի համար հետևում է հայտնի Մինկոսկու անհավասարությունից², այն է՝

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} : \quad (4.1.7)$$

Նորմերի մասին ակնառու պատկերացում է տալիս

$$S = \{x \in \mathbf{C}^n : \|x\| = 1\}$$

բազմությունը, որը կոչվում է *միավոր սֆերա*: Նկ. 4.1.1-ում ցույց են տրված \mathbf{R}^2 տարածության միավոր սֆերաները l_1 , l_2 և l_∞ նորմերի համար:



Նկ. 4.1.1. Միավոր սֆերաները:

¹Հյուլեր Օտտո Լյուդվիգ (1859-1937) – գերմանացի մաթեմատիկոս, հիմնական աշխատությունները նվիրված են մաթեմատիկայի հիմնունքներին, հանրահաշվին և մաթեմատիկական անալիզին:

²Մինկոսկի Հերման (1864-1909) – գերմանացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս, հիմնական աշխատանքները վերաբերում են թվերի տեսությանը, երկրաչափությանը և մաթեմատիկական ֆիզիկային:

4.2 Մատրիցային նորմեր

$\|A\|$ իրական քիվը կոչվում է $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցի *նորմ*, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$\begin{aligned} \text{MN1.} \quad & \|A\| \geq 0, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}, \\ \text{MN2.} \quad & \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \\ \text{MN3.} \quad & \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \\ \text{MN4.} \quad & \|AB\| \leq \|A\| \|B\|: \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Որպես մատրիցային նորմի օրինակ բերենք, այսպես կոչված, *Ֆրոբենիուսի նորմը*.

$$\|A\|_F \equiv \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} : \tag{4.2.2}$$

Այս նորմը ակնհայտորեն բավարարում է (4.2.1)-ի **MN1–MN3** պայմաններին: Իրոք, եթե մատրիցը դիտարկենք որպես n^2 -չափանի վեկտորական տարածության տարր, ապա (4.2.2) նորմը, ըստ էության, նրա l_2 նորմն է: Մնում է ստուգել **MN4** հատկությունը: Ունենք

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |(AB)_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 :$$

Կիրառելով Կոշիի-Բունյակովսկի-Շվարցի (1.1.6) անհավասարությունը՝ կստանանք

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2,$$

որտեղից

$$\|AB\|_F^2 \leq \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k,j=1}^n |b_{kj}|^2 = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 :$$

Ինչպես վեկտորի, այնպես էլ մատրիցի նորմը նույնպես կարող է ներմուծվել տարբեր եղանակներով: Դրանցից մեկը հետևյալն է: Ցանկացած քառակուսի մատրից վեկտորական տարածության մեջ գործող գծային օպերատոր է: Ուստի մատրիցի նորմը կարելի է սահմանել որպես օպերատորի նորմ (տե՛ս, օրինակ՝ [14, 15]).

\mathbf{C}^n տարածության $\|\cdot\|$ վեկտորական նորմին *ստորադրված* $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցի *օպերատորային նորմը* սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\|A\| \equiv \max_{\|x\|=1} \|Ax\| : \tag{4.2.3}$$

Դիտողություն 4.2.1 : Վերջին սահմանման մեջ արդարացված է \max -ի օգտագործումը \sup -ի փոխարեն, քանի որ $\|Ax\|$ ֆունկցիան անընդհատորեն կախված է x -ից, իսկ $\|x\| = 1$ միավոր սֆերան փակ սահմանափակ բազմություն է \mathbf{C}^n -ում (տե՛ս, օրինակ՝ [15, 22]). \square

Օպերատորային նորմը կարելի է սահմանել մեկ այլ համարժեք եղանակով.

$$\|A\| \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \quad (4.2.4)$$

Մենք թողնում ենք (4.2.3) և (4.2.4) սահմանումների համարժեքության ապացույցը ընթերցողին որպես վարժություն:

Մատրիցի օպերատորային նորմը օժտված է հետևյալ երկու հատկություններով.

$$1. \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in \mathbf{C}^n, \quad (4.2.5)$$

$$2. \|I\| = 1 \quad (I\text{-ն միավոր մատրից է}): \quad (4.2.6)$$

Նշենք, որ (4.2.2) Ֆրոբենիուսի նորմը օպերատորային նորմ չէ: Իրոք, $\|I\|_F = \sqrt{n}$, ինչը հակասում է (4.2.6) հատկությանը:

Նախորդ պարագրաֆում սահմանվել են l_∞ , l_1 և l_2 վեկտորական նորմերը: Ստանանք այդ նորմերին ստորադրված մատրիցային նորմերը:

- l_∞ նորմ:

Ցանկացած x նորմավորված վեկտորի համար (այսինքն՝ $\|x\|_\infty = 1$) ունենք

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

որտեղից ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : \quad (4.2.7)$$

Դիցուք

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|, \quad 1 \leq i_0 \leq n :$$

Սահմանենք $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ վեկտորի բաղադրիչները հետևյալ կերպ.

$$z_j = \begin{cases} |a_{i_0 j}|/a_{i_0 j}, & \text{երբ } a_{i_0 j} \neq 0, \\ 1, & \text{երբ } a_{i_0 j} = 0: \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ $\|z\|_\infty = 1$: Օգտվելով մատրիցի նորմի սահմանումից՝ ստանում ենք

$$\|A\|_\infty \geq \|Az\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} z_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (4.2.8)$$

անհավասարությունը:

Այսպիսով, (4.2.7) և (4.2.8) անհավասարություններից ստանում ենք արտահայտություն մատրիցի նորմի համար.

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : \quad (4.2.9)$$

• l_1 նորմ:

Վերցնենք կամայական x նորմավորված վեկտոր (այսինքն՝ $\|x\|_1 = 1$): Ունենք

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| :$$

Վերջինից հետևում է $\|A\|_1$ նորմի վերին գնահատականը.

$$\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : \quad (4.2.10)$$

Մյուս կողմից, դիցուք

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|, \quad 1 \leq j_0 \leq n :$$

Ընտրենք $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ վեկտորը հետևյալ կերպ.

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{երբ } j = j_0, \\ 0, & \text{երբ } j \neq j_0: \end{cases}$$

Պարզ է, որ $\|z\|_1 = 1$: Ելնելով մատրիցի նորմի (4.2.3) սահմանումից՝ կստանանք նորմի ստորին գնահատականը.

$$\|A\|_1 \geq \|Az\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : \quad (4.2.11)$$

Այսպիսով, (4.2.10) և (4.2.11) անհավասարություններից բխում է հետևյալ արտահայտությունը մատրիցի նորմի համար.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : \quad (4.2.12)$$

• l_2 նորմ:

Ինչպես նշված էր 3.2 պարագրաֆում, A^*A մատրիցը դրական կիսատրոշյալ է: Օգտագործենք l_2 նորմի (4.1.5) հատկությունը և (3.1.4) հավասարություններից երկրորդը: Ելնելով օպերատորային նորմի (4.2.4) սահմանումից՝ ունենք

$$\|A\|_2^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)} = \max_{x \neq 0} \frac{(A^*Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_{\max}(A^*A) :$$

Այսպիսով,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} : \quad (4.2.13)$$

Մասնավորապես, եթե A -ն հերմիտյան մատրից է, ապա

$$\lambda_{\max}(A^*A) = \lambda_{\max}(A^2) = (\max |\lambda(A)|)^2 :$$

Այդ դեպքում

$$\|A\|_2 = \sqrt{(\max |\lambda(A)|)^2} = \max |\lambda(A)|$$

կամ

$$\|A\|_2 = \rho(A), \quad (4.2.14)$$

որտեղ $\rho(A)$ -ն (1.3.11)-ում սահմանված մատրիցի սպեկտրալ շառավիղն է:

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 4.2.1 : *Մատրիցի սպեկտրալ շառավիղը չի գերազանցում այդ մատրիցի ցանկացած նորմը, այսինքն՝*

$$\rho(A) \leq \|A\| : \quad (4.2.15)$$

Ապացույց: Գիցուք λ -ն $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցի սեփական արժեք է, որին համապատասխանում է $x \neq 0$ սեփական վեկտորը, այն է՝ $Ax = \lambda x$: Սահմանենք $n \times n$ չափի

$$B = [x \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

մատրիցը, որտեղ 0 -ն գրոյական վեկտոր-սյուն է: Այդ դեպքում $AB = \lambda B$: Այնուհետև, օգտագործելով մատրիցային նորմի **MN2** և **MN4** հատկությունները, կստանանք

$$|\lambda| \|B\| = \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

իսկ քանի որ $B \neq 0$, ապա $|\lambda| \leq \|A\|$, որտեղից էլ հետևում է (4.2.15) անհավասարությունը: \square

4.3 Զուգամիտություն նորմավորված տարածություններում

Նորմավորված տարածությունների տեսության կարևորագույն հասկացություններից է նորմերի համարժեքությունը: Տանք այդ գաղափարը:

Նույն L գծային տարածության մեջ որոշված $\|\cdot\|_{(1)}$ և $\|\cdot\|_{(2)}$ նորմերը կոչվում են *համարժեք*, եթե գոյություն ունեն այնպիսի c_1 և c_2 դրական հաստատուններ, որ

$$c_1 \|x\|_{(1)} \leq \|x\|_{(2)} \leq c_2 \|x\|_{(1)} \quad \forall x \in L : \quad (4.3.1)$$

Հետևյալ պնդումը արձանագրում է վերջավոր չափանի տարածություններում նորմերի համարժեքության կարևոր հատկությունը (տե՛ս, օրինակ՝ [9],[22]):

Թեորեմ 4.3.1 : *Վերջավոր չափանի տարածություններում ցանկացած երկու նորմ համարժեք են:*

Այսպիսով, 4.1 և 4.2 պարագրաֆներում ներմուծված վեկտորական և մատրիցային նորմերը համարժեք են:

Սահմանենք մեկ այլ կարևոր հասկացությունը:

Կասենք, որ C^n տարածության $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ վեկտորների հաջորդականությունը *զուգամիտում է* $x \in C^n$ վեկտորին ըստ $\|\cdot\|$ նորմի, եթե

$$\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Քանի որ C^n վեկտորական տարածության մեջ սահմանված նորմերը համարժեք են, ապա ըստ որևէ մի նորմի զուգամիտությունից հետևում է զուգամիտություն ըստ մեկ այլ նորմի և հակառակը: Նկատի ունենալով այս հանգամանքը՝ վեկտորների հաջորդականության զուգամիտությունը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ.

Կասենք, որ C^n տարածության $\{x^{(k)} = [x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T\}_{k=1}^\infty$ վեկտորների հաջորդականությունը զուգամիտում է $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in C^n$ վեկտորին, եթե

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Զուգամիտության սահմանումները տարածվում են նաև մատրիցների վրա:

Կասենք, որ $C^{n \times n}$ տարածության $\{A^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ մատրիցների հաջորդականությունը *զուգամիտում է* $A \in C^{n \times n}$ մատրիցին ըստ $\|\cdot\|$ նորմի, եթե

$$\|A^{(k)} - A\| \rightarrow 0, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Զուգամիտության համարժեք սահմանումը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

Կասենք, որ $C^{n \times n}$ տարածության $\{A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]_{n \times n}\}_{k=1}^\infty$ մատրիցների հաջորդականությունը *զուգամիտում է* $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in C^{n \times n}$ մատրիցին, եթե

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n :$$

Այժմ դիտարկենք աստիճանային մատրիցային շարք

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{4.3.2}$$

որն անվանում են նաև *Նեյմանի շարք*³: Շարքը կոչվում է *զուգամետ*, եթե զուգամետ է նրա մասնական գումարների հաջորդականությունը.

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^m A^k, \quad m = 0, 1, 2, \dots :$$

³Նեյման Զոն ֆոն (1903-1957) – հունգարական ծագում ունեցող ամերիկացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս, ունեցել է մեծ ներդրում քվանտային ֆիզիկայի, մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի մի շարք բաժինների զարգացման գործում:

Այդ դեպքում որպես շարքի գումար հասկացվում է հետևյալ սահմանը.

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(A) : \quad (4.3.3)$$

Թեորեմ 4.3.2 : Նեյմանի շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\rho(A) < 1$:

Այս պնդման ապացույցը կարելի է գտնել, օրինակ, [5] դասագրքում: Ենթադրենք, որ (4.3.2) շարքը զուգամետ է: Գտնենք այդ շարքի գումարը: Գրենք հեշտ ստուգվող

$$(I - A)S_m(A) = I - A^{m+1}$$

հավասարությունը: Նշենք, որ $\det(I - A) \neq 0$, քանի որ հակառակ դեպքում $\lambda = 1$ թիվը կլիներ A մատրիցի սեփական արժեք, իսկ դա հակասում է $\rho(A) < 1$ պայմանին: Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ

$$S_m(A) = (I - A)^{-1}(I - A^{m+1}) :$$

Անցնելով սահմանի, երբ $m \rightarrow \infty$, կստանանք

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(A) = (I - A)^{-1}(I - \lim_{m \rightarrow \infty} A^{m+1}) :$$

Քանի որ շարքը զուգամետ է, ապա $\lim_{m \rightarrow \infty} A^{m+1} = 0$: Ուստի, համաձայն (4.3.3)-ի՝

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(A) = (I - A)^{-1} :$$

Այսպիսով,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} : \quad (4.3.4)$$

Գործնականում ստուգել 4.3.2 թեորեմի պայմանը հաճախ դժվար է (մենք նկատի ունենք մատրիցի սեփական արժեքների հաշվարկը): Այդ պատճառով գերադասելի է օգտվել շարքի զուգամիտության բավարար հայտանիշներից:

Որպես 4.2.1 և 4.3.2 թեորեմների պարզ հետևանք ստանում ենք աստիճանային մատրիցային շարքի զուգամիտության հետևյալ բավարար պայմանը:

Թեորեմ 4.3.3 : Եթե A մատրիցի որևէ նորմ փոքր է մեկից, ապա Նեյմանի շարքը զուգամետ է:

Մասնավորապես, հետևյալ պայմաններից յուրաքանչյուրը բավարար է (4.3.2) շարքի զուգամիտության համար.

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 < 1, \quad (4.3.5)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1, \quad (4.3.6)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1: \quad (4.3.7)$$

Այդ անմիջապես բխում է վերը ստացված մատրիցի նորմերի համար (4.2.2), (4.2.9) և (4.2.12) արտահայտություններից:

Աստիճանային մատրիցային շարքերի գուգամիտության պայմանները կարևոր դեր են խաղում հաշվողական գծային հանրահաշվում և, մասնավորապես, խտրացիոն մեթոդների գուգամիտության վերլուծության ժամանակ:

4.4 Մատրիցի պայմանավորվածության թիվ

Միշտ չէ, որ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի գործակիցները և ազատ անդամները որոշվում են ճշգրիտ: Օրինակ՝ որոշ համակարգեր առաջանում են փորձից և այդ պատճառով մուտքային տվյալները պարունակում են դիտարկումների սխալանքներ: Այլ դեպքերում մուտքային ինֆորմացիան տրվում է բանաձևերով կամ անալիտիկ արտահայտություններով և արդյունքում համակարգչի հիշողության մեջ տվյալների գրառման ժամանակ, որպես կանոն, անխուսափելի են կլորացման սխալանքները: Ծագում է հետևյալ հարցը. *եթե համակարգի մուտքային տվյալներում թույլ են տրված անճշտություններ, ապա որքան փոփոխություն է կրում լուծումը:*

Գիտարկենք

$$Ax = b \quad (4.4.1)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ $\det A \neq 0$ և $b \neq 0$: Համակարգն ունի միակ ոչ գրոյական լուծում: Ենթադրենք, որ A մատրիցը տրված է ճշգրիտ, իսկ b աջ մասը ստացել է որոշակի Δb խտտորում: Գիցուք $x + \Delta x$ վեկտորը $b + \Delta b$ աջ մասով համակարգի լուծումն է, այսինքն՝

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b: \quad (4.4.2)$$

Այսպիսով, Δx -ը, (4.4.1) համակարգի աջ մասի խտտորումով պայմանավորված, լուծման սխալանքն է, ընդ որում՝ $\Delta x = A^{-1}\Delta b$: Այդ դեպքում $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$: Այնուհետև, $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$: Վերջին երկու անհավասարություններից ստանում ենք

$$\|b\| \|\Delta x\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \|x\| \|\Delta b\|$$

անհավասարությունը, որից հետևում է

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (4.4.3)$$

գնահատականը: Այժմ ներմուծենք նոր հասկացություն:

Ավականենք A մատրիցի *պայմանավորվածության թիվ* հետևյալ մեծությունը.

$$\kappa(A) \equiv \|A\| \|A^{-1}\|: \quad (4.4.4)$$

Արդյունքում (4.4.3) անհավասարությունը կգրվի

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (4.4.5)$$

տեսքով: Այստեղ $\|\Delta b\|/\|b\|$ հարաբերությունը (4.4.1) համակարգի աջ մասի *հարաբերական խտտորումն է*, իսկ $\|\Delta x\|/\|x\|$ -ը՝ լուծման *հարաբերական սխալանքը*, որն առաջացել է այդ խտտորումից:

Եթե $\det A = 0$, ապա, ըստ սահմանման, $\kappa(A) = \infty$: Այնուհետև, l_p վեկտորական նորմին ստորադրված մատրիցային նորմը դիտարկելիս մենք կօգտագործենք $\kappa_p(A)$ նշանակումը: Ընդ որում՝ $\kappa_2(A)$ մեծությունը անվանում են նաև պայմանավորվածության *սպեկտրալ* թիվ (տե՛ս ստորև (4.4.9) արտահայտությունը):

Անկախ մատրիցային նորմի ընտրությունից՝ մատրիցի պայմանավորվածության թիվն ունի հետևյալ հեշտ ապացուցվող հատկությունները.

$$\diamond \kappa(A) \geq 1, \quad (4.4.6)$$

$$\diamond \kappa(A^{-1}) = \kappa(A), \quad (4.4.7)$$

$$\diamond \kappa(AB) \leq \kappa(A) \kappa(B) : \quad (4.4.8)$$

Հաջորդ հատկությունները վերաբերում են պայմանավորվածության սպեկտրալ թվին.

$$\diamond \text{եթե } A = A^*, \text{ ապա } \kappa_2(A) = \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|}, \quad (4.4.9)$$

$$\diamond \text{եթե } U\text{-ն ունիտար մատրից է, ապա } \kappa_2(U) = 1 : \quad (4.4.10)$$

Ապացուցենք, օրինակ, (4.4.6) հատկությունը: Համաձայն 4.2.1 թեորեմի՝

$$\|A\| \geq \max |\lambda_A| :$$

Քանի որ A և A^{-1} մատրիցների սեփական արժեքները փոխհակադարձ են, ապա

$$\|A^{-1}\| \geq \max \frac{1}{|\lambda_A|} = \frac{1}{\min |\lambda_A|} :$$

Ուստի

$$\kappa(A) \geq \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|} \geq 1 :$$

Նշենք, որ (4.4.5) գնահատականը ճշգրիտ է այն իմաստով, որ անհավասարությունը որոշ դեպքերում կարող է վերածվել հավասարության: Գիցուք, օրինակ՝ $A = A^* > 0$ և $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ այդ մատրիցի սեփական արժեքներն են, իսկ e_1, e_2, \dots, e_n համապատասխան սեփական վեկտորները: Վերցնենք $b = e_n$ և $\Delta b = e_1$: Գժվար չէ տեսնել, որ $x = \lambda_n^{-1} e_n$ -ը (4.4.1) համակարգի ճշգրիտ լուծումն է, իսկ $\Delta x = \lambda_1^{-1} e_1$ -ը՝ այդ լուծման խտտորումը: Այսպիսով, հաշվի առնելով (4.2.10)-ը, կստանանք

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\lambda_n \|e_1\|_2}{\lambda_1 \|e_n\|_2} = \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} :$$

Եթե պայմանավորվածության թիվը փոքր է, ապա նախնական տվյալների փոքր հարաբերական խտտորումները առաջացնում են լուծման ոչ մեծ հարաբերական փոփոխություններ: Հակառակ դեպքում նախնական տվյալների փոքր խտտորումները կարող են բերել լուծման էական փոփոխության: Այն մատրիցները, որոնց պայմանավորվածության թիվը մեծ է կոչվում են վատ պայմանավորված, իսկ եթե $\kappa(A)$ -ն փոքր է, ապա ասում են, որ A մատրիցը լավ պայմանավորված է: Գծային հավասարումների համակարգը կհամարենք լավ կամ վատ պայմանավորված կախված համակարգի մատրիցի լավ կամ վատ պայմանավորված լինելուց: Բերենք վատ պայմանավորված մատրիցի օրինակ:

Օրինակ 4.4.1 : Դիցուք տրված է n -րդ կարգի

$$Ax = b$$

հավասարումների համակարգը, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

Այս համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$:

Ենթադրենք, որ համակարգի աջ մասի ներմուծման ժամանակ թույլ է տրվել $\Delta b = [0, 0, \dots, 0, \varepsilon]^T$ սխալանքը, որտեղ $\varepsilon > 0$ փոքր թիվ է: Այդ դեպքում ճշգրիտ լուծման փոխարեն կստանանք մեկ այլ լուծում՝ $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$, որտեղ

$$x_1^* = 2^{n-2}\varepsilon, \quad x_2^* = 2^{n-3}\varepsilon, \dots, \quad x_{n-2}^* = 2\varepsilon, \quad x_{n-1}^* = \varepsilon, \quad x_n^* = 1 + \varepsilon :$$

Այսպիսով, փոքր խտտորումը բերել է համակարգի լուծման

$$\Delta x = [2^{n-2}\varepsilon, 2^{n-3}\varepsilon, \dots, 2\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]^T$$

խտտորմանը: Վերցնենք $n = 100$ և $\varepsilon = 2^{-50}$: Արդյունքում $x_1 = 0$ -ի փոխարեն մենք կստանանք $x_1^* = 2^{48}$: Ստացված հսկայական սխալանքի պատճառը A մատրիցի վատ պայմանավորվածությունն է: Իրոք, քանի որ

$$\|x\|_\infty = 1, \quad \|\Delta x\|_\infty = 2^{n-2}\varepsilon, \quad \|b\|_\infty = 1, \quad \|\Delta b\|_\infty = \varepsilon,$$

ապա համաձայն (4.4.5) անհավասարության՝ կստանանք

$$\kappa_\infty(A) \geq \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \bigg/ \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 2^{n-2} :$$

Տեսնում ենք, որ n -ի աճմանը զուգընթաց մատրիցի պայմանավորվածությունը շատ արագ վատանում է: \square

Դիտարկում 4.4.1 : Հաճախ ենթադրում են, որ մատրիցի վատ պայմանավորվածությունը նրա որոշիչի փոքր լինելու արդյունք է: Ընդհանրապես, դա ճիշտ չէ: Վերջին օրինակում դիտարկված շատ վատ պայմանավորված մատրիցի որոշիչը հավասար է մեկի: Որպես այլ օրինակ բերենք

$$A = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad B = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$$

մատրիցները, որոնք շատ լավ պայմանավորված են՝ $\kappa_2(A) = \kappa_2(B) = 1$, թեև $\det A = 10^{20}$, իսկ $\det B = 10^{-20}$: \square

Որոշ համակարգեր լինում են վատ պայմանավորված անհաջող մասշտաբավորման պատճառով:

Օրինակ 4.4.2 : Դիտարկենք

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

համակարգը, որտեղ ε -ը փոքր դրական թիվ է: Այդ համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x = [1 \ 1]^T$: Համակարգի A մատրիցը վատ պայմանավորված է.

$$\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = \kappa_2(A) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \kappa_F(A) = \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon :$$

Սակայն, եթե համակարգի երկրորդ հավասարումը բազմապատկենք $1/\varepsilon$ -ով, ապա կստանանք

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

համակարգը, որի մատրիցը կատարյալ պայմանավորված է: \square

Առաջին դեպքում մենք ենթադրել ենք, որ (4.4.1) համակարգի մատրիցը տրված է ճշգրիտ, և խոտորում ստանում է միայն աջ մասը: Այժմ քննարկենք այն դեպքը, երբ A մատրիցը նույնպես տրվում է որոշակի սխալներով:

Դիտարկենք

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b \quad (4.4.11)$$

խոտորված համակարգը: Ենթադրենք, որ մատրիցի ΔA խոտորումն այնպիսին է, որ

$$\|A^{-1}\Delta A\| < 1 : \quad (4.4.12)$$

Նշենք, որ (4.4.12) պայմանը ապահովում է $A + \Delta A$ մատրիցի չվերասերվածությունը: Իրոք, այդ պայմանից հետևում է, որ $A^{-1}\Delta A$ մատրիցի սեփական արժեքները մոդուլով փոքր են մեկից (տե՛ս (4.2.15) անհավասարությունը): Ունենք

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A) \quad (4.4.13)$$

հավասարությունը: Պարզ է, որ $\det(I + A^{-1}\Delta A) \neq 0$, քանի որ հակառակ դեպքում $\lambda = -1$ թիվը կլիներ $A^{-1}\Delta A$ մատրիցի սեփական արժեք:

Ինչպես հետևում է (4.4.11)-ից՝

$$\Delta x = (A + \Delta A)^{-1}(-\Delta A x + \Delta b) :$$

Այստեղից՝

$$\|\Delta x\| \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| (\|\Delta A\| \|x\| + \|\Delta b\|),$$

իսկ քանի որ

$$\|\Delta b\| = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \|Ax\| \leq \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \|A\| \|x\|,$$

ապա

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| \|A\| \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) : \quad (4.4.14)$$

Այնուհետև, (4.4.13)-ից գրենք

$$(A + \Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1} \quad (4.4.15)$$

հավասարությունը: Քանի որ, ըստ (4.4.12) ենթադրության,

$$\rho(-A^{-1}\Delta A) \leq \|A^{-1}\Delta A\| < 1,$$

ապա, օգտվելով (4.3.4) հավասարությունից՝ կստանանք

$$(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}\Delta A)^k :$$

Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (4.4.15) հավասարությունը, գտնում ենք, որ

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{-1}\Delta A\|^k \|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} :$$

Ի վերջո, (4.4.14) անհավասարությունից գալիս ենք հետևյալ գնահատականին.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) : \quad (4.4.16)$$

Նշենք, որ վերը ստացված (4.4.5) գնահատականը (4.4.16) գնահատականի մասնավոր դեպքն է, երբ $\Delta A = 0$:

Ստացված (4.4.5) և (4.4.16) տիպի գնահատականները, այսպես կոչված, *ապրիորի* գնահատականներ են (լատիներեն *a priori* նշանակում է *փորձից անկախ, մինչփորձ-անկան*): Այդ գնահատականներում չի մասնակցում ոչ ստացված լուծումը, ոչ էլ այդ լուծման հետ կապված որևէ մեծություն: Այժմ ենթադրենք, որ մենք ստացել ենք (4.4.1) համակարգի որոշակի x^* «լուծում»: Օգտագործելով $r \equiv b - Ax^*$ տարբերությունը, որը կոչվում է *անհամաձայնություն*, կարելի է գնահատել x^* մոտավոր լուծման մերձավորությունը x ճշգրիտ լուծմանը: Եթե $\Delta x \equiv x - x^*$, ապա ակնհայտորեն $A\Delta x = r$:

Թեորեմ 4.4.1 : *Ճիշտ են հետևյալ գնահատականները.*

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} : \quad (4.4.17)$$

Ապացույց: Իրոք, ունենք

$$\|\Delta x\| \|b\| = \|A^{-1}r\| \|Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|r\| \|A\| \|x\| = \kappa(A) \|r\| \|x\| ,$$

որտեղից ստանում ենք երկկողմանի գնահատականի աջ մասը (ըստ էության դա վերը ստացված (4.4.5) գնահատականն է): Այնուհետև,

$$\|r\| \|x\| = \|A\Delta x\| \|A^{-1}b\| \leq \|A\| \|\Delta x\| \|A^{-1}\| \|b\| = \kappa(A) \|\Delta x\| \|b\| ,$$

որտեղից հետևում է (4.4.17) գնահատականի ձախ մասը: \square

Այսպիսով, լավ պայմանավորված մատրիցով համակարգի լուծման հարաբերական սխալանքը համեմատելի է $\|r\|/\|b\|$ մեծության հետ: Նշենք, որ (4.4.17) տիպի գնահատականները կոչվում են *սպոստերիորի* գնահատականներ (լատիներեն *a posteriori* նշանակում է *փորձի հիման վրա, փորձից ելնելով*):

4.5 Վերապայմանավորման խնդիրը

Ինչպես ցույց է տրված նախորդ պարագրաֆում վատ պայմանավորված գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի թվային լուծման ժամանակ կարող են առաջանալ զգալի դժվարություններ:

Դիտարկենք իրական դրական որոշյալ մատրիցով

$$Ax = b \quad (4.5.1)$$

համակարգը: Դիցուք այս համակարգի լուծման համար կիրառվում է

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} = -Ax^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5.2)$$

խտերացիոն մեթոդը, որտեղ τ պարամետրը ընտրվում է հետևյալ կերպ.

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} : \quad (4.5.3)$$

Այստեղ λ_{max} և λ_{min} մեծությունները A մատրիցի համապատասխանաբար մեծագույն և փոքրագույն սեփական արժեքներն են: Այս մեթոդը հաճախ անվանում են *Ռիչարդսոնի մեթոդ*⁴: Բացահայտված է, որ $\varepsilon > 0$ ճշգրտությամբ լուծումը ստանալու համար, այսինքն՝ $\|x^k - x\| < \varepsilon$, պետք է կատարել

$$k \simeq \frac{\kappa_2(A)}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.5.4)$$

⁴Ռիչարդսոն Լյուիս Ֆրայ (1881-1953)– անգլիացի երկրաֆիզիկոս և մաթեմատիկոս, հիմնական գիտական աշխատությունները նվիրված են մաթեմատիկական ֆիզիկային և հաշվողական մաթեմատիկային:

խտերացիա (տե՛ս, օրինակ՝ [18]), որտեղ $\kappa_2(A)$ -ն A մատրիցի պայմանավորվածության սպեկտրալ թիվն է՝

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (4.5.5)$$

(տե՛ս (4.4.9)-ը): Ինչպես երևում է (4.5.4)-ից, որքան մեծ է պայմանավորվածության թիվը, այնքան շատ խտերացիաներ պետք է կատարվեն նույն ճշգրտությունը ստանալու համար: Իսկ դա, վերջին հաշվով, բերում է համակարգի լուծման համար պահանջվող մեքենայական ժամանակի աճի: Վերջինի հետ կապված նշենք, որ մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ցանցային մեթոդներում առաջացող գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերն ունեն բարձր կարգ և վատ պայմանավորված են, քանի որ կարգը և պայմանավորվածության թիվը ցանցի քայլի փոքրացմանը զուգընթաց արագ աճում են:

Իրավիճակը շտկելու համար ներմուծվում է, այսպես կոչված, *վերապայմանավորող մատրից* կամ *վերապայմանավորիչ*, և (4.5.1) համակարգի փոխարեն լուծվում է

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b \quad (4.5.6)$$

համակարգը, որտեղ P -ն հատուկ կերպով ընտրված դրական որոշյալ մատրից է: Ռիչարդսոնի մեթոդը (4.5.6) համակարգի համար գրվում է որպես

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} = -P^{-1}Ax^k + P^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5.7)$$

կամ, հաշվարկների կազմակերպման տեսակետից, ավելի հարմար

$$P \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} = -Ax^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5.8)$$

տեսքով:

Տանք որոշ մեկնաբանություններ: A և P մատրիցները սիմետրիկ են և դրական որոշյալ, սակայն $P^{-1}A$ մատրիցն ընդհանուր դեպքում սիմետրիկ չէ: Հեշտ է ցույց տալ, որ $P^{-1}A$ մատրիցի համար սեփական արժեքների խնդիրը համարժեք է

$$Ax = \lambda Px \quad (4.5.9)$$

ընդհանրացված սեփական արժեքների խնդրին, որի սեփական արժեքները դրական թվեր են, ընդ որում՝

$$\lambda_{max} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T Px}, \quad \lambda_{min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T Px}$$

(տե՛ս, օրինակ՝ [8, 10]): Հաշվի առնելով վերը ասածը, որպես $P^{-1}A$ մատրիցի պայմանավորվածության թիվ կհասկանանք

$$\kappa_2(P^{-1}A) \equiv \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (4.5.10)$$

մեծությունը, որտեղ λ_{max} -ը և λ_{min} -ը (4.5.9) խնդրի մեծագույն և փոքրագույն սեփական արժեքներն են:

Ռիչարդսոնի (4.5.8) վերապայմանավորված մեթոդում τ պարամետրը ընտրվում է ըստ նույն (4.5.3) բանաձևի՝ սակայն (4.5.9) ընդհանրացված խնդրի սեփական արժեքներով: Լուծումը $\varepsilon > 0$ ճշգրտությամբ ստանալու համար (4.5.4)-ի համանմանությամբ կպահանջվի

$$k \simeq \frac{\kappa_2(P^{-1}A)}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.5.11)$$

խտերացիա: Կանգ առնենք մի կարևոր պահի վրա: Անցումը x^k մոտարկումից x^{k+1} մոտարկմանը իրականացվում է հետևյալ հերթականությամբ.

1. հաշվվում է վեկտորը՝

$$r^k = -Ax^k + b,$$

2. լուծվում է համակարգը՝

$$Pz^k = r^k,$$

3. հաշվվում է վեկտորը՝

$$x^{k+1} = x^k + \tau z^k :$$

Ինչպես տեսնում ենք, այստեղ առաջանում է լրացուցիչ խնդիր. P մատրիցով համակարգի լուծում: Ուստի P վերապայմանավորիչը պետք է բավարարի երկու հիմնական պահանջների.

– P մատրիցը պետք է բավականին լավ մոտարկի A մատրիցն այն իմաստով, որ $\kappa_2(P^{-1}A)$ պայմանավորվածության թիվը էապես փոքր լինի $\kappa_2(A)$ պայմանավորվածության թվից (տե՛ս խտերացիաների թվի (4.5.4) և (4.5.11) գնահատականները),

– քանի որ (4.5.8) խտերացիոն մեթոդի կիրառման ընթացքում բազմիցս լուծվում են P մատրիցով համակարգեր, այդ գործողությունը պետք է լինի հեշտ իրականացելի:

Վերապայմանավորիչների կառուցման մեթոդները և տեխնիկան բավականին բազմազան են: Այդ հարցերին նվիրված են բազմաթիվ հոդվածներ, դասագրքեր և մենագրություններ (տե՛ս, օրինակ՝ [25, 26]):

Վերջում համառոտակի ներկայացնենք Շուրի լրացման կիրառման վրա հիմնված վերապայմանավորիչների կառուցման ուղիներից մեկը:

Դիցուք ունենք վանդակային տեսքով գրված

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրից: Ձևափոխենք այդ մատրիցը

$$A = \begin{bmatrix} S_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

տեսքի, որտեղ $S_{11} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ մատրիցը (3.6.2)-ում տրված Շուրի լրացումն է:

Ենթադրենք, որ A_{22} -ը հեշտ հակադարձվող մատրից է: Օրինակ՝ այն կարող է լինել անկյունագծաին կամ երեքանկյունագծային մատրից: Փոխարինենք S_{11} Շուրի լրացումը մի այլ սիմետրիկ դրական որոշյալ R_{11} մատրիցով: Կստանանք

$$P = \begin{bmatrix} R_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (4.5.12)$$

մատրիցը, որը կոդիտարկենք որպես վերապայմանավորիչ A մատրիցի համար: Ընդ որում, R_{11} -ը այլ բան չէ, քան P մատրիցի A_{22} վանդակի Շուրի լրացումը: P մատրիցը սիմետրիկ է և դրական որոշյալ: Սիմետրիկությունը ակնհայտ է, իսկ դրական որոշյալությունը բխում է P մատրիցի նկատմամբ կիրառված (3.6.8) անհավասարությունից, այն է՝ $x^T P x \geq x_1^T R_{11} x_1$:

Դիցուք ունենք

$$Pz = r$$

կամ վանդակային գրառումով

$$\begin{bmatrix} R_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

համակարգը: Այս համակարգի լուծումը իրականացվում է հետևյալ հաջորդականությամբ.

1. հաշվվում է վեկտորը՝

$$c_1 = r_1 - A_{22}^{-1}r_2,$$

2. լուծվում է համակարգը՝

$$R_{11}z_1 = c_1,$$

3. հաշվվում է վեկտորը՝

$$z_2 = A_{22}^{-1}(r_2 - A_{21}z_1):$$

P մատրիցի (4.5.12) վանդակային ներկայացման մեջ նշված R_{11} մատրիցի ընտրությունը կախված է A նախնական մատրիցի բնույթից, հատկություններից և կառուցվածքից: Նշենք, որ դա բավականին բարդ խնդիր է:

Առաջին հերթին, R_{11} մատրիցը պետք է լինի հեշտ հակադարձվող: Այլ կերպ ասած, R_{11} մատրիցով համակարգի լուծումը պետք է իրականացվի պարզ և արագ ալգորիթմի միջոցով:

Այնուհետև, R_{11} մատրիցը պետք է լավ մոտարկի S_{11} Շուրի լրացումը այն իմաստով, որ $R_{11}^{-1}S_{11}$ մատրիցի սպեկտրի ընդգրկումը լինի բավականին նեղ: Դիցուք $R_{11}^{-1}S_{11}$ մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են $[m, M]$ միջակայքում, որտեղ $m > 0$: Այդ դեպքում, ըստ 3.6.2 հետևանքի, $P^{-1}A$ մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները

պատկանում են $[a, b]$ հատվածին, որտեղ $a = \min(1, m)$, $b = \max(1, M)$: Արդյունքում, ինչպես հետևում է (4.5.10)-ից,

$$\kappa_2(P^{-1}A) \leq b/a :$$

Սովորաբար ձգտում են ստանալ 1 կետը պարունակող $[m, M]$ հատված, կամ էլ այնպես, որ նշված հատվածի ծայրակետերից մեկը գտնվի 1 կետի շրջակայքում:

Խնդիրներ և վարժություններ - 4

- $x, y \in \mathbb{R}^n$ վեկտորները այնպիսին են, որ $\|x + y\|_2 = \|x - y\|_2$: Հաշվել $x^T y$:
- Հետևյալ արտահայտություններից որոնք են առաջադրում վեկտորական նորմ C^n տարածությունում.

ա) $\max\{|x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|\}$,

բ) $\max\{|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|\}$,

գ) $\sum_{i=1}^n |x_i|^3$:

- Յույց տալ, որ $f(x) = |x_1 - x_2| + |x_2|$ ֆունկցիան, որտեղ $x = [x_1, x_2]^T$, առաջադրում է նորմ \mathbb{R}^2 տարածությունում: Պատկերել այդ նորմին համապատասխանող միավոր գունդը:
- Դիցուք $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ դրական որոշյալ մատրից է: Յույց տալ, որ

$$\|x\| \equiv \sqrt{(Ax, x)}$$

իրոք նորմ է C^n վեկտորական տարածությունում: Ի՞նչ է միավոր սֆերան \mathbb{R}^2 տարածությունում:

- Ապացուցել վեկտորական նորմերի համարժեքության հետևյալ առնչությունները.

ա) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$,

բ) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$,

գ) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$:

- Դիցուք U -ն ունիտար մատրից է: Ապացուցել, որ ցանկացած x վեկտորի համար $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$:
- Դիցուք U -ն ունիտար մատրից է: Ապացուցել, որ $\|U\|_2 = 1$:
- Դիցուք U -ն ունիտար մատրից է: Ապացուցել, որ ցանկացած A մատրիցի համար $\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2$:

9. Յույց տալ, որ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցների համար $\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ արտահայտությունը մատրիցային նորմ չէ:

10. Ապացուցել, որ $n \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ արտահայտությունը նորմ է $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցների տարածությունում:

11. Ապացուցել, որ

$$\max(|x_1|, |x_2 - x_1|)$$

արտահայտությունը սահմանում է նորմ $x = [x_1 \ x_2]^T$ վեկտորների տարածության մեջ: Գտնել այդ նորմին ստորադրված մատրիցային նորմը:

12. Ապացուցել, որ

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)$$

արտահայտությունը սահմանում է նորմ n -չափանի վեկտորական տարածության մեջ: Գտնել այդ նորմին ստորադրված մատրիցային նորմը:

13. Ապացուցել, որ

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{|(Ax, y)|}{\|x\|_2 \|y\|_2} :$$

14. Ապացուցել, որ ցանկացած մատրիցային նորմի համար

$$\|I\| \geq 1, \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n, \quad \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|} :$$

15. Ապացուցել, որ ցանկացած A վերասերված մատրիցի համար $\|I - A\| \geq 1$:

16. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Հաշվել այդ մատրիցի A^k , $k = 1, 2, \dots$ աստիճանները: Յույց տալ, որ $\rho(A^k) = \rho^k(A)$: Հետազոտել A^k մատրիցի տարրերի և $\|A^k\|_\infty$, $\|A^k\|_1$, $\|A^k\|_2$ նորմերի վարքը, երբ $k \rightarrow \infty$:

17. Ապացուցել մատրիցային նորմերի համարժեքության հետևյալ առնչությունները.

ա) $\frac{1}{n} \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n \|A\|_\infty$, բ) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_F$,

գ) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2$, դ) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_F$,

ե) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2$, զ) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$:

18. Ապացուցել, որ եթե $\|A\| < 1$, ապա

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} :$$

19. Հաշվել $\kappa_\infty(A)$, $\kappa_1(A)$ և $\kappa_2(A)$ պայմանավորվածության թվերը հետևյալ մատրիցների համար.

$$\text{ա) } \begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{bmatrix}, \quad \text{բ) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{գ) } \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} :$$

20. Ապացուցել, որ n -րդ կարգի A մատրիցի համար ճիշտ են

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\kappa_\infty(A)}{\kappa_2(A)} \leq n$$

անհավասարությունները:

21. Դիցուք $A = A^* > 0$: Ապացուցել, որ $f(\alpha) \equiv \kappa_2(A + \alpha I)$ ֆունկցիան $\alpha > 0$ արժեքների համար մոնոտոն նվազող է (ենթադրվում է, որ $A \neq \beta I$, $\beta = \text{const}$):

22. Հաշվել $\kappa_\infty(A)$ պայմանավորվածության թիվը

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

երկանկյունագծային մատրիցի համար:

23. Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ -ն՝ վերին եռանկյուն մատրից է, որի տարրերը որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \dots, i-1 \\ 1, & j = i, i+1, \dots, n \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Հաշվել $\kappa_\infty(A)$:

Գլուխ 5

ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՈՒՆՆԵՐ

Որպես կանոն մատրիցի վերլուծություն ասելով հասկանում են «առավել պարզ» մատրիցների արտադրյալով նրա ներկայացումը, որն օժտված է խիստ որոշակի հատկություններով, որոնք հնարավորություն են տալիս էապես պարզեցնել և կրճատել աշխատատար մատրիցային գործողությունները: Այդպիսի «պարզ» մատրիցների դերում հաճախ հանդես են գալիս, օրինակ, անկյունագծային, եռանկյուն, սիմետրիկ (հերմիտյան) և օրթոգոնալ (ունիտար) մատրիցները: Մատրիցային վերլուծությունների վրա են հիմնված գծային հանրահաշվի գրեթե բոլոր հաշվողական ալգորիթմները: Մատրիցի որոշակի վերլուծությունն ստանալուց հետո էապես պարզեցվում է գծային հանրահաշվական համակարգերի լուծումը: Նույնը վերաբերում է նաև սեփական արժեքների խնդրին: Մատրիցային վերլուծության ամեն տեսակ ունի կիրառության իր ոլորտը: Մատրիցի վերլուծությունն այլ կերպ անվանում են *ֆակտորիզացիա*: Այս գլխում մենք կշարադրենք առավել հայտնի և հաշվումներում հաճախ հանդիպող վերլուծություններ՝ բացառությամբ *սինգուլյար վերլուծությունից*, որին կնվիրենք հաջորդ գլուխը:

5.1 Մատրիցի բերումը անկյունագծային տեսքի

Պարզենք հետևյալ հարցը. երբ կարելի է $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը նմանության ձևափոխությամբ բերել անկյունագծային տեսքի: Այլ կերպ ասած, մենք ուզում ենք հայտնաբերել այն պայմանները, որոնց դեպքում գոյություն ունի այնպիսի S չվերասերված մատրից, որ

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} : \quad (5.1.1)$$

Եթե տեղի ունի (5.1.1) ձևափոխությունը, ապա Λ մատրիցի անկյունագծային տարրերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են: Վերը դրված հարցին պատասխանում է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 5.1.1 : $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը նման է անկյունագծային մատրիցի այն և միայն այն դեպքում, երբ այն պարզ կառուցվածքի մատրից է:

Ապացույց: Բավարարություն: Գիցուք A մատրիցն ունի պարզ կառուցվածք և e_1, e_2, \dots, e_n նրա սեփական վեկտորների գծորեն անկախ համակարգ է: Այդ սեփական վեկտորներին համապատասխանում են $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ սեփական արժեքները.

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (5.1.2)$$

Կազմենք

$$S = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ | & | & \dots & | \end{array} \right], \quad \Lambda = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{array} \right] \quad (5.1.3)$$

մատրիցները: Քանի որ e_1, e_2, \dots, e_n համակարգը գծորեն անկախ է, ապա S մատրիցը չվերասերված է: Ըստ վանդակային մատրիցների բազմապատկման կանոնի՝

$$AS = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ Ae_1 & Ae_2 & \dots & Ae_n \\ | & | & \dots & | \end{array} \right], \quad S\Lambda = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \dots & \lambda_n e_n \\ | & | & \dots & | \end{array} \right]:$$

Համաձայն (5.1.2)-ի՝ ստանում ենք $AS = S\Lambda$ հավասարությունը կամ էլ՝ $S^{-1}AS = \Lambda$:

Անհրաժեշտություն: Բոլոր դատողությունները կատարվում են հակառակ հերթականությամբ: Գիցուք A մատրիցը նման է Λ անկյունագծային մատրիցի, այսինքն՝ ունենք (5.1.1) ձևափոխությունը: Նշանակենք e_1, e_2, \dots, e_n -ով S մատրիցի սյուները և ներկայացնենք այն

$$S = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ | & | & \dots & | \end{array} \right]$$

տեսքով: Քանի որ S մատրիցը չվերասերված է, ապա նրա սյուները գծորեն անկախ են: Այնուհետև,

$$AS = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ Ae_1 & Ae_2 & \dots & Ae_n \\ | & | & \dots & | \end{array} \right], \quad S\Lambda = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \dots & \lambda_n e_n \\ | & | & \dots & | \end{array} \right],$$

և $AS = S\Lambda$ հավասարությունից կատանաք, որ

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n:$$

Ուստի S մատրիցի սյուները A մատրիցի գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ են և հետևաբար A -ն պարզ կառուցվածքի մատրից է: \square

Օրինակ 5.1.1 : Գիտարկենք երկու մատրիցներ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 8 & -11 & -8 \\ -10 & 11 & 7 \end{bmatrix} :$$

Այս մատրիցները ունեն ընդհանուր բնութագրիչ բազմանդամ, այն է՝

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2 :$$

Սեփական արժեքներն են՝ $\lambda = 1$ և $\lambda = -3$: Երկու մատրիցների համար էլ

$$a_A(1) = a_B(1) = 1, \quad a_A(-3) = a_B(-3) = 2 :$$

Հաշվենք $\lambda = -3$ սեփական արժեքի երկրաչափական պատիկությունները: Օգտվելով (2.4.2) բանաձևից՝ գտնում ենք, որ

$$g_A(-3) = 3 - \text{rank}(-3I - A) = 3 - \text{rank}(3I + A) = 2,$$

$$g_B(-3) = 3 - \text{rank}(-3I - B) = 3 - \text{rank}(3I + B) = 1 :$$

Հետևաբար A մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի, իսկ B մատրիցը՝ ոչ: \square

Գիտողություն 5.1.1 : S անկյունագծայնացնող մատրիցը (5.1.1) վերլուծության մեջ միակը չէ: Օրինակ, ինչպես հայտնի է, մատրիցի սեփական վեկտորները որոշվում են հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ: Ուստի մենք կարող ենք S մատրիցի սյուները (տե՛ս (5.1.3)-ը) բազմապատկել տարբեր ոչ զրոյական հաստատուններով և ստանալ մի այլ անկյունագծայնացնող մատրից: \square

Այսպիսով, S անկյունագծայնացնող մատրիցի սյուները A մատրիցի սեփական վեկտորներ են: Գիցուք $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը հերմիտյան է: Այդ դեպքում այն ունի n հատ զույգ առ զույգ օրթոգոնալ e_1, e_2, \dots, e_n սեփական վեկտոր (թեորեմ 3.1.3): Առանց ընդհանրության սահմանափակման կարող ենք ենթադրել, որ այդ վեկտորները նորմավորված են: Ուստի S անկյունագծայնացնող մատրիցն ունիտար է ըստ 3.3.1 թեորեմի, և (5.1.1) մնանության ձևափոխությունը կգրվի հետևյալ կերպ.

$$S^*AS = \Lambda : \tag{5.1.4}$$

Իրական մատրիցների դեպքում, հաշվի առնելով 3.1.4 թեորեմը, կարելի է պնդել, որ ցանկացած A սիմետրիկ մատրիցի համար գոյություն ունի S օրթոգոնալ մատրից, որի կիրառմամբ այդ մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի.

$$S^TAS = \Lambda : \tag{5.1.5}$$

Ասվածի կապակցությամբ ներմուծենք ևս երկու հասկացություն: Կասենք, որ A և B մատրիցները *ունիտարորեն նման են*, եթե գոյություն ունի այնպիսի U ունիտար մատրից, որ

$$A = U^*BU : \tag{5.1.6}$$

Անվանենք A և B մատրիցները *օրթոգոնալորեն նման*, եթե գոյություն ունի այնպիսի Q օրթոգոնալ մատրից, որ

$$A = Q^T B Q : \quad (5.1.7)$$

Ունիտար ձևափոխությամբ անկյունագծային տեսքի բերվում են ոչ միայն հերմիտյան, այլ նաև նորմալ մատրիցները:

Թեորեմ 5.1.2 : $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը *ունիտարորեն նման է անկյունագծային մատրիցի այն և միայն այն դեպքում, երբ այն նորմալ է:*

Ապացույց: Բավարարություն: Գիցուք A -ն նորմալ մատրից է: Համաձայն 3.5.2 թեորեմի՝ այն ունի սեփական վեկտորների լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ: Վերը բերված դատողությունների հիման վրա կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի այնպիսի U ունիտար մատրից, որ $U^* A U = \Lambda$:

Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք, որ A մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի U ունիտար մատրից, որ $U^* A U = \Lambda$: Այդ դեպքում $A = U \Lambda U^*$ և

$$A^* A = U \Lambda^* U^* U \Lambda U^* = U \Lambda^* \Lambda U^*, \quad A A^* = U \Lambda U^* U \Lambda^* U^* = U \Lambda \Lambda^* U^* :$$

Քանի որ Λ -ն անկյունագծային մատրից է, ապա

$$\Lambda^* \Lambda = \Lambda \Lambda^* = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix}$$

և հետևաբար $A^* A = A A^*$: \square

Գիտողություն 5.1.2 : Նորմալ մատրիցների համար բացառված չէ նաև ոչ ունիտար անկյունագծայնացնող մատրիցի դեպքը: Տանք պարզաբանում: Գիցուք $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ մատրիցը նորմալ է և ունի երեք օրթոնորմավորված սեփական վեկտորներ՝ e_1, e_2, e_3 : Համապատասխան սեփական արժեքներն են՝ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ընդ որում՝ $\lambda_1 = \lambda_2$: Ունիտար անկյունագծայնացնող մատրիցն է

$$U = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $f_1 = e_1 + 2e_2$ և $f_2 = 2e_1 + e_2$ ևս կլինեն սեփական վեկտորներ: Իրոք,

$$A f_1 = A e_1 + 2A e_2 = \lambda_1 e_1 + 2\lambda_2 e_2 = \lambda_1 (e_1 + 2e_2) = \lambda_1 f_1 ,$$

$$A f_2 = 2A e_1 + A e_2 = 2\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_2 (2e_1 + e_2) = \lambda_2 f_2 :$$

Պարզ է, որ f_1, f_2, e_3 վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ է: Այդ դեպքում որպես անկյունագծայնացնող մատրից կարելի է վերցնել նաև

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ f_1 & f_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

մատրիցը, որն ունիտար չէ՝ $(f_1, f_2) = 2[(e_1, e_1) + (e_2, e_2)] \neq 0$: \square

Եթե մատրիցը պարզ կառուցվածքի մատրից չէ, ապա այն նման չէ անկյունագծային մատրիցի: Այնուամենայնիվ ցանկացած $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրից նմանության ձևափոխությամբ բերվում է, այսպես կոչված, *ժորդանյան կանոնական ձև*¹.

$$S^{-1}AS = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} \quad (5.1.8)$$

(տե՛ս, օրինակ՝ [10, 16]): J մատրիցը վանդակորեն անկյունագծային է: Նրա ամեն մի J_i *ժորդանյան վանդակը* համապատասխանում է մատրիցի ինչ-որ λ_i սեփական արժեքի և ունի հետևյալ տեսքը.

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} : \quad (5.1.9)$$

Հատուկ նշենք, որ (5.1.8) ժորդանյան կանոնական ձևում ներկայացված են A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները: Ընդ որում.

– ժորդանյան վանդակների s թիվը հավասար է մատրիցի գծորեն անկախ սեփական վեկտորների առավելագույն թվին,

– միևնույն λ սեփական արժեքին համապատասխանող վանդակների թիվը հավասար է նրա $g(\lambda)$ երկրաչափական պատիկությանը,

– միևնույն λ սեփական արժեքին համապատասխանող վանդակների կարգերի գումարը հավասար է նրա $a(\lambda)$ հանրահաշվական պատիկությանը:

Եթե A -ն պարզ կառուցվածքի մատրից է, ապա նրա ժորդանյան կանոնական ձևը, ըստ էության, նրա (5.1.1) անկյունագծային ձևն է:

Վերջում քննարկենք մատրիցից քառակուսի արմատ հանելու խնդիրը: Պարզաբանենք հարցը: Կասենք, որ R մատրիցը *քառակուսի արմատ* է $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցից,

¹Անվանումը կապված է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Մարի Էնմոն Ժորդանի (1838-1922) անվան հետ:

եթե $R^2 = A$: Այս խնդիրը միշտ չէ, որ ունի լուծում: Օրինակ՝ կարելի է համոզվել, որ քառակուսի արմատ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցից գոյություն չունի: Միաժամանակ, եթե A -ն պարզ կառուցվածքի մատրից է, ապա խնդիրը լուծելի է: Իրոք, այդ դեպքում A մատրիցն անկյունագծայնացվող է և (5.1.1) ներկայացումից հետևում է, որ $A = S\Lambda S^{-1}$: Վերցնենք

$$R = S\Lambda^{1/2}S^{-1},$$

որտեղ

$$\Lambda^{1/2} \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}: \quad (5.1.10)$$

Այդ դեպքում

$$R^2 = S\Lambda^{1/2}S^{-1}S\Lambda^{1/2}S^{-1} = S\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}S^{-1} = S\Lambda S^{-1} = A:$$

Ելնելով գործողության իմաստից՝ A մատրիցի քառակուսի արմատի համար ընդունված է $A^{1/2}$ նշանակումը, որը մենք արդեն օգտագործել ենք (5.1.10)-ում:

Առաջանում է քառակուսի արմատի միակության հարցը: Հաջորդ օրինակը ցույց է տալիս, որ այս հարցը իմաստավորված է:

Օրինակ 5.1.2 : Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 0 & 4 \end{bmatrix}:$$

Այս մատրիցի սեփական արժեքներն են՝ $\lambda_1 = -1$ և $\lambda_2 = 4$: Քանի որ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ապա A -ն պարզ կառուցվածքի մատրից է և բերվում է անկյունագծային տեսքի: Կազմենք

$$R_1 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad R_2 = \begin{bmatrix} i & -(2+i)^2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

մատրիցները: Հեշտ է ստուգել, որ $R_1^2 = R_2^2 = A$: \square

Որոշ դեպքերում քառակուսի արմատի միակությունը կարելի է երաշխավորել:

Թեորեմ 5.1.3 : Եթե A մատրիցը դրական կիսաորոշյալ է, ապա գոյություն ունի միակ դրական կիսաորոշյալ R մատրից, որի համար $R^2 = A$:

Ապացույց: Գոյություն ունեն այս պնդման տարբեր ապացույցներ: Այստեղ մենք կրերենք դրանցից մեկը՝ հետևելով [27] հոդվածին:

Նախ նշենք, որ եթե հերմիտյան մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները հավասար են զրոյի, ապա այդ մատրիցը զրոյական է և հակառակը:

Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն երկու դրական կիսաորոշյալ մատրիցներ R_1 և R_2 , որոնց համար $R_1^2 = R_2^2 = A$: Պարզ է, որ $R_1 - R_2$ տարբերությունը ոչ զրոյական հերմիտյան մատրից է: Ուստի կարող ենք ասել, որ $R_1 - R_2$ մատրիցն ունի $\lambda \neq 0$ սեփական արժեք, որին համապատասխանում է որոշ $z \neq 0$ սեփական վեկտոր, այսինքն՝ $(R_1 - R_2)z = \lambda z$:

Քանի որ $R_1^2 - R_2^2 = 0$, ապա $((R_1^2 - R_2^2)z, z) = 0$: Մյուս կողմից՝

$$\begin{aligned} ((R_1^2 - R_2^2)z, z) &= ((R_1(R_1 - R_2) + (R_1 - R_2)R_2)z, z) = (R_1(R_1 - R_2)z, z) + \\ &((R_1 - R_2)R_2z, z) = ((R_1 - R_2)z, R_1z) + (R_2z, (R_1 - R_2)z) = (\lambda z, R_1z) + \\ &(R_2z, \lambda z) = \lambda(z, R_1z) + \lambda(R_2z, z) = \lambda[(R_1z, z) + (R_2z, z)] : \end{aligned}$$

Այսպիսով, $\lambda[(R_1z, z) + (R_2z, z)] = 0$: Քանի որ $\lambda \neq 0$, ապա $(R_1z, z) + (R_2z, z) = 0$: Բայց R_1 և R_2 մատրիցները դրական կիսաորոշյալ են, ուստի $(R_1z, z) = 0$ և $(R_2z, z) = 0$: Այդ դեպքում

$$0 = ((R_1 - R_2)z, z) = (\lambda z, z) = \lambda(z, z) :$$

Սակայն վերջինը ճիշտ չէ, քանի որ $\lambda \neq 0$ և $z \neq 0$: Ստացված հակասությունը հաստատում է թեորեմի պնդումը: \square

5.2 Շուրի վերլուծությունը

Մատրիցի ամենապարզ տեսքը անկյունագծային տեսքն է: Ինչպես ներկայացվել էր նախորդ պարագրաֆում, նմանության ձևափոխությամբ անկյունագծային տեսքի բերվում են միայն պարզ կառուցվածքի մատրիցները, իսկ ունիտար ձևափոխությամբ՝ նորմալ մատրիցները: Սինույն ժամանակ մատրիցի այլ՝ բավականին պարզ տեսքը, եռանկյուն տեսքն է: Չևակերպենք և ապացուցենք մատրիցների տեսության առավել կարևոր և հիմնարար արդյունքներից մեկը՝ *Շուրի թեորեմը*:

Թեորեմ 5.2.1 : *Ցանկացած $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի U ունիտար մատրից, որ*

$$U^*AU = R, \tag{5.2.1}$$

որտեղ R -ը վերին եռանկյուն մատրից է:

Ապացույց: Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդն ըստ մատրիցի կարգի: Երբ $n = 1$, պնդումն ակնհայտ է: Ենթադրենք, որ մեր պնդումը ճիշտ է $n - 1$ կարգի մատրիցների համար, որտեղ $n \geq 2$ և ապացուցենք այն n -ի համար:

Գիցուք λ_1 -ը A մատրիցի որևէ սեփական արժեք է, իսկ u_1 -ը՝ համապատասխան սեփական վեկտորը, այն է՝

$$Au_1 = \lambda_1 u_1, \quad u_1^* u_1 = 1 : \quad (5.2.2)$$

Լրացնենք u_1 վեկտորը մինչև լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ \mathbb{C}^n տարածությունում.

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \quad (5.2.3)$$

$$u_j^* u_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

որտեղ δ_{ij} -ն Կրոնեկերի նշանն է: Կազմենք

$$U_1 = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{array} \right] \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

ունիտար մատրիցը: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} U_1^* A U_1 &= \begin{bmatrix} - & u_1^* & - \\ - & u_2^* & - \\ & \vdots & \\ - & u_n^* & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ Au_1 & Au_2 & \dots & Au_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1^* A u_1 & u_1^* A u_2 & \dots & u_1^* A u_n \\ u_2^* A u_1 & u_2^* A u_2 & \dots & u_2^* A u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n^* A u_1 & u_n^* A u_2 & \dots & u_n^* A u_n \end{bmatrix} : \end{aligned}$$

Համաձայն (5.2.2)-ի և (5.2.3)-ի՝ ունենք

$$u_1^* A u_1 = \lambda_1 u_1^* u_1 = \lambda_1,$$

$$u_j^* A u_1 = \lambda_1 u_j^* u_1 = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n :$$

Այսպիսով, $U_1^* A U_1$ մատրիցն ունի հետևյալ կառուցվածքը.

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad (5.2.4)$$

որտեղ

$$B = \begin{bmatrix} u_2^* A u_2 & \dots & u_2^* A u_n \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^* A u_2 & \dots & u_n^* A u_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} u_1^* A u_2 \\ \vdots \\ u_1^* A u_n \end{bmatrix} :$$

Ըստ ինդուկցիայի ենթադրության՝ գոյություն ունի այնպիսի $V \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ ունիտար մատրից, որ

$$V^*BV = R_1,$$

որտեղ R_1 -ը վերին եռանկյուն մատրից է: Կազմենք

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (5.2.5)$$

ունիտար մատրիցը: Այնուհետև, հաշվի առնելով (5.2.4)-ը և (5.2.5)-ը, հաջորդաբար ստանում ենք.

$$\begin{aligned} (U_1U_2)^*A(U_1U_2) &= U_2^*(U_1^*AU_1)U_2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & V^*B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^TV \\ 0 & V^*BV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^TV \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \equiv R: \end{aligned}$$

Պագ է, որ U_1U_2 մատրիցը հենց U որոնելի ունիտար մատրիցն է: \square

Գիտողություն 5.2.1 : Քանի որ ունիտարորեն նման մատրիցներն ունեն նույն սեփական արժեքները, ապա R մատրիցի անկյունագծային տարրերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են: \square

Գիտողություն 5.2.2 : Ինչպես U ունիտար մատրիցը, այնպես էլ R վերին եռանկյուն մատրիցը (5.2.1) վերլուծության մեջ միակ չեն: Գ-ա պարզ երևում է հենց թեորեմի ապացույցից: Իրոք, մենք կարող էինք ընտրել A մատրիցի մեկ այլ λ_1 սեփական արժեք: Արդյունքում կփոխվեր ինչպես u_1 սեփական վեկտորը, այնպես էլ սեփական վեկտորների (5.2.3) օրթոնորմավորված համակարգը: Մասնավորապես, R մատրիցը որոշվում է իր անկյունագծային տարրերի դասավորության ճշտությամբ: \square

Շուրի թեորեմից ստանում ենք մեզ արդեն հայտնի հետևյալ փաստը (տե՛ս (5.1.4) ձևափոխությունը):

Հետևանք 5.2.1 : Եթե A -ն հերմիտյան մատրից է, ապա գոյություն ունի այնպիսի U ունիտար մատրից, որ

$$U^*AU = D, \quad (5.2.6)$$

որտեղ D -ն անկյունագծային մատրից է:

Ապացույց: Իրոք, $U^*AU = R$ վերլուծությունից ունենք

$$R^* = (U^*AU)^* = U^*AU = R :$$

Ուստի $D \equiv R$ անկյունագծային մատրից է: \square

Կիրառենք Շուրի թեորեմը մատրիցների տեսության մեջ հայտնի *Քելի-Համիլտոնի թեորեմի* ապացուցման համար:

Թեորեմ 5.2.2 : Եթե $P(\lambda)$ -ն $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամ է, ապա $P(A) = 0$:

Երբեմն ասում են, որ մատրիցն *իր բնութագրիչ բազմանդամի «արմատն է»*:

Ապացույց: Գրենք A մատրիցի $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ բնութագրիչ բազմանդամը

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

վերլուծության տեսքով, որտեղ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ թվերը մատրիցի սեփական արժեքներն են (տե՛ս (1.3.7) վերլուծությունը): Ըստ Շուրի թեորեմի՝ $A = URU^*$: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} P(A) &= (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) \\ &= (URU^* - \lambda_1 I)(URU^* - \lambda_2 I) \dots (URU^* - \lambda_n I) \\ &= U(R - \lambda_1 I)U^*U(R - \lambda_2 I)U^* \dots U(R - \lambda_n I)U^* = UP(R)U^* : \end{aligned}$$

Այսպիսով, $P(A) = UP(R)U^*$: Այս առնչությունից բխում է, որ $P(A) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $P(R) = 0$:

Գիտարկենք հետևյալ վերին եռանկյուն մատրիցները.

$$R - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n - \lambda_1 \end{bmatrix},$$

$$R - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & * & * & * & * \\ & 0 & * & * & * \\ & & \lambda_3 - \lambda_2 & * & * \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_n - \lambda_2 \end{bmatrix},$$

...

$$R - \lambda_n I = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & * & * & * & * \\ & \lambda_2 - \lambda_n & * & * & * \\ & & \ddots & * & * \\ & & & \lambda_{n-1} - \lambda_n & * \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(* սիմվոլով նշված են ընդհանուր դեպքում ոչ գրոյական տարրերը):

Սահմաններ

$$M_k \equiv (R - \lambda_1 I)(R - \lambda_2 I) \dots (R - \lambda_k I), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

մատրիցները: Ընդ որում՝ $M_n = P(R)$: Պարզ երևում է, որ M_1 մատրիցում 1×1 չափի վերին ձախ վանդակը գրոյական է: Անցնենք M_2 մատրիցին: Ունենք

$$M_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline & & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 - \lambda_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \hline & & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{array} \right] :$$

Վանդակային մատրիցների բազմապատկման կանոնի համաձայն՝ կստանանք

$$M_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \hline & & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{array} \right],$$

այսինքն՝ գրոյական է 2×2 չափի վերին ձախ վանդակը: Շարունակելով նման ձևով հանգում ենք, որ յուրաքանչյուր M_k , $1 \leq k \leq n$ մատրիցում գրոյական է $k \times k$ չափի վերին ձախ վանդակը: Արդյունքում կստանանք, որ $P(R) = M_n = \mathbf{0}$: \square

Քելի-Համիլտոնի թեորեմը ունի տարբեր կիրառություններ: Օրինակ՝ այն կարելի է օգտագործել հակադարձ մատրիցը հաշվելու համար: Ինչպես հետևում է բնութագրիչ բազմանդամի (1.3.4) գրառումից՝

$$P(A) = A^n - p_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} p_{n-1} A + (-1)^n p_n I = \mathbf{0} :$$

Եթե A մատրիցը չվերասերված է, այս $p_n \neq 0$ (տես (1.3.6)-ը): Բազմապատկելով վերջին հավասարության երկու կողմը A^{-1} մատրիցով՝ կստանանք

$$A^{n-1} - p_1 A^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} p_{n-1} I + (-1)^n p_n A^{-1} = \mathbf{0} :$$

Այստեղից կարող ենք գրել՝

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n} [(-1)^{n-1} A^{n-1} + (-1)^{n-2} p_1 A^{n-2} + \dots + p_n I] : \quad (5.2.7)$$

Օրինակ 5.2.1 : Օգտվելով (5.2.7) բանաձևից՝ հաշվենք

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցի հակադարձը: Ունենք բնութագրիչ բազմանդամը՝ $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$: Ուստի $A^2 - 3A + 2I = \mathbf{0}$: Այստեղից կստանանք

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I) : \quad \square$$

Առաջին հայացքից կարող է թվալ, որ $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ իրական մատրիցի համար պետք է գոյություն ունենա $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ օրթոգոնալ մատրիցը, որը բերում է A -ն վերին եռանկյուն տեսքի: Իրականում դա այդպես չէ: Բանն այն է, որ իրական մատրիցը կարող է ունենալ կոմպլեքս սեփական արժեքներ, որոնք տեղակայված են վերին եռանկյուն մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա: Դրա հետ մեկտեղ գոյություն ունի 5.2.1 թեորեմի իրական մատրիցի տարբերակը, որն, ըստ էության, մոտ է ընդհանուր դեպքին [20, 22]:

Թեորեմ 5.2.3 : Ցանկացած $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ օրթոգոնալ մատրից, որ

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ & A_2 & \dots & * \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix},$$

որտեղ A_i , $i = 1, 2, \dots, k$ անկյունագծային վանդակներն ունեն 1×1 կամ 2×2 չափ՝ A մատրիցի իրական սեփական արժեքին կամ կոմպլեքս համալուծ սեփական արժեքների զույգին համապատասխան:

5.3 Մատրիցի LU վերլուծությունը

Սույն պարագրաֆում շարադրվող մատրիցների վերլուծությունը լայնորեն կիրառվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերը լուծելիս, ինչպես նաև որոշիչների և հսկադարձ մատրիցների հաշվման ժամանակ:

Թեորեմ 5.3.1 : Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի անկյունային մինորները հավասար չեն զրոյի:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n:$$

Այդ դեպքում A մատրիցը կարելի է միարժեքորեն ներկայացնել

$$A = LU \tag{5.3.1}$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ L -ը ոչ զրոյական անկյունագծային տարրերով ստորին եռանկյուն մատրից է, իսկ U -ն վերին եռանկյուն մատրից է, որի անկյունագծային տարրերը հավասար են մեկի:

Ապացույց: Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդն ըստ մատրիցի կարգի: Երբ $n = 1$, պնդումն ակնհայտ է: Իրոք, $a_{11} = l_{11} \cdot u_{11}$, որտեղ $l_{11} = a_{11}, u_{11} = 1$: Ենթադրենք, որ թեորեմի պնդումը ճիշտ է $n - 1$ կարգի մատրիցների համար: Ներկայացնենք մատրիցը

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & a \\ b^T & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.3.2}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ $\tilde{A} \in \mathbf{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ և $a, b \in \mathbf{C}^{n-1}$: Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության՝ \tilde{A} մատրիցի համար տեղի ունի $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$ վերլուծությունը, որտեղ \tilde{L} և \tilde{U} մատրիցները համապատասխանաբար ստորին և վերին եռանկյուն մատրիցներ են՝ օժտված թեորեմում նշված հատկություններով: Փնտրենք A մատրիցի (5.3.1) վերլուծությունը

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ \tilde{l}^T & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

տեսքով, որտեղ $l, u \in \mathbf{C}^{n-1}$ վեկտորները և l_{nn} թիվն առայժմ անհայտ են: Օգտվելով վանդակային մատրիցների բազմապատկման կանոնից, (5.3.2)-ից և (5.3.3)-ից՝ գրենք հետևյալ հավասարումները.

$$\tilde{L}u = a, \quad (5.3.4)$$

$$\tilde{l}^T \tilde{U} = b^T, \quad (5.3.5)$$

$$\tilde{l}^T u + l_{nn} = a_{nn} : \quad (5.3.6)$$

Այսպիսով, (5.3.4)-ից և (5.3.5)-ից կստանանք

$$u = \tilde{L}^{-1}a, \quad \tilde{l}^T = b^T \tilde{U}^{-1}$$

և, այնուհետև, (5.3.6)-ից՝

$$l_{nn} = a_{nn} - \tilde{l}^T u :$$

Մնում է ապացուցել, որ $l_{nn} \neq 0$: Իրոք, (5.3.3) վերլուծությունից ունենք

$$\det A = \det \tilde{L} \cdot l_{nn} \cdot \det \tilde{U} = \det \tilde{L} \cdot l_{nn}$$

հավասարությունը: Քանի որ $\det A \neq 0$, ապա $l_{nn} \neq 0$: Պահանջվող վերլուծության գոյությունն ապացուցվեց: Ինչ վերաբերում է միակությանը, ապա այն ակնհայտորեն հետևում է ապացույցի ընթացքից: \square

Գիտողություն 5.3.1 : *LU վերլուծություն անվանումը ծագում է անգլերեն բառերից. lower՝ ստորին և upper՝ վերին:*

Ստանանք L և U եռանկյուն մատրիցների տարրերի որոշման բանաձևերը: Գիցուք $L = [l_{ij}]_{n \times n}$ ($l_{ij} = 0$, երբ $i < j$) և $U = [u_{ij}]_{n \times n}$ ($u_{ij} = 0$, երբ $i > j$, $u_{ii} = 1$): Համաձայն (5.3.1) հավասարության՝ ունենք

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n :$$

Ֆիքսենք A մատրիցի որևէ i -րդ ստողը ($1 \leq i \leq n$): Այդ դեպքում

$$\sum_{k=1}^j l_{ik} u_{kj} = a_{ij}, \quad \text{երբ } j \leq i,$$

$$\sum_{k=1}^i l_{ik} u_{kj} = a_{ij}, \quad \text{երբ } j > i :$$

Գրենք այս հավասարությունները

$$\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ij} = a_{ij}, \quad \text{երբ } j \leq i,$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ii}u_{ij} = a_{ij}, \quad \text{երբ } j > i$$

տեսքով: Այստեղից ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (5.3.7)$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n:$$

Պարզ հաշվարկները ցույց են տալիս, որ (5.3.7) բանաձևերով L և U մատրիցների տարրերի որոշումը պահանջում է

$$A_{ops} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \sim \frac{2}{3}n^3 \quad (5.3.8)$$

թվաբանական գործողություն:

Ընդգծենք, որ ոչ բոլոր մատրիցների համար գոյություն ունի LU վերլուծությունը: Օրինակ՝

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

չվերասերված մատրիցի համար այդպիսի վերլուծություն չկա:

Դիտարկենք

$$Ax = b \quad (5.3.8)$$

գծային հավասարումների համակարգը, որի մատրիցը բավարարում է 5.3.1 թեորեմի պայմաններին: Ենթադրենք, որ մենք արդեն գտել ենք A մատրիցի LU վերլուծությունը: Արդյունքում (5.3.8) համակարգի լուծումը հանգում է եռանկյուն մատրիցներով հետևյալ երկու համակարգերի հաջորդական լուծմանը.

$$\bullet Ly = b, \quad (5.3.9)$$

$$\bullet Ux = y: \quad (5.3.10)$$

Նշված համակարգերի լուծումը դժվարություն չի ներկայացնում և պահանջում է գումարային $2n^2$ թվաբանական գործողություն: Այնպես որ հիմնական հարցը մատրիցի (5.3.1) վերլուծությունը ստանալն է:

LU վերլուծության վրա հիմնված մեթոդները կոչվում են LU -մեթոդներ: Բացի (5.3.7) բանաձևերից՝ գոյություն ունեն LU վերլուծության գաղափարի այլ իրականացումներ:

Հատուկ նշենք, որ գծային համակարգերի լուծման հայտնի Գաուսի մեթոդը, ըստ էության, LU -մեթոդ է (տե՛ս, օրինակ՝ [6, 20, 28]):

Քացահայտված LU վերլուծությունը «սիմետրիկ» չէ այն իմաստով, որ U մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա տեղակայված են միավորներ, ինչը չի կարելի ասել L մատրիցի մասին: Այս իրավիճակը կարելի է շտկել, եթե L մատրիցը նույնպես ներկայացնենք երկու մատրիցների արտադրյալի տեսքով.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21}/l_{11} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1}/l_{11} & l_{n2}/l_{22} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ & l_{22} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix} : \quad (5.3.11)$$

Այսպիսով, 5.3.1 թեորեմի պայմաններին բավարարող A մատրիցը միարժեքորեն ներկայացվում է

$$A = LDU \quad (5.3.12)$$

տեսքով, որտեղ L -ը գլխավոր անկյունագծի վրա տեղակայված միավորներով ստորին եռանկյուն մատրից է, D -ն անկյունագծային մատրից է, իսկ U -ն գլխավոր անկյունագծի վրա տեղակայված միավորներով վերին եռանկյուն մատրից է:

Մատրիցի ներկայացումը (5.3.11) տեսքով կոչվում է նրա *LDU վերլուծություն*:

5.4 Խոլեսկու վերլուծությունը

Գիցուք $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը հերմիտյան է և դրական որոշյալ՝ $A = A^* > 0$: Ըստ Սիլվեստրի չափանիշի (թեորեմ 3.2.1) այդ մատրիցի բոլոր անկյունային մինորները դրական են: Ուստի A մատրիցի համար ճիշտ է

$$A = LDU \quad (5.4.1)$$

ներկայացումը, որտեղ

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & 1 & \dots & u_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

(տե՛ս (5.3.11) և (5.3.12) վերլուծությունները): Քանի որ $A = A^*$, ապա

$$LDU = A = A^* = U^*D^*L^*,$$

և (5.4.1) վերլուծության միակությունից բխում է, որ $L = U^*$, $D = D^*$: Արդյունքում (5.4.1) վերլուծությունը կընդունի

$$A = U^*DU \quad (5.4.2)$$

տեսքը: Ընդգծենք, որ D մատրիցի անկյունագծային տարրերը իրական թվեր են:

Ելնելով (5.4.2) վերլուծությունից՝ կարելի է ցույց տալ, որ

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} = d_{11}d_{22}\dots d_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, n:$$

Այս հավասարություններից հետևում են

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 1 & 2 & \dots & k-1 \end{pmatrix} d_{kk}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

առնչությունները: Ուստի

$$d_{11} = a_{11} > 0, \quad d_{kk} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 1 & 2 & \dots & k-1 \end{pmatrix}} > 0, \quad k = 2, 3, \dots, n:$$

Հաշվի առնելով D -ի անկյունագծային տարրերի դրականությունը՝ ներմուծենք

$$D^{1/2} \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & & & \\ & \sqrt{d_{22}} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Այդ դեպքում (5.4.2) վերլուծությունը կարելի է գրել

$$A = U^* D^{1/2} D^{1/2} U = V^* V$$

տեսքով, որտեղ

$$V \equiv D^{1/2} U$$

մատրիցը $\sqrt{d_{kk}}$ դրական անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է: Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 5.4.1 : *Ցանկացած A դրական որոշյալ մատրից կարելի է միարժեքորեն գրել*

$$A = V^* V \tag{5.4.3}$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ V -ն դրական անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է:

Ստացված (5.4.3) վերլուծությունը կոչվում է A մատրիցի *Խոլեսկոմ² վերլուծություն*:

²Խոլեսկի Անդրե Լուի (1875-1918) – ֆրանսիացի սպա և գեոդեզիստ, առաջին համաշխարհային պատերազմի տարիներին կատարում էր գեոդեզիական և տեղագրական աշխատանքներ Հյուսիսային Աֆրիկայում:

Արտածենք $V = [v_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի տարրերի հաշվման բանաձևերը: Գրենք

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i v_{ki} v_{kj}, \quad i \leq j$$

հավասարությունները (քանի որ A մատրիցը հերմիտյան է, մենք դիտարկում ենք այդ մատրիցի միայն վերին եռանկյուն մասը): Ավելի մանրամասն՝

$$v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + \dots + v_{ii}^2 = a_{ii},$$

$$v_{1i} v_{1j} + v_{2i} v_{2j} + \dots + v_{ii} v_{ij} = a_{ij}, \quad j = i, i+1, \dots, n :$$

Այստեղից կստանանք

$$v_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} v_{ki}^2}, \quad v_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} v_{ki} v_{kj}}{v_{ii}}, \quad j = i, i+1, \dots, n \quad (5.4.4)$$

բանաձևերը, որտեղ $i = 1, 2, \dots, n$: Այսպիսով, V վերին եռանկյուն մատրիցի տարրերը գտնում ենք հաջորդաբար՝ տող առ տող: Հաշվարկները ցույց են տալիս, որ V մատրիցի տարրերի որոշումը պահանջում է $A_{ops} \sim n^3/3$ թվաբանական գործողություն:

Երբ V մատրիցը որոշված է, ապա դրական որոշյալ մատրիցով

$$Ax = b$$

համակարգի լուծումը հանգում է եռանկյուն մատրիցներով երկու համակարգերի հաջորդական լուծմանը.

$$\bullet V^* y = b, \quad (5.4.5)$$

$$\bullet V x = y: \quad (5.4.6)$$

Դրա համար կպահանջվի ևս $2n^2$ թվաբանական գործողություն:

Դրական որոշյալ մատրիցով համակարգերի լուծման նկարագրված եղանակը կրում է *Խոլեսկու մեթոդ* անունը:

Օրինակ 5.4.1 : Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Օգտվելով (5.4.4) բանաձևերից՝ գտնում ենք $A = V^T V$ վերլուծությունը, որտեղ

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \quad \square$$

Մատրիցի (5.4.3) Խոլեսկո վերլուծությունն ունի մեկ կարևոր հատկություն՝ կապված V մատրիցի պայմանավորվածության թվի հետ: Պարզաբանենք այն:

Համարակալենք A մատրիցի սեփական արժեքները չնվազման կարգով.

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n :$$

Ըստ (4.4.9)-ի՝

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} : \quad (5.4.7)$$

Հաշվի առնելով մատրիցային նորմի (4.2.13) արտահայտությունը և (5.4.3) վերլուծությունը, ունենք

$$\|V\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(V^*V)} = \sqrt{\lambda_{\max}(A)} = \sqrt{\lambda_n} \quad (5.4.8)$$

հավասարությունը: Այնուհետև՝

$$\|V^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(V^{-1*}V^{-1})} = \sqrt{\lambda_{\max}((VV^*)^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(VV^*)}} : \quad (5.4.9)$$

Գժվար չէ նկատել, որ VV^* և V^*V մատրիցները նման են: Իրոք,

$$V^{-1}(VV^*)V = V^*V :$$

Այսպիսով, VV^* և V^*V մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են (թերեմ 2.2.1): Ուստի

$$\lambda_{\min}(VV^*) = \lambda_{\min}(V^*V) = \lambda_{\min}(A) = \lambda_1 ,$$

և (5.4.9)-ից կստանանք, որ

$$\|V^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} : \quad (5.4.10)$$

Արդյունքում (5.4.8)-ից և (5.4.10)-ից ստանում ենք արտահայտություն V մատրիցի պայմանավորվածության թվի համար.

$$\kappa_2(V) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} : \quad (5.4.11)$$

Բաղդատելով (5.4.7) և (5.4.11) արտահայտությունները, հանգում ենք

$$\kappa_2(V) = \sqrt{\kappa_2(A)}$$

հավասարությանը: Համանմանորեն կարելի է ցույց տալ, որ $\kappa_2(V^*) = \sqrt{\kappa_2(A)}$:

Այսպիսով, V և V^* մատրիցների պայմանավորվածության թվերը A մատրիցի պայմանավորվածության թվի համեմատ նվազել են: Այս հանգամանքը Խոլեսկո մեթոդի կարևոր հատկություններից է:

5.5 Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը

Դիցուք C^m տարածությունում տրված է գծորեն անկախ վեկտորների

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (5.5.1)$$

համակարգը: Ենթադրվում է, որ $m \geq n$: Նկարագրենք (5.5.1) համակարգից

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (5.5.2)$$

օրթոնորմավորված համակարգի անցման եղանակը:

Հստակեցնենք, որ մենք կօգտագործենք

$$\|x\| \equiv \|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^*x}$$

վեկտորական նորմը (տե՛ս (4.1.5)-ը):

Առաջին քայլում կառուցվում է

$$q_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 \quad (5.5.3)$$

վեկտորը: Ակնհայտ է, որ $\|q_1\| = 1$: Անցնենք երկրորդ քայլին: Դիտարկենք

$$\tilde{q}_2 = \alpha_{12} q_1 + a_2$$

վեկտորը: Քանի որ a_1 և a_2 վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա \tilde{q}_2 վեկտորը հավասար չէ զրոյի կամայական α_{12} գործակցի դեպքում: Պահանջենք, որ $(\tilde{q}_2, q_1) = 0$: Այդ դեպքում

$$\alpha_{12}(q_1, q_1) + (a_2, q_1) = 0$$

հավասարությունից կստանանք, որ $\alpha_{12} = -(a_2, q_1)$: Այսպիսով,

$$\tilde{q}_2 = -(a_2, q_1)q_1 + a_2 : \quad (5.5.4)$$

Այնուհետև հաշվվում է

$$q_2 = \frac{1}{\|\tilde{q}_2\|} \tilde{q}_2 \quad (5.5.5)$$

վեկտորը: Պարզ է, որ $\|q_2\| = 1$:

Ենթադրենք, որ արդեն կառուցված են

$$q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$$

օրթոնորմավորված վեկտորները, որտեղ $k \leq n$: Կառուցման k -րդ քայլը հետևյալն է: Փնտրենք \tilde{q}_k վեկտորը

$$\tilde{q}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik} q_i + a_k$$

տեսքով: Նշենք, որ a_1, a_2, \dots, a_k վեկտորների գծային անկախությունից հետևում է, որ \tilde{q}_k վեկտորը հավասար չէ գրոյի ցանկացած $\alpha_{ik}, i = 1, 2, \dots, k - 1$ գործակիցների դեպքում: Պահանջենք, որ

$$(\tilde{q}_k, q_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k - 1 :$$

Արդյունքում

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik} (q_i, q_j) + (a_k, q_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k - 1$$

հավասարություններից կատանանք արտահայտություններ գործակիցների համար.

$$\alpha_{jk} = -(a_k, q_j), \quad j = 1, 2, \dots, k - 1 :$$

Այսպիսով,

$$\tilde{q}_k = - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i + a_k : \tag{5.5.6}$$

Այնուհետև հաշվվում է

$$q_k = \frac{1}{\|\tilde{q}_k\|} \tilde{q}_k \tag{5.5.7}$$

վեկտորը:

Կատարելով n քայլ, կատանանք (5.5.2) վեկտորների որոնելի համակարգը: Այս հաշվողական ընթացքը ստացել է *Գրամ*³-*Շմիդտի*⁴ *օրթոգոնալացում* անունը:

Արտածված (5.5.3) – (5.5.7) բանաձևերի հիման վրա գրենք (5.5.2) օրթոնորմավորված համակարգի վեկտորների արտահայտությունները (5.5.1) ելակետային համակարգի վեկտորների միջոցով, այն է՝

$$\begin{aligned} q_1 &= \gamma_{11} a_1, \\ q_2 &= \gamma_{12} a_1 + \gamma_{22} a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= \gamma_{1n} a_1 + \gamma_{2n} a_2 + \dots + \gamma_{nn} a_n : \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Ընդ որում՝

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\|a_1\|}, \quad \gamma_{kk} = \frac{1}{\|\tilde{q}_k\|}, \quad k = 2, 3, \dots, n : \tag{5.5.9}$$

Այսպիսով, $\gamma_{kk}, k = 1, 2, \dots, n$ անկյունագծային գործակիցները դրական են:

³Գրամ Յորգեն Պեդերսեն (1850-1916) – դանիացի մաթեմատիկոս, հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են թվերի տեսությանը, մաթեմատիկական վիճակագրությանը և մոտարկումների տեսությանը:

⁴Շմիդտ Էրհարդ (1876-1959) – գերմանացի մաթեմատիկոս, գիտական աշխատությունները նվիրված են ֆունկցիաների տեսությանը, ֆունկցիոնալ անալիզին, ինտեգրալ հավասարումներին և տոպոլոգիային:

Դժվար չէ ստանալ նաև հակադարձ ձևափոխությունը.

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{11}q_1, \\ a_2 &= r_{12}q_1 + r_{22}q_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= r_{1n}q_1 + r_{2n}q_2 + \dots + r_{nn}q_n : \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

Այս առնչությունները հեշտությամբ բխում են (5.5.3) – (5.5.7) բանաձևերից: Ընդ որում, $k = 2, 3, \dots, n$ արժեքների համար ունենք՝

$$r_{ik} = (a_k, q_i), \quad i = 1, 2, \dots, k - 1 : \tag{5.5.11}$$

Բացի այդ՝ $r_{kk} = 1/\gamma_{kk}$, $k = 1, 2, \dots, n$ անկյունագծային գործակիցները դրական են: Ինչպես հետևում է (5.5.9)-ից,

$$r_{11} = \|a_1\|, \quad r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|, \quad k = 2, 3, \dots, n : \tag{5.5.12}$$

Ստացված արտահայտությունները և բանաձևերը կարելի է կազմակերպել ստորև բերվող ալգորիթմի տեսքով, որը տալիս է ինչպես q_k , $k = 1, 2, \dots, n$ վեկտորները, այնպես էլ (5.5.10) ձևափոխության r_{ik} գործակիցները:

```

Algorithm Gram – Schmidt/classical
input  $m, n, (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 
 $r_{11} = \|a_1\|$ 
 $q_1 = a_1/r_{11}$ 
for  $k = 2, 3, \dots, n$  do
  for  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  do
     $r_{ik} = (a_k, q_i)$ 
  end
   $\tilde{q}_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}q_i$ 
   $r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|$ 
   $q_k = \tilde{q}_k/r_{kk}$ 
end
output  $(r_{ik}), (q_1, q_2, \dots, q_n)$ 
    
```

Մենք բերեցինք օրթոգոնալացման պրոցեսի, այսպես կոչված, *դասական* տարբերակը: Ոչ բարդ հաշվարկը ցույց է տալիս, որ ալգորիթմի իրականացումը պահանջում է $\sim 2mn^2$ թվաբանական գործողություն: Յավոք, այս ալգորիթմը կայուն չէ կլորացման սխալանքների նկատմամբ: Արդյունքում ստացվող (5.5.2) համակարգը կարող է ամենևին օրթոգոնալ չլինել: Այդպիսի երևույթի կարելի է հանդիպել, մասնավորապես, երբ (5.5.1) վեկտորները *համարյա գծորեն կախված են*:

Օրինակ 5.5.1 : Դիտարկենք

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

գծորեն անկախ վեկտորները ($\varepsilon > 0$): Վերցնենք $\varepsilon = 10^{-8}$: Հաշվարկների արդյունքում կստանանք

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.0000 \\ 0.7071 \end{bmatrix} :$$

Այստեղ $(q_2, q_3) \approx 0.5$, ինչը շատ հեռու է օրթոգոնալությունից: \square

Օրթոգոնալացման դասական ալգորիթմի անկայունությունը պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ սխալանքների կուտակման հետևանքով ստացված q_k վեկտորները իրականում օրթոգոնալ չեն: Այդպիսի երևույթ ի հայտ է գալիս հատկապես այն դեպքում, երբ ելակետային վեկտորները համարյա գծորեն կախված են: Հաջորդաբար կառուցվող վեկտորների օրթոգոնալությունը էապես օգտագործվում է հաշվարկային բանաձևերի արտաձևման ժամանակ: Ուստի գործնականում կիրառվում է *վերափոխված* ալգորիթմը, որի իրականացման ընթացքում չի օգտագործվում արդեն կառուցված վեկտորների օրթոգոնալությունը: Այդ դեպքում q_1, q_2, \dots, q_{k-1} վեկտորների ստացման ընթացքում առաջացած սխալանքներն էապես չեն ազդում q_k վեկտորի հաշվման վրա: Ստորև բերվող ալգորիթմը դասականից տարբերվում է հաշվումների կատարման այլ հերթականությամբ:

Algorithm **Gram – Schmidt/modified**

input $m, n, (a_1, a_2, \dots, a_n)$

for $k = 2, 3, \dots, n$ **do**

$$r_{kk} = \|a_k\|$$

$$a_k = a_k / r_{kk}$$

for $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ **do**

$$r_{ik} = (a_k, a_i)$$

$$a_i = a_i - r_{ik} a_k$$

end

end

output $(r_{ik}), (q_1, q_2, \dots, q_n)$

Վերափոխված ալգորիթմի իրականացման ընթացքում նույնպես կատարվում է $\sim 2mn^2$ քվադրատական գործողություն: Նշենք նաև, որ այս տարբերակը դասականի համեմատ պահանջում է համակարգչի ավելի փոքր ծավալով օպերատիվ հիշողություն. ձևափոխված վեկտորները տեղադրվում են ելակետային վեկտորների տեղը:

Օրինակ 5.5.2 : Դիտարկենք 5.5.1 օրինակի վեկտորների համակարգը: Ինչպես և այնտեղ, վերցնենք $\varepsilon = 10^{-8}$: Վերափոխված ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում կստանանք

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.4082 \\ -0.4082 \\ 0.8165 \end{bmatrix} :$$

Ամիջական ստուգումով համոզվում ենք, որ ստացված համակարգը օրթոգոնալ է (համեմայն դեպք, հաշվարկների ճշտության շրջանակներում): \square

5.6 Մատրիցի QR վերլուծությունը

Դիցուք ունենք $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցը, որտեղ $m \geq n$ և $\text{rank}A = n$: Այսինքն՝ A մատրիցի սյուները գծորեն անկախ վեկտորներ են: Պարագրաֆի վերնագրում նշված A մատրիցի QR վերլուծությունը իրականում այդ մատրիցի սյուների նկատմամբ Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման պրոցեսի կիրառման արդյունքի մատրիցային գրառումն է:

Գրենք A մատրիցը

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

տեսքով, որտեղ a_1, a_2, \dots, a_n վեկտորները մատրիցի սյուներն են: Օրթոգոնալացման միջոցով a_1, a_2, \dots, a_n գծորեն անկախ համակարգից անցնենք q_1, q_2, \dots, q_n օրթոնորմավորված համակարգի (տես (5.5.1)-ը և (5.5.2)-ը): Ստացված (5.5.10) հավասարությունների մատրիցային գրառումը հետևյալն է.

$$\begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix} :$$

Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ ձևակերպմանը:

Թեորեմ 5.6.1 : Դիցուք $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, ընդ որում՝ $m \geq n$ և $\text{rank}A = n$: Այդ դեպքում A մատրիցը միարժեքորեն ներկայացվում է

$$A = QR \tag{5.6.1}$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ $Q \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցն ունի օրթոնորմավորված սյուներ, իսկ $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -ը դրական անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է:

Նշենք, որ (5.6.1) վերլուծության միակությունը բխում է Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման պրոցեսից:

Այնուհետև, հաշվի առնելով 3.3.1 թեորեմը, ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

Հետևանք 5.6.1 : *Ցանկացած $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ չվերասերված մատրից կարելի է միարժեքորեն ներկայացնել*

$$A = QR \quad (5.6.2)$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցն ունիտար է, իսկ $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -ը դրական անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է:

Մատրիցի QR վերլուծությունը ունի կարևոր նշանակություն ոչ միայն որպես տեսական արդյունք, այլև հաշվարկների տեսակետից: Գիտարկենք, օրինակ, չվերասերված մատրիցով

$$Ax = b$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: Եթե օգտվենք (5.6.2) վերլուծությունից և գրենք այս համակարգը

$$QRx = b$$

տեսքով, ապա հանգում ենք վերին եռանկյուն մատրիցով

$$Rx = Q^*b$$

համակարգի:

QR վերլուծության կիրառումը գրավիչ է նաև այն պատճառով, որ R և A մատրիցների պայմանավորվածության սպեկտրալ թվերը հավասար են: Գրանում հեշտ է համոզվել: Նախ հիշեցնենք, որ համաձայն (4.4.10)-ի ունիտար մատրիցի պայմանավորվածության սպեկտրալ թիվը հավասար է մեկի: Ինչպես հետևում է (5.6.2) վերլուծությունից՝

$$\kappa_2(A) = \kappa_2(QR) \leq \kappa_2(Q) \kappa_2(R) = \kappa_2(R) :$$

Մյուս կողմից՝

$$\kappa_2(R) = \kappa_2(Q^*A) \leq \kappa_2(Q^*) \kappa_2(A) = \kappa_2(A) :$$

Այսպիսով, $\kappa_2(R) = \kappa_2(A)$:

Վերջում նշենք, որ մատրիցի QR վերլուծությունը կարելի է ստանալ ոչ միայն Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակով, այլ նաև Հաուսհոլդերի և Գիվենսի ունիտար ձևափոխությունների կիրառմամբ (տե՛ս 3.3 պարագրաֆը): Ընդ որում՝ պարզվում է, որ այդ ձևափոխությունները օժտված են բացառիկ հաշվողական կայունությամբ [20, 28]:

Խնդիրներ և վարժություններ - 5

1. Ստորև տրված մատրիցներից, որոնք են բերվում անկյունագծային տեսքի.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} :$$

2. Բերել հետևյալ մատրիցները անկյունագծային տեսքի.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix} :$$

3. Չտնել այն մատրիցը, որի սեփական արժեքները հավասար են 1-ի և 4-ի, իսկ համապատասխան սեփական վեկտորները՝ $[3, 1]^T$ և $[2, 1]^T$:

4. Չտնել

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցի բոլոր սեփական արժեքներն ու սեփական վեկտորները և գրել երկու տարբեր S անկյունագծայնացնող մատրիցներ:

5. Առաջին գլխի 1.2.2 օրինակում դիտարկվում էր հետևյալ մատրիցը.

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} :$$

Կիրառելով մատրիցի բերումը անկյունագծային տեսքի՝ ապացուցել, որ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = M^\infty \equiv \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} :$$

6. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 7/5 & 1/5 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Հաշվել $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$:

7. Դիցուք $u, v \in \mathbb{R}^n$: Ապացուցել, որ $A = uv^T$ մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի այն և միայն այն դեպքում, երբ $v^T u \neq 0$:

8. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \varepsilon > 0$$

մատրիցը: Գտնել $S^{-1}AS$ նմանության ձևափոխությունը, որը բերում է այդ մատրիցը անկյունագծային տեսքի: Պարզել S մատրիցի վարքը, երբ $\varepsilon \rightarrow 0$:

9. Ունիտար (օրթոգոնալ) նմանության ձևափոխությամբ բերել անկյունագծային տեսքի հետևյալ հերմիտյան մատրիցները.

$$\begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix};$$

10. Ունիտար (օրթոգոնալ) նմանության ձևափոխությամբ բերել անկյունագծային տեսքի հետևյալ հերմիտյան մատրիցները.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

11. Յույց տալ, որ ցանկացած ունիտար մատրից ունիտարորեն նման է հետևյալ տեսքի անկյունագծային մատրիցին.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix};$$

12. Դիցուք մատրիցն ունի կոմպլեքս սեփական արժեքներ և ունիտարորեն նման է անկյունագծային մատրիցի: Ապացուցել, որ այդ մատրիցը հերմիտյան չէ:

13. Գտնել քառակուսի արմատ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

մատրիցից:

14. Պարզել, ինչն է սխալ Զելի-Համիլտոնի թեորեմի հետևյալ «ապացույցի» մեջ, երբ դատողությունները հետևյալն են: Դիցուք $P(\lambda)$ բազմանդամը $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամն է: Սեփական արժեքներն են՝ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: Այդ դեպքում $P(A)$ մատրիցն ունի $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)$ սեփական արժեքներ: Ընդ որում՝ $P(\lambda_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$: Այսպիսով, $P(A)$ մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները հավասար են զրոյի: Ուստի $P(A) = 0$:

15. Բերենք Քելի-Համիլտոնի թեորեմի ևս մեկ «ապացույց»: Ունենք A մատրիցի $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ բնութագրիչ բազմանդամը: Այնուհետև, $P(A) = \det(AI - A) = \det(A - A) = \det 0 = 0$: Գտնել սխալը:

16. Օգտվելով մատրիցի LU վերլուծությունից՝ լուծել $Ax = b$ համակարգը, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} :$$

17. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց համար հնարավոր չէ ստանալ

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

մատրիցի LU վերլուծությունը:

18. Գիցուք

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} :$$

Գտնել P տեղափոխության մատրիցը, որի համար գոյություն ունի PA մատրիցի LU վերլուծությունը:

19. Ապացուցել, որ եթե մատրիցի որևէ անկյունային միևնույն հավասար է զրոյի, ապա գոյություն չունի մատրիցի LU վերլուծություն:

20. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

երեքանկյունագծային մատրիցի Խոլեսկո վերլուծությունը:

21. Կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը հետևյալ վեկտորների նկատմամբ.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

22. Կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը հետևյալ վեկտորների նկատմամբ.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix} :$$

23. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

մատրիցի QR վերլուծությունը:

24. Կիրառելով Գրամ-Շմիդտի դասական և վերափոխված ալգորիթմները՝ ստանալ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

մատրիցի QR վերլուծությունը:

25. Դիցուք $A = QR$, որտեղ Q -ն ունիտար մատրից է: Ապացուցել, որ Ֆրոբենիուսի մատրիցային նորմի համար $\|A\|_F = \|R\|_F$:

26. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

մատրիցի QR վերլուծությունը:

27. Կիրառելով QR վերլուծությունը՝ լուծել

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

հավասարումների համակարգը:

Գլուխ 6

ՄԱՏՐԻՑԻ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՈՒՆ

Նախորդ գլխում մենք դիտարկեցինք մի քանի մատրիցային վերլուծություններ, որոնց հիման վրա մշակվել են գծային հանրահաշվի հաշվողական ալգորիթմների մի ամբողջ շարք (տե՛ս, օրինակ՝ [6, 20, 28, 29]): Ներկա գլխում մենք կշարադրենք ևս մեկ վերլուծություն, այսպես կոչված, *սինգուլյար վերլուծությունը* (Singular Value Decomposition, SVD), որն ունի մեծ տեսական և գործնական նշանակություն: Այդ վերլուծությունը լայնորեն կիրառվում է բազմաթիվ խնդիրների լուծման ժամանակ, ինչպիսիք են մոտարկումներն ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի, մեծ չափի գծային հանրահաշվական համակարգերի լուծումը, պատկերների մշակումը և այլն:

6.1 Մատրիցի սինգուլյար թվեր

Դիտարկենք կամայական $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրից: Նախքան մատրիցի սինգուլյար թիվ սահմանելը ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 6.1.1 : A^*A և AA^* մատրիցների ոչ գրոյական սեփական արժեքները հասնընկնում են, ընդ որում, հավասար սեփական արժեքներն ունեն նույն պատիկությունները:

Ապացույց: A^*A և AA^* մատրիցները քառակուսի մատրիցներ են, սակայն ունեն տարբեր կարգեր. առաջին մատրիցի կարգը հավասար է n -ի, իսկ երկրորդինը՝ m -ի: Այնուհետև, A^*A և AA^* մատրիցները հերմիտյան են և դրական կիսաորոշյալ, ուստի այդ մատրիցների սեփական արժեքները ոչ բացասական թվեր են (տե՛ս 3.2 պարագրաֆում բերված համապատասխան պնդումները):

Դիցուք $\lambda \neq 0$ թիվը A^*A մատրիցի սեփական արժեքն է: Ըստ սահմանման՝ գոյություն ունի այնպիսի $x \neq 0$ վեկտոր, որ

$$A^*Ax = \lambda x : \tag{6.1.1}$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} A(A^*Ax) &= \lambda Ax, \\ AA^*(Ax) &= \lambda(Ax) : \end{aligned}$$

Ակնհայտ է, որ $Ax \neq 0$: Դա ակնհայտորեն բխում է (6.1.1) հավասարությունից: Հետևաբար λ -ն մաս AA^* մատրիցի սեփական արժեք է:

Քանի որ A^*A և AA^* հերմիտյան մատրիցները պարզ կառուցվածքի մատրիցներ են, ապա նրանց սեփական արժեքների հանրահաշվական և երկրաչափական պատկերությունները համընկնում են (3.4.2 թեորեմը):

Դիցուք $\lambda \neq 0$ թիվը A^*A մատրիցի k պատկերությամբ սեփական արժեք է: Այլ կերպ ասած, գոյություն ունի

$$e_1, e_2, \dots, e_k \quad (6.1.2)$$

սեփական վեկտորների գծորեն անկախ համակարգ, որի համար

$$A^*Ae_i = \lambda e_i, \quad i = 1, 2, \dots, k:$$

Ինչպես հետևում է նախորդ դատողություններից,

$$Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_k \quad (6.1.3)$$

վեկտորները AA^* մատրիցի սեփական վեկտորներն են, ընդ որում՝

$$AA^*(Ae_i) = \lambda(Ae_i), \quad i = 1, 2, \dots, k:$$

Ցույց տանք, որ (6.1.3) վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ է: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ թվեր, որտեղ $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 \neq 0$, որ

$$\alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + \dots + \alpha_k Ae_k = 0:$$

Այստեղից հաջորդաբար ստանում ենք.

$$\begin{aligned} A^*(\alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + \dots + \alpha_k Ae_k) &= 0, \\ \alpha_1 A^*Ae_1 + \alpha_2 A^*Ae_2 + \dots + \alpha_k A^*Ae_k &= 0, \\ \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k) &= 0: \end{aligned}$$

Քանի որ $\lambda \neq 0$, ապա $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k = 0$, իսկ դա հակասում է այն ենթադրությանը, որ (6.1.2) համակարգը գծորեն անկախ է: Փաստորեն մենք ապացուցեցինք, որ

$$g_{AA^*}(\lambda) \geq k = g_{A^*A}(\lambda):$$

Համանման դատողություններով կարելի է ստանալ մաս հակառակ անհավասարությունը.

$$g_{A^*A}(\lambda) \geq g_{AA^*}(\lambda):$$

Այսպիսով, $g_{A^*A}(\lambda) = g_{AA^*}(\lambda)$ և դրանով իսկ $a_{A^*A}(\lambda) = a_{AA^*}(\lambda)$: \square

Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ եթե $m \neq n$, ապա $\lambda = 0$ թիվը A^*A և AA^* մատրիցների համար տարբեր պատկերության սեփական արժեք է (ներառյալ այն

դեպքը, երբ մի մատրիցի համար նա սեփական արժեք է, իսկ մյուսի համար՝ ոչ): Իրոք, (2.4.2) հավասարության համաձայն՝

$$\begin{aligned} a_{A^*A}(0) &= g_{A^*A}(0) = n - \text{rank} A^*A, \\ a_{AA^*}(0) &= g_{AA^*}(0) = m - \text{rank} AA^*, \end{aligned}$$

իսկ քանի որ $\text{rank} A^*A = \text{rank} AA^* = r$, որտեղ $r \equiv \text{rank} A$ (տե՛ս (2.1.12)), ապա

$$a_{A^*A}(0) = n - r, \quad a_{AA^*}(0) = m - r :$$

Հետևանք 6.1.1 : *Եթե $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, ապա A^*A և AA^* մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են, ընդ որում, հավասար սեփական արժեքներն ունեն նույն սլատիկությունները:*

Կարգավորենք A^*A և AA^* մատրիցների սեփական արժեքները հետևյալ կերպ.

$$A^*A: \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0, \quad (6.1.4)$$

$$AA^*: \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_m = 0: \quad (6.1.5)$$

Նախնական դատողությունների հիման վրա տանք հետևյալ սահմանումը:

$A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի սինգուլյար թվեր կոչվում են A^*A և AA^* մատրիցների ընդհանուր ոչ զրոյական սեփական արժեքների թվաքանական արմատները:

Այսպիսով, A մատրիցի սինգուլյար թվերը

$$\sigma_i(A) \equiv \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6.1.6)$$

մեծություններն են:

Համաձայն (6.1.4) և (6.1.5) կարգավորումների՝ ունենք.

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_r(A) > 0: \quad (6.1.7)$$

Թվարկենք սինգուլյար թվերի որոշ կարևոր հատկություններ, որոնց ապացուցումը մենք թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

- ◇ A և A^* մատրիցների սինգուլյար թվերը համընկնում են:
- ◇ Եթե A մատրիցը հերմիտյան է, ապա $\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$, $i = 1, 2, \dots, r$:
- ◇ Գրական կհաստորոշյալ մատրիցների համար $\sigma_i(A) = \lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, r$:
- ◇ Մատրիցը աջից կամ ձախից ունիտար մատրիցով բազմապատկման ժամանակ նրա սինգուլյար թվերը չեն փոխվում:

Պարագրաֆի վերջում անենք մեկ լրացում: $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ քառակուսի մատրիցների համար վերը տրված սինգուլյար թվերի սահմանումը կարելի է փոքր-ինչ «ընդլայնել»՝ ներմուծելով նաև զրոյական սինգուլյար թվեր՝ $\sigma_{r+1}(A) = \dots = \sigma_n(A) = 0$:

Դիշտ է հետևյալ հեշտ ապացուցվող պնդումը:

- ◇ Եթե $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, ապա $|\det A| = \sigma_1(A) \dots \sigma_r(A) \sigma_{r+1}(A) \dots \sigma_n(A)$:

6.2 Սինգուլյար վերլուծությունը

Ապացուցենք մատրիցների տեսության հիմնարար արդյունքներից մեկը:

Թեորեմ 6.2.1 : Յանկսցած $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի համար, որի ռանգը հավասար է r -ի, գոյություն ունեն այնպիսի $U \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $V \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ունիտար մատրիցներ, որ

$$A = U\Lambda V^*, \quad (6.2.1)$$

ընդ որում՝ Λ մատրիցն ունի

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_r & \\ \hline & & & & 0 \\ & & 0 & & 0 \end{array} \right] \quad (6.2.2)$$

վանդակային տեսք, որտեղ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ տարրերը A մատրիցի սինգուլյար քվերն են:

Ապացույց: Վերադառնալով 5.1 պարագրաֆին՝ օգտվենք այն հայտնի փաստից, որ $AA^* \in \mathbf{C}^{m \times m}$ հերմիտյան մատրիցի համար գոյություն ունի $U \in \mathbf{C}^{m \times m}$ ունիտար մատրից, որը այդ մատրիցը բերում է անկյունագծային տեսքի (տես (5.1.4) ձևափոխությունը): Ավելի ստույգ՝

$$U^*(AA^*)U \equiv D = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0] : \quad (6.2.3)$$

Առանց ընդհանրության կորստի կարող ենք համարել, որ AA^* մատրիցի սեփական արժեքները դասավորված են նվազման կարգով.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 :$$

Հիշեցնենք, որ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \dots, r$: Գրենք (6.2.3) հավասարությունը

$$(A^*U)^*(A^*U) = D \quad (6.2.4)$$

տեսքով: Ներմուծենք

$$F \equiv A^*U \in \mathbf{C}^{m \times m} \quad (6.2.5)$$

մատրիցը: Այդ դեպքում (6.2.4)-ից կստանանք

$$F^*F = D \quad (6.2.6)$$

հավասարությունը: Այնուհետև ներկայացնենք F^* և F մատրիցները

$$F^* = \begin{bmatrix} - & f_1^* & - \\ - & f_2^* & - \\ & \vdots & \\ - & f_m^* & - \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ f_1, f_2, \dots, f_m վեկտորները F մատրիցի սյուներն են: Օգտվելով վանդակային մատրիցների բազմապատկման կանոնից՝ գտնենք F^*F մատրիցի տարրերը.

$$F^*F = [f_i^* f_j]_{m \times m} :$$

Քանի որ D մատրիցը անկյունագծային է, ապա (6.2.6) հավասարությունից հետևում է, որ $f_i^* f_j = 0$, եթե $i \neq j$: Այսինքն՝ F մատրիցի սյուները օրթոգոնալ են: Իսկ եթե $i = j$, ապա

$$f_i^* f_i = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{6.2.7}$$

և

$$f_i^* f_i = 0, \quad i = r + 1, r + 2, \dots, m :$$

Վերջին հատկությունը նշանակում է, որ F մատրիցի $f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_m$ սյուները զրոյական են: Այսպիսով, մենք կարող ենք հստակեցնել F մատրիցի կառուցվածքը.

$$F = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_r & 0 & \dots & 0 \\ | & | & & | & | & & | \end{array} \right] : \tag{6.2.8}$$

Սահմանենք

$$v_i \equiv \frac{1}{\sigma_i} f_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{6.2.9}$$

վեկտորները, որտեղ σ_i -ն A մատրիցի i -րդ սինգուլյար թիվն է՝ ըստ ընդունված կարգավորման: Այդ վեկտորները կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ: Իրոք, ինչպես հետևում է (6.2.7)-ից,

$$v_i^* v_i = \frac{1}{\sigma_i^2} f_i^* f_i = \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} = 1 :$$

Այժմ, ներմուծելով $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n \in \mathbf{C}^n$ վեկտորները, լրացնենք v_1, v_2, \dots, v_r համակարգը մինչև լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ \mathbf{C}^n տարածությունում: Կազմենք

$$V = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_r & v_{r+1} & \dots & v_n \\ | & | & & | & | & & | \end{array} \right] \tag{6.2.10}$$

ունիտար մատրից: Եթե գրենք (6.2.9) հարաբերակցությունները

$$f_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

տեսքով, ապա կհանգենք

$$F = V \Lambda^* \tag{6.2.11}$$

հավասարությանը: Այն հեշտությամբ բխում է նշված մատրիցների (6.2.2), (6.2.8) և (6.2.10) վանդակային ներկայացումների համադրումից: Ապացուցման եզրափակիչ

փուլը հետևյալն է: Ունենալով (6.2.5)-ը և (6.2.11)-ը՝ հաջորդաբար ստանում ենք.

$$\begin{aligned} A^*U &= V\Lambda^*, \\ U^*A &= \Lambda V^*, \\ A &= U\Lambda V^* : \end{aligned}$$

Արդյունքում մենք ապացուցեցինք (6.2.1) վերլուծության գոյությունը: \square

Գրենք U և V մատրիցների վանդակային ներկայացումները՝ դիտարկելով որպես վանդակներ այդ մատրիցների սյուները.

$$U = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} | & & | & | & & | \\ u_1 & \dots & u_r & u_{r+1} & \dots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{array} \right], \quad V = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} | & & | & | & & | \\ v_1 & \dots & v_r & v_{r+1} & \dots & v_n \\ | & & | & | & & | \end{array} \right] : \quad (6.2.12)$$

Նշենք, որ U և V մատրիցների սյուները օրթոնորմավորված բազիսներ են \mathbf{C}^m և \mathbf{C}^n տարածություններում: Ավելին, U և V մատրիցների սյուները անվանում են A մատրիցի համապատասխանաբար *ձախ* և *աջ սինգուլյար վեկտորներ*: Պարզաբանենք, թե ինչ իմաստով այն պետք է հասկանալ:

Ելնելով (6.2.1) սինգուլյար վերլուծությունից՝ գրենք $AV = U\Lambda$ հավասարությունը: Ըստ վանդակային մատրիցների բազմապատկման կանոնի՝

$$AV = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} | & & | & | & & | \\ Av_1 & \dots & Av_r & Av_{r+1} & \dots & Av_n \\ | & & | & | & & | \end{array} \right], \quad U\Lambda = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} | & & | & | & & | \\ \sigma_1 u_1 & \dots & \sigma_r u_r & 0 & \dots & 0 \\ | & & | & | & & | \end{array} \right] :$$

Կստանանք, որ

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i, & \text{եթե } 1 \leq i \leq r, \\ 0, & \text{եթե } i > r: \end{cases} \quad (6.2.13)$$

Համանմանորեն, (6.2.1)-ից գրենք $A^*U = V\Lambda^*$ հավասարությունը: A^*U և $V\Lambda^*$ մատրիցներն ունեն հետևյալ վանդակային տեսքը.

$$A^*U = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} | & & | & | & & | \\ A^*u_1 & \dots & A^*u_r & A^*u_{r+1} & \dots & A^*u_m \\ | & & | & | & & | \end{array} \right], \quad V\Lambda^* = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} | & & | & | & & | \\ \sigma_1 v_1 & \dots & \sigma_r v_r & 0 & \dots & 0 \\ | & & | & | & & | \end{array} \right] :$$

Այդ դեպքում

$$A^*u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i, & \text{եթե } 1 \leq i \leq r, \\ 0, & \text{եթե } i > r: \end{cases} \quad (6.2.14)$$

Ստորև բերված պնդումները ներկայացնում են որոշակի հետաքրքրություն A և A^* մատրիցների միջուկների և պատկերների կառուցվածքի տեսակետից:

Թեորեմ 6.2.2 : *Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\ker A = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\} : \quad (6.2.15)$$

Ապացույց: Դիցուք $x \in \ker A$, այսինքն՝ $Ax = 0$: Վերլուծենք $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորն ըստ օրթոնորմավորված բազիսի վեկտորների.

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i :$$

Օգտվելով վերը ստացված (6.2.13) հավասարություններից՝ ունենք

$$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i Av_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_i u_i = 0 :$$

Իսկ քանի որ u_1, u_2, \dots, u_r վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա բոլոր $i = 1, 2, \dots, r$ արժեքների համար $\alpha_i = 0$: Այսպիսով,

$$x = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i :$$

Հակառակը, եթե $x \in \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$, այսինքն՝

$$x = \sum_{i=r+1}^n \beta_i v_i,$$

ապա

$$Ax = \sum_{i=r+1}^n \beta_i Av_i = 0 : \quad \square$$

Թեորեմ 6.2.3 : *Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\text{im} A^* = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\} : \tag{6.2.16}$$

Ապացույց: Դիցուք $x \in \text{im} A^*$, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $y \in \mathbb{C}^m$ վեկտոր, որ $x = A^*y$: Վերլուծենք y վեկտորն ըստ օրթոնորմավորված բազիսի վեկտորների.

$$y = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i :$$

Հաշվի առնելով (6.2.14) հավասարությունները՝ կստանանք

$$x = A^*y = \sum_{i=1}^m \alpha_i A^*u_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_i v_i :$$

Հակառակը, դիցուք $x \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, այսինքն՝

$$x = \sum_{i=1}^r \beta_i v_i :$$

Կրկին օգտվենք (6.2.14) հավասարություններից.

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\sigma_i} \sigma_i v_i = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\sigma_i} A^* u_i = A^* \left(\sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\sigma_i} u_i \right):$$

Այսպիսով, $x = A^* z$, որտեղ $z \equiv \sum_{i=1}^r (\beta_i / \sigma_i) u_i \in \mathbf{C}^m$: \square

Համանման դատողություններով դժվար չէ ապացուցել հաջորդ երկու պնդումները:

Թեորեմ 6.2.4 : *Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\ker A^* = \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_m\}: \quad (6.2.17)$$

Թեորեմ 6.2.5 : *Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\text{im} A = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}: \quad (6.2.18)$$

Գիտողություն 6.2.1 : Եթե A մատրիցն իրական է, ապա գոյություն ունեն այնպիսի $U \in \mathbf{R}^{m \times m}$ և $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ *օրթոգոնալ մատրիցներ*, որ

$$A = U \Lambda V^T, \quad (6.2.19)$$

որտեղ Λ մատրիցն ունի (6.2.2) վանդակային տեսքը: \square

Այժմ լուծենք խնդիր, որում մեկ անգամ ևս կցուցադրենք մատրիցների հետ վանդակային գործողությունների կիրառման արդյունավետությունը:

Պահանջվում է գտնել

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbf{C}^{n \times n} \quad (6.2.20)$$

մատրիցի սեփական արժեքները: Օգտվենք $A = U \Lambda V^*$ սինգուլյար վերլուծությունից, որտեղ

$$\Lambda = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0]:$$

Այդ դեպքում

$$M = \begin{bmatrix} 0 & U \Lambda V^* \\ V \Lambda U^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V^* \\ U^* & 0 \end{bmatrix}:$$

Այնուհետև,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V^* \\ U^* & 0 \end{bmatrix}:$$

Նշանակենք՝

$$T \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} U & U \\ V & -V \end{bmatrix},$$

$$S \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V^* \\ U^* & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} U^* & V^* \\ U^* & -V^* \end{bmatrix} :$$

Այսպիսով,

$$M = T \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} S :$$

Գծվար չէ համոզվել, որ $T = S^{-1}$: Արդյունքում կատանանք, որ

$$M = S^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} S :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\lambda_i(M) = \pm \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, r :$$

Մնացած սեփական արժեքները հավասար են զրոյի:

Սույն գլխի հաջորդող բաժիններում մենք կդիտարկենք սինգուլյար թվերի որոշ կարևոր կիրառություններ:

6.3 Սինգուլյար թվերի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Մենք կսահմանափակվենք իրական դեպքի դիտարկմամբ: Ավելին, կենթադրենք, որ $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ և $\det A \neq 0$: Վերը ընդունված A մատրիցի սինգուլյար թվերի դասավորման կարգի համաձայն ունենք.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0 : \tag{6.3.1}$$

Ներմուծելով \mathbf{R}^n տարածության մեջ $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$ նորմը՝ դիտարկենք

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$$

միավոր սֆերան: Գնենք հետևյալ հարցը. *ինչ է կատարվում միավոր սֆերայի հետ A ձևափոխությանը, այսինքն՝ ինչ է իրենից ներկայացնում սֆերայի $A(S)$ պատկերը:*

Մատրիցի (6.2.19) սինգուլյար վերլուծությունից գտնում ենք $A^{-1} = V\Lambda^{-1}U^T$, որտեղ

$$\Lambda^{-1} = \text{diag}[\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}] :$$

Գիցուք $y \in A(S)$, այսինքն՝ $y = Ax$, որտեղ $x \in S$: Օգտվենք այն փաստից, որ օրթոգոնալ ձևափոխությունը պահպանում է վեկտորի նորմը (տե՛ս 4-րդ գլխի 6-րդ վարժությունը): Այդ դեպքում

$$1 = \|x\|^2 = \|A^{-1}y\|^2 = \|V\Lambda^{-1}U^T y\|^2 = \|\Lambda^{-1}U^T y\|^2 :$$

Նշանակելով $w \equiv U^T y$ հանգում ենք $\|\Lambda^{-1}w\|^2 = 1$ հավասարությանը: Եթե w_1, w_2, \dots, w_n թվերը w վեկտորի բաղադրիչներն են, ապա

$$\Lambda^{-1}w = [w_1/\sigma_1, w_2/\sigma_2, \dots, w_n/\sigma_n]^T :$$

Գրենք այս վեկտորի նորմի քառակուսին.

$$\|\Lambda^{-1}w\|^2 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2} : \quad (6.3.2)$$

Այսպիսով, ունենք ձևափոխությունների հետևյալ հաջորդականությունը.

$$x \in S \longrightarrow y = Ax \in A(S) \longrightarrow w = U^T y \in U^T(A(S)) :$$

Ինչպես երևում է (6.3.2) արտահայտությունից, n -չափանի տարածությունում $U^T(A(S))$ բազմությունը (6.3.1) կիսառանցքներով էլիպսոիդ է.

$$\frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2} = 1 :$$

Քանի որ U մատրիցը օրթոգոնալ է, իսկ օրթոգոնալ ձևափոխությունը, ինչպես արդեն ասվել էր վերը, պահպանում է վեկտորի նորմը, ապա $U^T(A(S))$ բազմությունը ըստ էության n -չափանի տարածության մեջ $A(S)$ բազմության *սյտտման* արդյունք է: Այդ պտույտը ուղղորդում է էլիպսոիդի առանցքները ըստ ստանդարտ օրթային բազիսի:

Այսպիսով $A(S)$ բազմությունը երկրաչափորեն $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ կիսառանցքներով էլիպսոիդ է: Կատարվում է S միավոր սֆերայի աղավաղում: Որպես աղավաղման չափ կարող է դիտարկվել էլիպսոիդի մեծագույն և փոքրագույն կիսառանցքների հարաբերակցությունը, այսինքն՝

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (6.3.3)$$

մեծությունը:

Պարզվում է, որ ներմուծված աղավաղման չափն անմիջական կապ ունի A մատրիցի պայմանավորվածության սպեկտրալ թվի հետ: Իրոք, վերը ստացված (4.2.13) ներկայացման համաձայն, մատրիցի l_2 նորմի համար ունենք

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sigma_1 : \quad (6.3.4)$$

Հակադարձ մատրիցի նորմը գտնվում է հետևյալ կերպ.

$$\|A^{-1}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{-1*}A^{-1})} = \sqrt{\lambda_{\max}((AA^*)^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(AA^*)}} = \frac{1}{\sigma_n} : \quad (6.3.5)$$

Արդյունքում ստանում ենք

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (6.3.6)$$

արտահայտությունը A մատրիցի պայմանավորվածության սպեկտրալ թվի համար: Բաղդատելով (6.3.3) և (6.3.6) արտահայտությունները՝ հանգում ենք այն եզրակացությանը, որ միավոր սֆերայի աղավաղման չափը ոչ այլ ինչ է, քան մատրիցի պայմանավորվածության սպեկտրալ թիվը: Իսկ մատրիցի պայմանավորվածության թվի դերը գծային հանրահաշվական համակարգերը լուծելիս բավականին մանրամասն քննարկվել է 4.4 պարագրաֆում:

6.4 Ցածր ռանգի մատրիցներից հեռավորությունները

Դիցուք $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ և $r \equiv \text{rank} A$, ընդ որում՝ $r \geq 1$: Ինչպես և վերը, ենթադրենք, որ A մատրիցի սինգուլյար թվերը դասավորված են նվազման կարգով, այսինքն՝

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 :$$

Ներմուծենք \mathbb{C}^n տարածության մեջ $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$ վեկտորական նորմը և, համապատասխանաբար, այդ նորմին ստորադրված (4.2.13) մատրիցային նորմը (այդ նորմը մենք նույնպես կգրենք առանց ստորին ինդեքսի):

Թեորեմ 6.4.1 : *Բոլոր $k = 1, 2, \dots, r$ արժեքների համար ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.*

$$\sigma_k = \min_{\text{rank} B = k-1} \|A - B\| : \tag{6.4.1}$$

Ապացույց: Դիտարկենք A մատրիցի

$$A = U \Lambda V^* \tag{6.4.2}$$

սինգուլյար վերլուծությունը: Մեր դեպքում Λ -ն անկյունագծային մատրից է: Գրենք այն

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{1,r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4.3}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ $\Lambda_{1,r} \equiv \text{diag} [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r]$:

Կատարենք $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցի վանդակային տրոհում, ներկայացնելով այն

$$V = \begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix}$$

տեսքով, որտեղ $F \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $G \in \mathbb{C}^{n \times n-k}$: Ըստ վանդակային մատրիցների բազմապատկման կանոնի գտնում ենք

$$V^* V = \begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^* F & F^* G \\ G^* F & G^* G \end{bmatrix} :$$

Մյուս կողմից, քանի որ V մատրիցն ունիտար է, ապա $V^* V = I_n$ (թեորեմն ապացուցելիս դիտարկվելու են տարբեր կարգերի միավոր մատրիցներ, ուստի մենք հատուկ կնշենք այդ մատրիցների կարգը): Այսպիսով՝

$$F^* F = I_k, \quad F^* G = G^* F = 0, \quad G^* G = I_{n-k} : \tag{6.4.4}$$

Վերցնենք կամայական $k - 1$ ռանգի $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրից: Կազմենք $BF \in \mathbf{C}^{n \times k}$ մատրիցը: Քանի որ $\text{rank}(BF) \leq \text{rank} B = k - 1$, ապա համաձայն (2.1.4) առնչության

$$\dim(\ker(BF)) = k - \text{rank}(BF) \geq 1 :$$

Ուստի գոյություն ունի $x \in \mathbf{C}^k$ ոչ զրոյական վեկտոր, որի համար

$$BFx = 0 : \quad (6.4.5)$$

Առանց ընդհանրության սահմանափակման կարող ենք համարել, որ $\|x\| = 1$:

Այժմ դիտարկենք $AF \in \mathbf{C}^{m \times k}$ մատրիցը: Գրենք

$$AFx = U\Lambda V^*Fx$$

հավասարությունը: Հաշվի առնելով (6.4.4) հավասարությունները գտնում ենք՝

$$V^*Fx = \begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix} Fx = \begin{bmatrix} F^*F \\ G^*F \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} :$$

Արդյունքում հանգում ենք հետևյալ հավասարությանը.

$$AFx = U\Lambda \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : \quad (6.4.6)$$

Գիցուք $\Lambda_{1,k} \equiv \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k]$ և $\Lambda_{k+1,r} \equiv \text{diag}[\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_r]$: Կատարելով համապատասխան վանդակային տրոհումներ (6.4.6) հավասարությունից՝ կստանանք

$$AFx = U \begin{bmatrix} \Lambda_{1,k} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{k+1,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Uz, \quad (6.4.7)$$

որտեղ

$$z \equiv \begin{bmatrix} \Lambda_{1,k}x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

Ըստ մատրիցային նորմի սահմանման

$$\|A - B\| \equiv \max_{\|y\|=1} \|(A - B)y\| :$$

Քանի որ

$$\|Fx\| = \sqrt{(Fx, Fx)} = \sqrt{(F^*Fx, x)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\| = 1,$$

ապա, հաշվի առնելով (6.4.5) հավասարությունը, կստանանք

$$\|A - B\| \geq \|(A - B)Fx\| = \|AFx - BFx\| = \|AFx\|$$

անհավասարությունը: Ելնելով (6.4.7) հավասարությունից՝ գտնում ենք, որ

$$\|AFx\| = \|Uz\| = \|z\| = \|\Lambda_{1,k}x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 |x_i|^2} \geq \sigma_k \|x\| = \sigma_k$$

(x_1, x_2, \dots, x_k թվերը x վեկտորի բաղադրիչներն են): Այսպիսով, ցանկացած $k - 1$ ռանգի $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցի համար

$$\|A - B\| \geq \sigma_k : \tag{6.4.8}$$

Մնում է ցույց տալ, որ գոյություն ունի այնպիսի մատրից, որի համար (6.4.8) անհավասարությունը վերածվում է հավասարության:

Սահմանենք՝

$$\tilde{B} = U \begin{bmatrix} \Lambda_{1,k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \tag{6.4.9}$$

մատրիցը, որտեղ $\Lambda_{1,k-1} \equiv \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}]$: Պարզ է, որ այդ մատրիցի ռանգը հավասար է $k - 1$ -ի: Ինչպես հետևում է (6.4.2)-ից, (6.4.3)-ից և (6.4.9)-ից,

$$A - \tilde{B} = UTV^*,$$

որտեղ

$$T \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{k,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4.10}$$

և $\Lambda_{k,r} \equiv \text{diag}[\sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r]$: Ունենք

$$\|A - \tilde{B}\| \equiv \max_{\|y\|=1} \|(A - \tilde{B})y\| = \max_{\|y\|=1} \|UTV^*y\| = \max_{\|y\|=1} \|TV^*y\|$$

հավասարությունը: Նշանակենք $u \equiv V^*y$: Քանի որ $\|u\| = \|V^*y\| = \|y\| = 1$, ապա

$$\|A - \tilde{B}\| = \max_{\|u\|=1} \|Tu\| : \tag{6.4.11}$$

Այնուհետև T մատրիցի (6.4.10) վանդակային տեսքից գտնում ենք՝

$$Tu = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{u} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{որտեղ} \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} \sigma_k u_k \\ \vdots \\ \sigma_r u_r \end{bmatrix}$$

(u_k, u_{k+1}, \dots, u_r թվերը u վեկտորի բաղադրիչներն են): Գնահատենք նորով.

$$\|Tu\| = \|\tilde{u}\| = \sqrt{\sum_{i=k}^r \sigma_i^2 |u_i|^2} \leq \sigma_k \|\tilde{u}\| \leq \sigma_k \|u\| = \sigma_k :$$

Արդյունքում (6.4.11)-ից կստանանք $\|A - \tilde{B}\| \leq \sigma_k$ անհավասարությունը: Իսկ քանի որ մենք արդեն ունենք (6.4.8) անհավասարությունը, ապա հանգում ենք այն եզրակացությանը, որ $\|A - \tilde{B}\| = \sigma_k$: \square

Ըստ (6.4.1) առնչության՝ A մատրիցի σ_k սինգուլյար թիվը կարելի է մեկնաբանել որպես այդ մատրիցի *հեռավորություն* $k - 1$ ռանգի մատրիցների բազմությունից: Մասնավորապես՝

$$\sigma_1 = \min_{\text{rank} B=0} \|A - B\| = \|A - \mathbf{0}\| = \|A\|, \quad (6.4.12)$$

ինչը համաձայնեցվում է վերը բացահայտված (6.3.4) փաստի հետ:

Գիցուք $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը չվերասերված է, այսինքն՝ $r = n$: Այդ դեպքում

$$\sigma_n = \min_{\text{rank} B=n-1} \|A - B\| \quad (6.4.13)$$

սինգուլյար թիվը A մատրիցի *հեռավորություն* է n -րդ կարգի չվերասերված մատրիցների բազմությունից: Եթե A_s մատրիցը A մատրիցին ամենամոտ չվերասերված մատրիցն է

$$\|A - A_s\| = \min_{\text{rank} B=n-1} \|A - B\|$$

իմաստով, ապա

$$\|A - A_s\| = \sigma_n : \quad (6.4.14)$$

Կարելի է գնահատել նաև *հարաբերական հեռավորությունը*: Իրոք, (6.4.12)-ից և (6.4.14)-ից գտնում ենք, որ

$$\frac{\|A - A_s\|}{\|A\|} = \frac{\sigma_n}{\sigma_1} = \frac{1}{\kappa(A)},$$

որտեղ $\kappa(A)$ -ն (6.3.6)-ում ստացված պայմանավորվածության սպեկտրալ թիվն է:

6.5 Մատրիցի թվային ռանգի որոշումը

Մատրիցի սինգուլյար վերլուծության օգնությամբ կարելի է որոշել նրա ռանգը այն վերապահումով, որ նախնական տվյալների ներածումը և բոլոր հաջորդող թվաբանական գործողությունները կատարված են ճշգրիտ, առանց կտրացումների: Ցավոք, գործնականում դա հնարավոր չէ իրականացնել: Օրինակ՝ դիտարկենք

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 \\ 3/5 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad (6.5.1)$$

մատրիցը: Ակնհայտ է, որ նրա ռանգը հավասար է երկուսի (երրորդ սյունը առաջին երկու սյուների գումարն է): Եթե մենք չնկատենք այդ կախվածությունը և փորձենք

ստանալ հարցի պատասխանը սինգուլյար վերլուծության միջոցով, ապա նախ պետք է ներածենք մատրիցի տարրերը համակարգչի հիշողության մեջ: Պարզ է, որ այդ գործողությունը կուղեկցվի անխուսափելի կլորացման սխալանքներով, իսկ դա կբերի սյունների միջև նշված կախվածության խախտման: MATLAB-ի օգնությամբ հաշվված խոտորված մատրիցի սինգուլյար թվերը հետևյալն են.

$$\sigma_1 = 2.5987, \quad \sigma_2 = 0.3682, \quad \sigma_3 = 8.6614 \cdot 10^{-17} :$$

Այդ թվերը հավասար չեն զրոյի, ուստի ձևականորեն մատրիցի ռանգը հավասար է երեքի: Սակայն վերջին սինգուլյար թիվը իրականում շատ փոքր է: Գուցե այդ թիվը պետք է համարել հավասար զրոյի:

Վերը ասվածի կապակցությամբ սահմանենք մատրիցի *թվային ռանգի* գաղափարը: Որոշակի նկատառումներից ելնելով՝ սահմանենք ինչ-որ *շեմային* մեծություն ε : Կասենք, որ A մատրիցն ունի r *թվային ռանգ*, եթե

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \gg \varepsilon \geq \sigma_{r+1} \geq \dots$$

MATLAB համակարգում առկա է `rank` հրամանը, որը որոշում է մատրիցի *թվային ռանգը*: Կիրառված (6.5.1) մատրիցի նկատմամբ այդ հրամանը տալիս է 2: Նշված `rank` հրամանը առաջնորդվում է համակարգում ֆիքսված *շեմային* արժեքով, որը սակայն կարող է փոխվել օգտագործողի կողմից:

Որոշել *թվային ռանգի* ճշգրիտ արժեքը հնարավոր է ոչ միշտ: Օրինակ՝ դիցուք ինչ-որ 2000×1000 չափի մատրից ունի հետևյալ սինգուլյար թվերը.

$$\sigma_i \approx 0.9^i, \quad i = 1, 2, \dots, 1000 :$$

Այդ դեպքում $\sigma_1 \approx 0.9$ և $\sigma_{1000} \approx 1.75 \cdot 10^{-46}$: Թվային ռանգը ակներևաբար փոքր է 1000-ից: Սակայն այն հնարավոր չէ որոշել ճշգրիտ, քանի որ չկա քիչ թե շատ շոշափելի արանք հարևան սինգուլյար թվերի միջև: Նշենք նրանցից մի քանիսը.

$$\sigma_{261} \approx 1.14 \cdot 10^{-12}, \quad \sigma_{262} \approx 1.03 \cdot 10^{-12}, \quad \sigma_{263} \approx 9.24 \cdot 10^{-13}, \quad \sigma_{264} \approx 8.31 \cdot 10^{-13} :$$

Այսպիսով, մատրիցի *թվային ռանգը* որոշելիս կարող են առաջանալ տարբեր բնույթի դժվարություններ: Թվային ռանգի հետ կապված հարցերի ավելի լայն քննարկումը կարելի է գտնել, օրինակ, [20, 28] գրքերում:

6.6 Մատրիցի վերլուծումն ըստ «օրթոգոնալ ուղղությունների»

Հիմք ընդունելով $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի

$$A = U \Lambda V^*$$

սինգուլյար վերլուծությունը՝ այդ մատրիցը կարելի է ներկայացնել որոշակի կառուցվածքի մատրիցների վերջավոր գումարի տեսքով:

Անդրադառնանք $U \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $V \in \mathbf{C}^{m \times n}$ ունիտար մատրիցների (6.2.12) վանդակային տեսքերին՝ որպես վանդակներ դիտարկելով այդ մատրիցների սյուները: Բազմապատկելով U և Λ մատրիցները՝ կատանանք

$$U\Lambda = \left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} & & & & & & & \\ \sigma_1 u_1 & \dots & \sigma_r u_r & 0 & \dots & 0 & & \\ & & & & & & & \end{array} \right] :$$

Այնուհետև գտնում ենք՝

$$A = U\Lambda V^* = \left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} & & & & & & & \\ \sigma_1 u_1 & \dots & \sigma_r u_r & 0 & \dots & 0 & & \\ & & & & & & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} - & v_1^* & - \\ - & \vdots & - \\ - & v_n^* & - \end{array} \right] = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^* :$$

Այսպիսով,

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^* : \quad (6.6.1)$$

Սահմանենք

$$Z_i \equiv u_i v_i^* \in \mathbf{C}^{m \times n}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6.6.2)$$

մատրիցները: Արդյունքում հանգում ենք հետևյալ վերլուծությանը.

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i Z_i : \quad (6.6.3)$$

Ներմուծենք մատրիցների $\mathbf{C}^{m \times n}$ տարածության մեջ

$$\langle A, B \rangle \equiv \text{tr}(B^* A) \quad (6.6.4)$$

սկալյար արտադրյալը: Ֆույց տանք, որ (6.6.2) մատրիցները կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ (6.6.4) սկալյար արտադրյալի իմաստով: Իրոք,

$$\langle Z_i, Z_j \rangle = \text{tr}(v_j u_j^* u_i v_i^*) :$$

Եթե $i \neq j$, ապա $u_j^* u_i = 0$ և, հետևաբար, $\langle Z_i, Z_j \rangle = 0$: Իսկ եթե $i = j$, ապա $u_i^* u_i = 1$: Այդ դեպքում

$$\langle Z_i, Z_i \rangle = \text{tr}(v_i v_i^*) = \text{tr}(v_i^* v_i) = 1 :$$

Այսպիսով, ստացել ենք A մատրիցի (6.6.3) վերլուծությունն ըստ Z_i , $i = 1, 2, \dots, r$ «օրթոգոնալ ուղղությունների»: Ընդ որում, ինչպես հեշտ է նկատել,

$$\sigma_i = \langle A, Z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, r : \quad (6.6.5)$$

Բերենք ևս մեկ առնչություն, որը լիովին համաձայնեցվում է վերը ստացված (6.4.1) հավասարության հետ: Օգտագործելով (6.6.3) վերլուծությունը՝ սահմանենք

$$A_{k-1} \equiv \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6.6.6)$$

մատրիցները: Պարզվում է, որ

$$\sigma_k = \|A - A_{k-1}\|, \quad k = 1, 2, \dots, r: \tag{6.6.7}$$

Այս առնչությունը փաստորեն արդեն բացահայտված է 6.4.1 թեորեմի ապացուցման վերջնամասում (տե՛ս (6.4.9)-ում սահմանված \tilde{B} մատրիցը, որն ըստ էության մեր A_{k-1} մատրիցն է):

Նշենք, որ (6.6.3) վերլուծությունը օգտագործվում է տարբեր կիրառություններում, մասնավորապես, ազդանշանների թվային մշակման ալգորիթմներում: Խոսքը, այսպես կոչված, *աղմուկների ֆիլտրման խնդրի* մասին է:

Գիցուք A մատրիցը պարունակում է տվյալներ, որոնցում, բացի օգտակար ինֆորմացիայից, առկա են նաև որոշ սխալանքներ և խոտորումներ: Ընդունված է դրանք անվանել *աղմուկներ*: Հաճախ տվյալների այդպիսի աղմուկային աղտոտվածությունը պատահական է: Ուստի, A մատրիցի (6.6.3) վերլուծության մեջ մենք կարող ենք համարել, որ այդ աղմուկները բաշխված են հավասարաչափ՝ ըստ բոլոր Z_i , $i = 1, 2, \dots, r$ «ուղղությունների»: Մատրիցում առկա աղմուկների ընդհանուր ծավալը պայմանականորեն նշանակենք N -ով: Այդ դեպքում միջին հաշվով ամեն մի «ուղղության» վրա ընկնում է ընդհանուր ծավալի $\approx N/r$ -րդ մասը: Եթե $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$ սինգուլյար թվերը փոքր են մնացածների համեմատ, ապա մենք կարող ենք «հատել» դրանք (6.6.3) վերլուծությունից, թողնելով միայն

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^k \sigma_i Z_i$$

մատրիցը: Բնական է, մենք կորցնում ենք օգտակար ինֆորմացիայի որոշակի մաս, սակայն աղմուկների մեծ մասը ևս դեն նետած կլինենք: Այժմ \tilde{A} մատրիցում աղմուկների ընդհանուր ծավալը կլինի $\approx k \cdot N/r$: Ասածից առաջանում են բազում հարցեր, մասնավորապես k թվի խելամիտ (օպտիմալ) ընտրությունը: Այդպիսի խնդիրների լուծմանը նվիրված է հատուկ գրականություն:

ԽՆՆԻՐՆԵՐ և ՎԱՐԺՈՒՅՈՒՆՆԵՐ-6

1. Գտնել հետևյալ մատրիցների սինգուլյար թվերը.

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}:$$

2. Տրված է $A = [a_1 \ a_2]$ մատրիցը, որտեղ $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^n$: Գիցուք $\|a_1\|_2 = \|a_2\|_2 = 1$ և $(a_1, a_2) = \cos \alpha$: Գտնել այդ մատրիցի սինգուլյար թվերը: Ցույց տալ, որ եթե $\alpha \ll 1$, ապա $\sigma_1 \approx \sqrt{2}$, $\sigma_2 \approx \gamma/\sqrt{2}$:
3. Գիցուք σ_1 և σ_n թվերը $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ չվերասերված մատրիցի, համապատասխանաբար, մեծագույն և փոքրագույն սինգուլյար թվերն են: Ապացուցել, որ ցանկացած $x \in \mathbf{C}^n$ վեկտորի համար

$$\sigma_n \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq \sigma_1 \|x\|_2:$$

4. Ստանալ հետևյալ մատրիցների սինգուլյար վերլուծությունները.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} :$$

5. Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, որտեղ $m \geq n$: Տրված է այդ մատրիցի $A = U\Lambda V^*$ սինգուլյար վերլուծությունը: Ապացուցել, որ $Ax = b$ համակարգը համատեղելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $(U^*b)_i = 0$ բոլոր $i > r$ արժեքների համար:

6. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{bmatrix}$$

մատրիցի սինգուլյար վերլուծությունը:

7. Յույց տալ, որ

$$\langle A, B \rangle \equiv \text{tr}(B^*A)$$

արտահայտությունը սահմանում է սկալյար արտադրյալ մատրիցների $\mathbf{C}^{m \times n}$ տարածության մեջ:

8. Ապացուցել, որ կամայական $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի համար

$$\langle A, A \rangle = \|A\|_F :$$

9. Դիցուք $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ թվերը $r \geq 1$ ռանգի $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի սինգուլյար թվերն են: Ապացուցել, որ

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \right)^{1/2} :$$

10. Արտածել բանաձև $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցի $\kappa_F(A)$ պայմանավորվածության թվի համար:

11. Դիցուք $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$: Ապացուցել, որ

$$\sigma_{\max}(A) = \max_{x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m} \frac{y^T A x}{\|x\|_2 \|y\|_2} :$$

Գլուխ 7

ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒՋԻ ՀԱԿԱԴԱՐՁՈՒՄ

Հակադարձ մատրիցի հասկացությունը սահմանվել է միայն չվերասերված քառակուսի մատրիցների համար: Մինչդեռ որոշ խնդիրների լուծման ժամանակ առաջանում է իր բնույթով նման հասկացության ներմուծման անհրաժեշտություն, որն ընդունելի կլինի ինչպես վերասերված, այնպես էլ ցանկացած չափի մատրիցների համար: A մատրիցի համար *ընդհանրացված հակադարձ* կամ *փսևդոհակադարձ* մատրից ասելով հասկանում են այնպիսի մատրից, որն օժտված է սովորական հակադարձի շատ հատկություններով և հանգում է սովորական հակադարձի, երբ A մատրիցը չվերասերված է:

Գոյություն ունեն ընդհանրացված հակադարձի տարբեր տիպեր: Առավել հայտնի է *Մուր-Պենրոուզի հակադարձումը*, որն ունի բազմաթիվ կիրառություններ ինչպես բուն մատրիցների տեսությունում, այնպես էլ հաշվողական գծային հանրահաշվում: Մասնավորապես, այդպիսի փսևդոհակադարձմամբ է լուծվում գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի համար փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը:

7.1 Փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը

Գիտարկենք $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցով

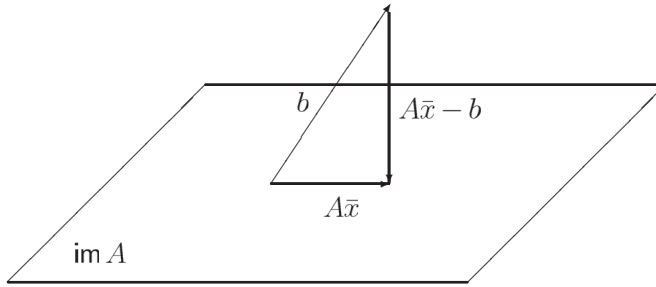
$$Ax = b \quad (7.1.1)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: Ակնհայտ է, որ այս համակարգը ունի լուծում՝ սովորական իմաստով, այն և միայն այն դեպքում, երբ $b \in \text{im}A$: Իսկ եթե համակարգը անհամատեղելի է, ապա բնական է փորձել գտնել այնպիսի $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$, որը նվազեցնում է $A\bar{x} - b$ *անհամաձայնությունը* ինչ-որ նորմում: Ճշգրտենք, որ այս գլխում, որպես վեկտորական նորմ, մենք կդիտարկենք l_2 նորմը:

Փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը (7.1.1) համակարգի համար ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. *գտնել այնպիսի $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$ վեկտոր, որի համար*

$$\|A\bar{x} - b\| = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\| : \quad (7.1.2)$$

Յույց տանք, որ (7.1.2) խնդիրը հանգում է հատուկ տեսքի գծային հանրահաշ-վական հավասարումների համակարգի լուծմանը: Այդ նպատակով բերենք որոշ հուշող դատողություններ: Ակնառության համար ստորև տրված է Նկ. 7.1.1-ը: Եթե \bar{x} վեկտորը (7.1.2) խնդրի լուծումն է, ապա «երկրաչափորեն» այդ նշանակում է, որ $A\bar{x} - b \perp \text{im}A$ կամ, համաձայն (2.1.9)-ի՝ $A\bar{x} - b \in \ker A^*$: Այսինքն՝ $A^*(A\bar{x} - b) = 0$ կամ $A^*A\bar{x} = A^*b$:



Նկ. 7.1.1. $A^*A\bar{x} = A^*b$ հավասարության «երկրաչափական» հիմնավորումը:

Ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 7.1.1 : Որպեսզի $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$ վեկտորը լինի փոքրագույն բառակուսիների խնդրի լուծում անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն բավարարի

$$A^*Ax = A^*b \tag{7.1.3}$$

հավասարումների համակարգին:

Ապացույց: Բավարարություն: Գիցուք \bar{x} վեկտորը (7.1.3) համակարգի լուծումն է: Հետևաբար $A\bar{x} - b \in \ker A^*$: Գիտարկենք կամայական $u \in \mathbb{C}^n$ վեկտոր: Ունենք

$$Au - b = A(u - \bar{x}) + (A\bar{x} - b) :$$

Քանի որ $A(u - \bar{x}) \in \text{im}A$, իսկ $A\bar{x} - b \in \ker A^*$, ապա

$$\|Au - b\|^2 = \|A(u - \bar{x})\|^2 + \|A\bar{x} - b\|^2 \geq \|A\bar{x} - b\|^2 :$$

Ստացանք, որ $\|Au - b\| \geq \|A\bar{x} - b\|$: Գծվար չէ նկատել, որ հավասարությունը հասանելի է միայն այն դեպքում, երբ $Au = A\bar{x}$, այսինքն՝ $A^*Au = A^*b$:

Անհրաժեշտություն: Գիցուք \bar{x} վեկտորը (7.1.2) խնդրի լուծումն է: Ենթադրենք հակառակը, որ \bar{x} -ը չի բավարարում (7.1.3) հավասարումների համակարգին, այսինքն՝ $A^*A\bar{x} \neq A^*b$: Նշանակենք $z \equiv A^*(A\bar{x} - b) \neq 0$ և ներմուծենք $v = \bar{x} - \varepsilon z$ վեկտորը, որտեղ $\varepsilon > 0$: Կատարենք հետևյալ պարզ ձևափոխությունները.

$$\begin{aligned} \|Av - b\|^2 &= \|(A\bar{x} - b) - \varepsilon Az\|^2 = ((A\bar{x} - b) - \varepsilon Az, (A\bar{x} - b) - \varepsilon Az) \\ &= \|A\bar{x} - b\|^2 - \varepsilon((A\bar{x} - b), Az) - \varepsilon(Az, (A\bar{x} - b)) + \varepsilon^2\|Az\|^2 \\ &= \|A\bar{x} - b\|^2 - \varepsilon(A^*(A\bar{x} - b), z) - \varepsilon(z, A^*(A\bar{x} - b)) + \varepsilon^2\|Az\|^2 \\ &= \|A\bar{x} - b\|^2 - 2\varepsilon\|z\|^2 + \varepsilon^2\|Az\|^2 : \end{aligned}$$

Գրենք ստացված հավասարությունը

$$\|Av - b\|^2 = \|A\bar{x} - b\|^2 - \varepsilon(2\|z\|^2 - \varepsilon\|Az\|^2)$$

տեսքով: Քանի որ $z \neq 0$, ապա բավականին փոքր $\varepsilon > 0$ թվի ընտրության շնորհիվ կարող ենք ունենալ

$$2\|z\|^2 - \varepsilon\|Az\|^2 > 0 :$$

Այդ դեպքում կստանանք $\|Av - b\| < \|A\bar{x} - b\|$ անհավասարությունը, որը հակասում է այն ենթադրությանը, որ \bar{x} -ը (7.1.2) խնդրի լուծումն է: \square

Վերը բերված (7.1.3) գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը անվանում են *նորմալ համակարգ* (7.1.1) համակարգի նկատմամբ: Անկախ (7.1.1) համակարգի համատեղելիությունից ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 7.1.2 : *Նորմալ համակարգը համատեղելի է:*

Ապացույց: Նորմալ համակարգն ունի լուծում միայն այն դեպքում, երբ $A^*b \in \text{im}(A^*A)$, ինչը համարժեք է $A^*b \perp \ker(A^*A)$ պայմանին: Ըստ 2.1.3 լեմմայի՝ $\ker(A^*A) = \ker A$: Ուստի բավական է ապացուցել, որ $A^*b \perp \ker A$: Գա ակնհայտ է, քանի որ

$$(A^*b, x) = (b, Ax) = (b, 0) = 0$$

ցանկացած $x \in \ker A$ վեկտորի համար: \square

Նորմալ համակարգի ցանկացած լուծում կոչվում է (7.1.1) համակարգի *ընդհանրացված լուծում* կամ *փսկոդում*:

Հաջորդը նորմալ համակարգի լուծման միակության հարցն է: Լուծումը կլինի միակ միայն այն դեպքում, երբ $\text{rank} A = n$, այսինքն, երբ $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի սյուները գծորեն անկախ են: Իրոք, $\text{rank}(A^*A) = \text{rank} A = n$ և, հետևաբար, $\det(A^*A) \neq 0$: Ըստ (7.1.3)-ի լուծումը գրվում է

$$x = (A^*A)^{-1}A^*b \tag{7.1.4}$$

տեսքով: Մասնավոր դեպքում, երբ $m = n$, կստանանք $x = A^{-1}(A^*)^{-1}A^*b = A^{-1}b$:

7.2 Փսկոհակադարձ մատրից

Դիցուք $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորը (7.1.3) նորմալ համակարգի որևէ լուծում է: Հաշվի առնելով \mathbb{C}^n տարածության (2.1.9) վերլուծությունը՝ ներկայացնենք x վեկտորը

$$x = x_0 + w \tag{7.2.1}$$

գումարի տեսքով, որտեղ $x_0 \in \ker A$, $w \in \text{im} A^*$: Ելնելով $A^*Ax = A^*b$ հավասարությունից հաջորդաբար ստանում ենք.

$$\begin{aligned} A^*A(x_0 + w) &= A^*b, \\ A^*Ax_0 + A^*Aw &= A^*b, \\ A^*Aw &= A^*b: \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Ստացված (7.2.2) հավասարությունից բխում է, որ եթե x վեկտորը նորմալ համակարգի լուծում է, ապա նրա պրոյեկցիան $\text{im}A^*$ ենթատարածության վրա նույնպես կլինի այդ համակարգի լուծում:

Այժմ դիտարկենք (7.1.3) համակարգի մի այլ $y \in \mathbb{C}^n$ լուծում: Գրելով այն որպես գումար՝

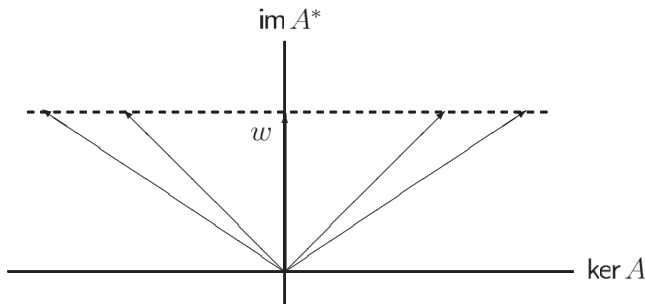
$$y = y_0 + v,$$

որտեղ $y_0 \in \ker A$ և $v \in \text{im}A^*$, համանման դատողություններով գտնում ենք, որ

$$A^*Av = A^*b : \tag{7.2.3}$$

Այնուհետև, (7.2.2)-ից և (7.2.3)-ից հետևում է, որ $A^*A(w - v) = 0$: Ստանում ենք, որ $w - v \in \ker(A^*A) = \ker A$: Մյուս կողմից, $w - v \in \text{im}A^*$: Ուստի $w - v = 0$, այսինքն՝ $w = v$:

Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ եզրակացությանը. (7.1.3) նորմալ համակարգի բոլոր լուծումներն ունեն նույն պրոյեկցիան $\text{im}A^*$ ենթատարածության վրա և տարբերվում են միայն պրոյեկցիաներով $\ker A$ ենթատարածության վրա: Ստորև բերված Նկ. 7.2.1-ը մեկնաբանում է սովաձը:



Նկ. 7.2.1. Նորմալ համակարգի լուծումները:

Այսպիսով, ըստ 7.1.2 թեորեմի, կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի

$$A^*Ax = A^*b, \quad x \in \text{im}A^* \tag{7.2.4}$$

խնդրի միակ լուծում, որն անվանում են $Ax = b$ համակարգի *նորմալ փսևորվածում*:

Նորմալ փսևորվածումը բնութագրվում է նաև հետևյալ հատկությամբ: Այդ լուծումը առանձնանում է մնացած բոլոր լուծումներից նրանով, որ այն ունի *նվազագույն* նորմ: Իրոք, (7.2.1)-ից ունենք

$$\|x\|^2 = \|x_0 + w\|^2 = \|x_0\|^2 + \|w\|^2 \geq \|w\|^2,$$

ընդ որում, եթե $x_0 \neq 0$, ապա $\|x\| > \|w\|$: Ուստի, ըստ 7.1.1 թեորեմի, (7.2.4) խնդիրը համարժեք է հետևյալ խնդրին.

$$\|Ax - b\| \rightarrow \min, \quad \|x\| \rightarrow \min : \tag{7.2.5}$$

Սսհմսնենք C^m տսրսծոթյունից C^n տսրսծոթյուն արտսսսկերում՝ ըստ հետևյսլ կսնոնի: Ամեն մի $b \in C^m$ վեկտորի հսմսսստսսսսսնոթյսն մեջ դենք $Ax = b$ հսմսկսրգի նորմսլ փսևդոթյունը: Այդ արտսսսկերումը գծսյին է: Իրոք, դիցուք $b_1 \in C^m$ վեկտորին, ըստ սսհմսնվսծ կսնոնի, հսմսստսսսսսնում է $x_1 \in C^n$ վեկտորը, իսկ $b_2 \in C^m$ վեկտորին՝ $x_2 \in C^n$ վեկտորը: Դս նշսնսկում է, որ

$$A^*Ax_1 = A^*b_1, \quad x_1 \in \text{im}A^*$$

և

$$A^*Ax_2 = A^*b_2, \quad x_2 \in \text{im}A^* :$$

Այդ դեսքում ցսնկսցսծ α_1 և α_2 թվերի հսմսր

$$A^*A(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = A^*(\alpha_1b_1 + \alpha_2b_2)$$

և, սկնհսյտորեն, $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \in \text{im}A^*$: Կստսնսնք, որ $\alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 \in C^m$ վեկտորին հսմսստսսսսսնում է $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \in C^n$ վեկտորը: Սսհմսնվսծ արտսսսկերմսմք միսրծեքորեն որոշվում է $A^+ \in C^{n \times m}$ մստրիցը, որը կոչվում է *ընդհսնրսցվսծ հսկսդսրծ մստրից* կսմ *փսևդոհսկսդսրծ մստրից* A մստրիցի հսմսր: Այսսսսսս, (7.2.4) խնդրի լուծումը կարող ենք գրել սյսսսս. $x = A^+b$:

Բերենք *լրիվ մսնգի* մստրիցների փսևդոհսկսդսրծմսն բսնսծները: Դրսնք $A \in C^{m \times n}$ մստրիցներն են, որոնց հսմսր $\text{rank}A = \min\{m, n\}$:

Թեորեմ 7.2.1 : *Դիցուք $A \in C^{m \times n}$ և $\text{rank}A = n$: Այդ դեսքում*

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* : \tag{7.2.6}$$

Ակսցույց: Նսխորդ սսրսգրսֆում բացսհսյտվել է, որ դիտսրկվող դեսքում (7.1.3) նորմսլ հսմսկսրգի լուծումը միսկն է և ունի (7.1.4) տեսքը, սյն է՝

$$x = (A^*A)^{-1}A^*b :$$

Ընդ որում՝ $x \in \text{im}A^*$, քսնի որ $\text{im}A^* \subseteq C^n$ և $\dim(\text{im}A^*) = \text{rank}A = n$: Հետևսրսր, $(A^*A)^{-1}A^*$ մստրիցը հենց A^+ փսևդոհսկսդսրծ մստրիցն է: \square

Մսսնսվոր դեսքում, երբ $m = n$, կստսնսնք

$$A^+ = A^{-1}(A^*)^{-1}A^* = A^{-1} :$$

Այսսսսսս, կարող ենք սսել, որ փսևդոհսկսդսրծումը մստրիցների սովորսկսն հսկսդսրծմսն ընդհսնրսցումն է:

Թեորեմ 7.2.2 : *Դիցուք $A \in C^{m \times n}$ և $\text{rank}A = m$: Այդ դեսքում*

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} : \tag{7.2.7}$$

Ակսցույց: Քսնի որ $AA^* \in C^{m \times m}$ և $\text{rank}(AA^*) = \text{rank}A = m$, սսկս AA^* մստրիցը չվերսսերվսծ է:

Գրենք $A^*Ax = A^*b$ նորմալ համակարգը

$$A^*Ax = A^*(AA^*)(AA^*)^{-1}b$$

համարժեք տեսքով կամ էլ՝

$$A^*Ax = A^*A[A^*(AA^*)^{-1}b] :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$x = A^*(AA^*)^{-1}b$$

վեկտորը նորմալ համակարգի լուծումն է: Ընդ որում, ակնհայտ է, որ $x \in \text{im}A^*$: Արդյունքում հանգում ենք (7.2.7) բանաձևին: \square

Չևակերպենք մի քանի հեշտ ապացուցվող պնդումներ:

◇ *Չրոյական մատրիցի համար*

$$0^+ = 0^T : \quad (7.2.8)$$

◇ *Եթե $a \in \mathbf{C}$, ապա*

$$a^+ = \begin{cases} a^{-1}, & \text{եթե } a \neq 0, \\ a, & \text{եթե } a = 0: \end{cases} \quad (7.2.9)$$

◇ *Դիցուք $x \in \mathbf{C}^{n \times 1}$ (վեկտոր-սյուն): Այդ դեպքում*

$$x^+ = \begin{cases} \frac{1}{x^*x}x^*, & \text{եթե } x \neq 0, \\ x^T, & \text{եթե } x = 0: \end{cases} \quad (7.2.10)$$

◇ *Դիցուք $x \in \mathbf{C}^{1 \times n}$ (վեկտոր-տող): Այդ դեպքում*

$$x^+ = \begin{cases} \frac{1}{xx^*}x^*, & \text{եթե } x \neq 0, \\ x^T, & \text{եթե } x = 0: \end{cases} \quad (7.2.11)$$

Եվս մեկ արտահայտություն փսևդոհակադարձ մատրիցի համար կարելի է ստանալ 6.6.1 բերեմում բացահայտված QR -վերլուծության օգնությամբ:

Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, որտեղ $m \geq n$ և $\text{rank}A = n$: Այդ դեպքում, ըստ (5.6.1) վերլուծության, $A = QR$, որտեղ $Q \in \mathbf{C}^{m \times n}$ օրթոնորմավորված սյուներով մատրից է, իսկ $R \in \mathbf{C}^{n \times n}$ դրական անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է: Այստեղ մենք կարող ենք կիրառել (7.2.6) բանաձևը: Պարզ ձևափոխությունների միջոցով կստանանք.

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = (R^*Q^*QR)^{-1}R^*Q^* = (R^*R)^{-1}R^*Q^* = R^{-1}(R^*)^{-1}R^*Q^* = R^{-1}Q^* :$$

Այսպիսով,

$$A^+ = R^{-1}Q^* : \quad (7.2.12)$$

Ընդ որում՝ $Ax = b$ հսմսկսրգի $x = A^+b$ նորմսլ քսևդոլուծուծնր գրվում է $x = R^{-1}Q^*b$ տեսքով և նրս որոնուծնր հսնգում է վերին եռսնկյուն մստրիցով

$$Rx = Q^*b$$

հսմսկսրգի լուծմսն:

Պսրսգրսֆի վերջում բերենք քսևդոհսկսդսրծմսն ևս երկու հստկություն:

Թեորեմ 7.2.3 : *Ճիշտ է հետևյսլ հսվսսսրությունր.*

$$\text{im}A^+ = \text{im}A^* : \tag{7.2.13}$$

Ասսցույց: Դիցուք $x \in \text{im}A^+$: Հետևսբսր գոյություն ունի սյնսլիսի $y \in \mathbb{C}^m$ վեկտոր, որ $x = A^+y$: Ոստի x վեկտորր

$$A^*Ax = A^*y, \quad x \in \text{im}A^+$$

խնդրի լուծումն է:

Հսկսռսկևր, դիցուք $x \in \text{im}A^*$, սյսինքն՝ $x = A^*y$, որտեղ $y \in \mathbb{C}^m$: Այդ դեսքում

$$A^*Ax = A^*(AA^*y) :$$

Ոստի՝ $x = A^+(AA^*y)$, որտեղից բխում է, որ $x \in \text{im}A^+$: \square

Թեորեմ 7.2.4 : *Ճիշտ է հետևյսլ հսվսսսրությունր.*

$$\text{rank}A^+ = \text{rank}A : \tag{7.2.14}$$

Ասսցույց: Օգտվելով (7.2.13) հսվսսսրությունից ունենք.

$$\text{rank}A^+ = \dim(\text{im}A^+) = \dim(\text{im}A^*) = \text{rank}A^* = \text{rank}A : \quad \square$$

7.3 Փսևդոհսկսդսրծմսն ընդհսնուր քսնսծևր

Հիմնվելով սինգուլյսր վերլուծության վրս՝ արտսծենք քսևդոհսկսդսրծ մստրիցի ներկսյսցմսն հսմսսլիտսնի քսնսծևր:

Նսխս գտնենք քսևդոհսկսդսրծ մստրից $m \times n$ չսֆի

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ \hline & & & 0 \\ & & & 0 \end{array} \right] \tag{7.3.1}$$

մստրիցի հսմսր (տե՛ս $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մստրիցի (6.2.1) վերլուծությունր): Ցսնկսցսծ $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T \in \mathbb{C}^m$ վեկտորի հսմսր

$$\Lambda^*\Lambda x = \Lambda^*b$$

նորմսլ հսմսկսրգի լուծումներր $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ վեկտորներն են, որտեղ

$$x_1 = \frac{b_1}{\sigma_1}, x_2 = \frac{b_2}{\sigma_2}, \dots, x_r = \frac{b_r}{\sigma_r},$$

իսկ x_{r+1}, \dots, x_n բաղադրիչները կամայական թվեր են: Հեշտ է տեսնել, որ $\Lambda x = b$ համակարգի նորմալ փակարկում (նվազագույն նորմով լուծում) կլինի

$$x = \left[\frac{b_1}{\sigma_1}, \frac{b_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{b_r}{\sigma_r}, 0, \dots, 0 \right]^T :$$

Այս նորմալ փակարկումը գրվում է որպես $x = \Lambda^+ b$, որտեղ $n \times m$ չափի Λ^+ մատրիցը հետևյալն է.

$$\Lambda^+ = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \sigma_2^{-1} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ \hline & & & \sigma_r^{-1} \\ & & 0 & | 0 \end{array} \right] : \quad (7.3.2)$$

Թեորեմ 7.3.1 : Դիցուք ունենք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի $A = U\Lambda V^*$ սինգուլյար վերլուծությունը: Այդ դեպքում

$$A^+ = V\Lambda^+U^* : \quad (7.3.3)$$

Ապացույց: Ինչպես հայտնի է, $A^+ \in \mathbf{C}^{n \times m}$ փակարկակադարձ մատրիցը որոշվում է

$$A^*Ax = A^*b, \quad x \in \text{im}A^* \quad (7.3.4)$$

լրացուցիչ պայմանով նորմալ համակարգի միջոցով: Տեղադրենք A մատրիցի սինգուլյար վերլուծությունը (7.3.4) համակարգի մեջ: Կստանանք

$$V\Lambda^*U^*U\Lambda V^*x = V\Lambda^*U^*b,$$

որից հետևում է

$$\Lambda^*\Lambda V^*x = \Lambda^*U^*b$$

հավասարությունը: Ինչպես տեսնում ենք, V^*x վեկտորը բավարարում է

$$\Lambda^*\Lambda z = \Lambda^*(U^*b)$$

համակարգին, որն իր հերթին նորմալ համակարգ է

$$\Lambda z = U^*b \quad (7.3.5)$$

համակարգի համար: Ցույց տանք, որ $V^*x \in \text{im}\Lambda^*$: Իրոք, քանի որ $x \in \text{im}A^*$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $y \in \mathbf{C}^m$ վեկտոր, որ $x = A^*y$: Այլ կերպ՝ $x = V\Lambda^*U^*y$ կամ $V^*x = \Lambda^*U^*y$: Այսպիսով, V^*x -ը (7.3.5) համակարգի նորմալ փակարկումն է: Ուստի՝

$V^*x = \Lambda^+U^*b$: Ստսնում ենք $x = V\Lambda^+U^*b$ արտսհսյտությունը $Ax = b$ հսնսկսրզի նորմսլ փսևդոլուծմսն հսնսր: Արդյունքում հսնգում ենք (7.3.3) քսնսծևին: \square

Օգտվելով (7.3.3) քսնսծևից՝ դժվսր չէ արտսծել մստրիցների սովորսկսն հսկսդսրծմսն հստկություններին հսնսնմսն փսևդոհսկսդսրծմսն հետևյսլ հստկությունները.

$$\diamond (A^+)^+ = A, \tag{7.3.6}$$

$$\diamond (A^+)^* = (A^*)^+, \tag{7.3.7}$$

$$\diamond (\alpha A)^+ = \alpha^+ A^+ : \tag{7.3.8}$$

Ասկսցուցենք վերը քսցսհսյտվսծ (7.2.13) հստկությունը լրսցնող փսևդոհսկսդսրծ մստրիցի ևս մեկ հստկություն:

Թեորեմ 7.3.2 : *Ճիշտ է հետևյսլ հսվսսարությունը.*

$$\ker A^+ = \ker A^* : \tag{7.3.9}$$

Ասկսցույց: Ըստ (2.1.9)-ի ունենք \mathbb{C}^m տարսծության

$$\mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \text{im} A \tag{7.3.10}$$

վերլուծությունը: Հսնսնմսնորեն կսրող ենք գրել, որ

$$\mathbb{C}^m = \ker A^+ \oplus \text{im}(A^+)^* :$$

Օգտսգործելով (7.3.7) և (7.2.13) հստկությունները, ստսնում ենք.

$$\text{im}(A^+)^* = \text{im}(A^*)^+ = \text{im}(A^*)^* = \text{im} A :$$

Այսսլիսով,

$$\mathbb{C}^m = \ker A^+ \oplus \text{im} A : \tag{7.3.11}$$

Հսնսդրելով (7.3.10) և (7.3.11) վերլուծությունները հսնգում ենք (7.3.9)-ին: \square

Այժմ արտսծենք քսնսծև նորմսլ հսնսկսրզի ընդհսնուր լուծմսն հսնսր: Այդ նսկստսկով նսխ նշենք

$$A^*AA^+ = A^* \tag{7.3.12}$$

հսվսսարությունը, որի սսկսցույցը շստ սկսրզ է: Իրոք, քսնի որ $x = A^+b$ վեկտորը $Ax = b$ հսնսկսրզի նորմսլ փսևդոլուծումն է, սսկս

$$A^*A(A^+b) = A^*b,$$

սյսինքն, ճիշտ է $A^*AA^+b = A^*b$ հսվսսարությունը կսնսյսկսն $b \in \mathbb{C}^m$ վեկտորի հսնսր: Ոստի հսնգում ենք (7.3.12) հսվսսարությանը:

Թեորեմ 7.3.3 : *Տրված*

$$A^*Ax = A^*b \quad (7.3.13)$$

նորմալ համակարգի կամայական լուծում գրվում է

$$x = A^+b + (I - A^+A)z, \quad \forall z \in \mathbf{C}^n \quad (7.3.14)$$

տեսքով:

Ապացույց: (7.3.14) տեսքի ցանկացած վեկտորի համար ունենք.

$$A^*Ax = A^*AA^+b + (A^*A - A^*AA^+A)z :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.3.12) հավասարությունը՝ կստանանք, որ

$$A^*Ax = A^*b + (A^*A - A^*A)z = A^*b :$$

Մյուս կողմից, դիցուք x -ը (7.3.13) նորմալ համակարգի լուծումն է: Գիտարկենք $z \equiv x - A^+b$ տարբերությունը: Այդ դեպքում

$$A^*Az = A^*Ax - A^*AA^+b = A^*Ax - A^*b = 0 :$$

Այսպիսով, $A^*Az = 0$, այսինքն՝ $Az = 0$: Ուստի՝

$$z = z - A^+Az = (I - A^+A)z,$$

որտեղից հետևում է x լուծման (7.3.14) ներկայացումը: \square

Նշենք ևս մեկ օգտակար առնչություն փսևրհակադարձ մատրիցի համար:

Թեորեմ 7.3.4 : *Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (A^*A + \varepsilon I)^{-1}A^* : \quad (7.3.15)$$

Ապացույց: Եթե ունենք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի $A = U\Lambda V^*$ սինգուլյար վերլուծությունը, ապա

$$A^*A + \varepsilon I = V\Lambda^*U^*U\Lambda V^* + \varepsilon I = V\Lambda^*\Lambda V^* + \varepsilon I = V(\Lambda^*\Lambda + \varepsilon I)V^* :$$

Այնուհետև,

$$(A^*A + \varepsilon I)^{-1} = V(\Lambda^*\Lambda + \varepsilon I)^{-1}V^* :$$

Բազմապատկելով այս հավասարության երկու մասը A^* մատրիցով՝ կստանանք

$$(A^*A + \varepsilon I)^{-1}A^* = V(\Lambda^*\Lambda + \varepsilon I)^{-1}V^*V\Lambda^*U^* = V(\Lambda^*\Lambda + \varepsilon I)^{-1}\Lambda^*U^* :$$

Հետևաբար կարող ենք գրել, որ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (A^*A + \varepsilon I)^{-1}A^* = V \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\Lambda^*\Lambda + \varepsilon I)^{-1}\Lambda^* \right] U^* : \quad (7.3.16)$$

Գտնենք (7.3.16) հավասարության աջ մասում գտնվող սահմանը: Հեշտ է տեսնել, որ n -րդ կարգի $\Lambda^* \Lambda + \varepsilon I$ մատրիցը անկյունագծային է, այն է՝

$$\Lambda^* \Lambda + \varepsilon I = \text{diag} [\sigma_1^2 + \varepsilon, \dots, \sigma_r^2 + \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$$

(տե՛ս (7.3.1)-ը): Այդ դեպքում

$$(\Lambda^* \Lambda + \varepsilon I)^{-1} = \text{diag} \left[\frac{1}{\sigma_1^2 + \varepsilon}, \dots, \frac{1}{\sigma_r^2 + \varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \dots, \frac{1}{\varepsilon} \right]:$$

Բազմապատկելով աջից Λ^* մատրիցով կստանանք $n \times m$ չափի

$$(\Lambda^* \Lambda + \varepsilon I)^{-1} \Lambda^* = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 / (\sigma_1^2 + \varepsilon) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r / (\sigma_r^2 + \varepsilon) & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right]$$

մատրից: Անցնելով սահմանի՝ գտնում ենք

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\Lambda^* \Lambda + \varepsilon I)^{-1} \Lambda^* = \Lambda^+$$

(տե՛ս (7.3.2)-ը): Վերջապես, ելնելով (7.3.16) հավասարությունից, կստանանք, որ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (A^* A + \varepsilon I)^{-1} A^* = V \Lambda^+ U^* = A^+ :$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք (7.3.3) բանաձևից: \square

Դիշտ է նաև հետևյալ նման պնդումը, որի ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

Թեորեմ 7.3.5 : *Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A^* (A A^* + \varepsilon I)^{-1} : \tag{7.3.17}$$

7.4 Պենրոուզի հավասարումները

7.2 պարագրաֆում, լուծելով փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի համար, մենք հանգել ենք փսևորհակադարձ մատրիցի հասկացության: Առաջին անգամ մատրիցների ընդհանրացված հակադարձումը դիտարկվել է 1920թ. ամերիկացի մաթեմատիկոս *Էլիսաբիտ Մուրի* (1862-1932) աշխատանքում: Ավելի ուշ՝ 1955թ., անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս *Ռոջեր Պենրոուզը* (ծն. 1931թ.) ստացել է կարևոր արդյունք, որի համաձայն է. Մուրի կողմից ներմուծված փսևորհակադարձ մատրիցը կարելի է սահմանել բոլորովին այլ եղանակով՝ որպես մատրիցային հավասարումների հատուկ համակարգի լուծում: Ռ. Պենրոուզի մոտեցման էությունը արտացոլում է ստորև բերված պնդումը:

Թեորեմ 7.4.1 : Ցանկացած $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի համար կարող է գոյություն ունենալ միայն մեկ $X \in \mathbf{C}^{n \times m}$ մատրից, որը բավարարում է հետևյալ հավասարումներին.

$$\begin{aligned} AXA &= A, & XAX &= X, \\ (AX)^* &= AX, & (XA)^* &= XA : \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Ապացույց: Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն (7.4.1) հավասարումներին բավարարող X և Y երկու մատրիցներ: Այդ առնչությունների հաջորդաբար կիրառման արդյունքում ունենում ենք.

$$\begin{aligned} X &= XAX \\ &= XAYAX \\ &= XAYAYAX \\ &= (XA)^*(YA)^*Y(AY)^*(AX)^* \\ &= A^*X^*A^*Y^*Y^*A^*X^*A^* \\ &= (AXA)^*Y^*Y^*(AXA)^* \\ &= A^*Y^*Y^*A^* \\ &= (YA)^*Y(AY)^* \\ &= YAYAY \\ &= YAY \\ &= Y : \end{aligned}$$

Թեորեմի պնդումը ապացուցված է: \square

Նշենք, որ (7.4.1) հավասարումները անվանում են *Պենրոուզի հավասարումներ*:

Այժմ ցույց տանք, որ 7.2 պարագրաֆում սահմանված փսևրհակադարձ մատրիցը բավարարում է (7.4.1) հավասարումներին: Գիցուք ունենք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ մատրիցի սինգուլյար վերլուծությունը.

$$A = U\Lambda V^* : \quad (7.4.2)$$

Գրենք $m \times n$ չափի Λ մատրիցը

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.3)$$

վանդակային տեսքով, որտեղ $\Lambda_r \equiv \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r]$: Ըստ (7.3.3) բանաձևի՝ ունենք

$$A^+ = V\Lambda^+U^*, \quad (7.4.4)$$

որտեղ

$$\Lambda^+ = \begin{bmatrix} \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.5)$$

(տե՛ս (7.3.2)-ը): Բազմապատկելով (7.4.3) և (7.4.5) վանդակային մատրիցները՝ գտնում ենք, որ

$$\begin{aligned} \Lambda\Lambda^+\Lambda &= \Lambda, & \Lambda^+\Lambda\Lambda^+ &= \Lambda^+, \\ (\Lambda\Lambda^+)^* &= \Lambda\Lambda^+, & (\Lambda^+\Lambda)^* &= \Lambda^+\Lambda. \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Կազմենք

$$B = \begin{bmatrix} A^{(i_1)} & A^{(i_2)} & \dots & A^{(i_r)} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m \times r}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{r \times n}$$

մատրիցները: Ինչպես ակնհայտորեն հետևում է (7.5.2)-ից, $A = BC$:

Թեորեմ 7.5.1 : Եթե $A = BC$ մատրիցի կմախքային վերլուծությունն է, ապա

$$A^+ = C^+B^+, \quad (7.5.3)$$

որտեղ $B^+ = (B^*B)^{-1}B^*$, $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$:

Ապացույց: Քանի որ $\text{rank} B = r$, ապա ըստ (7.2.6) բանաձևի՝ $B^+ = (B^*B)^{-1}B^*$: Համանմանորեն, ըստ (7.2.7) բանաձևի՝ $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$: Ընդ որում՝

$$B^+B = I, \quad CC^+ = I.$$

Յույց տանք, որ $X = C^+B^+$ մատրիցը բավարարում է A մատրիցի համար (7.4.1) Պենրոուզի հավասարումներին: Իրոք,

$$AXA = BCC^+B^+BC = B(CC^+)(B^+B)C = BC = A,$$

$$XAX = C^+B^+BCC^+B^+ = C^+(B^+B)(CC^+)B^+ = C^+B^+ = X,$$

$$\begin{aligned} (AX)^* &= (BCC^+B^+)^* = (BB^+)^* = (B(B^*B)^{-1}B^*)^* \\ &= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AC^+B^+ = AX, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (XA)^* &= (C^+B^+BC)^* = (C^+C)^* = (C^*(CC^*)^{-1}C)^* \\ &= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = C^+B^+A = XA. \end{aligned}$$

Այսպիսով, (7.5.3) բանաձևը ստացված է: \square

Օրինակ 7.5.1 : Դիցուք տրված են ոչ զրոյական $a \in \mathbf{C}^m$ և $b \in \mathbf{C}^n$ վեկտորները: Կազմենք $m \times n$ չափի

$$A = ab^* \quad (7.5.4)$$

մատրիցը: Ակնհայտ է, որ այս մատրիցի ռանգը հավասար է մեկի: Փաստորեն (7.5.4)-ը A մատրիցի կմախքային վերլուծությունն է: Ըստ (7.5.3) բանաձևի ունենք

$$A^+ = (b^*)^+a^+ = (b^+)^*a^+ :$$

Եթե օգտվենք (7.2.10) բանաձևից, ապա

$$a^+ = \frac{1}{a^*a} a^*, \quad b^+ = \frac{1}{b^*b} b^* :$$

Արդյունքում հանգում ենք

$$A^+ = \frac{1}{(a^*a)(b^*b)} ba^* \tag{7.5.5}$$

արտահայտության: \square

Օրինակ 7.5.2 : Գիտարկենք $m \times n$ չափի

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գրենք այդ մատրիցը հետևյալ տեսքով.

$$A = e_m e_n^T, \quad \text{որտեղ} \quad e_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^m, \quad e_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n :$$

Ըստ վերը ստացված (7.5.5) ներկայացման՝ գտնում ենք

$$A^+ = \frac{1}{mn} e_n e_m^T = \frac{1}{mn} A^T : \quad \square$$

Վերջում նշենք, որ չվերասերված մատրիցների արտադրյալի հակադարձան կանոնը փսևդոհակադարձ մատրիցների համար ճիշտ չէ ընդհանուր դեպքում.

$$(AB)^+ \neq B^+ A^+ :$$

Գրանում հեշտ է համոզվել՝ վերցնելով

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցները: Այն պայմանները, որոնց առկայության դեպքում $(AB)^+ = B^+ A^+$ հավասարությունը տեղի ունի, կարելի է գտնել, օրինակ՝ [1, 24] մենագրություններում:

7.6 Աղյուսակով տրված ֆունկցիաների մոտարկումը

Գիցուք հետագոտվում է $y = f(x)$ անհայտ ֆունկցիոնալ կապը x և y մեծությունների միջև, երբ դիտարկումների (չափումների) արդյունքում ստացված են այդ ֆունկցիայի y_0, y_1, \dots, y_N արժեքները իրարից զույգ առ զույգ տարբեր x_0, x_1, \dots, x_N կետերում, որոնք մենք կանվանենք *հանգույցներ*: Պահանջվում է գտնել $y = f(x)$ ֆունկցիայի մոտավոր անալիտիկ ներկայացումը, որը x_i հանգույցներում հնարավոր չափով քիչ տարբերվի y_i փորձարարական տվյալներից:

Մոտարկման եղանակներից մեկը հանրահաշվական բազմանդամային ինտերպոլացիան է: Կարելի է փորձել կառուցել այնպիսի

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \tag{7.6.1}$$

բազմանդամ, որ

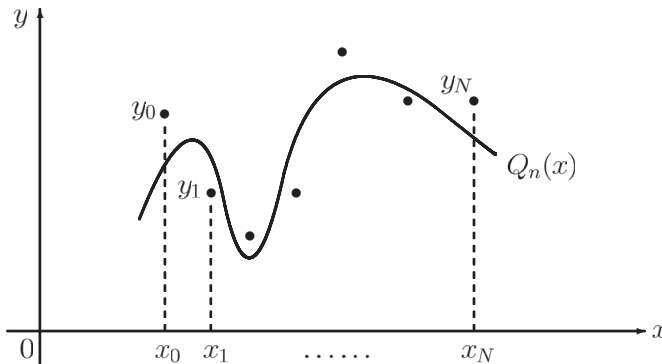
$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N: \tag{7.6.2}$$

Սակայն այս խնդիրը միարժեքորեն լուծելի է, երբ $n = N$: Ուստի այդ մոտեցումը չի կարելի համարել հաջող հետևյալ երկու պատճառով: Նախ, եթե հանգույցների թիվը մեծ է, ապա համապատասխանաբար մեծ կլինի նաև ինտերպոլացիոն բազմանդամի աստիճանը և, որպես հետևանք, մեծաձավալ կլինի այդ բազմանդամի արտահայտությունը: Երկրորդը, քանի որ փորձարարական տվյալները պարունակում են անխուսափելի սխալանքներ, ապա իմաստագրկվում է կորի անցնելու պահանջը հարթության $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, N$ կետերով:

Դրված խնդրի լուծման առավել տարածված եղանակը *փոքրագույն քառակուսիների մեթոդն* է, որի էությունը հետևյալն է: Նշանակենք H_n -ով n -ից ոչ բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների դասը: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $Q_n(x) \in H_n$ բազմանդամ, որ

$$\sum_{i=0}^N [Q_n(x_i) - y_i]^2 = \min_{P_n(x) \in H_n} \sum_{i=0}^N [P_n(x_i) - y_i]^2 \tag{7.6.3}$$

(տե՛ս Նկ. 7.6.1-ը): Հիմնվելով նախորդ դատողությունների վրա, կհամարենք, որ $n < N$ (գործնականում սովորաբար վերցվում է $n \ll N$):



Նկ. 7.6.1. Մոտարկում ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի:

Դիտարկենք

$$\sum_{i=0}^N [P_n(x_i) - y_i]^2$$

գումարը: Տեղադրելով այստեղ $P_n(x)$ բազմանդամի (7.6.1) ներկայացումը՝ կստանանք a_0, a_1, \dots, a_n գործակիցներից կախված

$$\sum_{i=0}^N \left[\sum_{k=0}^n a_k x_i^k - y_i \right]^2 \tag{7.6.4}$$

արտահայտությունը: Ըստ (7.6.3) խնդրի՝ պահանջվում է գտնել այդ արտահայտության փոքրագույն արժեքը:

Մոտենանք մեր խնդրին՝ ելնելով այլ նկատառումներից: Գրենք ինտերպոլացիայի (7.6.2) պահանջները որպես գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n &= y_1, \\ \dots &= \dots \\ a_0 + a_1 x_N + \dots + a_n x_N^n &= y_N : \end{aligned}$$

Ներմուծելով

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

մատրիցը և վեկտորները՝ գրենք համակարգը

$$Aa = y \tag{7.6.5}$$

տեսքով: Փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը այս համակարգի համար $\|Aa - y\|$ նորմի նվազարկման խնդիրն է: Օգտվելով A մատրիցի սահմանումից՝ ունենք

$$\|Aa - y\|^2 = \sum_{i=0}^N [(Aa)_i - y_i]^2 = \sum_{i=0}^N \left[\sum_{k=0}^n a_k x_i^k - y_i \right]^2 :$$

Բաղդատելով ստացված արտահայտությունը (7.6.4) արտահայտության հետ տեսնում ենք, որ (7.6.3) խնդիրը, ըստ էության, փոքրագույն քառակուսիների խնդիրն է (7.6.5) համակարգի համար:

Նորմալ համակարգը (7.6.5) համակարգի համար հետևյալն է.

$$A^T A a = A^T y : \tag{7.6.6}$$

Գծվար չէ նկատել, որ $(N + 1) \times (n + 1)$ չափի A մատրիցի ռանգը հավասար է $n + 1$ -ի: Ուստի (7.6.6) համակարգը ունի միակ լուծում՝

$$a = (A^T A)^{-1} A^T y :$$

Այլ կերպ՝ $a = A^+y$, որտեղ $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$:

Վերջում բերենք մեկ դիտողություն: Գիտումների կամ չափումների արդյունքում ստացված y_0, y_1, \dots, y_N մեծությունները հաճախ ունեն տարբեր ճշտություն: Ուստի իմաստ ունի փոքրացնել

$$\sum_{i=0}^N \omega_i [P_n(x_i) - y_i]^2$$

քառակուսիների գումարը, որտեղ $\omega_i > 0$ մեծությունները x_i հանգույցների, այսպես կոչված, *կշիռներ են*: Որպես կանոն ω_i կշիռները կապում են y_i մեծության ε_i չափման ճշտության հետ (օրինակ, վերցնում են $\omega_i = \varepsilon_i^{-2}$): Այդ դեպքում կորը ավելի լավ կնոտարկի այն փորձարարական կետերը, որոնց կշիռն ավելի մեծ է:

Խնդիրներ և վարժություններ - 7

1. Ապացուցել, որ կամայական $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ մատրիցի և $b \in \mathbb{C}^m$ վեկտորի համար ստորև բերված երկու խնդիրներից մեկը և միայն մեկն ունի լուծում.

$$(1) Ax = b, \quad (2) A^*y = 0, \quad y^*b \neq 0 :$$

2. Լուծել փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը $Ax = b$ համակարգի համար, որտեղ

$$(ա) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad (բ) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

3. Լուծել փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

համակարգի համար:

4. Գիցուք $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ և $\text{rank} A = n$: Ցույց տալ, որ $A^+A = I$:
5. Գիցուք $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ և $\text{rank} A = m$: Ցույց տալ, որ $AA^+ = I$:
6. Գիցուք $A = U\Lambda V^*$ մատրիցի սինգուլյար վերլուծությունն է: Ստանալ հետևյալ մատրիցիների սինգուլյար վերլուծությունները.

$$B_1 = A^+A, \quad B_2 = I - A^+A, \quad B_3 = AA^+, \quad B_4 = I - AA^+ :$$

7. Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, իսկ $U \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $V \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցները ունիտար են: Ապացուցել, որ

$$(UA)^+ = A^+U^*, \quad (AV)^+ = V^*A^+ :$$

8. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1.6 & 0.6 \\ 0 & 1.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Օգտվելով այդ մատրիցի սինգուլյար վերլուծությունից՝ գտնել A^+ -ը:

9. Դիցուք $A = \sum_{i=1}^k A_i$, ընդ որում՝ $A_i A_j^* = 0$ և $A_i^* A_j = 0$, երբ $i \neq j$: Ապացուցել, որ

$$A^+ = \sum_{i=1}^k A_i^+ :$$

10. Արտածել $(AA^*)^+ = (A^+)^* A^+$ հավասարությունը:

11. Ստանալ հետևյալ հավասարությունները.

$$A^+ = A^*(AA^*)^+, \quad A^+ = (A^*A)^+ A^* :$$

12. Դիցուք ունենք մատրիցի (6.6.1) վերլուծությունն ըստ «օրթոգոնալ ուղղությունների»՝ $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^*$: Ապացուցել, որ

$$A^+ = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1} v_i u_i^* :$$

13. Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$: Ապացուցել, որ

$$\|I - AA^+\|_F = \min_{X \in \mathbf{C}^{n \times m}} \|I - AX\|_F :$$

14. Տրված են

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sigma & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (\sigma > 0, \varepsilon > 0)$$

մատրիցները: Ցույց տալ, որ $\|B - A\|_2 = \varepsilon$, սակայն $\|B^+ - A^+\|_2 > \frac{1}{\varepsilon}$:

15. Ապացուցել, որ $(AB)^+ = B^+ A^+$ հավասարությունը ճիշտ է, երբ A և B մատրիցները լրիվ ռանգի մատրիցներն են:

16. Ստանալով կմախքային վերլուծությունը՝ գտնել A^+ -ը հետևյալ մատրիցների համար.

$$(ա) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (բ) A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} :$$

17. Ստանալով կմախքային վերլուծությունը գտնել A^+ -ը հետևյալ մատրիցների համար.

$$(ա) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (բ) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -i \\ i & -i & 1 \end{bmatrix} :$$

18. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & 2m & \dots & mn \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գտնել A^+ -ը:

19. Դիցուք $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ հանգույցներում տրված են $y_0 = 10, y_1 = 1, y_2 = -2, y_3 = -23$ արժեքները: Գտնել $F(x) = a + bx$ ուղիղ գիծը, որը տալիս է աղյուսակային տվյալների լավագույն մոտարկումը ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի:
20. Դիցուք x_0, x_1, \dots, x_N հանգույցներում տրված են y_0, y_1, \dots, y_N արժեքները: Ցույց տալ, որ

$$\bar{x} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N y_i$$

կոորդինատներով (\bar{x}, \bar{y}) կետը գտնվում է փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով կառուցված ուղիղ գծի վրա:

Գլուխ 8

ՊՐՈՅԵԿՏՄԱՆ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

Սույն գլխում նկարագրվում է յուրահատուկ հատկությամբ օժտված մատրիցների մի ընտանիք: Այդ մատրիցները ենթադրում են հետաքրքիր երկրաչափական մեկնաբանություն՝ ենթատարածության վրա վեկտորների պրոյեկտման իմաստով:

8.1 Իդեմպոտենտ մատրիցներ

Կասենք, որ $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը *իդեմպոտենտ է*, եթե $P^2 = P$:

Բացահայտենք այդ մատրիցների հիմնական հատկությունները: Նախ նշենք, որ *չվերասերված իդեմպոտենտ մատրից կարող է լինել միայն միավոր մատրիցը*: Իրոք, բազմապատկելով $P^2 = P$ հավասարության երկու կողմը P^{-1} մատրիցով, կստանանք $P = I$: Բերենք վերասերված իդեմպոտենտ մատրիցների օրինակներ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix}:$$

Այնուհետև, եթե P -ն *իդեմպոտենտ մատրից է*, ապա P^* մատրիցը *նույնպես իդեմպոտենտ է*: Դա ակնհայտ է, քանի որ $(P^*)^2 = (P^2)^* = P^*$:

Թեորեմ 8.1.1 : *Եթե P -ն իդեմպոտենտ մատրից է, ապա $I - P$ մատրիցը նույնպես իդեմպոտենտ է, ընդ որում՝*

$$\ker(I - P) = \operatorname{im} P, \quad (8.1.1)$$

$$\operatorname{im}(I - P) = \ker P : \quad (8.1.2)$$

Ապացույց: Պնդման առաջին մասը հեշտությամբ ապացուցվում է: Իրոք,

$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P :$$

Ստանանք (8.1.1) հավասարությունը: Գիցուք $x \in \ker(I - P)$, այսինքն՝ $(I - P)x = 0$: Այդ դեպքում $Px = x$, իսկ դա նշանակում է, որ $x \in \operatorname{im} P$: Հակառակը, դիցուք $x \in \operatorname{im} P$, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի y վեկտոր, որ $x = Py$: Այդ դեպքում՝

$$Px = P^2y = Py = x,$$

որտեղից հետևում է, որ $(I - P)x = 0$:

Ինչ վերաբերում է (8.1.2) հավասարությանը, ապա այն (8.1.1) հավասարության ակնհայտ հետևանք է: \square

Վերցնենք կամայական $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտոր և ներկայացնենք այն

$$x = (I - P)x + Px = x_1 + x_2 \quad (8.1.3)$$

գումարի տեսքով, որտեղ $x_1 \equiv (I - P)x$ և $x_2 \equiv Px$: Պարզ է, որ $x_2 \in \text{im}P$: Այնուհետև, հաշվի առնելով (8.1.2) առնչությունը, կստանանք, որ

$$x_1 = (I - P)x \in \text{im}(I - P) = \ker P :$$

Հատուկ նշենք, որ $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի ներկայացումը

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \ker P, \quad x_2 \in \text{im}P \quad (8.1.4)$$

գումարի տեսքով միակն է: Գիցուք զոյություն ունի նույն վեկտորի մի այլ ներկայացում.

$$x = y_1 + y_2, \quad y_1 \in \ker P, \quad y_2 \in \text{im}P :$$

Այդ դեպքում $Px = Px_1 + Px_2 = Px_2$ և $Px = Py_1 + Py_2 = Py_2$: Որպես հետևանք՝ $P(x_2 - y_2) = 0$: Քանի որ $x_2 - y_2 \in \text{im}P$, ապա $x_2 - y_2 \in \ker(I - P)$, այսինքն՝ $(I - P)(x_2 - y_2) = 0$: Արդյունքում հանգում ենք

$$(x_2 - y_2) - P(x_2 - y_2) = 0$$

հավասարությանը, որից հետևում է $x_2 - y_2 = 0$ կամ $x_2 = y_2$ հավասարությունը: Գրանով իսկ նաև $x_1 = y_1$: \square

Այսպիսով, իդեմպոտենտ մատրիցների դեպքում տեղի ունի \mathbb{C}^n տարածության

$$\mathbb{C}^n = \ker P + \text{im}P \quad (8.1.5)$$

վերլուծությունը: Իսկ եթե P մատրիցը նաև հերմիտյան է, ապա

$$\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \text{im}P : \quad (8.1.6)$$

Նշենք, որ (8.1.6) վերլուծությունը ճիշտ է ցանկացած հերմիտյան մատրիցների համար (տե՛ս (2.1.9)-ը):

Թեորեմ 8.1.2 : *Իդեմպոտենտ մատրիցի սեփական արժեքները հավասար են կամ զրոյի, կամ էլ մեկի:*

Ապացույց: Գիցուք λ -ն P իդեմպոտենտ մատրիցի սեփական արժեք է, այսինքն՝ $Px = \lambda x$ ինչ-որ $x \neq 0$ վեկտորի համար: Այդ դեպքում $P^2x = \lambda Px = \lambda^2x$: Մյուս կողմից՝ $P^2x = Px = \lambda x$: Ստացված $\lambda^2x = \lambda x$ հավասարությունից հետևում է, որ $\lambda(\lambda - 1) = 0$: \square

Ակնհայտ է, որ $\ker P$ -ն այլ բան չէ, քան $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ իդեմպոտենտ մատրիցի $\lambda = 0$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածություն, քանի որ

$$Px = 0 \quad \forall x \in \ker P : \tag{8.1.7}$$

Ընդ որում՝

$$g(0) = \dim(\ker P) = n - \text{rank} P \tag{8.1.8}$$

(տե՛ս (2.1.4)-ը): Ինչպես բխում է (8.1.1)-ից, $\text{im} P$ -ն $\lambda = 1$ սեփական արժեքին համապատասխանող մատրիցի սեփական ենթատարածությունն է, այնպես որ

$$Px = x \quad \forall x \in \text{im} P : \tag{8.1.9}$$

Համաձայն (2.1.4)-ի՝ ունենք.

$$g(1) = \dim(\text{im} P) = \text{rank} P : \tag{8.1.10}$$

Թեորեմ 8.1.3 : *Իդեմպոտենտ մատրիցները պարզ կառուցվածքի մատրիցներ են:*

Ապացույց: Դիցուք $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ և $r \equiv \text{rank} P$: Օգտվելով $\lambda = 0$ սեփական արժեքի երկրաչափական պատկերության (8.1.8) արտահայտությունից՝ ընտրենք $\ker P$ ենթատարածության մեջ գծորեն անկախ վեկտորների համակարգ

$$v_1, v_2, \dots, v_{n-r} : \tag{8.1.11}$$

Այնուհետև, (8.1.10)-ին համապատասխան, ընտրենք $\text{im} P$ ենթատարածությունում գծորեն անկախ վեկտորների

$$u_1, u_2, \dots, u_r \tag{8.1.12}$$

համակարգը: Ըստ 3.4.1 թեորեմի՝ (8.1.11) և (8.1.12) վեկտորների միավորումը, այսինքն՝

$$v_1, v_2, \dots, v_{n-r}, u_1, u_2, \dots, u_r$$

համախմբությունը, կազմում է \mathbf{C}^n տարածության բազիս: Ստացանք, որ P մատրիցն ունի n հատ գծորեն անկախ սեփական վեկտոր: \square

Այսպիսով, իդեմպոտենտ մատրիցները պարզ կառուցվածքի մատրիցներ են: Նրանք ունեն երկու սեփական արժեք. $\lambda = 1$ (r պատկերությամբ) և $\lambda = 0$ ($n - r$ պատկերությամբ): Ինչպես բացահայտված էր 5.1.1 թեորեմում, միայն պարզ կառուցվածքի մատրիցներն են նմանության ձևափոխությամբ բերվում անկյունագծային տեսքի: Ուստի մենք կարող ենք գրել բանաձև, որն ընդգրկում է r ռանգի n -րդ կարգի բոլոր իդեմպոտենտ մատրիցները: Դրանք

$$P = S^{-1} \text{diag} [\underbrace{1, 1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-r}] S \tag{8.1.13}$$

տեսքի մատրիցներ են, որտեղ S -ը կամայական չվերասերված մատրից է:

8.2 Պրոյեկտորներ

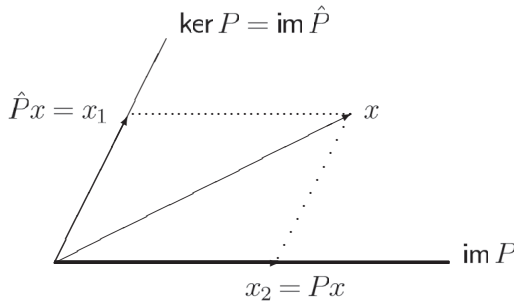
Իդեմպոտենտ մատրիցները անվանում են նաև *պրոյեկտորներ*: Պարզաբանենք, թե ինչ իմաստ է կրում այդպիսի անվանումը:

Հիշեցնենք, որ եթե $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը իդեմպոտենտ է, ապա ըստ 8.1.1 թեորեմի՝ $\hat{P} \equiv I - P$ մատրիցը նույնպես կլինի իդեմպոտենտ:

Նախորդ պարագրաֆում մենք հայտնաբերել ենք \mathbb{C}^n տարածության (8.1.5) վերլուծությունը, որի համաձայն ցանկացած $x \in \mathbb{C}^n$ վեկտոր գրվում է

$$x = x_1 + x_2 \tag{8.2.1}$$

գումարի տեսքով, որտեղ $x_1 \equiv \hat{P}x \in \ker P = \text{im } \hat{P}$ և $x_2 \equiv Px \in \text{im } P$ (տե՛ս (8.1.3)-ը): Վեկտորի (8.2.1) վերլուծությունը սխեմատիկորեն տրված է Նկ. 8.2.1-ում:

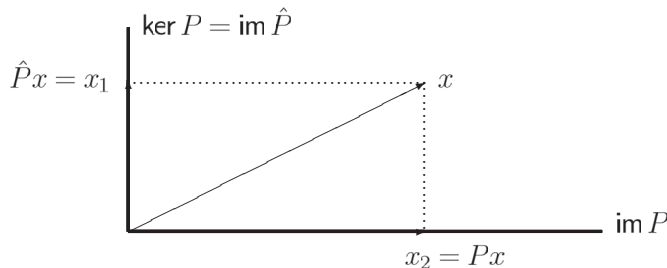


Նկ. 8.2.1. Վեկտորի պրոյեկցիաները $\text{im } P$ և $\ker P$ ենթատարածությունների վրա:

Փաստորեն P մատրիցը *պրոյեկտում է* x վեկտորը $\text{im } P$ ենթատարածության վրա, մինչդեռ \hat{P} մատրիցը *պրոյեկտում է* այդ վեկտորը $\ker P = \text{im } \hat{P}$ ենթատարածության վրա: Ընդ որում՝

$$Px_2 = P^2x = Px = x_2, \quad \hat{P}x_1 = \hat{P}^2x = \hat{P}x = x_1 :$$

Եթե P մատրիցը հերմիտյան է, ապա $\ker P$ և $\text{im } P$ ենթատարածությունները փոխուղղահայաց են ըստ (8.1.6) վերլուծության: Արդյունքում P մատրիցը դառնում է *օրթոգոնալ պրոյեկտոր* $\text{im } P$ -ի վրա, իսկ \hat{P} մատրիցը՝ *օրթոգոնալ պրոյեկտոր* $\ker P$ -ի վրա (Նկ. 8.2.2):



Նկ. 8.2.2. Օրթոգոնալ պրոյեկցիաները $\text{im } P$ և $\ker P$ ենթատարածությունների վրա:

Այսպիսով, *օրթոգոնալ պրոյեկտորը* բնութագրվում է երկու հատկություններով.

$$P^2 = P, \quad P^* = P : \tag{8.2.2}$$

Ներմուծենք C^n տարածության մեջ $\| \cdot \| \equiv \| \cdot \|_2$ վեկտորական նորմը: Կամայական $x \in C^n$ վեկտորի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $\text{im}P$ ենթատարածության վրա իրականացնում է այդ վեկտորի ամենափոքր հեռավորությունը նշված ենթատարածությունից հետևյալ իմաստով.

$$\|x - Px\| = \inf_{u \in \text{im}P} \|x - u\| : \tag{8.2.3}$$

Իրոք, դիցուք $u \in \text{im}P$, այսինքն՝ $u = Pz$ որևէ $z \in C^n$ վեկտորի համար: Այդ դեպքում՝

$$\|x - u\|^2 = \|x - Pz\|^2 = \|x - Px + P(x - z)\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|P(x - z)\|^2,$$

քանի որ $x - Px \in \ker P$, իսկ $P(x - z) \in \text{im}P$: Ուստի, $\|x - u\| \geq \|x - Px\|$ ցանկացած $u \in \text{im}P$ վեկտորի համար, ինչը ապացուցում է (8.2.3) հավասարությունը: Համանմանորեն ապացուցվում է, որ

$$\|x - \hat{P}x\| = \inf_{v \in \ker P} \|x - v\| : \tag{8.2.4}$$

Օրինակ 8.2.1 : Դիցուք C^n տարածության մեջ կան երկու օրթոգոնալ պրոյեկտորներ P_1 և P_2 այնպիսիք, որ $\text{im}P_1 = \text{im}P_2$: Ապացուցենք, որ $P_1 = P_2$:

Ինչպես հետևում է (8.1.6)-ից, այդ դեպքում նաև $\ker P_1 = \ker P_2$: Կամայական $x \in C^n$ վեկտորի համար ունենք.

$$\begin{aligned} \|(P_1 - P_2)x\|^2 &= ((P_1 - P_2)x, (P_1 - P_2)x) = ((P_1 - P_2)^*(P_1 - P_2)x, x) = \\ &= ((P_1 - P_2)^2x, x) = ((P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2)x, x) = \\ &= ((P_1 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2)x, x) = (P_1(I - P_2)x, x) + (P_2(I - P_1)x, x) : \end{aligned}$$

Օգտվելով (8.1.2) հավասարությունից, կստանանք, որ

$$(I - P_2)x \in \text{im}(I - P_2) = \ker P_2 = \ker P_1,$$

այսինքն՝ $P_1(I - P_2)x = 0$: Համանմանորեն՝ $P_2(I - P_1)x = 0$: Այսպիսով, $\|(P_1 - P_2)x\| = 0$ ցանկացած $x \in C^n$ վեկտորի համար, այսինքն՝ $P_1x = P_2x$, ուստի $P_1 = P_2$: \square

8.3 Պրոյեկցիա ենթատարածության վրա

Նշենք օրթոգոնալ պրոյեկտման մատրիցների ևս մեկ ընտանիք: Դիցուք $A \in C^{m \times n}$: Յույց տանք, որ $P = AA^+ \in C^{m \times m}$ մատրիցն *օրթոգոնալ պրոյեկտոր է* $\text{im}A$ ենթատարածության վրա:

Օգտվելով Մուր-Պենրոուզի հակադարձման (7.4.7) հայտնի հատկություններից՝ ունենք.

$$P^2 = AA^+AA^+ = AA^+ = P, \quad P^* = (AA^+)^* = AA^+ = P :$$

Մնում է ցույց տալ, որ $\text{im}P = \text{im}A$: Իրոք, դիցուք $y \in \text{im}P$, այսինքն՝ $y = Pz$ մի որևէ $z \in \mathbf{C}^m$ վեկտորի համար: Այդ դեպքում $y = AA^+z = A(A^+z)$, իսկ դա նշանակում է, որ $y \in \text{im}A$: Հակառակը, դիցուք $y \in \text{im}A$, այսինքն՝ $y = Ax$ ինչ-որ $x \in \mathbf{C}^n$ վեկտորի համար: Նորից օգտվելով (7.4.7) Պենրոուզի պայմաններից՝ կստանանք

$$Py = PAx = AA^+Ax = Ax = y,$$

այսինքն՝ $y \in \text{im}P$:

Դիտարկենք \mathbf{C}^m տարածության որևէ n -չափանի L ենթատարածություն, որտեղ $n < m$: Ընտրենք L -ում մաքսիմալ գծորեն անկախ վեկտորների a_1, a_2, \dots, a_n համակարգը: Փաստորեն $L = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: Կազմենք

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m \times n} \quad (8.3.1)$$

մատրիցը: Պարզ է, որ $\text{im}A = L$ (տե՛ս (2.1.3)-ը): Ուստի $P = AA^+$ մատրիցն օրթոգոնալ պրոյեկտոր է L ենթատարածության վրա: Քանի որ A մատրիցի ռանգը հավասար է n -ի, ապա, ըստ (7.2.6) բանաձևի, կարող ենք գրել, որ $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$: Այսպիսով, ստանում ենք L ենթատարածության վրա օրթոգոնալ պրոյեկտորի

$$P = A(A^*A)^{-1}A^* \quad (8.3.2)$$

արտահայտությունը:

Օրինակ 8.3.1 : Դիցուք վեկտորների երեքչափանի տարածության մեջ դիտարկվում է $L = \text{span}\{a_1, a_2\}$ ենթատարածությունը, որտեղ

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

Կառուցենք L ենթատարածության վրա օրթոգոնալ պրոյեկտման մատրիցը: Համաձայն (8.3.1)-ի՝ ունենք

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Օգտվելով (8.3.2) բանաձևից՝ կստանանք որոնելի պրոյեկտորը.

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} : \quad \square$$

4. Ապացուցել, որ ցանկացած $P \neq 0$ պրոյեկտորի համար $\|P\|_2 \geq 1$: Պարզել, թե երբ $\|P\|_2 = 1$:
5. Գիցուք $u^*u = 1$: Ցույց տալ, որ $P = uu^*$ մատրիցն օրթոգոնալ պրոյեկտոր է, որի ռանգը հավասար է մեկի:
6. Պարզել կապը օրթոգոնալ պրոյեկտորի և արտացոլման մատրիցի միջև:
7. Ապացուցել, որ $P = I - AA^+$ մատրիցն օրթոգոնալ պրոյեկտոր է $\ker A^*$ -ի վրա:
8. Ցույց տալ, որ A^+A և $I - A^+A$ մատրիցներն օրթոգոնալ պրոյեկտորներ են: Նշել այն ենթատարածությունները, որոնց վրա կատարվում է պրոյեկտում:
9. Ապացուցել, որ եթե P -ն օրթոգոնալ պրոյեկտոր է, ապա $P^+ = P$:
10. Գտնել xy հարթությունը y առանցքի վրա պրոյեկտող մատրիցը:
11. Գտնել xy հարթությունը $x = y$ ուղիղ գծի վրա պրոյեկտող մատրիցը:

Գլուխ 9

ՄԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՏԵՂԱՅՆԱՑՈՒՄ

Շատ խնդիրների լուծման ընթացքում մասնակցում են մատրիցներ և նրանց սեփական արժեքները: Ընդ որում, քիչ չեն դեպքերը, երբ առաջանում է սեփական արժեքների տեղայնացման անհրաժեշտություն, այլ կերպ ասած՝ կոմպլեքս հարթության այնպիսի տիրույթների որոշում, որոնցում դրանք գտնվում են: Օրինակ՝ համաձայն (4.2.15) գնահատականի A մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են զրո կենտրոնով և $\|A\|$ շառավիղով շրջանի ներսում, ընդ որում, մատրիցային նորմը այստեղ կամայական է: Սակայն սա շատ կոպիտ տեղայնացում է: Այս առնչությամբ առաջանում է հետևյալ հարցը. արդյո՞ք չի կարելի առավել ճշգրիտ նշել բոլոր սեփական արժեքները պարունակող կամ, ընդհակառակը, ոչ մի արժեք չպարունակող տիրույթները: Ինչպես մենք կհամոզվենք ստորև, դա հնարավոր է:

Սեփական արժեքների տեղայնացման խնդրի հետ անմիջականորեն կապված է մատրիցների հակադարձման խնդիրը: Ինչպես հայտնի է, մատրիցը չվերասերված է, և հետևաբար հակադարձելի է, այն և միայն այն դեպքում, երբ զրոն նրա համար սեփական արժեք չէ: Ուստի որոշակի հետաքրքրություն են ներկայացնում այն պայմանները, որոնք բոլոր սեփական արժեքները պարունակող տիրույթից կբացառեին զրոն: Մենք այս հարցը կուսումնասիրենք անկյունագծային գերիշխումով մատրիցների դեպքում, որոնք հաճախ են հանդիպում կիրառություններում:

9.1 Գերշտորինի շրջանները

Ներկայացնենք տրված $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը $A = D + E$ գումարի տեսքով, որտեղ $D = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$: Ակնհայտ է, որ D մատրիցի սեփական արժեքները նրա անկյունագծային տարրերն են: Կազմենք $A_\varepsilon \equiv D + \varepsilon E$ մատրից, որտեղ $\varepsilon \in \mathbb{C}$: Այդ մատրիցը կարելի է դիտարկել որպես D անկյունագծային մատրիցի *խտտորում*, ընդ որում՝ $A_0 = D$ և $A_1 = A$: Հայտնի է, որ մատրիցի սեփական արժեքները անընդհատորեն կախված են նրա տարրերից: Ուստի բնական է ենթադրել, որ բավականաչափ փոքր ε -ի դեպքում A_ε մատրիցի սեփական արժեքները կգտնվեն կոմպլեքս հարթության $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ կետերի որոշ փոքր շրջակայքերում:

Որքանով է փոքր կամ մեծ D մատրիցի *խտտորումը*, երբ $\varepsilon = 1$, առանձին հարց է: Համենայն դեպս, վերը կատարված դատողությունները բույլ են տալիս առավել հեշտ հասկանալ ստորև բերվող *Գերշգորհնի թեորեմի*¹ էությունը: Նախ ներմուծենք անհրաժեշտ նշանակումներ: Տրված $A = [a_{ij}] \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցի համար սահմանենք

$$r_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.1.1)$$

մեծությունները: Այնուհետև, դիտարկենք կոմպլեքս հարթության հետևյալ շրջանները.

$$D_i \equiv \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (9.1.2)$$

Թեորեմ 9.1.1 : *A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները գտնվում են*

$$G(A) \equiv \bigcup_{i=1}^n D_i \quad (9.1.3)$$

շրջանների միավորման մեջ: Բացի այդ, եթե k հատ շրջան կազմում են կապակցված տիրույթ, որը չի հատվում մնացած n - k շրջանների հետ, ապա այդ տիրույթում գտնվում են A մատրիցի ճիշտ k հատ սեփական արժեք:

Ապացույց: Նախքան թեորեմի ապացույցին անցնելը, ասենք, որ սույն գլխի ընթացքում մենք կօգտագործենք l_∞ վեկտորական նորմը, այսինքն՝

$$\|x\| \equiv \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (9.1.4)$$

որտեղ x_i մեծությունները x վեկտորի բաղադրիչներն են:

Դիցուք λ -ն A մատրիցի սեփական արժեք է և $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T \neq 0$ վեկտորը համապատասխան սեփական վեկտորն է: Ըստ ներմուծված նորմի՝ գոյություն ունի x վեկտորի p համարով բաղադրիչ, որի համար $|x_p| = \|x\| \neq 0$: Հավասարեցնելով Ax և λx վեկտորների p -րդ բաղադրիչները՝ գրենք

$$(\lambda - a_{pp})x_p = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n a_{pj}x_j$$

հավասարությունը: Վերջինից կստանանք

$$|\lambda - a_{pp}| |x_p| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n a_{pj}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| |x_j| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| \right) |x_p| = r_p |x_p| \quad (9.1.5)$$

անհավասարությունը, որից հետևում է, որ $|\lambda - a_{pp}| \leq r_p$: Այսպիսով, կարող ենք ասել, որ λ -ն պատկանում է D_p շրջանին և ուստի՝ $G(A)$ տիրույթին:

¹Գերշգորհն Սեմյոն Արոնովիչ (1901-1933) – խորհրդային գիտնական, կիրառական մաթեմատիկայի բնագավառի մասնագետ:

Անցնենք թեորեմի երկրորդ մասին: Գիցուք $D = \text{diag} [a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$: Դիտարկենք

$$A(t) \equiv tA + (1-t)D, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{9.1.6}$$

մատրիցների ընտանիքը: Ունենք $A(0) = D$ և $A(1) = A$: Ըստ (9.1.6) սահմանման $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ մատրիցի տարրերը հետևյալն են. $a_{ii}(t) = a_{ii}$ և $a_{ij}(t) = ta_{ij}$, եթե $i \neq j$: Համաձայն (9.1.1)-ի՝ սահմանենք

$$r_i(t) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}(t)|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

մեծությունները: Ընդ որում՝

$$r_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |ta_{ij}| = t \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = tr_i, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Այնուհետև դիտարկենք

$$D_i(t) \equiv \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}(t)| \leq r_i(t)\} = \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq tr_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

շրջանները: Ակնհայտ է, որ $D_i(t) \subseteq D_i$: Գծվար չէ նկատել, որ t -ի աճման հետ մեկտեղ $D_i(t)$ շրջանները անընդհատորեն «աճում են»՝ սկսած $D_i(0) = a_{ii}$ «շրջանից» (երբ $t = 0$) և վերջացրած $D_i(1) = D_i$ շրջանով (երբ $t = 1$): Ընդ որում՝

$$G(A(t)) \equiv \bigcup_{i=1}^n D_i(t) \subseteq \bigcup_{i=1}^n D_i = G(A) :$$

Առանց ընդհանրության սահմանափակման կարող ենք համարել, որ հենց առաջին k հատ D_1, D_2, \dots, D_k շրջանները կազմում են կապակցված տիրույթ

$$G_k(A) \equiv \bigcup_{i=1}^k D_i,$$

որը չի հասվում

$$\bar{G}_k(A) \equiv \bigcup_{i=k+1}^n D_i$$

մնացած շրջանների միավորման հետ: Համապատասխանաբար, t -ի ամեն մի արժեքի համար, որտեղ $0 \leq t \leq 1$, ունենք՝

$$G_k(A(t)) \equiv \bigcup_{i=1}^k D_i(t) \subseteq G_k(A), \quad \bar{G}_k(A(t)) \equiv \bigcup_{i=k+1}^n D_i(t) \subseteq \bar{G}_k(A) :$$

Ընդ որում՝ $G(A(t)) = G_k(A(t)) \cup \bar{G}_k(A(t))$:

Համարակալենք $A(t)$ մատրիցի $\lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ սեփական արժեքներն այնպես, որ $\lambda_i(0) = a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$: Քանի որ $A(1) = A$, ապա $\lambda_i(1), i = 1, 2, \dots, n$ թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են: Ըստ վերը ապացուցված թեորեմի առաջին մասի $\lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ սեփական արժեքները գտնվում են $G(A(t))$ բազմության մեջ:

Երբ $t = 0$, մենք ունենք $G_k(A)$ տիրույթին պատկանող ճիշտ k հատ սեփական արժեք՝ $\lambda_i(0) = a_{ii}, i = 1, 2, \dots, k$: Ամեն մի i -ի համար $\lambda_i(t)$ սեփական արժեքները անընդհատորեն փոփոխվում են t -ի աճման հետ մեկտեղ և գծում են կոնպլեքս հարթության վրա անընդհատ կոր, որը սկսվում է $\lambda_i(0) = a_{ii}$ կետում և վերջանում է $\lambda_i(1)$ կետում: Պարզ է, որ $\lambda_i(1)$ կետը չի կարող հայտվել $\bar{G}(A)$ բազմությունում, քանի որ հակառակ դեպքում նշված կորի վրա կգտնվեն $G(A)$ տիրույթից դուրս գտնվող կետեր: \square

Ասենք, որ (9.1.3)-ում սահմանված $G(A)$ բազմությունը անվանում են *Գերշգորհինի տիրույթ*, իսկ D_i շրջանները՝ *Գերշգորհինի շրջաններ*:

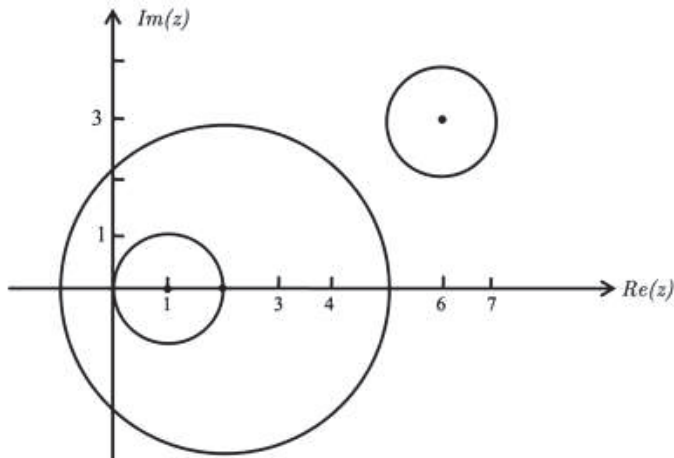
Օրինակ 9.1.1 : Դիտարկենք

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 + 3i \end{bmatrix}$$

մատրիցը, որի սեփական արժեքներն են՝

$$\lambda_1 = 1.0945 - 0.2113i, \quad \lambda_2 = 1.5615 + 0.4477i, \quad \lambda_3 = 6.3440 + 2.7636i :$$

Նկ. 9.1.1-ում պատկերված են այդ մատրիցի Գերշգորհինի շրջանները:



Նկ. 9.1.1. Գերշգորհինի շրջանները:

Սեփական արժեքներից երկուսը գտնվում են $z = 1$ կենտրոնով շրջանում, իսկ մեկը՝ $z = 6 + 3i$ կենտրոնով շրջանում: \square

Այսպիսով, ըստ Գերշգորհինի թեորեմի $\text{sp}A \subset G(A)$: Քանի որ A և A^T մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են, ապա ճիշտ է նաև, որ $\text{sp}A \subset G(A^T)$: Ուստի՝

$$\text{sp}A \subset G(A) \cap G(A^T) : \tag{9.1.7}$$

Ընդհանրապես ասած, $G(A)$ և $G(A^T)$ տիրույթները չեն համընկնում: Ուստի (9.1.7)-ում մենք ստանում ենք մատրիցի սեփական արժեքների ավելի ճշգրիտ տեղայնացում:

Նկարագրենք մի հնար, որը հաճախ թույլ է տալիս ճշգրտել սեփական արժեքների տեղայնացումը: Հայտնի է, որ նման մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են (թեորեմ 2.2.1): Ուստի կամայական չվերասերված S մատրիցի համար

$$\text{sp}A \subset G(S^{-1}AS) :$$

Ավելին,

$$\text{sp}A \subset \bigcap_S G(S^{-1}AS),$$

որտեղ հատումը վերցվում է ըստ բոլոր S չվերասերված մատրիցների:

Ընտրելով S մատրիցը հարմար ձևով՝ որոշ դեպքերում հաջողվում է ստանալ սեփական արժեքների ավելի ճշգրիտ գնահատականները: Գիտարկենք առավել պարզ դեպքը, երբ որպես S վերցվում է

$$D = \text{diag} [d_1, d_2, \dots, d_n]$$

անկյունագծային մատրից, որտեղ $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$: Այստեղ չի առաջանում մատրիցի շրջման խնդիր և $D^{-1}AD$ մատրիցի տարրերը հեշտությամբ որոշվում են.

$$D^{-1}AD = \left[a_{ij} \frac{d_j}{d_i} \right]_{n \times n} :$$

Գժվար չէ նկատել, որ մատրիցի անկյունագծային տարրերը չեն փոխվում, այսինքն՝ Գերշգորհինի շրջանների կենտրոնները մնում են իրենց տեղերում: Գիմելով 9.1.1 թեորեմին՝ կստանանք, որ

$$\text{sp}A \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j |a_{ij}| \right\} : \tag{9.1.8}$$

Օրինակ 9.1.2 : Տրված

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

մատրիցն ունի երկու սեփական արժեք՝ $\lambda_1 = 1$ և $\lambda_2 = 2$: Գերշգորհինի թեորեմի անմիջական կիրառումը տալիս է սեփական արժեքների հետևյալ գնահատականները. $|z - 1| \leq 1$ և $z = 2$: Միևնույն ժամանակ $d_1 > 0$ և $d_2 > 0$ լրացուցիչ պարամետրերի ներմուծումը տալիս է ավելի ճշգրիտ գնահատականներ. $|z - 1| \leq d_2/d_1$ և $z = 2$: \square

Ստորև մենք մեկ անգամ ևս կհամոզվենք շարադրված հնարի արդյունավետության մեջ:

9.2 Անկյունագծային գերիշխումով մատրիցներ -1

Ասում են, որ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցն ունի *անկյունագծային գերիշխում*, եթե

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (9.2.1)$$

Եթե բոլոր անհավասարությունները խիստ են, այսինքն՝

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2.2)$$

այս ասում են, որ A մատրիցն օժտված է *խիստ անկյունագծային գերիշխմամբ*:

Անկյունագծային գերիշխումով մատրիցները բավականին հաճախ են հանդիպում կիրառություններում: Որոշ դեպքերում այդ հատկությունը ապահովում է մատրիցների չվերասերվածությունը, ինչպես նաև այդպիսի մատրիցներով գծային համակարգերի խտերացիոն մեթոդների զուգամիտությունը:

Նշենք, որ անկյունագծային գերիշխումը չի ապահովում մատրիցի չվերասերվածությունը: Օրինակ՝ ստորև բերված

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցներից առաջինը չվերասերված է, իսկ երկրորդը՝ ոչ:

Միանգամից ասենք, որ *խիստ անկյունագծային գերիշխումով մատրիցները չվերասերված են*: Իրոք, եթե (9.2.2) պայմանները գրենք $|a_{ii}| > r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ տեսքով, այս կտեսնենք, որ G -երջգործի շրջաններից ոչ մեկը չի պարունակում $z = 0$ կետը: Դա անմիջապես բխում է D_i շրջանների (9.1.2) սահմանումից: Ուստի, ըստ 9.1.1 թեորեմի, գրոն մատրիցի սեփական արժեքը չէ: Միաժամանակ նշենք, որ խիստ անկյունագծային գերիշխումը մատրիցի չվերասերվածության անհրաժեշտ պայման չէ: Օրինակ՝

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը չվերասերված է: Խիստ անկյունագծային գերիշխման պահանջը, որպես մատրիցի չվերասերվածության բավարար պայման, կարելի է որոշ չափով թուլացնել:

Թեորեմ 9.2.1 *Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի անկյունագծային տարրերը հավասար չեն գրոյի: Այնուհետև, դիցուք որևէ k -ի համար $|a_{kk}| = r_k$ և $|a_{ii}| > r_i$, եթե $i \neq k$: Այդ դեպքում գրոն A մատրիցի սեփական արժեք չէ, և ուստի, մատրիցը չվերասերված է:*

Ապացույց: Ներմուծենք լրացուցիչ պարամետրեր. $d_k = 1 + \varepsilon$, որտեղ $\varepsilon > 0$, և $d_i = 1$, երբ $i \neq k$: Ըստ (9.1.8) բանաձևի՝ ունենք.

$$\text{sp}A \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j |a_{ij}| \right\} = \\ \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{kk}| \leq \frac{1}{d_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n d_j |a_{kj}| \right\} \cup \left[\bigcup_{i \neq k} \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j |a_{ij}| \right\} \right] :$$

Ըստ լրացուցիչ պարամետրերի ընտրության՝

$$\text{sp}A \subset \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{kk}| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right\} \cup \left[\bigcup_{i \neq k} \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j |a_{ij}| \right\} \right] :$$

Վերջին արտահայտության մեջ

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| = r_k \quad \text{և} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_j |a_{ij}| = r_i + \varepsilon |a_{ik}| :$$

Կատանանք, որ

$$\text{sp}A \subset \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{kk}| \leq \frac{r_k}{1 + \varepsilon} \right\} \cup \left[\bigcup_{i \neq k} \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i + \varepsilon |a_{ik}| \right\} \right] :$$

Անցնենք ապացուցման ավարտական փուլին: Կամայական դրական ε -ի համար

$$\frac{r_k}{1 + \varepsilon} < r_k = |a_{kk}| :$$

Երբ $i \neq k$, ապա թեորեմի $r_i < |a_{ii}|$ պայմանից $\varepsilon > 0$ մեծությունը կարելի է ընտրել այնպես, որ

$$r_i + \varepsilon |a_{ik}| < |a_{ii}| :$$

Այսպիսով, ոչ մի Գերշգորինի շրջան չի պարունակում $z = 0$ կետը: Ուստի, զրոն A մատրիցի սեփական արժեքը չէ: \square

Դնենք հետևյալ հարցը. *կլինի արդյոք չվերասերված անկյունագծային գերիշխումով մատրիցը, եթե խիստ անհավասարությունը տեղի ունի մատրիցի գոնե մեկ տողի համար*: Պարզվում է, որ միշտ չէ որ դա այդպես է: Օրինակ,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցներից առաջինը չվերասերված է, իսկ երկրորդը՝ ոչ: Պարզենք, թե ինչ լրացուցիչ հատկություններով պետք է օժտված լինի մատրիցը որպեսզի լինի չվերասերված:

Նախ նշենք, որ եթե $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցն ունի անկյունագծային գերիշխումով $|a_{ii}| \geq r_i, i = 1, 2, \dots, n$, ապա $z = 0$ կետը չի կարող լինել $G(A)$ Գերշգորինի տիրույթի ներքին կետ, բայց կարող է լինել եզրային կետ:

Բերենք մեկ պարզ պնդում:

Լեմմա 9.2.1 Եթե $z \in \mathbb{C}$ կետը $G(A)$ տիրույթի ներքին կետը չէ, ապա

$$|z - a_{ii}| \geq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (9.2.3)$$

Ապացույց: Ենթադրենք, որևէ j -ի համար $|z - a_{jj}| < r_j$: Ուրեմն, z կետը գտնվում է D_j շրջանի ներսում, ուստի և $G(A)$ տիրույթի ներքին կետ է: Իսկ դա հակասում է լեմմայի պայմանին: \square

Հետագայում ∂D_i -ով, $1 \leq i \leq n$ կնշանակենք D_i Գերշգործի ներքին եզրը, իսկ $\partial G(A)$ -ով՝ $G(A)$ տիրույթի եզրը:

Լեմմա 9.2.2 Գիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի λ սեփական արժեքը պատկանում է Գերշգործի տիրույթի $\partial G(A)$ եզրին, իսկ $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T \neq 0$ վեկտորը համապատասխան սեփական վեկտորն է: Եթե $|x_p| = \|x\|$, ապա

(ա) $\lambda \in \partial D_p$,

(բ) եթե $a_{pj} \neq 0$ որևէ $j \neq p$ -ի համար, ապա $|x_j| = \|x\|$:

Ապացույց: Քանի որ λ -ն $G(A)$ տիրույթի ներքին կետը չէ, ապա ըստ 9.2.1 լեմմայի

$$|\lambda - a_{ii}| \geq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (9.2.4)$$

Հիշենք, որ 9.1.1 թեորեմը ապացուցելիս մենք ստացել էինք (9.1.5) անհավասարությունը, որն այժմ կօգտագործենք: Գրենք այն.

$$|\lambda - a_{pp}| |x_p| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| |x_p| = r_p |x_p|: \quad (9.2.5)$$

Այս անհավասարությունից հետևում է, որ $|\lambda - a_{pp}| \leq r_p$: Հաշվի առնելով նաև (9.2.4) անհավասարությունները, կստանանք, որ $|\lambda - a_{pp}| = r_p$, այսինքն՝ $\lambda \in \partial D_p$:

Անցնենք լեմմայի երկրորդ մասի ապացուցմանը: Քանի որ $|\lambda - a_{pp}| = r_p$, ապա (9.2.5) անհավասարության մեջ մենք փաստորեն ունենք

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| |x_j| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| |x_p|$$

կամ

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| (|x_p| - |x_j|) = 0$$

հավասարությունը: Բոլոր գումարելիները ոչ բացասական մեծություններ են: Ուստի, $|a_{pj}| (|x_p| - |x_j|) = 0$ բոլոր $j \neq p$ ինդեքսների համար: Հետևաբար, եթե $a_{pj} \neq 0$, ապա $|x_j| = |x_p| = \|x\|$. \square

Լեմմա 9.2.3 *Գիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի λ սեփական արժեքը պատկանում է Գերշգորիների տիրույթի $\partial G(A)$ եզրին, իսկ $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T \neq 0$ վեկտորը համապատասխան սեփական վեկտորն է: Ենթադրենք, որ A մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար չեն գրոյի: Այդ դեպքում*

(ա) $\lambda \in \partial D_j, j = 1, 2, \dots, n,$

(բ) $|x_j| = \|x\|, j = 1, 2, \dots, n:$

Ապացույց: Անհայտ է, որ գոյություն ունի այնպիսի p ինդեքս, որի համար $|x_p| = \|x\|$: Ընդ որում՝ $\lambda \in \partial D_p$ (լեմմա 9.2.2): Այնուհետև, բոլոր $j \neq p$ արժեքների համար $a_{pj} \neq 0$: Ուստի, $|x_j| = \|x\|$ և $\lambda \in \partial D_j$ (լեմմա 9.2.2): \square

Թեորեմ 9.2.2 *Գիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար չեն գրոյի: Այնուհետև, դիցուք $|a_{ii}| \geq r_i, i = 1, 2, \dots, n$ և գոյություն ունի այնպիսի k ինդեքս, որի համար $|a_{kk}| > r_k$: Այդ դեպքում գրոն A մատրիցի սեփական արժեքը λ է, և ուստի այդ մատրիցը չվերասերված է:*

Ապացույց: Ենթադրենք, որ $\lambda = 0$ թիվը մատրիցի սեփական արժեք է: Ընդ որում՝ $\lambda = 0$ չի կարող լինել $G(A)$ տիրույթի ներքին կետ, քանի որ դա կնշանակի, որ $\lambda = 0$ կետը գտնվում է ինչ-որ D_j շրջանի ներսում, այսինքն՝ $|0 - a_{jj}| < r_j$: Կստանանք, որ $|a_{jj}| < r_j$, ինչը հակասում է թեորեմի պայմանին:

Այսպիսով, հանգում ենք $\lambda = 0 \in \partial G(A)$ եզրակացությանը: Այդ դեպքում, ըստ 9.2.3 լեմմայի, բոլոր $j = 1, 2, \dots, n$ արժեքների համար $\lambda = 0 \in \partial D_j$, այսինքն՝ $|0 - a_{jj}| = r_j$ կամ $|a_{jj}| = r_j$: Իսկ դա հակասում է թեորեմի այն ենթադրությանը, որ $|a_{kk}| > r_k$: \square

Նոր ապացուցված թեորեմի էական սահմանափակումն այն է, որ ենթադրվում է մատրիցի բոլոր տարրերի գրո չլինելը: Պարզվում է, որ կարելի է հրաժարվել այդ պահանջից, եթե ավելի լիակատար օգտագործենք 9.2.2 լեմմայում պարունակվող տեղեկությունը:

9.3 Անկյունագծային գերիշխումով մատրիցներ-2

Պարզվում է, որ երբ տեղի ունի երաշխավորված խիստ անհավասարություն մատրիցի միայն մեկ տողի համար, ապա այդ մատրիցի չվերասերվածությունը կապված է նրա *ոչ գրոյական* արտանկյունագծային տարրերի դասավորության հետ: Ընդ որում, այդ տարրերի կոնկրետ արժեքները էական չեն: Այս պնդումը հիմնավորելու նպատակով ներմուծենք մատրիցի հետ զուգորդված գրաֆի գաղափարը:

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի կողմնորոշված գրաֆ կանվանենք V_1, V_2, \dots, V_n գագաթներով $\Gamma(A)$ գրաֆը, որում V_i -ից V_j , $i \neq j$ ձգվող $\widehat{V_i V_j}$ աղեղը առկա է այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_{ij} \neq 0$:

Տանք $\Gamma(A)$ կողմնորոշված գրաֆի հետ կապված ևս մի քանի սահմանում:

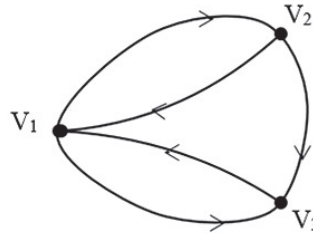
Կողմնորոշված ուղի V_i գագաթից V_j գագաթ, որտեղ $i \neq j$, կոչվում է

$$V_i \widehat{V}_{k_1}, V_{k_1} \widehat{V}_{k_2}, \dots, V_{k_{m-1}} \widehat{V}_j \tag{9.3.1}$$

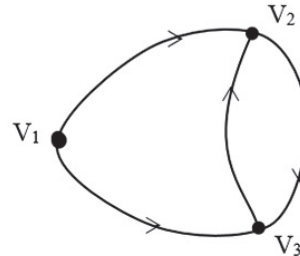
աղեղների հաջորդականությունը: $V_i \rightarrow V_j$ գրառումը հենց կնշանակի V_i -ից V_j ուղու առկայությունը: Կողմնորոշված ուղու երկարություն կանվանենք նրանում գտնվող աղեղների թիվը: Օրինակ, (9.3.1) ուղու երկարությունը հավասար է m -ի: Ուղու երկարությունը նշելու համար կօգտագործենք $V_i \xrightarrow{m} V_j$ գրառումը: Պարզ է, որ գրաֆի աղեղը 1 երկարության ուղի է:

Ակիայտ է, որ եթե $\Gamma(A)$ գրաֆի երկու գագաթների միջև կա կողմնորոշված ուղի, ապա կա նաև ուղի, որի երկարությունը $\leq n - 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Նկ. 9.3.1. Մատրիցները և նրանց կողմնորոշված գրաֆները:

Մատրիցի $\Gamma(A)$ կողմնորոշված գրաֆը կոչվում է *խիստ կապակցված*, եթե նրա կամայական երկու տարբեր V_i և V_j գագաթներ միացված են կողմնորոշված ուղիով, որը սկսվում է V_i գագաթում և ավարտվում է V_j -ում: Առաջին գրաֆը Նկ. 9.3.1-ում խիստ կապակցված է, իսկ երկրորդը՝ ոչ:

Անդրադառնալով 9.2.3 լեմմային՝ փորձենք էապես թուլացնել մատրիցի հանդեպ ներկայացվող պահանջները:

Լեմմա 9.3.1 : Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի λ սեփական արժեքը պատկանում է Գերշգորիների տիրույթի $\partial G(A)$ եզրին, իսկ $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \neq 0$ վեկտորը համապատասխան սեփական վեկտորն է: Ենթադրենք, որ մատրիցի $\Gamma(A)$ կողմնորոշված գրաֆը խիստ կապակցված է: Այդ դեպքում՝

(ա) $\lambda \in \partial D_j, j = 1, 2, \dots, n,$

(բ) $|x_j| = \|x\|, j = 1, 2, \dots, n:$

Ապացույց: Այստեղ մենք կօգտվենք 9.2.3 լեմմայի ապացուցման սխեմայից՝ հաշվի առնելով A մատրիցի նկատմամբ նոր պանանջները:

Պարզ է, որ գոյություն ունի այնպիսի p , որի համար $|x_p| = \|x\|$: Ընդ որում՝ $\lambda \in \partial D_p$ (լեմմա 9.2.2): Գիտարկենք կամայական $j \neq p$ ինդեքս: Քանի որ $\Gamma(A)$ գրաֆը խիստ կապակցված է, ապա գոյություն ունի

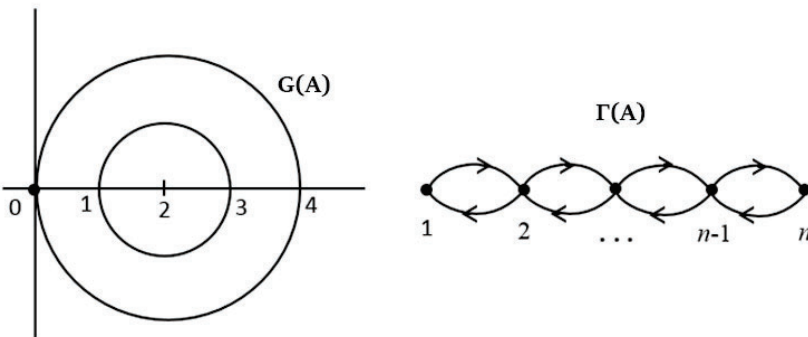
$$V_p \widehat{V}_{k_1}, V_{k_1} \widehat{V}_{k_2}, \dots, V_{k_{m-1}} \widehat{V}_j$$

աղեղներից կազմված $V_p \rightarrow V_j$ կողմնորոշված ուղի: Այդ ուղու առկայությունը ենթադրում է, որ A մատրիցի $a_{pk_1}, a_{k_1 k_2}, \dots, a_{k_{m-1} j}$ տարրերը հավասար չեն գրոյի: Քանի որ $a_{pk_1} \neq 0$, ապա $|x_{k_1}| = \|x\|$ (լեմմա 9.2.2): Այնուհետև, քանի որ $|x_{k_1}| = \|x\|$ և $a_{k_1 k_2} \neq 0$, ապա $|x_{k_2}| = \|x\|$ (լեմմա 9.2.2): Շարունակելով նման դատողությունները հանգում ենք, որ $|x_j| = \|x\|$, ուստի $\lambda \in \partial D_j$. \square

Վերջապես, ձևակերպենք սույն պարագրաֆի հիմնական արդյունքը:

Թեորեմ 9.3.1 : Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի $\Gamma(A)$ կողմնորոշված գրաֆը խիստ կապակցված է: Այնուհետև, դիցուք $|a_{ii}| \geq r_i, i = 1, 2, \dots, n$ և գոյություն ունի այնպիսի k ինդեքս, որի համար $|a_{kk}| > r_k$: Այդ դեպքում գրոն A մատրիցի սեփական արժեք չէ, ուստի այդ մատրիցը չվերասերված է:

Այս պնդումն ապացուցելու համար հարկավոր է բառացիորեն կրկնել 9.2.2 թեորեմի ապացույցը՝ միայն այն տարբերությամբ, որ 9.2.3 լեմմայի փոխարեն պետք է հղում կատարել 9.3.1 լեմմայի վրա:



Նկ. 9.3.2. (9.3.2) մատրիցի Գ-երշխողի նի շրջանները և կողմնորոշված գրաֆը:

Օրինակ 9.3.1 : Գիտարկենք n -րդ կարգի

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{9.3.2}$$

մատրիցը: Այս մատրիցի Գերշգորիմի շրջանները հետևյալն են.

$$|z - 2| \leq 1, i = 1, n \quad \text{և} \quad |z - 2| \leq 2, i = 2, 3, \dots, n - 1 :$$

Մատրիցի Գերշգորիմի տիրույթը և կողմնորոշված գրաֆը բերված են Նկ.9.3.2-ում: Գրաֆը խիստ կապակցված է, ուստի գրոն մատրիցի սեփական արժեքը չէ: Մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները գտնվում են $(0, 4]$ միջակայքում (քանի որ A մատրիցը սիմետրիկ է, նրա բոլոր սեփական արժեքները իրական են): \square

Ինչպե՞ս ստուգել $\Gamma(A)$ գրաֆի խիստ կապակցվածությունը: Եթե մատրիցի կարգը մեծ չէ կամ մատրիցն ունի հատուկ կառուցվածք (ինչպես 9.3.1 օրինակում), ապա կարելի է ստուգել բոլոր ուղիները տեսողականորեն: Սակայն ընդհանուր դեպքում այդպիսի մոտեցումը անընդունելի է և հարկավոր է փնտրել գրաֆի խիստ կապակցվածության բացահայտման անալիտիկ մեթոդներ:

9.4 Մատրիցի գրաֆի խիստ կապակցվածության համարժեք բնութագրերը

Ինչպես արդեն նշվել էր նախորդ պարագրաֆում, $\Gamma(A)$ կողմնորոշված գրաֆի խիստ կապակցվածությունը որոշվում է A մատրիցի ոչ գրոյական արտանկյունագծային տարրերի դասավորությամբ, իսկ այդ տարրերի կոնկրետ արժեքները էական չեն:

Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$: Սահմանենք $M = [\mu_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը, որտեղ $\mu_{ij} = 1$, եթե $a_{ij} \neq 0$, և $\mu_{ij} = 0$, եթե $a_{ij} = 0$: Անվանենք M մատրիցը *ինդիկատորային մատրից* A մատրիցի համար:

Ակնհայտ է, որ A և M մատրիցների $\Gamma(A)$ և $\Gamma(M)$ կողմնորոշված գրաֆները նույնական են, և դա մենք կօգտագործենք հաջորդող պնդումները ապացուցելիս:

Լեմմա 9.4.1 : Դիցուք V_i և V_j , որտեղ $i \neq j$, $\Gamma(A)$ գրաֆի տրված գագաթներն են: s երկարության կողմնորոշված ուղի V_i -ից V_j գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ M^s մատրիցի i, j -րդ տարրը դրական է, այսինքն՝ $(M^s)_{ij} > 0$:

Ապացույց: Օգտվենք ինդուկցիայից ըստ s -ի: Երբ $s = 1$, պնդումն ակնհայտ է: Ենթադրենք, որ պնդումը ճիշտ է բոլոր $s - 1$ երկարության ուղիների համար, որտեղ $s \geq 2$: Ունենք՝

$$(M^s)_{ij} = \sum_{k=1}^n (M^{s-1})_{ik} \mu_{kj} :$$

Այստեղ բոլոր գումարելիները ոչ բացասական են: Ուստի $(M^s)_{ij} > 0$ պայմանը համարժեք է, որ k -ի գոնե մեկ արժեքի համար միաժամանակ $(M^{s-1})_{ik} > 0$ և $\mu_{kj} = 1$: Ըստ ինդուկցիայի ենթադրության՝ $(M^{s-1})_{ik} > 0$ պայմանը նշանակում է, որ գոյություն ունի $s - 1$ երկարության ուղի V_i -ից V_k : Միաժամանակ գրաֆում առկա է նաև V_k -ից V_j աղեղը: \square

Ներմուծենք նոր հասկացություններ և նշանակումներ: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի համար $A > 0$ (կամ $A \geq 0$) գրառումը նշանակում է, որ նրա բոլոր a_{ij} տարրերը դրական են (կամ ոչ բացասական): Այդպիսի մատրիցը կոչվում է *դրական* (կամ *ոչ բացասական*):

Դիտողություն 9.4.1 : Նույն $A > 0$ և $A \geq 0$ նշանակումները մենք ներմուծել ենք վերը 3.2 պարագրաֆում դրական որոշյալ և դրական կիսաորոշյալ մատրիցների համար: Համատեքստից պարզ կլինի, թե որ դեպքի մասին է խոսքը: \square

Որպես 9.4.1 լեմմայի հետևանք բերենք հետևյալ պնդումը:

Հետևանք 9.4.1 : $M^s > 0$ պայմանը համարժեք է նրան, որ A մատրիցի $\Gamma(A)$ գրաֆում ամեն մի $V_i, V_j, i \neq j$ զագաթների կարգավորված զույգի համար գոյություն ունի ճիշտ s երկարության կողմնորոշված ուղի V_i -ից V_j :

Այժմ ձևակերպենք և ապացուցենք մատրիցի կողմնորոշված գրաֆի խիստ կապակցվածության հարմար և բավականաչափ հեշտ ստուգվող չափանիշ:

Թեորեմ 9.4.1 : A մատրիցի $\Gamma(A)$ կողմնորոշված գրաֆը խիստ կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ $(I + M)^{n-1} > 0$:

Ապացույց: Գրենք

$$(I + M)^{n-1} = I + C_{n-1}^1 M + \dots + C_{n-1}^{n-2} M^{n-2} + M^{n-1}$$

նույնությունը: Հեշտ է տեսնել, որ $(I + M)^{n-1} > 0$ պայմանը համարժեք է նրան, որ ինդեքսների ամեն մի (i, j) զույգի համար, որտեղ $i \neq j$, M, M^2, \dots, M^{n-1} մատրիցներից գոնե մեկում համապատասխան i, j -րդ տարրը դրական է: Ըստ 9.4.1 լեմմայի՝ դա տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\Gamma(A)$ գրաֆում գոյություն ունի կողմնորոշված ուղի V_i -ից V_j : Վերջինը նշանակում է $\Gamma(A)$ գրաֆի խիստ կապակցվածություն: \square

Հետևանք 9.4.2 : $\Gamma(A)$ գրաֆում գոյություն ունի կողմնորոշված ուղի V_i զագաթից V_j զագաթ, որտեղ $i \neq j$, այն և միայն այն դեպքում, երբ $[(I + M)^{n-1}]_{ij} > 0$:

Դիտողություն 9.4.2 : Պարզաբանենք, թե ինչու է 9.4.1 թեորեմում հանդես գալիս $I + M$ մատրիցի հենց $(n - 1)$ -րդ աստիճանը: Դա անմիջապես կապված է 9.3 պարագրաֆում բերված այն պնդման հետ, որ եթե $\Gamma(A)$ գրաֆում երկու զագաթների միջև կա կողմնորոշված ուղի, ապա կա նաև կողմնորոշված ուղի, որի երկարությունը $\leq n - 1$: Սակայն չի բացառվում, որ $(I + M)^k > 0$ որևէ $k < n - 1$ ցուցիչի համար: Դա կնշանակի, որ գրաֆի ցանկացած երկու զագաթների միջև գոյություն ունի կողմնորոշված ուղի, որի երկարությունը $\leq k$ և $I + M$ մատրիցի հետագա աստիճան բարձրացնելը անիմաստ է: \square

Բացահայտենք մատրիցի կողմնորոշված գրաֆի խիստ կապակցվածության ևս մեկ համարժեք բնութագիր: Նշենք, որ գրաֆի խիստ կապակցվածությունը զուտ տոպոլոգիական հատկություն է, որը ոչ մի կերպ կախված չէ նրա գագաթների համարակարգումից:

Կասենք, որ $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցը վերածելի է, եթե կան $n = 1$ և $A = 0$, կան էլ $n \geq 2$ և գոյություն ունեն այնպիսի P տեղափոխության մատրից և որևէ q ամբողջ թիվ, $1 \leq q \leq n - 1$, որ

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \equiv \tilde{A}, \quad (9.4.1)$$

որտեղ $A_{11} \in \mathbf{C}^{q \times q}$, $A_{12} \in \mathbf{C}^{q \times (n-q)}$, $A_{22} \in \mathbf{C}^{(n-q) \times (n-q)}$: Հակառակ դեպքում մատրիցը կանվանենք *անվերածելի*:

Ընդգծենք, որ այստեղ չի պահանջվում, որ A_{11} , A_{12} և A_{22} վանդակները ունենան ոչ գրոյական տարրեր: Պետք է միայն, որ մատրիցի տողերի և սյունների տեղափոխությունների օգնությամբ հնարավոր լինի ստանալ $(n - q) \times q$ չափի *գրոյական* վանդակ:

Թեորեմ 9.4.2 : $\Gamma(A)$ կողմնորոշված գրաֆը խիստ կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ A մատրիցը անվերածելի է:

Ապացույց: Ակնհայտ է, որ A մատրիցի վերածելիության կամ անվերածելիության հատկությունը բնականորեն ժառանգվում է M ինդիկատորային մատրիցով:

Համաձայն 9.4.1 թեորեմի՝ A մատրիցի $\Gamma(A)$ գրաֆի խիստ կապակցվածությունը համարժեք է $(I + M)^{n-1} > 0$ պայմանի առկայությանը: Ուստի բավարար է ապացուցել հետևյալ պնդումը. M մատրիցը վերածելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $(I + M)^{n-1}$ մատրիցն ունի գոնե մեկ գրոյական տարր:

Անհրաժեշտություն: Դիցուք M մատրիցը վերածելի է, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի P տեղափոխության մատրից, որ

$$P^T M P = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \mathbf{0} & M_{22} \end{bmatrix} \equiv \tilde{M}, \quad (9.4.2)$$

որտեղ $M_{11} \in \mathbf{C}^{q \times q}$, $M_{12} \in \mathbf{C}^{q \times (n-q)}$, $M_{22} \in \mathbf{C}^{(n-q) \times (n-q)}$: Հեշտ է համոզվել, որ $\tilde{M}^2, \tilde{M}^3, \dots, \tilde{M}^{n-1}$ մատրիցներն ունեն ճիշտ նույնն $(n-q) \times q$ չափի գրոյական վանդակ ձախ ստորին անկյունում: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} (I + M)^{n-1} &= (I + P \tilde{M} P^T)^{n-1} = (P(I + \tilde{M})P^T)^{n-1} = P(I + \tilde{M})^{n-1} P^T \\ &= P[I + C_{n-1}^1 \tilde{M} + \dots + C_{n-1}^{n-2} \tilde{M}^{n-2} + \tilde{M}^{n-1}] P^T : \end{aligned}$$

Վերջին հավասարության աջ մասում գրված $[\dots]$ մատրիցն ունի $(n - q) \times q$ չափի գրոյական վանդակ ձախ ստորին անկյունում, ուստի այն պարունակում է գոնե մեկ գրոյական տարր: Ակնհայտ է, որ $P[\dots]P^T$ մատրիցում այդ տարրը պահպանվում է:

Բավարարություն: Գիցուք $(I + M)^{n-1}$ մատրիցն ունի k, m -րդ, որտեղ $k \neq m$, գրոյական տարր, այսինքն՝ $[(I + M)^{n-1}]_{km} = 0$: Այդ դեպքում, ըստ 9.4.2 հետևանքի, կողմնորոշված ուղի V_k -ից V_m գոյություն չունի: Սահմանենք մատրիցի գրաֆի գագաթների հետևյալ բազմությունը.

$$S_1 \equiv \{V_m\} \cup \{V_i : \exists V_i \rightarrow V_m\} :$$

Պարզ է, որ $S_1 \neq \emptyset$: $\Gamma(M)$ գրաֆի մնացած բոլոր գագաթների բազմությունը նշանակենք S_2 -ով: Այդ բազմությունը նույնպես դատարկ չէ (այն պարունակում է գոնե V_k գագաթը): Ակնհայտ է, որ S_2 բազմության գագաթներից S_1 բազմության գագաթները տանող ուղիներ չկան: Տանք $\Gamma(M)$ գրաֆի գագաթների $\tilde{V}_i, i = 1, 2, \dots, n$ նոր համարակալումը այնպես, որ

$$S_1 = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_q\}, \quad S_2 = \{\tilde{V}_{q+1}, \tilde{V}_{q+2}, \dots, \tilde{V}_n\} :$$

Գա համարժեք է M մատրիցի տողերի և սյունների տեղափոխությանը (փաստորեն ըստ (9.4.2)-ի սահմանման անցում \tilde{M} մատրիցին): Այսպիսով, M -ը վերածելի է: \square

Վերջում պարզաբանենք *վերածելի մատրից* հասկացությունը: Գիցուք տրված է վերածելի մատրիցով

$$Ax = b \tag{9.4.3}$$

գծային հավասարումների համակարգը: Ըստ (9.4.1)-ի՝ $A = P\tilde{A}P^T$, և համակարգը կգրվի

$$P\tilde{A}P^T x = b$$

կամ

$$\tilde{A}(P^T x) = P^T b \tag{9.4.4}$$

տեսքով: Արդյունքում (9.4.4) ձևափոխված համակարգի լուծումը հանգում է հետևյալ խնդիրների հաջորդական լուծմանը:

1. Հաշվվում է $\tilde{b} = P^T b$ վեկտորը (կատարվում է b վեկտորի բաղադրիչների տեղափոխություն):

2. Լուծվում է վանդակային մատրիցով

$$\tilde{A}z = \tilde{b}$$

համակարգը (այստեղ $z \equiv P^T x$): Գրենք այդ համակարգը

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}$$

տեսքով: Արդյունքում կստանանք գծային հավասարումների երկու համակարգ.

$$\begin{aligned} A_{11}z_1 + A_{12}z_2 &= \tilde{b}_1, \\ A_{22}z_2 &= \tilde{b}_2 : \end{aligned}$$

Նախ երկրորդ համակարգից որոշվում է z_2 -ը, այնուհետև առաջին համակարգից գտնվում է z_1 -ը: Փաստորեն (9.4.3) նախնական խնդիրը վերածվում է ավելի փոքր կարգի երկու խնդիրների:

3. Վերականգվում է (9.4.3) համակարգի լուծումը, այսինքն՝ գտնվում է $x = Pz$ վեկտորը (կատարվում է z վեկտորի բաղադրիչների հակադարձ տեղափոխություն):

9.5 Սեփական արժեքների խտտությունը

Ինչպես արդեն նշվել է 9.1 պարագրաֆի սկզբում, մատրիցի սեփական արժեքները անընդհատորեն կախված են նրա տարրերից (տե՛ս, օրինակ, [22]): Միևնույն ժամանակ սեփական արժեքները շատ զգայուն են մատրիցի տարրերի փոփոխման նկատմամբ, և որոշ դեպքերում տարրերի փոքր խտտորումները կարող են հանգեցնել սեփական արժեքների զգալի շեղման:

Օրինակ 9.5.1 : Դիտարկենք հետևյալ մատրիցները.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \varepsilon & & & & 0 \end{bmatrix},$$

որտեղ $\varepsilon > 0$: Այնհայտ է, որ $\lambda_i(A) = 0, i = 1, 2, \dots, n$: Ինչ վերաբերում է B մատրիցին, ապա նրա սեփական արժեքները $\lambda^n - \varepsilon = 0$ բնութագրիչ հավասարման արմատներն են, ուստի $|\lambda_i(B)| = \varepsilon^{1/n}, i = 1, 2, \dots, n$: Եթե, օրինակ, վերցնենք $n = 100$ և $\varepsilon = 10^{-100}$, ապա կստանանք, որ $|\lambda_i(B)| = 10^{-1}$: \square

Որոշ դեպքերում դժվար չէ գնահատել մատրիցի տարրերի խտտորման պատճառով առաջացած սեփական արժեքների շեղումը:

Դիցուք տրված է

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{9.5.1}$$

անկյունագծային մատրիցը: Դիտարկելով $E = [\varepsilon_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը որպես D մատրիցի խտտորում՝ կունենանք

$$D + E = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \lambda_2 + \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \lambda_n + \varepsilon_{nn} \end{bmatrix} \tag{9.5.2}$$

խտտորված մատրից:

Թեորեմ 9.5.1 : $D + E$ մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են

$$\tilde{G}(D + E) \equiv \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq \|E\|_\infty\} \quad (9.5.3)$$

շրջանների միավորմանը:

Ապացույց: Ըստ 9.1.1 թեորեմի՝ (9.5.2) մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են

$$G(D + E) = \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i - \varepsilon_{ii}| \leq r_i\}$$

տիրույթում, որտեղ

$$r_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\varepsilon_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Ցանկացած կետի համար $\{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i - \varepsilon_{ii}| \leq r_i\}$ շրջանից ունենք՝

$$|z - \lambda_i| \leq |z - \lambda_i - \varepsilon_{ii}| + |\varepsilon_{ii}| \leq r_i + |\varepsilon_{ii}| = \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij}| :$$

Ուստի $D + E$ մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij}|\}$$

շրջանների միավորման մեջ, իսկ քանի որ

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij}| = \|E\|_\infty,$$

ապա $D + E$ մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են (9.5.3) տիրույթին: \square

Այսպիսով, $D + E$ մատրիցի կամայական $\tilde{\lambda}$ սեփական արժեքի համար կգտնվի D մատրիցի այնպիսի λ_i սեփական արժեք, որ

$$|\tilde{\lambda} - \lambda_i| \leq \|E\|_\infty :$$

Ստացված արդյունքը կարելի է ընդհանրացնել պարզ կառուցվածքի մատրիցների վրա: Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցը

$$S^{-1}AS = D \quad (9.5.4)$$

նմանության ձևափոխությամբ բերվում են (9.5.1) անկյունագծային տեսքի:

Թեորեմ 9.5.2 : Դիցուք $E = [\varepsilon_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը A մատրիցի խտտորումն է: Այդ դեպքում $A + E$ մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq \kappa_{\infty}(S) \|E\|_{\infty}\} \quad (9.5.5)$$

շրջանների միավորմանը:

Ապացույց: Կիրառենք նմանության ձևափոխությունը $A + E$ մատրիցի նկատմամբ: Հաշվի առնելով (9.5.4)-ը՝ կստանանք

$$S^{-1}(A + E)S = D + S^{-1}ES :$$

Քանի որ $A + E$ և $D + S^{-1}ES$ մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են, ապա, ըստ 9.5.1 թեորեմի, $D + S^{-1}ES$ մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq \|S^{-1}ES\|_{\infty}\}$$

տիրույթին: Ունենք՝

$$\|S^{-1}ES\|_{\infty} \leq \|S^{-1}\|_{\infty} \|E\|_{\infty} \|S\|_{\infty} = \kappa_{\infty}(S) \|E\|_{\infty} :$$

Ուստի $A + E$ մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են (9.5.5) տիրույթում: \square

Վերջում՝ սեփական վեկտորների մասին: Ի տարբերություն սեփական արժեքների սեփական վեկտորները մատրիցի տարրերի նույնիսկ փոքր խտտորումների դեպքում կարող են կրել արմատական փոփոխություններ: Դիտարկենք, օրինակ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը, որի սեփական արժեքները $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ թվերն են, իսկ համապատասխան սեփական վեկտորները՝

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

Տանք այդ մատրիցին

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

խտտորում: Արդյունքում

$$A + E = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքներ կդառնան $\tilde{\lambda}_1 = 1 + \varepsilon$ և $\tilde{\lambda}_2 = 1$: Եթե $\varepsilon\delta \neq 0$, ապա համապատասխան նորմավորված սեփական վեկտորները կլինեն

$$\tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}} \begin{bmatrix} -\delta \\ \varepsilon \end{bmatrix} :$$

Առաջին սեփական վեկտորը չի փոխվել, իսկ երկրորդ վեկտորին ε/δ հարաբերության ընտրությամբ կարելի է տալ ցանկացած ուղղություն:

Խնդիրներ և վարժություններ-9

1. Նշել Գերշգորհինի տիրույթը $a_{ii} = i/j$ տարրերով $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ մատրիցի համար: Հաշվել նաև մատրիցի սեփական արժեքները:

2. Ցույց տալ, որ n -րդ կարգի

$$\begin{bmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}$$

մատրիցը չունի գրոյական սեփական արժեք:

3. Ցույց տալ, որ

$$\begin{bmatrix} 3 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքների կեղծ մասերը գտնվում են $[-1, 1]$ միջակայքում:

4. Առանց հաշվելու

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքները ցույց տալ, որ նրանք բավարարում են $1 \leq |\lambda| \leq 9$ պայմանին:

5. Հիմնավորել, որ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 5 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքները իրական թվեր են:

6. Հիմնավորել, որ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցն ունի առնվազն երկու տարբեր իրական սեփական արժեք:

7. Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի տարրերը այնպիսին են, որ

$$|a_{ii}| > r_i, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_k,$$

որտեղ $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$: Ապացուցել, որ $\text{rank} A \geq k$:

8. Դիցուք A մատրիցը վերասերված իդեմպոտենտ մատրից է՝ $A^2 = A$: Ապացուցել, որ այդ մատրիցը խիստ անկյունագծային գերիշխմամբ մատրից չէ:
9. Ենթադրենք, որ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում, այսինքն՝ $|a_{ii}| > r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$: Ցույց տալ, որ k -ի գոնե մեկ արժեքի համար $|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}|$:
10. Նշել Գերշգորհի շրջանները

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ i/2 & i & 5 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}$$

մատրիցի համար: Օգտվելով (9.1.8)-ից և ընտրելով $D = \text{diag}[1, 1, 1, 4]$ ՝ ցույց տալ, որ A մատրիցն ունի սեփական արժեք $|z + 2| \leq 1/2$ շրջանում:

11. Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում: Վերցնենք $D = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$: Ցույց տալ, որ D մատրիցը չվերասերված է և $\rho(I - D^{-1}A) < 1$:
12. Ընտրելով հարմար լրացուցիչ պարամետրներ՝ ցույց տալ, որ

$$\begin{bmatrix} a & b_2 & & & \\ c_2 & a & b_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a & b_n \\ & & & c_n & a \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքները բավարարում են $|\lambda - a| < 2\sqrt{\max_i |b_i| \max_i |c_i|}$ պայմանին:

13. Ապացուցել, որ անվերածելի մատրիցը չի կարող ունենալ գրոյական տողեր և սյուներ:

Գլուխ 10

ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԷՔՍՊՈՆԵՆՏ

Սույն գլխում համառոտակի ներկայացված է, այսպես կոչված, *մատրիցի էքսպոնենտը*, որը սահմանվում է էքսպոնենցիալ ֆունկցիա աստիճանային շարքի վերլուծության համանմանությամբ: Մատրիցային էքսպոնենտները ունեն կարևոր դեր ինչպես բուն մատրիցների տեսության մեջ, այնպես էլ կիրառություններում: Մասնավորապես, որոշ դեպքերում դրանց միջոցով կարելի է կոմպակտ տեսքով գրել դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծումը:

10.1 Մատրիցային էքսպոնենտի հիմնական հատկությունները

Մատրիցային էքսպոնենտը սահմանվում է

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

աստիճանային շարքի համանմանությամբ: $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցի էքսպոնենտ կոչվում է

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (10.1.1)$$

մատրիցը: Այս սահմանումը կիրառելի է ցանկացած A մատրիցի նկատմամբ, քանի որ

$$1 + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \dots = e^{\|A\|}$$

գուգամետ թվային շարքը մաժորանտ է (10.1.1) շարքի համար:

Որոշ դեպքերում մատրիցային էքսպոնենտը գտնվում է բավականաչափ հեշտ:

Օրինակ 10.1.1 : Հաշվենք

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

վերին եռանկյուն մատրիցի էքսպոնենտը: Ունենք՝

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

Արդյունքում կատանանք, որ

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}: \quad \square$$

Ստորև բերված մատրիցային էքսպոնենտի պարզ հատկությունների ապացուցումը՝ որպես վարժություն, մենք թողնում ենք ընթերցողին:

- ◇ $e^0 = I$:
- ◇ $e^I = eI$:
- ◇ $e^{A^T} = (e^A)^T$:
- ◇ $e^{A^*} = (e^A)^*$:
- ◇ *Եթե A մատրիցը հերմիտյան է (սիմետրիկ է), ապա e^A -ն նույնպես հերմիտյան (սիմետրիկ) մատրից է:*
- ◇ *Եթե λ թիվը A մատրիցի սեփական արժեքն է, ապա e^λ -ն սեփական արժեք է e^A մատրիցի համար:*

Թեորեմ 10.1.1 : *Եթե A և B մատրիցները տեղափոխելի են, ապա*

$$e^{A+B} = e^A e^B: \quad (10.1.2)$$

Ապացույց: Օգտվելով (10.1.1) սահմանումից՝ կարող ենք գրել.

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k! m!}:$$

Կատարելով $p = k + m$, $q = k$ փոխարինումը, գրենք վերջին կրկնակի գումարը այլ տեսքով: Ունենք՝ $k = q$, $m = p - q$: Քանի որ $k, m \geq 0$, ապա $q \geq 0$, $p - q \geq 0$: Հետևաբար կրկնակի գումարումը պետք է իրականացվի ըստ այնպիսի (p, q) գույգերի, որոնք բավարարում են նշված երկու անհավասարություններին: Հաշվի առնելով ասածը՝ ձևափոխենք վերը ստացված արտահայտությունը.

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k! m!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{A^q B^{p-q}}{q! (p-q)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p C_p^q A^q B^{p-q}:$$

Քանի որ A և B մատրիցները տեղափոխելի են, ապա տեղափոխելի են նաև նրանց ցանկացած աստիճանները: Ուստի

$$\sum_{q=0}^p C_p^q A^q B^{p-q} = (A+B)^p :$$

Այսպիսով,

$$e^A e^B = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(A+B)^p}{p!} = e^{A+B} : \quad \square$$

Թեորեմ 10.1.2 : *Ցանկացած A մատրիցի համար մատրիցային էքսպոնենտը չվերասերված է, ընդ որում.*

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} : \quad (10.1.3)$$

Ապացույց: A և $-A$ մատրիցները տեղափոխելի են: Ուստի, ըստ (10.1.2) հատկության,

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I,$$

որտեղից էլ բխում է թեորեմի պնդումը: \square

Թեորեմ 10.1.3 : *Ցանկացած A մատրիցի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\det e^A = e^{\text{tr}A} : \quad (10.1.4)$$

Ապացույց: Ինչպես բացահայտված էր 1-ին գլխում, մատրիցի որոշիչը հավասար է նրա սեփական արժեքների արտադրյալին (տե՛ս (1.3.9)-ը): Եթե $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են, ապա $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$ թվերը սեփական արժեքներ են e^A մատրիցի համար: Այդ դեպքում

$$\det e^A = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr}A} : \quad \square$$

Թեորեմ 10.1.4 : *Եթե A և B մատրիցները նման են, այսինքն՝ $A = SBS^{-1}$, ապա*

$$e^A = S e^B S^{-1} : \quad (10.1.5)$$

Ապացույց: Իրոք,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SBS^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S \frac{B^k}{k!} S^{-1} = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) S^{-1} = S e^B S^{-1} : \quad \square$$

Վերի թեորեմը թույլ է տալիս ստանալ մատրիցային էքսպոնենտի օգտակար ներկայացում պարզ կառուցվածքի մատրիցների, այլ կերպ ասած, անկյունագծայնացվող մատրիցների համար: Ըստ 5.1.1 թեորեմի՝ այդպիսի մատրիցները գրվում են

$$A = \Lambda S^{-1} \quad (10.1.6)$$

վերլուծության տեսքով, որտեղ

$$S = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(տե՛ս (5.1.1)-ը և (5.1.3)-ը), ընդ որում՝

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(տե՛ս (5.1.2)-ը): Օգտվելով (10.1.5) հավասարությունից՝ կատանանք, որ

$$e^A = Se^\Lambda S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} S^{-1}: \quad (10.1.7)$$

Մատրիցային էքսպոնենտի ներկայացումը (10.1.7) տեսքով ունի ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական նշանակություն:

Օրինակ 10.1.2 : Գիտարկենք

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

մատրիցը, որի սեփական արժեքները $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$ թվերն են, իսկ համապատասխան սեփական վեկտորները՝ $e_1 = [-2 \ 1]^T$, $e_2 = [4 \ 1]^T$: Ըստ (10.1.7) ներկայացման կատանանք

$$e^A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{e^2}{6} \begin{bmatrix} 2 + 4e^6 & -8 + 8e^6 \\ -1 + e^6 & 4 + 2e^6 \end{bmatrix}: \quad \square$$

Ելնելով (10.1.1)-ից՝ սահմանենք

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \quad (10.1.8)$$

մատրիցային ֆունկցիան: Պարզ է, որ $e^{tA} = e^{tA}$: Կամայական A մատրիցի համար (10.1.8) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է t -ի փոփոխման ցանկացած վերջավոր տիրույթում: Այդ հետևում է

$$\frac{\|(At)^m\|}{m!} \leq \frac{\|A\|^m |t|^m}{m!}$$

անհավասարությունից: Նշենք, որ $\|A\|^m |t|^m / m!$ -ը $e^{\|A\||t|}$ ֆունկցիայի շարքի վերլուծության ընդհանուր անդամն է:

Որոշակիության համար կենթադրենք, որ $t \geq 0$: Ձևակերպենք *Կոշիի խնդիրը*.
Գտնել (10.2.2) հավասարման

$$u(0) = f \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (10.2.3)$$

սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումը: Այս խնդրի, ինչպես նաև ստորև
 դիտարկվող (10.2.6) անհամասեռ խնդրի լուծման գոյության և միակության ապացույցը
 կարելի է գտնել, օրինակ, [4] մենագրությունում:

Թեորեմ 10.2.1 : (10.2.2),(10.2.3) *Կոշիի խնդրի լուծումը հետևյալն է.*

$$u(t) = e^{At} f, \quad t \geq 0 : \quad (10.2.4)$$

Ապացույց: Նախ, $u(0) = e^0 f = f$: Այնուհետև, ըստ (10.1.9) հասկության,

$$\frac{du(t)}{dt} = Ae^{At} f = Au(t) : \quad \square$$

Գիցուք A մատրիցն անկյունագծացվող է, այսինքն, այն կարելի է ներկայացնել
 (10.1.6) վերլուծության տեսքով: Ըստ (10.1.7)-ի՝ ունենք.

$$e^{At} = Se^{At} S^{-1} :$$

Այդ դեպքում Կոշիի խնդրի (10.2.4) լուծումը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$u(t) = Se^{At} S^{-1} f : \quad (10.2.5)$$

Օրինակ 10.2.1 : Գիտարկենք

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 6u_1(t) + 8u_2(t), \\ u_2'(t) &= u_1(t) + 4u_2(t) \end{aligned}$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը: Այդ համակարգի

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքներն ու սեփական վեկտորները արդեն հաշված են 10.1.2
 օրինակում: Ըստ (10.2.5) բանաձևի՝

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{8t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{8t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} : \end{aligned}$$

Արդյունքում կստանանք

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 8e^{8t} \\ e^{2t} + 2e^{8t} \end{bmatrix}$$

լուծումը: \square

Այժմ դիտարկենք

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + b(t), \quad u(0) = f \tag{10.2.6}$$

Կոշիի անհամասեռ խնդիրը, որտեղ

$$b(t) \equiv \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

վեկտոր-ֆունկցիան անընդհատ է $(0, \infty)$ միջակայքում:

Թեորեմ 10.2.2 : (10.2.6) Կոշիի խնդրի լուծումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$u(t) = e^{At}f + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau)d\tau, \quad t \geq 0: \tag{10.2.7}$$

Ապացույց: Պարզ է, որ $u(0) = f$: Ցույց տանք, որ (10.2.7)-ի աջ մասը բավարարում է (10.2.6) հավասարմանը: Իրոք,

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Ae^{At}f + \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right) \int_0^t e^{-A\tau}b(\tau) d\tau + e^{At} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{-A\tau}b(\tau)d\tau \\ &= Ae^{At}f + Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau}b(\tau)d\tau + e^{At}e^{-At}b(t) \\ &= A \left(e^{At}f + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau)d\tau \right) + b(t) = Au(t) + b(t): \quad \square \end{aligned}$$

Գիտողություն 10.2.1 : Եթե $b(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան հաստատուն է, այսինքն, $b(t) \equiv b$, և A մատրիցը չվերասերված է, ապա (10.2.7) լուծումը կարելի է գրել ավելի պարզ տեսքով: Իրոք, այդ դեպքում

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau) d\tau = \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau \right) b = A^{-1}(e^{At} - I)b$$

և արդյունքում կստանանք

$$u(t) = e^{At}f + A^{-1}(e^{At} - I)b: \quad \square \tag{10.2.8}$$

10.3 Չանկյունագծացվող մատրիցների դեպքը

Ինչպես հետևում է 10.1 պարագրաֆից, եթե A մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի, ապա e^A մատրիցային էքսպոնենտը ներկայացվում է (10.1.7) վերլուծությամբ: Առաջանում է հետևյալ հարցը. գոյություն ունի արդյոք համանման ներկայացում չանկյունագծացվող մատրիցների համար: Այստեղ օգնության է գալիս մատրիցի ժորդանյան կանոնական ձևը:

Ըստ (5.1.8)-ի՝ ցանկացած $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ մատրիցը ներկայացվում է

$$A = SJS^{-1} \quad (10.3.1)$$

վերլուծությամբ, որտեղ

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

վանդակա-անկյունագծային մատրիցում λ_i սեփական արժեքին համապատասխանող J_i , $1 \leq i \leq s$ ժորդանյան վանդակն ունի

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (10.3.2)$$

տեսքը (տե՛ս (5.1.9)-ը): Ելնելով (10.3.1) ներկայացումից՝ ըստ (10.1.7)-ի ունենք.

$$e^A = Se^J S^{-1} :$$

Օգտվելով J մատրիցի վանդակա-անկյունագծային տեսքից դժվար չէ տեսնել, որ

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{J_s} \end{bmatrix} :$$

Հետևաբար

$$e^A = S \operatorname{diag} [e^{J_1}, e^{J_2}, \dots, e^{J_s}] S^{-1} : \quad (10.3.3)$$

Այսպիսով, մնում է ստանալ e^{J_i} , $i = 1, 2, \dots, s$ մատրիցային էքսպոնենտները:

Գիտարկենք (10.3.2) տեսքի $n_i \times n_i$ չափի որևէ J_i ժորդանյան վանդակ: Գրենք այն

$$J_i = \lambda_i I_i + H_i$$

գումարի տեսքով, որտեղ I_i -ն n_i -րդ կարգի միավոր մատրիցն է, իսկ

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} : \tag{10.3.4}$$

Քանի որ I_i և H_i մատրիցները տեղափոխելի են, ապա

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i I_i + H_i} = e^{\lambda_i I_i} e^{H_i} = e^{\lambda_i} e^{H_i} :$$

Հաշվի առնելով H_i մատրիցի (10.3.4) տեսքը դժվար չէ ցույց տալ, որ $H_i^k = 0$, երբ $k \geq n_i$: Հետևաբար.

$$e^{H_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_i^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{H_i^k}{k!} :$$

Արդյունքում ստանում ենք.

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{H_i^k}{k!} : \tag{10.3.5}$$

Այսպիսով, (10.3.3)-ից և (10.3.5)-ից կատանանք մատրիցային էքսպոնենտի հետևյալ ներկայացումը.

$$e^A = S \operatorname{diag} \left[e^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{H_1^k}{k!}, e^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{H_2^k}{k!}, \dots, e^{\lambda_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} \frac{H_s^k}{k!} \right] S^{-1} : \tag{10.3.6}$$

Վերջում նշենք, որ մատրիցի ժորդանյան կանոնական ձևի ստացումը բավականաչափ բարդ հաշվողական խնդիր է: Ուստի (10.3.6) բանաձևն ունի առավել տեսական, քան գործնական նշանակություն:

Խնդիրներ և վարժություններ - 10

1. Բերել A և B մատրիցների օրինակ, որոնց համար $e^{A+B} \neq e^A e^B$:
2. Ապացուցել, որ $e^{A+B} = e^A e^B$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $AB = BA$:
3. Դիցուք տրված է $A = \operatorname{diag} [A_1, A_2, \dots, A_k]$ վանդակա-անկյունագծայի մատրիցը: Ցույց տալ, որ $e^A = \operatorname{diag} [e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_k}]$:
4. Գտնել e^A մատրիցային էքսպոնենտը

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

մատրիցի համար:

5. Գտնել e^A մատրիցային էքսպոնենտը

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

մատրիցի համար:

6. Ապացուցել, որ եթե A և B մատրիցները բերվում են անկյունագծային տեսքի նույն նմանության ձևափոխությամբ, ապա $AB = BA$:

7. Լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\frac{du(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} u(t), \quad u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

8. Լուծել

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$$

համակարգը, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} :$$

Գլուխ 11

ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԿՐՈՆԵԿԵՐՅԱՆ ԱՐՏԱՊԻՅԱԼ

Սույն գլխում ներմուծվում է նոր գործողություն մատրիցների հետ, որը կոչվում է *կրոնեկերյան արտադրյալ*¹: Այդ գործողությունը երբեմն անվանում են նաև *ուղիղ* կամ *թենզորային* արտադրյալ: Կրոնեկերյան արտադրյալն ունի բազմաթիվ կիրառություններ ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ մեխանիկայում և ֆիզիկայում: Շատ դեպքերում կրոնեկերյան արտադրյալի օգտագործումը թույլ է տալիս կոմպակտ տեսքով գրել մեծածավալ մաթեմատիկական արտահայտությունները: Հատուկ նշենք, որ այն կարևոր դեր է խաղում մատրիցային հավասարումների հետազոտման և նրանց լուծման մեթոդների կառուցման ժամանակ:

11.1 Կրոնեկերյան արտադրյալի հիմնական հատկությունները

Տրված $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ և $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ մատրիցների $A \otimes B$ կրոնեկերյան արտադրյալը սահմանվում է որպես $mp \times nq$ չափի

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (11.1.1)$$

վանդակային մատրից:

Կարելի է արտածել $A \otimes B$ մատրիցի տարրերի բացահայտ տեսքը: Դիտարկենք $C = A \otimes B$ մատրիցի որևէ c_{kl} տարր, որտեղ $1 \leq k \leq mp$, $1 \leq l \leq nq$: Տրված k և l թվերի համար միարժեքորեն որոշվում են ամբողջ թվերի այնպիսի r, i և s, j զույգեր, որ

$$\begin{aligned} k &= (r-1)p + i, & 1 \leq r \leq m, 1 \leq i \leq p, \\ l &= (s-1)q + j, & 1 \leq s \leq n, 1 \leq j \leq q: \end{aligned} \quad (11.1.2)$$

¹Անվանումը կապված է գերմանացի մաթեմատիկոս Լեոպոլդ Կրոնեկերի (1823-1891) անվան հետ:

Նշված թվերը գտնվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\begin{aligned} r &= \left\lfloor \frac{k-1}{p} \right\rfloor + 1, \quad i = k - (r-1)p, \\ s &= \left\lfloor \frac{l-1}{q} \right\rfloor + 1, \quad j = l - (s-1)q : \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

Այդ դեպքում՝

$$c_{kl} = a_{rs} b_{ij} : \quad (11.1.4)$$

Կրոնեկերյան արտադրյալի հետևյալ հատկությունները բխում են անմիջապես (11.1.1) սահմանումից.

- ◇ $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A, \quad \forall \alpha \in \mathbf{C},$
- ◇ $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B), \quad \forall \alpha \in \mathbf{C},$
- ◇ $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C,$
- ◇ $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$
- ◇ $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T,$
- ◇ $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*:$

Ընդհանրապես ասած, կրոնեկերյան արտադրյալը, ինչպես և մատրիցների սովորական արտադրյալը, տեղափոխական չէ, այսինքն՝ $A \otimes B \neq B \otimes A$: Բերենք մի պարզ օրինակ: Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$, իսկ I -ն p -րդ կարգի միավոր մատրիցն է: Ունենք

$$A \otimes I = \begin{bmatrix} a_{11}I & a_{12}I & \dots & a_{1m}I \\ a_{21}I & a_{22}I & \dots & a_{2m}I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}I & a_{m2}I & \dots & a_{mm}I \end{bmatrix} :$$

Մյուս կողմից,

$$I \otimes A = \begin{bmatrix} A & & & \\ & A & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix}$$

մատրիցը վանդակա-անկյունագծային է: Ակնհայտ է, որ $A \otimes I \neq I \otimes A$: Նշենք, որ մատրիցների սովորական արտադրյալի դեպքում $AI = IA = A$:

Կրոնեկերյան արտադրյալը զուգորդական է:

Թեորեմ 11.1.1 : *Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C : \quad (11.1.5)$$

Ապացույց: Դիցուք

$$A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}, \quad B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}, \quad C = [c_{ij}]_{m_3 \times n_3} :$$

Ներմուծենք

$$V \equiv A \otimes B = [v_{ij}]_{m_1 m_2 \times n_1 n_2}, \quad (11.1.6)$$

$$W \equiv B \otimes C = [w_{ij}]_{m_2 m_3 \times n_2 n_3} \quad (11.1.7)$$

մատրիցները: Այնուհետև, դիցուք

$$X \equiv A \otimes (B \otimes C) = A \otimes W = [x_{kl}]_{m_1 m_2 m_3 \times n_1 n_2 n_3}, \quad (11.1.8)$$

$$Y \equiv (A \otimes B) \otimes C = V \otimes C = [y_{kl}]_{m_1 m_2 m_3 \times n_1 n_2 n_3} : \quad (11.1.9)$$

Յույց տանք, որ $X = Y$: Գատողությունների ընթացքում մենք բազմիցս օգտվելու ենք (11.1.2) առնչությունների հիման վրա գրված կրոնեկերյան արտադրյալի տարրերի (11.1.4) ներկայացումից: Վերցնենք k և l թվերի որևէ զույգ, որտեղ $1 \leq k \leq m_1 m_2 m_3$ և $1 \leq l \leq n_1 n_2 n_3$: Ելնելով (11.1.8)-ից՝ կարող ենք գրել, որ

$$x_{kl} = a_{rs} w_{ij}, \quad (11.1.10)$$

որտեղ r, i և s, j ամբողջ թվերի զույգերը միարժեքորեն որոշվում են

$$\begin{aligned} k &= (r-1)m_2 m_3 + i, & 1 \leq r \leq m_1, 1 \leq i \leq m_2 m_3, \\ l &= (s-1)n_2 n_3 + j, & 1 \leq s \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2 n_3 \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

առնչություններից: Այնուհետև, (11.1.7)-ից ստանում ենք

$$w_{ij} = b_{tz} c_{\alpha\beta} \quad (11.1.12)$$

հավասարությունը, որտեղ t, α և z, β ամբողջ թվերի զույգերը այնպիսին են, որ

$$\begin{aligned} i &= (t-1)m_3 + \alpha, & 1 \leq t \leq m_2, 1 \leq \alpha \leq m_3, \\ j &= (z-1)n_3 + \beta, & 1 \leq z \leq n_2, 1 \leq \beta \leq n_3 : \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

Արդյունքում, (11.1.10)-ից և (11.1.12)-ից հետևում է, որ

$$x_{kl} = a_{rs} b_{tz} c_{\alpha\beta} : \quad (11.1.14)$$

Այժմ ստանանք արտահայտություն Y մատրիցի y_{kl} համապատասխան տարրի համար: Այդ նպատակով ձևափոխենք (11.1.11) բանաձևերը: Հաշվի առնելով (11.1.13) առնչությունները ունենք՝

$$\begin{aligned} k &= (r-1)m_2 m_3 + (t-1)m_3 + \alpha = [(r-1)m_2 + t-1]m_3 + \alpha, \\ l &= (s-1)n_2 n_3 + (z-1)n_3 + \beta = [(s-1)n_2 + z-1]n_3 + \beta : \end{aligned}$$

Նշանակենք

$$\gamma \equiv (r-1)m_2 + t, \quad \delta \equiv (s-1)n_2 + z : \quad (11.1.15)$$

Ինչպես հետևում է (11.1.11)-ից և (11.1.13)-ից՝ $1 \leq \gamma \leq m_1 m_2$, $1 \leq \delta \leq n_1 n_2$: Այսպիսով, γ, α և δ, β թվերի գույգերը միարժեքորեն որոշվում են

$$\begin{aligned} k &= (\gamma - 1)m_3 + \alpha, & 1 \leq \gamma \leq m_1 m_2, & 1 \leq \alpha \leq m_3, \\ l &= (\delta - 1)n_3 + \beta, & 1 \leq \delta \leq n_1 n_2, & 1 \leq \beta \leq n_3 \end{aligned}$$

առնչություններից: Ուստի, ելնելով (11.1.9)-ից, գրենք

$$y_{kl} = v_{\gamma\delta} c_{\alpha\beta} \quad (11.1.16)$$

հավասարությունը: Ինչպես հետևում է (11.1.15)-ից, (11.1.11)-ից և (11.1.13)-ից,

$$\begin{aligned} \gamma &= (r-1)m_2 + t, & 1 \leq r \leq m_1, & 1 \leq t \leq m_2, \\ \delta &= (s-1)n_2 + z, & 1 \leq s \leq n_1, & 1 \leq z \leq n_2 : \end{aligned}$$

Այդ դեպքում (11.1.6)-ից կստանանք

$$v_{\gamma\delta} = a_{rs} b_{tz} \quad (11.1.17)$$

հավասարությունը: Այսպիսով, (11.1.16)-ից և (11.1.17)-ից բխում է, որ

$$y_{kl} = a_{rs} b_{tz} c_{\alpha\beta} : \quad (11.1.18)$$

Համեմատելով (11.1.14)-ը և (11.1.18)-ը՝ հանգում ենք $X = Y$ հավասարությանը: \square

Շարունակենք կրոնեկերյան արտադրյալի հատկությունների ուսումնասիրումը:

Թեորեմ 11.1.2 : *Դիցուք A, B, C և D մատրիցներն այնպիսին են, որ որոշված են AC և BD արտադրյալները: Այդ դեպքում՝*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD : \quad (11.1.19)$$

Ապացույց: Ունենք՝

$$A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}, \quad B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}, \quad C = [c_{ij}]_{m_1 \times n_3}, \quad D = [d_{ij}]_{n_2 \times n_4} :$$

Ներմուծենք

$$X \equiv A \otimes B = [x_{ij}]_{m_1 m_2 \times n_1 n_2}, \quad Y \equiv C \otimes D = [y_{ij}]_{n_1 n_2 \times n_3 n_4}$$

մատրիցները: Այնուհետև, դիցուք

$$F \equiv XY = [f_{kl}]_{m_1 m_2 \times n_3 n_4} :$$

Ինչպես նախորդ թեորեմն ապացուցելիս մենք կրկին օգտվելու ենք (11.1.2) առնչությունների հիման վրա գրված կրոնեկերյան արտադրյալի տարրերի (11.1.4) ներկայացումից:

Դիտարկենք F մատրիցի կամայական

$$f_{kl} = \sum_{p=1}^{n_1 n_2} x_{kp} y_{pl} \quad (11.1.20)$$

տարր: X մատրիցի x_{kp} տարրը գրվում է

$$x_{kp} = a_{rs} b_{ij} \quad (11.1.21)$$

տեսքով, որտեղ r, i և s, j թվերի զույգերը միարժեքորեն որոշվում են

$$\begin{aligned} k &= (r-1)m_2 + i, & 1 \leq r \leq m_1, 1 \leq i \leq m_2, \\ p &= (s-1)n_2 + j, & 1 \leq s \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2 \end{aligned} \quad (11.1.22)$$

առնչություններից: Y մատրիցի y_{pl} տարրը ներկայացվում է

$$y_{pl} = c_{sq} d_{j\mu} \quad (11.1.23)$$

տեսքով, որտեղ s, j և q, μ թվերի զույգերը միարժեքորեն որոշվում են

$$\begin{aligned} p &= (s-1)n_2 + j, & 1 \leq s \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2, \\ l &= (q-1)n_4 + \mu, & 1 \leq q \leq n_3, 1 \leq \mu \leq n_4 \end{aligned} \quad (11.1.24)$$

առնչություններից: Այսպիսով, (11.1.20)-ից, (11.1.21)-ից և (11.1.23)-ից կստանանք

$$f_{kl} = \sum_{p=1}^{n_1 n_2} a_{rs} b_{ij} c_{sq} d_{j\mu}$$

արտահայտությունը: Հաշվի առնելով p ինդեքսի համար առկա առնչությունը (տե՛ս (11.1.22)-ը և (11.1.24)-ը)՝ ունենք

$$f_{kl} = \sum_{s=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} a_{rs} b_{ij} c_{sq} d_{j\mu} = \left(\sum_{s=1}^{n_1} a_{rs} c_{sq} \right) \left(\sum_{j=1}^{n_2} b_{ij} d_{j\mu} \right) = (AC)_{rq} (BD)_{i\mu},$$

որտեղ $(AC)_{rq}$ -ով և $(BD)_{i\mu}$ -ով նշանակված են համապատասխանաբար՝ AC և BD մատրիցների տարրերը: Օգտվելով k և l ինդեքսների համար վերը գրված առնչություններից (տե՛ս (11.1.22)-ը և (11.1.24)-ը)՝ հանգում ենք

$$f_{kl} = (AC \otimes BD)_{kl}$$

եզրակացությանը: Այսպիսով, (11.1.19) հավասարությունն ապացուցված է: \square

Թեորեմ 11.1.3 : Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$: Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m : \quad (11.1.25)$$

Ապացույց: Օգտվելով (11.1.19) հատկությունից՝ գրենք

$$A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B)$$

հավասարությունը, որտեղ I_n -ը և I_m -ը համապատասխանաբար՝ n -րդ և m -րդ կարգի միավոր մատրիցներն են: Այդ դեպքում

$$\det(A \otimes B) = \det(A \otimes I_n) \det(I_m \otimes B) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $I_m \otimes B$ -ն վանդակա-անկյունագծային մատրից է՝

$$I_m \otimes B = \text{diag}[B, B, \dots, B] :$$

Ուստի

$$\det(I_m \otimes B) = (\det B)^m :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ գոյություն ունի այնպիսի mn կարգի P տեղափոխության մատրից, որ

$$P^T(A \otimes I_n)P = I_n \otimes A :$$

Առաջարկում ենք ընթերցողին համոզվել դրանում ինքնուրույն: Այդ դեպքում $A \otimes I_n = P(I_n \otimes A)P^T$ և

$$\det(A \otimes I_n) = \det P \cdot \det(I_n \otimes A) \cdot \det P^T = \det(I_n \otimes A) = (\det A)^n :$$

Արդյունքում հանգում ենք (11.1.25) հավասարությանը: \square

Թեորեմ 11.1.4 : Եթե A և B մատրիցները չվերասերված են, ապա

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} : \quad (11.1.26)$$

Ապացույց: Դիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$: Նախ ասենք, որ $A \otimes B$ մատրիցը չվերասերված է: Դա բխում է նախորդ թեորեմից: Այնուհետև, կիրառելով (11.1.19) հատկությունը, կստանանք.

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

(այստեղ I_m -ը, I_n -ը և I_{mn} -ը նշված կարգերի միավոր մատրիցներն են): \square

Թեորեմ 11.1.5 : Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank} A \cdot \text{rank} B : \quad (11.1.27)$$

Ապացույց: Գիցուք $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ և $B \in \mathbf{C}^{p \times q}$: Գրենք այդ մատրիցների սինգուլյար վերլուծությունները.

$$\begin{aligned} A &= U_1 \Lambda_1 V_1^*, & U_1 &\in \mathbf{C}^{m \times m}, & V_1 &\in \mathbf{C}^{n \times n}, \\ B &= U_2 \Lambda_2 V_2^*, & U_2 &\in \mathbf{C}^{p \times p}, & V_2 &\in \mathbf{C}^{q \times q} \end{aligned}$$

(տե՛ս (6.2.1)-ը և (6.2.2)-ը): Ընդ որում՝ $\text{rank} A = \text{rank} \Lambda_1$ և $\text{rank} B = \text{rank} \Lambda_2$: Ըստ վերը բացահայտված (11.1.19) հատկության՝

$$A \otimes B = (U_1 \Lambda_1 V_1^*) \otimes (U_2 \Lambda_2 V_2^*) = (U_1 \otimes U_2)(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(V_1^* \otimes V_2^*):$$

Նշենք, որ $U_1 \otimes U_2$ և $V_1^* \otimes V_2^*$ մատրիցները չվերասերված են ըստ 11.1.3 թեորեմի: Իրոք,

$$\begin{aligned} \det(U_1 \otimes U_2) &= (\det U_1)^p (\det U_2)^m \neq 0, \\ \det(V_1^* \otimes V_2^*) &= (\det V_1^*)^q (\det V_2^*)^n \neq 0, \end{aligned}$$

քանի որ U_1, U_2 և V_1^*, V_2^* մատրիցներն ունիտար են: Ուստի

$$\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank}(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2):$$

Հաշվի առնելով Λ_1 և Λ_2 մատրիցների կառուցվածքները (տե՛ս (6.2.2)-ը)՝ հանգում ենք հետևյալ եզրակացությանը.

$$\text{rank}(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2) = \text{rank} \Lambda_1 \cdot \text{rank} \Lambda_2:$$

Այսպիսով, $\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank} \Lambda_1 \cdot \text{rank} \Lambda_2 = \text{rank} A \cdot \text{rank} B$: \square

Թեորեմ 11.1.6 : *Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr} A \cdot \text{tr} B: \tag{11.1.28}$$

Ապացույց: Գիտարկենք կամայական $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցներ: Գիցուք $A \otimes B = [c_{ij}]_{mn \times mn}$: Ըստ սահմանման՝

$$\text{tr}(A \otimes B) = \sum_{k=1}^{mn} c_{kk}: \tag{11.1.29}$$

Քանի որ A -ն և B -ն քառակուսի մատրիցներ են, ապա, ըստ (11.1.4)-ի, $c_{kk} = a_{rr} b_{ii}$, որտեղ r, i ամբողջ թվերը միարժեքորեն որոշվում են

$$k = (r - 1)n + i, \quad 1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq i \leq n$$

առնչությունից (տե՛ս (11.1.2)-ը): Այդ դեպքում, ելնելով (11.1.29)-ից, կստանանք՝

$$\text{tr}(A \otimes B) = \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n a_{rr} b_{ii} = \left(\sum_{r=1}^m a_{rr} \right) \left(\sum_{i=1}^n b_{ii} \right) = \text{tr} A \cdot \text{tr} B: \quad \square$$

Վերջում սահմանենք մատրիցի, այսպես կոչված, *կրոնեկերյան աստիճանները*.

$$A^{[k]} \equiv \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_k: \quad (11.1.30)$$

Ինչպես հետևում է սահմանումից՝

$$A^{[1]} = A, \quad A^{[k+1]} = A \otimes A^{[k]} = A^{[k]} \otimes A, \quad k = 1, 2, \dots$$

Այնուհետև, ակնհայտ է, որ

$$A^{[k+l]} = A^{[k]} \otimes A^{[l]}:$$

Թեորեմ 11.1.7 : *Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$(AB)^{[k]} = A^{[k]}B^{[k]}: \quad (11.1.31)$$

Ապացույց: Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդն ըստ k -ի: Երբ $k = 1$, (11.1.31) հավասարությունն ակնհայտ է: Ենթադրենք, որ թեորեմի պնդումը ճիշտ է $k - 1$ -ի համար, որտեղ $k \geq 2$, և ապացուցենք այն k -ի համար: Օգտվելով (11.1.19) հատկությունից՝ կստանանք.

$$\begin{aligned} (AB)^{[k]} &= (AB) \otimes (AB)^{[k-1]} = (AB) \otimes (A^{[k-1]}B^{[k-1]}) \\ &= (A \otimes A^{[k-1]})(B \otimes B^{[k-1]}) = A^{[k]}B^{[k]}: \quad \square \end{aligned}$$

Նշենք, որ մատրիցների սովորական արտադրյալի համար համանման հավասարությունը ճիշտ չէ, այսինքն՝ $(AB)^k \neq A^k B^k$:

11.2 Բադադրված մատրիցների սեփական արժեքները

Դիտարկենք կոմպլեքս գործակիցներով երկու փոփոխականի

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=0}^p c_{ij} x^i y^j$$

բազմանդամը: Կամայական $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ և $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ մատրիցների համար սահմանենք

$$\varphi(A, B) \equiv \sum_{i,j=0}^p c_{ij} A^i \otimes B^j \quad (11.2.1)$$

տեսքի մատրիցը: Այդ մատրիցի կարգը հավասար է mn -ի: Օրինակ, եթե $\varphi(x, y) = 2x + 3y + xy + xy^2$, ապա

$$\varphi(A, B) = 2A \otimes I_n + 3I_m \otimes B + A \otimes B + A \otimes B^2:$$

Պարզվում է, որ գոյություն ունի պարզ կապ A, B և $\varphi(A, B)$ մատրիցների սեփական արժեքների միջև:

Թեորեմ 11.2.1 : Եթե $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ բվերը A մատրիցի, իսկ $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ բվերը B մատրիցի սեփական արժեքներն են, ապա $\varphi(\lambda_r, \mu_s)$, $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$ բվերը $\varphi(A, B)$ մատրիցի սեփական արժեքներն են:

Ապացույց: Նմանության ձևափոխությամբ բերենք A և B մատրիցները ժողդանյան կանոնական ձևի: Դիցուք

$$J_1 = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & K_\alpha \end{bmatrix}, J_2 = T^{-1}BT = \begin{bmatrix} L_1 & & & \\ & L_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & L_\beta \end{bmatrix}, \quad (11.2.2)$$

որտեղ K_γ , $\gamma = 1, 2, \dots, \alpha$ և L_δ , $\delta = 1, 2, \dots, \beta$ դիտարկվող մատրիցների ժողդանյան վանդակներն են (տես (5.1.8)-ը): Քանի որ J_1 -ը և J_2 -ը վանդակա-անկյունագծային մատրիցներ են, ապա

$$J_1^i = \begin{bmatrix} K_1^i & & & \\ & K_2^i & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & K_\alpha^i \end{bmatrix}, \quad J_2^j = \begin{bmatrix} L_1^j & & & \\ & L_2^j & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & L_\beta^j \end{bmatrix} :$$

Ելնելով ժողդանյան վանդակների (5.1.9) կառուցվածքից՝ կարող ենք ասել, որ J_1^i -ն $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_m^i$ անկյունագծային տարրերով, իսկ J_2^j -ն $\mu_1^j, \mu_2^j, \dots, \mu_n^j$ անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրիցներ են:

Կրոնեկերյան արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ $J_1^i \otimes J_2^j$ -ն վերին եռանկյուն մատրից է, որի գլխավոր անկյունագծի տարրերը $\lambda_r^i \mu_s^j$, $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$ բվերն են: Ուստի

$$\varphi(J_1, J_2) = \sum_{i,j=0}^p c_{ij} J_1^i \otimes J_2^j$$

նույնպես վերին եռանկյուն մատրից է $\varphi(\lambda_r, \mu_s)$ անկյունագծային տարրերով, որոնք այդ մատրիցի սեփական արժեքներն են: Ապացույցն ավարտելու համար մնում է ցույց տալ, որ $\varphi(J_1, J_2)$ և $\varphi(A, B)$ մատրիցներն ունեն նույն սեփական արժեքները:

Օգտվելով J_1 և J_2 մատրիցների (11.2.2) ներկայացումներից՝ կիրառենք (11.1.19) և (11.1.26) հատկությունները: Կստանանք, որ

$$\begin{aligned} J_1^i \otimes J_2^j &= (S^{-1}AS)^i \otimes (T^{-1}BT)^j = (S^{-1}A^iS) \otimes (T^{-1}B^jT) \\ &= (S^{-1} \otimes T^{-1})(A^i \otimes B^j)(S \otimes T) = (S \otimes T)^{-1}(A^i \otimes B^j)(S \otimes T) : \end{aligned}$$

Այնուհետև,

$$\varphi(J_1, J_2) = \sum_{i,j=0}^p c_{ij} J_1^i \otimes J_2^j = (S \otimes T)^{-1} \sum_{i,j=0}^p c_{ij} A^i \otimes B^j \cdot (S \otimes T) = (S \otimes T)^{-1} \varphi(A, B) (S \otimes T) :$$

Այսպիսով, $\varphi(J_1, J_2)$ և $\varphi(A, B)$ մատրիցները նման են և, հետևաբար, ունեն միևնույն սեփական արժեքները: \square

Բերենք ապացուցված թեորեմի հետևանքները, որոնք համապատասխանում են առավել հաճախ հանդիպող դեպքերին, երբ $\varphi(x, y) = xy$ և $\varphi(x, y) = x + y$:

ձեռնարկ 11.2.1 : $A \otimes B$ մատրիցի սեփական արժեքները $\lambda_r \mu_s$, $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$ թվերն են:

ձեռնարկ 11.2.2 : $A \otimes I_n + I_m \otimes B$ մատրիցի սեփական արժեքները $\lambda_r + \mu_s$, $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$ թվերն են:

Ապացուցենք ևս երկու կարևոր պնդում:

Թեորեմ 11.2.2 : Եթե x -ը A մատրիցի, իսկ y -ը B մատրիցի սեփական վեկտորներ են, ապա $x \otimes y$ -ը $A \otimes B$ մատրիցի սեփական վեկտոր է:

Ապացույց: Դիցուք $Ax = \lambda x$ և $By = \mu y$: Այդ դեպքում՝

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By = (\lambda x) \otimes (\mu y) = \lambda \mu (x \otimes y) :$$

Ընդ որում, ակնհայտ է, որ $x \otimes y$ -ը ոչ զրոյական վեկտոր է: \square

Թեորեմ 11.2.3 : Եթե A -ն և B -ն դրական որոշյալ (կիսատրոշյալ) մատրիցներ են, ապա $A \otimes B$ -ն նույնպես դրական որոշյալ (կիսատրոշյալ) մատրից է:

Ապացույց: Նախ նշենք, որ $A \otimes B$ -ն հերմիտյան մատրից է: Այնուհետև, քանի որ A և B մատրիցների սեփական արժեքները դրական (ոչ բացասական) են, ապա, ըստ 11.2.1 հետևանքի, $A \otimes B$ մատրիցի սեփական արժեքները նույնպես դրական (ոչ բացասական) թվեր են: \square

Վերը ստացված արդյունքները կարող են կիրառվել դիֆերենցիալ հավասարումների համար տարբերական սխեմաներ գրելիս և հետազոտելիս: Յուրադրենք այն մեկ օրինակի վրա:

Նախ դիտարկենք եզրային խնդիր երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար.

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0 : \quad (11.2.3)$$

Ընտրենք $[0, 1]$ հատվածում $h = 1/(n+1)$ քայլով հավասարահեռ հանգույցներ՝ $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1$: Նշանակենք v_i -ով, որտեղ $1 \leq i \leq n+1$, խնդրի մոտավոր լուծման արժեքը x_i հանգույցում: Ըստ եզրային պայմանների՝ $v_0 = v_{n+1} = 0$: Մոտավոր

լուծումը գտնվում է ցանցային հավասարումների համակարգից, որի մատրիցավեկտորական գրառումը հետևյալն է.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ h^2 f(x_3) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \\ h^2 f(x_n) \end{bmatrix}$$

(տե՛ս, օրինակ, [6, 18]): Այս համակարգի

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11.2.4)$$

երեքանկյունագծային մատրիցի սեփական արժեքները հայտնի են՝

$$\lambda_r = 4 \sin^2 \frac{r\pi}{2(n+1)}, \quad r = 1, 2, \dots, n : \quad (11.2.5)$$

Հայտնի են նաև համապատասխան սեփական վեկտորները.

$$\psi_r = \begin{bmatrix} \psi_1^{(r)} \\ \psi_2^{(r)} \\ \vdots \\ \psi_n^{(r)} \end{bmatrix}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (11.2.6)$$

որտեղ

$$\psi_i^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{r\pi i}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Այդ վեկտորները կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ (տե՛ս, օրինակ՝ [18]):

Այժմ $\Omega = \{0 < x, y < 1\}$ տիրույթում դիտարկենք

$$-\Delta u = f, \quad (x, y) \in \Omega \quad (11.2.7)$$

հավասարումը

$$u = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (11.2.8)$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & 0 \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix} :$$

Նշենք, որ (11.2.9) գրառման մեջ օգտագործվել են հետևյալ նշանակումները.

$$v_j \equiv [v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$f_j \equiv [f_{1j}, f_{2j}, \dots, f_{nj}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, n :$$

Ամմիջական ստուգմամբ հեշտ է համոզվել, որ (11.2.9) համակարգի

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & -I & T & -I & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -I & T & -I \\ & & & & -I & T \end{bmatrix}$$

մատրիցը գրվում է (11.2.4)-ում տրված A մատրիցի միջոցով հետևյալ կերպ.

$$\mathbf{A} = A \otimes I + I \otimes A :$$

Այս առնչության շնորհիվ կարելի է ստանալ \mathbf{A} մատրիցի սեփական արժեքները: Ըստ 11.2.2 հետևանքի՝ դրանք արտահայտվում են A մատրիցի (11.2.5) սեփական արժեքներով՝

$$\lambda_{rs} = \lambda_r + \lambda_s = 4 \left(\sin^2 \frac{r\pi}{2(n+1)} + \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)} \right), \quad r, s = 1, 2, \dots, n :$$

Համապատասխան սեփական վեկտորները գտնվում են A մատրիցի (11.2.6) սեփական վեկտորների օգնությամբ՝

$$\Psi_{rs} = \psi_r \otimes \psi_s, \quad r, s = 1, 2, \dots, n :$$

Իրոք, օգտվելով (11.1.19) հատկությունից, կստանանք, որ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\Psi_{rs} &= (A \otimes I + I \otimes A)(\psi_r \otimes \psi_s) = (A \otimes I)(\psi_r \otimes \psi_s) + (I \otimes A)(\psi_r \otimes \psi_s) = \\ &= A\psi_r \otimes \psi_s + \psi_r \otimes A\psi_s = (\lambda_r \psi_r) \otimes \psi_s + \psi_r \otimes (\lambda_s \psi_s) = \\ &= (\lambda_r + \lambda_s)\psi_r \otimes \psi_s = \lambda_{rs}\Psi_{rs} : \end{aligned}$$

11.3 Միլվեստրի մատրիցային հավասարումը

Կրոնեկերյան արտադրյալի կիրառությունը օգնում է մատրիցային հավասարումների լուծումների գոյության և միակության հարցերը պարզելու ժամանակ: Այդպիսի հավասարումներ առաջանում են մի շարք տեսական և կիրառական խնդիրներում, մասնավորապես, դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների կայունության հետազոտման ժամանակ, օպտիմալ կառավարման տեսության մեջ, պատկերների մշակման խնդիրներում և այլն: Մատրիցային հավասարումների լուծմանը նվիրված են մեծ թվով աշխատանքներ (նշենք, օրինակ՝ [11, 13, 23] մենագրությունները):

Դիտարկենք առավել հայտնի, այսպես կոչված, *Միլվեստրի հավասարումը*.

$$AX + XB = C, \quad (11.3.1)$$

որտեղ $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ -ը անհայտ մատրից է, իսկ $A = [a_{ij}]_{m \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ և $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ կամայականորեն տրված մատրիցներ են:

Նախնական (11.3.1) մատրիցային հավասարումից անցնենք համարժեք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Այդ նպատակով ներկայացնենք X և C մատրիցները

$$X = \begin{bmatrix} - & x_{1*} & - \\ - & x_{2*} & - \\ & \vdots & \\ - & x_{m*} & - \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} - & c_{1*} & - \\ - & c_{2*} & - \\ & \vdots & \\ - & c_{m*} & - \end{bmatrix}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ

$$x_{i*} \equiv [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in}], \quad c_{i*} \equiv [c_{i1} \ c_{i2} \ \dots \ c_{in}], \quad i = 1, 2, \dots, m$$

վեկտորները համապատասխան մատրիցների տողերն են: Այնուհետև ներմուծենք վանդակային տեսքով գրված mn երկարության վեկտորներ.

$$x = \begin{bmatrix} x_{1*}^T \\ x_{2*}^T \\ \vdots \\ x_{m*}^T \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_{1*}^T \\ c_{2*}^T \\ \vdots \\ c_{m*}^T \end{bmatrix}: \quad (11.3.2)$$

Հավասարեցնելով C և $AX + XB$ մատրիցների համապատասխան տարրերը՝ գրենք

$$c_{kl} = (AX)_{kl} + (XB)_{kl}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

հավասարումները: Ըստ մատրիցների բազմապատկման կանոնի՝

$$c_{kl} = \sum_{i=1}^m a_{ki} x_{il} + \sum_{j=1}^n x_{kj} b_{jl}: \quad (11.3.3)$$

Գծվար չէ տեսնել, որ C մատրիցի c_{kl} տարրը (11.3.2) -ում ներմուծված c վեկտորի r -րդ բաղադրիչն է (նշանակենք այն c_r -ով), որտեղ $r = (k-1)n+l$: Այնուհետև, անմիջական ստուգմամբ համոզվում ենք, որ

$$\sum_{i=1}^m a_{ki}x_{il} = ((A \otimes I_n)x)_r, \quad \sum_{j=1}^n x_{kj}b_{jl} = ((I_m \otimes B^T)x)_r : \quad (11.3.4)$$

Համեմատելով (11.3.3) և (11.3.4) գրառումները՝ հանգում ենք այն եզրակացության, որ

$$c_r = ((A \otimes I_n)x)_r + ((I_m \otimes B^T)x)_r$$

բոլոր $r = 1, 2, \dots, mn$ արժեքների համար:

Այսպիսով, (11.3.1) հավասարումը համարժեք է

$$Gx = c \quad (11.3.5)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգին, որտեղ

$$G \equiv A \otimes I_n + I_m \otimes B^T : \quad (11.3.6)$$

Հայտնի է, որ (11.3.5) համակարգն ունի միակ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ G մատրիցը չվերասերված է: Իսկ մատրիցը չվերասերված է, եթե այն չունի գրոյական սեփական արժեքներ: Ըստ 11.2.2 հետևանքի՝ (11.3.6) մատրիցի սեփական արժեքները $\lambda_r(A) + \lambda_s(B)$, $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$ թվերն են: Արդյունքում հանգում ենք հետևյալ պնդմանը:

Թեորեմ 11.3.1 : $AX + XB = C$ Սիլվեստրի հավասարումն ունի միակ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lambda_r(A) + \lambda_s(B) \neq 0$, $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$, այսինքն՝ երբ A և $-B$ մատրիցները չունեն ընդհանուր սեփական արժեքներ:

Լավ հայտնի է նաև

$$AX + XA^T = C. \quad (11.3.7)$$

*Լյապունովի հավասարումը*³, որը Սիլվեստրի հավասարման մասնավոր դեպքն է: Ինչպես հետևում է 11.3.1 թեորեմից՝ (11.3.7) հավասարումն ունի միակ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lambda_r(A) + \lambda_s(A) \neq 0$, $r, s = 1, 2, \dots, n$, որտեղ n -ը A մատրիցի կարգն է, այսինքն՝ երբ A մատրիցը չունի հակառակ նշանների սեփական արժեքներ:

³Լյապունով Ալեքսանդր Միխայլովիչ (1857-1918) – ռուս մաթեմատիկոս և մեխանիկ, մեխանիկական համակարգերի հավասարակշռության և շարժման կայունության տեսության հիմնադիր:

Խնդիրներ և վարժություններ - 11

1. Ապացուցել, որ համապատասխան չափերի մատրիցների համար

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) \dots (A_k \otimes B_k) = (A_1 A_2 \dots A_k) \otimes (B_1 B_2 \dots B_k):$$

2. Ապացուցել, որ եթե A և B մատրիցներն ունիտար են, ապա $A \otimes B$ մատրիցը նույնպես ունիտար է:

3. Գտնել $I_m \otimes I_n$ մատրիցի սեփական արժեքները:

4. Դիցուք $Ax = \lambda x$ և $Ay = \mu y$: Ապացուցել, որ

$$\varphi(A, B)z = \varphi(\lambda, \mu)z,$$

որտեղ $z = x \otimes y$:

5. Դիցուք $A \in C^{m \times m}$, $B \in C^{n \times n}$ և $C = A \otimes I_n + I_m \otimes B$: Ապացուցել, որ $e^C = e^A \otimes e^B$:

6. Յույց տալ, որ $AXB = C$ մատրիցային հավասարումը համարժեք է $G = A \otimes B^T$ մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգին:

7. Յույց տալ, որ

$$A_1 X B_1 + A_2 X B_2 + \dots + A_k X B_k = C$$

մատրիցային հավասարման լուծումը համարժեք է

$$G = A_1 \otimes B_1^T + A_2 \otimes B_2^T + \dots + A_k \otimes B_k^T$$

մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծմանը:

8. Ապացուցել, որ

$$AX - XA = \mu X$$

հավասարումն ունի ոչ տրիվիալ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mu = \lambda_r - \lambda_s$, որտեղ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են:

Գլուխ 12

M -ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

Այս գլխում տրվում է կիրառություններում շատ կարևոր մատրիցների դասի, այսպես կոչված, M -մատրիցների համառոտ նկարագրությունը: Այդ մատրիցները հանդիպում են մաթեմատիկական մոդելավորման ամենատարբեր ոլորտներում՝ տնտեսագիտությունում, հավանականությունների տեսությունում, կենսաբանությունում և այլն: M -մատրիցները բնականորեն առաջանում են դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական մոտարկումների ընթացքում: Դրանք կարևոր են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի խտրացիոն մեթոդների կառուցման և վերլուծության ժամանակ:

12.1 M -մատրիցների սահմանումը

Ոչ բացասական և դրական մատրիցների գաղափարների հետ մենք արդեն հանդիպել ենք 9-րդ գլխում (տես 9.4 պարագրաֆը և 9.4.1 դիտողությունը): Հիշեցնենք այդ սահմանումները:

Դիցուք տրված են իրական տարրերով $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ և $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ մատրիցները: Կգրենք $A \geq B$ ($A > B$), եթե $a_{ij} \geq b_{ij}$ ($a_{ij} > b_{ij}$) բոլոր $1 \leq i \leq m$ և $1 \leq j \leq n$ ինդեքսների համար: Հակադիր \leq և $<$ հարաբերությունները սահմանվում են նման ձևով:

A մատրիցը կանվանենք *ոչ բացասական*, եթե $A \geq 0$, և *դրական*, եթե $A > 0$: Առաջին դեպքում A մատրիցի բոլոր տարրերը ոչ բացասական են, իսկ երկրորդում՝ դրական:

Տրված $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ մատրիցի համար կհամարենք՝ $|A| \equiv |[a_{ij}]|_{m \times n}$:

Տանք սույն գլխի հիմնական սահմանումը:

Չվերասերված $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ իրական մատրիցը կոչվում է M -մատրից, եթե $a_{ij} \leq 0$ բոլոր $i \neq j$ ինդեքսների համար և $A^{-1} \geq 0$:

Բերենք M -մատրիցի պարզ օրինակ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix} :$$

Հակադարձ մատրիցը հետևյալն է.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \geq 0 :$$

Գիտողություն 12.1.1 : M -մատրից անունը ներմուծվել է 1937 թ. գերմանացի և շվեյցարացի մաթեմատիկոս *Ալեքսանդր Օստրովսկու* (1893–1986) կողմից՝ ենթադրաբար անվանի գերմանացի մաթեմատիկոս *Հերման Մինկովսկու* (1864–1909) պատվին:

Լեմմա 12.1.1 : *Գիցուք* $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \geq 0$ և r -ը *դրական թիվ է:* $rI - B$ մատրիցը *չվերասերված է և* $(rI - B)^{-1} \geq 0$ *այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\rho(B) < r$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Գիտարկենք B մատրիցի որևէ λ սեփական արժեք և համապատասխան $x \neq 0$ սեփական վեկտորը: $Bx = \lambda x$ հավասարությունից ունենք.

$$|\lambda| |x| = |\lambda x| = |Bx| \leq |B| |x| = B|x| :$$

Այդ դեպքում

$$(rI - B)|x| = r|x| - B|x| \leq r|x| - |\lambda| |x| = (r - |\lambda|)|x| :$$

Այստեղից կատանանք, որ

$$0 \leq |x| \leq (r - |\lambda|)(rI - B)^{-1}|x| : \quad (12.1.1)$$

Քանի որ $(rI - B)^{-1} \geq 0$, ապա $(rI - B)^{-1}|x|$ վեկտորի բաղադրիչները ոչ բացասական են: Ուստի (12.1.1)-ից բխում է $r - |\lambda| > 0$ անհավասարությունը: Իրոք, հակառակ դեպքում, եթե $r - |\lambda| \leq 0$, կատանայինք $(r - |\lambda|)(rI - B)^{-1}|x| \leq 0$ անհավասարությունը և կհանգեինք այն եզրակացությանը, որ $|x| = 0$, իսկ դա հնարավոր չէ: Այսպիսով, B մատրիցի ցանկացած $|\lambda|$ սեփական արժեքի համար $|\lambda| < r$: Հետևաբար՝ $\rho(B) < r$:

Բավարարություն: Գիցուք $\rho(B) < r$: $rI - B$ և B մատրիցների համապատասխան սեփական արժեքները կապված են $\mu = r - \lambda$ առնչությամբ: Այդ դեպքում

$$|\mu| \geq r - |\lambda| \geq r - \rho(B) > 0 :$$

Այսպիսով, $rI - B$ մատրիցը չունի զրոյական սեփական արժեք: Ուստի այդ մատրիցը *չվերասերված է* (տե՛ս 1.3 պարագրաֆը): Այնուհետև՝

$$(rI - B)^{-1} = \frac{1}{r} \left(I - \frac{1}{r} B \right)^{-1} : \quad (12.1.2)$$

Գծվար չէ նկատել, որ $\frac{1}{r}B$ մատրիցի սպեկտրալ շարավիորը փոքր է մեկից: Իրոք,

$$\rho\left(\frac{1}{r}B\right) = \frac{1}{r}\rho(B) < 1:$$

Հետևաբար՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}B\right)^k$$

Նեյմանի շարքը զուգամետ է (թեորեմ 4.3.2) և ըստ (4.3.4)-ի՝

$$\left(I - \frac{1}{r}B\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}B\right)^k \geq 0: \tag{12.1.3}$$

Արդյունքում (12.1.2)-ից և (12.1.3)-ից կատանանք, որ $(rI - B)^{-1} \geq 0$: \square

Թեորեմ 12.1.1 : A մատրիցը M -մատրից է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն այնպիսի $B \geq 0$ մատրից և $r > \rho(B)$ թիվ, որ $A = rI - B$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը M -մատրից է: Վերցնենք $r \equiv \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$ և դիտարկենք $B = rI - A$ մատրիցը: Ակնհայտ է, որ $B \geq 0$:

Քանի որ $rI - B = A$, ապա ըստ 12.1.1 լեմմայի ճիշտ է $r > \rho(B)$ անհավասարությունը:

Բավարարություն: Գիցուք գոյություն ունեն այնպիսի $B = [b_{ij}]_{n \times n} \geq 0$ մատրից և $r > \rho(B)$ թիվ, որ $A = rI - B$: Այդ դեպքում $a_{ij} = -b_{ij} \leq 0$ բոլոր $i \neq j$ արժեքների համար: Ընդ որում, ըստ 2.1.1 լեմմայի, A մատրիցը չվերասերված է և $A^{-1} \geq 0$: \square

Օրինակ 12.1.1 : Գիտարկենք n -րդ կարգի

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գրենք այն $A = 4I - B$ տեսքով, որտեղ

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ B մատրիցի $G(B)$ Գերշգորինի տիրույթը կոմպլեքս հարթության $|z| \leq 2$ շրջանն է (թեորեմ 9.1.1): Իսկ քանի որ այդ տիրույթը պարունակում է B մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները, ապա $\rho(B) \leq 2 < 4$: Ուստի, ըստ 12.1.1 թեորեմի, A -ն M -մատրից է: \square

12.2 M -մատրիցների հիմնական հատկությունները

Այս բաժնում բացահայտվում են M -մատրիցների որոշ կարևոր հատկություններ:

Թեորեմ 12.2.1 : *Եթե A -ն M -մատրից է և λ -ն նրա սեփական արժեքն է, ապա $Re(\lambda) > 0$: Հակառակը, եթե ոչ դրական արտանկյունագծային տարրերով A մատրիցի բոլոր λ սեփական արժեքները այնպիսին են, որ $Re(\lambda) > 0$, ապա այդ մատրիցը M -մատրից է:*

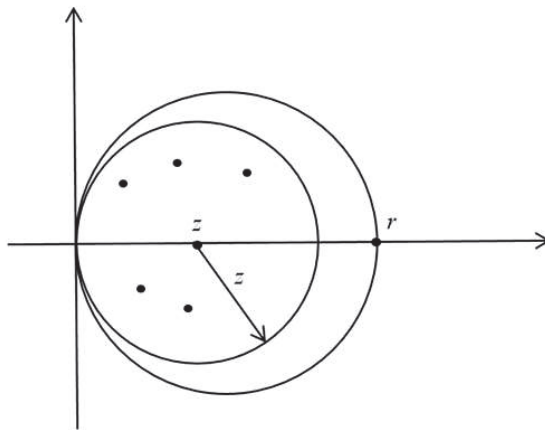
Ապացույց: Եթե A -ն M -մատրից է, ապա, ըստ 12.1.1 թեորեմի, այն ներկայացվում է $A = rI - B$ տեսքով, որտեղ $B \geq 0$ և $r > \rho(B)$: Գիտարկենք կամայական $\lambda_A \in sp(A)$ սեփական արժեքը: $A = rI - B$ ներկայացումից հետևում է, որ $\lambda_A = r - \lambda_B$ որևէ $\lambda_B \in sp(B)$ սեփական արժեքի համար: Գիցուք $\lambda_B = \alpha + i\beta$: Այդ դեպքում՝

$$r > \rho(B) \geq |\lambda_B| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq |\alpha| \geq \alpha,$$

և մենք կստանանք, որ $Re(\lambda_A) = r - \alpha > 0$: Թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Գիցուք արված է $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ իրական մատրիցը, որտեղ $a_{ij} \leq 0$ բոլոր $i \neq j$ ինդեքսների համար: Ենթադրենք, որ բոլոր $\lambda_A \in sp(A)$ սեփական արժեքների համար $Re(\lambda_A) > 0$: Այդ դեպքում A մատրիցը չվերասերված է, քանի որ չունի զրոյական սեփական արժեք: Այսպիսով, մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները գտնվում են կոմպլեքս հարթության աջ կիսահարթությունում: Գծվար չէ ցույց տալ, որ գոյություն ունի այնպիսի z թիվ, որ z շարավիղով և z կենտրոնով շրջանը պարունակում է $sp(A)$ սպեկտրի բոլոր կետերը (Նկ. 12.2.1): Գրա համար բավական է z թիվը ընտրել հետևյալ կերպ.

$$z > \max_{\lambda_A \in sp(A)} \frac{|\lambda_A|^2}{2Re(\lambda_A)} :$$



Նկ. 12.2.1. Թեորեմի ապացույցը պարզաբանող պատկերը:

Ընտրենք

$$r > \max\{2z, \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|\}$$

պայմանին բավարարող r թիվը: Գիտարկենք $B \equiv rI - A$ մատրիցը: Ակնհայտ է, որ $B \geq 0$ և $|r - \lambda_A| < r$ բոլոր $\lambda_A \in \text{sp}(A)$ սեփական արժեքների համար (Նկ. 12.2.1): Գիցուք λ_B -ն B մատրիցի կամայական սեփական արժեք է: Քանի որ $\lambda_B = r - \lambda_A$ որևէ $\lambda_A \in \text{sp}(A)$ սեփական արժեքի համար, ապա $|\lambda_B| = |r - \lambda_A| < r$: Ուստի $\rho(B) < r$: Այսպիսով, ըստ 12.1.1 թեորեմի A -ն M -մատրից է: \square

Գիցուք տրված է $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը: Հետագայում $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ համարներով տողերի և սյուների հատման տեղերում տեղակայված ենթամատրիցը կանվանենք A մատրիցի *գլխավոր ենթամատրից*: Այդ ենթամատրիցների որոշիչները հենց A մատրիցի գլխավոր մինորներն են, որոնց սահմանումը տրվել է 1.2 պարագրաֆում:

Թեորեմ 12.2.2 : *M -մատրիցի գլխավոր ենթամատրիցները ևս M -մատրիցներ են:*

Ապացույց: Գիցուք A -ն M -մատրից է: Այդ մատրիցը ներկայացվում է $A = rI - B$ տեսքով, որտեղ $B \geq 0$ և $r > \rho(B)$ (թեորեմ 12.1.1): Գիտարկենք A մատրիցի որևէ G_A գլխավոր ենթամատրից և B մատրիցի $G_B = rI - G_A$ համապատասխան գլխավոր ենթամատրիցը: Պարզ է, որ $G_B \geq 0$: Գոյություն ունի այնպիսի P տեղափոխությունների մատրից, որ

$$P^T B P = \begin{bmatrix} G_B & X \\ Y & Z \end{bmatrix}:$$

Այստեղից՝

$$B = P \begin{bmatrix} G_B & X \\ Y & Z \end{bmatrix} P^T.$$

Սահմանենք

$$C \equiv P \begin{bmatrix} G_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T$$

մատրիցը: Ակնհայտ է, որ $\rho(C) = \rho(G_B)$ և $0 \leq C \leq B$: Այնուհետև օգտվենք

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} \tag{12.2.1}$$

հայտնի հավասարությունից, որը ճիշտ է ցանկացած A մատրիցի և կամայական մատրիցային նորմի համար (տե՛ս [22, 28]): Քանի որ $0 \leq C \leq B$, ապա ակնհայտորեն $\|C\|_F \leq \|B\|_F$: Այստեղից ստանում ենք

$$\|C^k\|_F^{1/k} \leq \|B^k\|_F^{1/k}$$

անհավասարությունը, որը ճիշտ է ցանկացած $k \geq 1$ ամբողջ թվի համար: Անցնելով վերջին անհավասարության մեջ սահմանի, ըստ (12.2.1) հավասարության կատանանք, որ $\rho(C) \leq \rho(B)$: Այդ դեպքում՝

$$\rho(G_B) = \rho(C) \leq \rho(B) < r:$$

Այսպիսով, $G_A = rI - C_B$, որտեղ $G_B \geq 0$ և $r > \rho(G_B)$: Ուստի ըստ 12.1.1 թեորեմի G_B -ն M -մատրից է: \square

Թեորեմ 12.2.3 : M -մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորմները դրական են: Հակառակը, եթե ոչ դրական արտանկյունագծային տարրերով մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորմները դրական են, ապա այդ մատրիցը M -մատրից է:

Ապացույց: Գիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ -ն M -մատրից է: Գժվար չէ ցույց տալ, որ $\det A > 0$: Իրոք, իրական մատրիցի սեփական արժեքները կոմպլեքս համարով են (տե՛ս, օրինակ՝ [8, 16]): Ուստի, եթե $\lambda = \alpha + i\beta$ թիվը A մատրիցի որևէ սեփական արժեք է, ապա $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ թիվը նույնպես նրա սեփական արժեքն է: Այդ դեպքում՝ $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ ($\alpha > 0$ ըստ 12.2.1 թեորեմի): Հետևաբար

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0 :$$

Այնուհետև, քանի որ գլխավոր ենթամատրիցները նույնպես M -մատրիցներ են, ապա A մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորմները դրական են:

Թեորեմի երկրորդ մասը կապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ըստ մատրիցի n կարգի: Երբ $n = 1$, ունենք $A = [a]$ և $a > 0$: Այդ դեպքում՝ $A^{-1} = [1/a] > 0$: Գիցուք թեորեմի պնդումը ճիշտ է բոլոր $n - 1$ -րդ կարգի մատրիցների համար, որտեղ $n \geq 2$, և ապացուցենք թեորեմը $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի համար, որտեղ $a_{ij} \leq 0$ բոլոր $i \neq j$ ինդեքսների համար: Ըստ թեորեմի պայմանի՝ A մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորմները դրական են: Ներկայացնենք A մատրիցը

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & c \\ b^T & a \end{bmatrix}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ $\tilde{A} \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $c \leq 0$, $b^T \leq 0$ և $a > 0$ (a թիվը A մատրիցի առաջին կարգի գլխավոր մինոր է): Ըստ ինդուկցիայի ենթադրության $\tilde{A}^{-1} \geq 0$: Անմիջական ստուգմամբ հեշտ է համոզվել, որ A մատրիցի համար ճիշտ է հետևյալ LU -վերլուծությունը.

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & c \\ b^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ b^T \tilde{A}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & c \\ 0 & a - b^T \tilde{A}^{-1} c \end{bmatrix} = LU :$$

Ընդ որում՝

$$\det A = \det L \cdot \det U = (a - b^T \tilde{A}^{-1} c) \det \tilde{A} :$$

Քանի որ $\det A > 0$ և $\det \tilde{A} > 0$, ապա $a - b^T \tilde{A}^{-1} c > 0$: Այնուհետև.

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}^{-1} & \frac{-\tilde{A}^{-1} c}{a - b^T \tilde{A}^{-1} c} \\ 0 & \frac{1}{a - b^T \tilde{A}^{-1} c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -b^T \tilde{A}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \geq 0 :$$

Այսպիսով, A -ն ըստ սահմանման M -մատրից է: \square

Հետևանք 12.2.1 : M -մատրիցի անկյունագծային տարրերը դրական են:

Թեորեմ 12.2.4 : Դիցուք $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը այնպիսին է, որ $a_{ij} \leq 0$, երբ $i \neq j$, և $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$: Բացի այդ, եթե մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում, ապա այն M -մատրից է:

Ապացույց: Նախ ասենք, որ խիստ անկյունագծային գերիշխմամբ մատրիցները չվերասերված են (տե՛ս 9.2 պարագրաֆը):

Սեր A մատրիցի համար խիստ անկյունագծային գերիշխումը նշանակում է, որ

$$a_{ii} > - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(տե՛ս (9.2.2)-ը): Այստեղից բխում է, որ

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n: \tag{12.2.2}$$

Դիցուք $D \equiv \text{diag} [a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$: Գիտարկենք $B = I - D^{-1}A$ մատրիցը: $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցի տարրերը հետևյալն են.

$$b_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{եթե } j \neq i, \\ 0, & \text{եթե } j = i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n:$$

Ակնհայտ է, որ $B \geq 0$: Հաշվի առնելով (12.2.2) անհավասարությունները՝ ունենք.

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right) < 1:$$

Հետևաբար՝ $\rho(B) \leq \|B\|_\infty < 1$: Քանի որ $A = D(I - B)$, ապա

$$A^{-1} = (I - B)^{-1}D^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k \right) D^{-1} \geq 0.$$

Այսպիսով, A -ն, ըստ սահմանման, M -մատրից է: \square

12.3 M -մատրիցների կիրառությունները

Ինչպես արդեն ասվել է գլխի սկզբում, M -մատրիցներ հանդիպում են տարբեր խնդիրներ լուծելիս. հաշվողական մաթեմատիկայում, տնտեսագիտության մեջ և այլն: Բերենք երկու օրինակ:

• **Իտերացիոն մեթոդներ**

M -մատրիցների յուրահատկությունը կարող է օգտագործվել գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման իտերացիոն մեթոդներ կառուցելիս:

Գիտարկենք M -մատրիցով

$$Ax = b \quad (12.3.1)$$

համակարգը: Ենթադրենք, որ A մատրիցը կարելի է ներկայացնել $A = M - N$ տեսքով, որտեղ $M^{-1} \geq 0$ և $N \geq 0$: Գրենք (12.3.1) համակարգը որպես

$$x = Hx + M^{-1}b, \quad (12.3.2)$$

որտեղ $H \equiv M^{-1}N \geq 0$: Ցույց տանք, որ $I - H$ մատրիցը M -մատրից է: Այդ մատրիցի արտանկյունագծային տարրերը ոչ դրական են: Այնուհետև,

$$I - H = I - M^{-1}N = M^{-1}(M - N) = M^{-1}A :$$

Այստեղից հետևում է, որ $I - H$ մատրիցը չվերասերված է: Այդ դեպքում՝

$$(I - H)^{-1} - I = A^{-1}M - I = A^{-1}(M - A) = A^{-1}N \geq 0,$$

ուստիև, $(I - H)^{-1} \geq I \geq 0$: Այսպիսով, $I - H$ -ը M -մատրից է: Ընդ որում՝ $\rho(H) < 1$ (լեմմա 12.1.1):

Գրելով (12.3.1) նախնական համակարգը (12.3.2) տեսքով՝ դիտարկենք

$$x^{k+1} = Hx^k + M^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12.3.3)$$

իտերացիոն մեթոդը: Քանի որ $\rho(H) < 1$, ապա այդ մեթոդը զուգամետ է (տե՛ս, օրինակ՝ [6, 18, 29]):

Հայտնի Յակոբիի իտերացիոն մեթոդում (տե՛ս, օրինակ՝ [6, 29]), $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ մատրիցը, որի անկյունագծային տարրերը դրական են (հետևանք 12.2.1), ներկայացվում է $A = D - N$ տեսքով, որտեղ $D \equiv \text{diag} [a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$: Համապատասխանաբար (12.3.3) իտերացիոն մեթոդը գրվում է

$$x^{k+1} = D^{-1}Nx^k + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

տեսքով: Այսպիսով, M -մատրիցների համար Յակոբիի մեթոդը զուգամետ է:

• **Միջուրտային տնտեսագիտության Լեոնտևի մոդելը**

Բազմաճյուղ տնտեսության գործունեությունը պահանջում է նրա առանձին ոլորտների միջև որոշակի հավասարակշռություն: Մի կողմից ամեն ոլորտ հանդիսանում է արտադրող, մյուս կողմից՝ այլ ոլորտների արտադրանքի սպառող: Ընդ որում՝ կապված տարբեր տիպի ապրանքների արտադրման և սպառման հետ, ծագում է ոլորտների միջև կապի հաշվարկման բավականին դժվար խնդիրը: Մաթեմատիկական մոդելի տեսքով առաջին անգամ այդ խնդիրը ձևակերպվել է 1936 թվականին հայտնի

ամերիկացի տնտեսագետ, Նոբելյան մրցանակակիր (1973 թ.) *Վասիլի Լեոնտևի* (1905-1999) կողմից: Լեոնտևի աշխատանքները եղան ԱՄՆ-ում 1929-1932 թ.թ. տնտեսական անկման պատճառների վերլուծության առաջին փորձերը:

Գիցուք որոշակի արտադրական բնագավառ n տարբեր ոլորտների միավորում է, որոնցից ամեն մեկը տալիս է իր արտադրանքը: Սովորաբար արտադրության պրոցեսը դիտարկվում է ժամանակի որոշակի ընթացքում, օրինակ՝ մեկ տարի: Սեփական արտադրության ապահովման համար ամեն մի ոլորտ ունի մյուս ոլորտների ապրանքների կարիքը:

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

x_i – i -րդ ոլորտի արտադրած ապրանքների ընդհանուր ծավալը,

x_{ij} – i -րդ ոլորտի արտադրած ապրանքների այն ծավալը, որն անհրաժեշտ է j -րդ ոլորտին x_j սեփական ապրանքն արտադրելու համար,

y_i – i -րդ ոլորտի արտադրած ապրանքների այն մասը, որը նախատեսված է սպառելու ոչ արտադրական սֆերայում (այն կարող է լինել քաղաքացիների անձնական պահանջարկ, հասարակական պահանջարկ, պետական ինստիտուտների պահպանում և այլն):

Ոլորտների հավասարակշռված կապերի սկզբունքը պնդում է, որ i -րդ ոլորտի արտադրած ապրանքների ընդհանուր ծավալը պետք է հավասար լինի արտադրական և ոչ արտադրական ոլորտների պահանջած ծավալների գումարին: Ամենապարզ ձևակերպմամբ հավասարակշռության առչություններն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n : \tag{12.3.4}$$

Այս հավասարումները կոչվում են *հավասարակշռության առնչություններ*:

Վերլուծելով ԱՄՆ-ի տնտեսությունը երկրորդ համաշխարհային պատերազմի տարիներին՝ Վ. Լեոնտևը հայտնաբերել է հետևյալ կարևոր փաստը. երկար ժամանակի ընթացքում $a_{ij} \equiv x_{ij}/x_j$ մեծությունները կրում են քիչ փոփոխություն և դրանք կարելի է համարել հաստատուն: Այսպիսի ընդունելությամբ արտադրության տեխնոլոգիան գործնականորեն դառնում է *գծային*: Վերը ներմուծված a_{ij} մեծությունները կոչվում են *նույիղ ծախսերի գործակիցներ*: Այսպիսով, (12.3.4) հավասարումներն ընդունում են

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{12.3.5}$$

տեսքը: Մատրիցա-վեկտորական գրառումով (12.3.5) համակարգը հետևյալն է.

$$x = Ax + y, \tag{12.3.6}$$

որտեղ

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} :$$

Ստացված (12.3.6) հավասարումների համակարգը ունի մի շարք առանձնահատկություններ, որոնք բխում են խնդրի կիրառական բնույթից: Մասնավորապես, A մատրիցի բոլոր տարրերը և x , y վեկտորների բաղադրիչները պետք է լինեն ոչ բացասական: Եթե ոչ բացասական բաղադրիչներով կամայական y վեկտորի համար գոյություն ունի (12.3.6) համակարգի x լուծումը, որի բաղադրիչները նույնպես ոչ բացասական են, ապա Լեոնտևի մոդելը կոչվում է *արդյունավետ*:

Գրենք (12.3.6) համակարգը

$$(I - A)x = y \quad (12.3.7)$$

տեսքով: Ինչպես հետևում է 12.1.1 լեմմայից, որպեսզի $I - A$ մատրիցը լինի չվերասերված և $(I - A)^{-1} \geq 0$, անհրաժեշտ է և բավարար $\rho(A) < 1$ պայմանը: Այդ դեպքում.

$$x = (I - A)^{-1}y \geq 0,$$

ուստի Լեոնտևի մոդելը կլինի արդյունավետ: Այլ կերպ ասած, $I - A$ մատրիցը պետք է լինի M -մատրից:

Խնդիրներ և վարժություններ - 12

1. Յույց տալ, որ

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցները M -մատրիցներ են:

- Բերել օրինակ, երբ A և B մատրիցները M -մատրիցներ են, սակայն AB -ն M -մատրից չէ:
- Ապացուցել, որ եթե A , B մատրիցները M -մատրիցներ են և $(AB)_{ij} \leq 0$ բոլոր $i \neq j$ ինդեքսների համար, ապա AB -ն նույնպես M -մատրից է:
- Բերել օրինակ, երբ A և B մատրիցները M -մատրիցներ են, սակայն $A + B$ գումարը M -մատրից չէ:
- Ապացուցել, որ եթե A , B մատրիցները M -մատրիցներ են և $A + B$ մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա $A + B$ գումարը նույնպես M -մատրից է:
- $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ մատրիցը կոչվում է *մոնոտոն*, եթե $Ax \geq 0$ պայմանից հետևում է, որ $x \geq 0$: Ապացուցել, որ A մատրիցը մոնոտոն է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն չվերասերված է և $A^{-1} \geq 0$:

Գրականություն

- [1] **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.-М.: Наука, 1977.
- [2] **Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.** Численные методы в задачах и упражнениях.-М.: Высшая школа, 2000.
- [3] **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры.-М.: Наука, 1983.
- [4] **Беллман Р.** Введение в теорию матриц.-М.: Наука, 1969.
- [5] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений, т.1,2.-М.: Физматгиз, 1962.
- [6] **Вержбицкий В.М.** Основы численных методов.-М.: Высшая школа, 2002.
- [7] **Воеводин В.В.** Линейная алгебра.-М.: Наука, 1987.
- [8] **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления.-М.: Наука, 1984.
- [9] **Вулих Б.З.** Введение в функциональный анализ.-М.: Наука, 1967.
- [10] **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.-М.: Наука, 1967.
- [11] **Демиденко Г.В.** Матричные уравнения.-Нов.: изд-во Новосиб. ун-та, 2009.
- [12] **Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С.** Задачи по вычислительной математике.-М.: Наука, 1980.
- [13] **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений.-М.: Наука, 1984.
- [14] **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ.-М.: Наука, 1977.
- [15] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа.-М.: Наука, 1989.
- [16] **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры.-М.: Наука, 1971.
- [17] **Ланкастер П.** Теория матриц.-М.: Наука, 1978.
- [18] **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений.-М.: Наука, 1978.
- [19] **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения.-М.: Мир, 1980.

- [20] **Уоткинс Д.** Основы матричных вычислений.-М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
- [21] **Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры.-М.: ФМ, 1960.
- [22] **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ.-М.: Мир, 1989.
- [23] **Bai Zh., Gao W. and Y.Su, eds.** Matrix Functions and Matrix Equations.- *Series in Contemporary Applied Mathematics*, vol.19, World Scientific Publ., 2015.
- [24] **Ben-Israel A. and T.N.E. Greville.** Generalized Inverses: Theory and Applications. - Springer, 2003.
- [25] **Benzi M.** Preconditioning techniques for large linear systems: A survey.-*Journal of Computational Physics*, **182**, 2002, 418-477.
- [26] **Ke Chen.** Matrix Preconditioning Techniques and Applications.-Cambridge University Press, 2005.
- [27] **Koeber M. and U.Schafer.** The unique square root of a positive semidefinite matrix.- *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, v.37, No.8, 2006, 990-992.
- [28] **Meyer C.D.** Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.-SIAM, 2000.
- [29] **Quarteroni A., Sacco R. and F. Saleri.** Numerical Mathematics.-Springer, 2007.

Առարկայական ցանկ

անհավասարություն

- Կոշի-Բունյակովսկի-Շվարցի 11
- Մինկովսկու 70

Գերշգորինի

- շրջան 166
- տիրույթ 166

Գիվենսի պտույտ 52

Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացում 107

- դասական 109
- վերափոխված 110

ենթատարածությունների

- ուղիղ գումար 33
- օրթոգոնալություն 33

թեորեմ

- Գերշգորինի 164
- Շուրի 95
- Քելի-Համիլտոնի 98

Ժորդանյան

- կանոնական ձև 93
- վանդակ 93

Լեոնտևի մոդել 216

Լյապունովի հավասարում 207

համակարգի

- նորմալ փակաբովանդակում 138
- փակաբովանդակում 137

համարժեք նորմեր 74

Հաուսդորֆի արտացոլում 53

մատրից 12

- անկյունագծային 13
- անվերածելի 176

- արտացոլման 52

- Գիվենսի 52

- դրական 175, 209

- դրական կիսաորոշյալ 48

- դրական որոշյալ 48

- գրոյական 13

- իդեմպոտենտ 155

- ինդիկատորային 174

- լավ պայմանավորված 79

- կապակցվածության 18

- կցված 16

- հակադարձ 16

- համալուծ 15

- Հաուսդորֆի 53

- հերմիտյան 45

- միավոր 13

- Մոր-Պենրոուզի հակադարձ 147

- նորմալ 57

- ոչ բացասական 175, 209

- չվերասերված 14

- պարզ կառուցվածքի 53

- պտտման 51

- պրոյեկտման 158

- սիմետրիկ 45

- վանդակային 25

- Վանդերմոնդի 55

- վատ պայմանավորված 79

- վերապայմանավորող 83

- վերասերված 14

- վերածելի 176

- տեղափոխության 50

- տրանսպոնացված 15

- ուղղանկյուն 12

- ունիտար 49

- փակաբովանդակային 139

- քառակուսի 12
- օրթոգոնալ 49
- M - 209
- մատրիցի
 - անկյունագծային գերիշխում 168
 - - խիստ 168
 - բնութագրիչ բազմանդամ 21
 - բնութագրիչ որոշիչ 21
 - էքսպոնենտ 183
 - թվային ռանգ 131
 - կողմնորոշված գրաֆ 171
 - - խիստ կապակցված 172
 - հանրահաշվական լրացում 14
 - հետք 17
 - մինոր 14
 - - անկյունային 15
 - - գլխավոր 15
 - - լրացուցիչ 15
 - միջուկ 31
 - նորմ 71
 - - օպերատորային 71
 - - Ֆրոբենիուսի 71
 - - l_∞ 73
 - - l_1 73
 - - l_2 74
 - որոշիչ 14
 - պայմանավորվածության թիվ 77
 - - սպեկտրալ 78
 - պատկեր 31
 - ռանգ 17
 - սեփական արժեք 21
 - սեփական վեկտոր 21
 - սինգուլյար թիվ 119
 - սպեկտր 21
 - սպեկտրալ շառավիղ 23
 - վերլուծություն
 - - Խոլեսկու 103
 - - կմախքային 147
 - - Շուրի 95
 - - սինգուլյար 120
 - - LU 100
 - - QR 111
- մատրիցներ
 - կոնգրուենտ 38
 - նման 35
 - - ունիտարորեն 91
 - տեղափոխելի 13
- մատրիցների
 - կրոնեկերյան արտադրյալ 193
 - ձևափոխություն
 - - կոնգրուենտության 38
 - - նմանության 35
 - տարածություն
 - - իրական $\mathbf{R}^{m \times n}$ 9
 - - կոմպլեքս $\mathbf{C}^{m \times n}$ 9
- մեթոդ
 - Խոլեսկու 105
 - Ռիչարդսոնի 82
 - փոքրագույն քառակուսիների 135, 150
 - LU 102
- Մուր-Պենրոուզի հակադարձում 125, 147
- Նեյմանի շարք 75
- նորմալ համակարգ 137
- Շուրի լրացում 61
- Պենրոուզի
 - հավասարումներ 146
 - պայմաններ 147
- պրոյեկտոր 158
 - օրթոգոնալ 158
- Ռելեյի հարաբերություն 47
- սեփական
 - արժեք 21
 - ենթատարծություն 41
 - վեկտոր 21
- սեփական արժեքի
 - պատիկություն
 - - երկրաչափական 40
 - - հանրահաշվական 22
- Միլվեստրի
 - հավասարում 206
 - չափանիշ 49

վեկտոր 9

- նորմավորված 11

վեկտորական տարածության

- բազիս 10

վեկտորական տարածություն

- իրական \mathbf{R}^n 9
- կոմպլեքս \mathbf{C}^n 9

վեկտորի

- նորմ 69
- - Հյուդերի l_p 70
- - l_∞ 69
- - l_1 69
- - l_2 69

վեկտորներ

- գծորեն անկախ 10
- գծորեն կախված 10
- օրթոգոնալ 11
- օրթոնորմավորված 11

վեկտորների

- գծային թաղանթ 31
- սկալյար արտադրյալ 10

վերապայմանավորիչ 83

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՅՈՒՐԻ ՌՈՒԲԵՆԻ ՀԱԿՈՔՅԱՆ

ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԱՆԱԼԻՁԻ ՏԱՐԻԵՐ

Ուսումնական ձեռնարկ

Հրատարակչության պատասխանատու խմբագիր՝ Լ. Հովհաննիսյան
Համակարգչային ձևավորումը՝ Յու.Ռ. Հակոբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատարակչության սրբագրումը՝ Ա. Գույումջյանի

Ստորագրված է տպագրության՝ 01.06.2022
Չափսը՝ 70x100_{1/16}: Տպ. մամուլը՝ 14:
Տպաքանակը՝ 100

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am



ՎՐԱՏԱՐԱԿՅՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2022
publishing_ysu.am