Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

# Մաթեմատիկական
# ԱՆԱԼԻԶ

**I** մաս

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

## առաջին մաս

**երկրորդ՝ լրամշակված հրատարակություն**

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից
որպես բուհական դասագիրք

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2018

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.16ց73
Մ 980

*Հրատարակության է երաշխավորել*
*ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի*
*գիտական խորհուրդը*

Խմբագիրներ՝

**Ա. Ա. Սահակյան**
*ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դեկան,*
*ֆիզ.մաթ. գիտությունների դոկտոր,*
*ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ*

**Մ. Ս. Մարտիրոսյան**
*ԵՊՀ մաթեմատիկական անալիզի և ֆունկցիաների*
*տեսության ամբիոնի դոցենտ,*
*ֆիզ.մաթ. գիտությունների թեկնածու*

Մուսոյան Վ.
Մ 980 Մաթեմատիկական անալիզ/Մուսոյան Վ., Մաս 1, -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2018, 340 էջ:

Դասագիրքը նախատեսված է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական, բնագիտական և տեխնիկական մասնագիտությունների համար: Տեսական հարուստ նյութից զատ, այն աչքի է ընկնում նաև լուծված օրինակների բազմազանությամբ, ինչը հնարավորություն է տալիս դասագրքից օգտվելու նշված մասնագիտությունների առկա և հեռակա բաժիններում սովորող բոլոր ուսանողներին:

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.16ց73

ISBN 978-5-8084-2264-3

*Դասագրքի երկրորդ՝ լրամշակված հրատարակությունը նվիրվում է պրոֆեսոր Վ.Խ. Մուսոյանի ծննդյան 80 ամյակին*

## Առաջին հրատարակության նախաբան

*(խմբագիրների կողմից)*

Ներկայացվող դասագիրքը հիմնված է Երևանի պետական համալսարանում երկար տարիների ընթացքում հեղինակի կարդացած դասախոսությունների վրա: Այն ընդգրկում է «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի բուհական ծրագրերում նախատեսված բոլոր թեմաները:

Դասագիրքն աչքի է ընկնում շարադրանքի հստակությամբ, սահմանումների և ապացույցների ճշգրտությամբ, լուծված օրինակների բազմազանությամբ: Դրա հետ մեկտեղ՝ հեղինակը հնարավորինս զերծ է մնում «ավելորդ խստություններից», որոնք կարող են խճճել ընթերցողին: Այս դասագրքի մեթոդական առավելությունը կայանում է նրանում, որ նյութը ներկայացված է ամբողջական և բովանդակալից, բայց միևնույն ժամանակ՝ հակիրճ տեսքով: Դա մի կողմից միտված է ուղղորդելու և հեշտացնելու ուսանողի ուսումնառության գործընթացը, իսկ մյուս կողմից՝ մղելու նրան ինքնուրույն ստեղծագործական աշխատանքի:

Դասագիրքը բաղկացած է երկու հատորից: Առաջին հատորը ներառում է մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվը, մի քանի փոփոխականի թվային ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հաշիվը և թվային շարքերը: Երկրորդ հատորը նվիրված է ֆունկցիոնալ հաջորդականություններին ու շարքերին, պարամետրից կախված ինտեգրալներին, Ստիլտեսի ինտեգրալին, շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվին: Բովանդակությունը տրոհված է գլուխների, գլուխները՝ պարագրաֆների, վերջիններս էլ՝ կետերի: Բանաձևերի համարակալումը երկտեղ է և գործում է միայն տվյալ գլխի շրջանակներում. օրինակ՝ որևէ գլխում հանդիպող (5.8) բանաձևն այդ գլխի 5-րդ պարագրաֆի 8-րդ բանաձևն է: Թեորեմների ապացույցները սկսվում են ► նշանով, իսկ ■ նշանն ազդարարում է ապացույցի ավարտը:

# I ԳԼՈՒԽ
# ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

## ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մաթեմատիկական անալիզի հիմնական հասկացությունների ուսումնասիրությունը, ինչպիսիք են՝ սահմանը, անընդհատությունը, ածանցյալը և ինտեգրալը, հիմնված է թվի գաղափարի ճշգրիտ սահմանման վրա: Մենք կենթադրենք, որ ընթերցողը ծանոթ է ռացիոնալ թվերի կառուցվածքին ու հատկություններին* և իրական թվերը կներմուծենք *ռացիոնալ թվերի բազմության հատույթների* միջոցով:

Հայտնի է, որ ռացիոնալ թվերի համակարգը լրիվ չէ այն իմաստով, որ ռացիոնալ թվերը բավարարում են թվաբանության և երկրաչափության ոչ բոլոր պահանջներին: Օրինակ, ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ գոյություն չունի այնպիսի թիվ, որի քառակուսին 2 է: Այս պնդումն ապացուցենք հակասող ենթադրության մեթոդով. դիցուք գոյություն ունի $\frac{m}{n}$ ռացիոնալ թիվ ($m$-ը և $n$-ը բնական թվեր են) այնպիսին, որ $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$: Կարող ենք համարել, որ $\frac{m}{n}$ կոտորակն անկրճատելի է՝ հակառակ դեպքում դատողությունները կշարունակենք այն կրճատելուց հետո: Այսպիսով՝ $m^2 = 2n^2$, հետևաբար, $m$-ը զույգ թիվ է՝ $m = 2k$: Այստեղից կստանանք՝ $n^2 = 2k^2$, հետևաբար, $n$-ը նույնպես զույգ թիվ է: Ստացվեց, որ $\frac{m}{n}$ կոտորակը կրճատելի է, ինչը հակասություն է:

Ստացված իրավիճակը դիտարկենք մի նոր՝ Դեդեկինդի հատույթների տեսանկյունից: Նշանակենք $A$-ով այն $a$ դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են $a^2 < 2$ պայմանին, իսկ $A'$-ով՝ այն

* Առաջիկայում այդ հատկությունները կթվարկենք:

$a'$ դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են $a'^2 > 2$ պայմանին:

Ցույց տանք, որ $A$ բազմությանը պատկանող թվերի մեջ չկա մեծագույնը, իսկ $A'$-ին պատկանողների մեջ՝ փոքրագույնը: Ապացուցենք այդ պնդումներից, օրինակ, առաջինը: Վերցնենք կամայական $a \in A$ թիվ և համոզվենք, որ այն $A$ բազմության մեծագույն տարրը չէ: Դրա համար բավական է նկատել, որ գոյություն ունի $n$ բնական թիվ այնպիսին, որ $a + \frac{1}{n} \in A$, այսինքն՝ $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$: Իրոք, քանի որ

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n},$$

$n$-ը կընտրենք այնպես, որ տեղի ունենա

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2$$

անհավասարությունը, կամ, որ նույնն է՝

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}:$$

$A'$-ում փոքրագույն տարրի բացակայությունն ապացուցվում է նման դատողություններով:

Բերված մեկնաբանությունը նախադրյալ է՝ ընկալելու *Դեդեկինդի հատույթների տեսությունը*:

## §1. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ: ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԸ

**1. Իրական թվի սահմանումը:** Դիցուք ռացիոնալ թվերի $\mathbf{Q}$ բազմությունը տրոհված է $A$ և $A'$ երկու ոչ դատարկ դասերի (ենթաբազմությունների) այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ երկու պայմանները.

*$1^0$. Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ պատկանում է այդ դասերից մեկին և միայն մեկին՝*

$$\mathbf{Q} = A \cup A', \ A \cap A' = \varnothing :$$

*$2^0$. $A$ դասին պատկանող յուրաքանչյուր $a$ թիվ փոքր է $A'$ դասին պատկանող յուրաքանչյուր $a'$ թվից՝*

$$a \in A, a' \in A' \Rightarrow a < a' :$$

Այսպիսի տրոհումը կանվանենք *հատույթ* և կնշանակենք $A / A'$ սիմվոլով: $A$ բազմությունը կոչվում է *հատույթի ստորին դաս*, իսկ $A'$-ը՝ *հատույթի վերին դաս*:

**Օրինակներ:**

**ա)** Ֆիքսենք կամայական $r$ ռացիոնալ թիվ: $A$ ստորին դասի մեջ ընդգրկենք $a < r$ պայմանին բավարարող բոլոր $a$ ռացիոնալ թվերը, իսկ $A'$ վերին դասի մեջ՝ $a' \geq r$ պայմանին բավարարող բոլոր $a'$ ռացիոնալ թվերը:

Հեշտ է տեսնել, որ $1^0$ և $2^0$ պայմանները բավարարված են, այսինքն՝ առկա է հատույթ: $r$ ռացիոնալ թիվը պատկանում է վերին դասին և այդ դասի փոքրագույն թիվն է: Մյուս կողմից, $A$ ստորին դասում մեծագույն թիվ գոյություն չունի, որովհետև յուրաքանչյուր $a \in A$ ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունի $a_1$ ռացիոնալ թիվ, այնպիսին, որ $a < a_1 < r$ (օրինակ, $a_1 = \dfrac{a+r}{2}$) : Հետևաբար, $a_1$-ը նույնպես ստորին դասից է:

**ա՛)** $A$ ստորին դասը կազմենք $a \leq r$ պայմանին բավարարող բոլոր ռացիոնալ թվերից, իսկ մնացած ռացիոնալ թվերն ընդգրկենք $A'$ վերին դասի մեջ:

Այս օրինակը նախորդից տարբերվում է նրանով, որ $r$ թիվը վերին դասից տեղափոխվել է ստորին դաս, ուստի ա՛) օրինակում ստորին դասը պարունակում է մեծագույն տարր, իսկ վերինը չի պարունակում փոքրագույն տարր:

**բ)** $A$ ստորին դասի մեջ ներգրավենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերը, $0$-ն և այն դրական ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են $a^2 < 2$ պայմանին: Մնացած ռացիոնալ թվերը (այսինքն՝ $a' > 0$, $a'^2 > 2$ պայմանին բավարարող ռացիոնալ թվերը) թող կազմեն $A'$ վերին դասը:

Ներածությունում ապացուցվել է, որ այս հատույթի ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ վերին դասում՝ փոքրագույն:

Նկատենք նաև, որ հնարավոր չէ, որ մի որևէ հատույթի ստորին դասում գոյություն ունենա մեծագույն տարր և, միաժամանակ, վերինում՝ փոքրագույն: Իրոք, եթե $r$ -ը լինի $A$ -ի մեծագույն տարրը, իսկ $r'$ -ը՝ $A'$ -ի փոքրագույնը, կդիտարկենք $r_0 = \dfrac{r + r'}{2}$ ռացիոնալ թիվը, որը կբավարարի $r < r_0 < r'$ պայմանին: Վերջինս կնշանակի, որ $r_0$ -ն ո՛չ $A$ -ին է պատկանում, և ո՛չ էլ՝ $A'$ -ին, ինչը հակասություն է:

Այսպիսով, հատույթները կարող են լինել ընդամենը երեք տիպի՝ հետևյալ նկարագրերով.

***ա)*** *$A$ ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ $A'$ վերին դասում կա փոքրագույն տարր՝ $r$ :*

***ա՛)*** *$A$ ստորին դասում կա մեծագույն տարր՝ $r$ , իսկ $A'$ վերին դասում չկա փոքրագույնը:*

***բ)*** *$A$ ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ $A'$ վերին դասում՝ փոքրագույն:*

Առաջին երկու տիպի հատույթներում $r$ -ը կոչվում է *հատույթի սահմանազատիչ թիվ*, իսկ բ) տիպի հատույթի համար ասում են, որ այն սահմանազատիչ թիվ չունի:

**Սահմանում:** *բ) տիպի հատույթները կոչվում են իռացիոնալ թվեր, այսինքն, իռացիոնալ թիվ ասելով, կհասկանանք այնպիսի հատույթ, որի ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ վերին դասում՝ փոքրագույն:*

Ռացիոնալ թվերին նույնպես կարելի է համապատասխանեցնել հատույթներ: Որոշակիության համար, հետագայում ա՛) տիպի հատույթները չենք դիտարկի: $r$ ռացիոնալ թիվը կնույնացնենք ա) տիպի այն հատույթի հետ, որի սահմանազատիչ թիվը հե՛նց $r$ -ն է, այսինքն՝ այն հատույթի, որի $A$ ստորին դասը բաղկացած է $r$ -ից փոքր ռացիոնալ թվերից, իսկ $r$ -ն ընկած է $A'$ վերին դասի մեջ և այդ դասի փոքրագույն տարրն է:

Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերին տալիս են ընդհանուր անվանում՝ *իրական թվեր*: Այսպիսով, կամայական իրական թիվ՝ դա $A / A'$ հատույթ է, ընդ որում, ռացիոնալ թիվը ա) տիպի հատույթ է, իռացիոնալը՝ բ) տիպի: Առաջինկայում այդ հատույթները կանվանենք համապատասխանաբար *ռացիոնալ հատույթ և իռացիոնալ հատույթ*:

**2. Իրական թվերի բազմության կարգավորումը:** Դիցուք ունենք երկու ռացիոնալ թիվ՝ $r$ և $s$, որտեղ $r < s$, ընդ որում, $r = A / A'$, $s = B / B'$: Այդ դեպքում $A$ դասը բաղկացած է $r$-ից փոքր $a$ ռացիոնալ թվերից: Մյուս կողմից, եթե $a < r$, ապա $a < s$, հետևաբար $a \in B$: Այսպիսով՝ $A \subset B$: Նկատենք, որ $A \neq B$, քանի որ $r \leq r_1 < s$ պայմանին բավարարող $r_1$ ռացիոնալ թվերն $A$ դասին չեն պատկանում, բայց ընկած են $B$ դասի մեջ: Սա հիմք է ծառայում հետևյալ սահմանման համար.

**Սահմանում:** *Դիցուք ունենք երկու իրական թիվ՝* $\alpha = A / A'$ *և* $\beta = B / B'$: *Կասենք ա)* $\alpha = \beta$, *եթե* $A = B$, *բ)* $\alpha < \beta$, *եթե* $A \subset B$ *և* $A \neq B$, *գ)* $\alpha > \beta$, *եթե* $\beta < \alpha$ *:* *

Դժվար չէ համոզվել, որ կամայական երկու իրական թվերի համար տեղի ունի նշված երեք դեպքերից մեկը և միայն մեկը: Իրոք, եթե $A \neq B$, ապա այդ բազմություններից գոնե մեկն ունի ինչ-որ մի տարր, որը մյուսին չի պատկանում, ասենք՝ $a \in A$, բայց՝ $a \notin B$: Այստեղից հետևում է, որ $B$-ի բոլոր տարրերը փոքր են $a$-ից, հետևաբար՝ $B \subset A$: Բայց $B \neq A$, ուստի՝ $\beta < \alpha$ (մյուս դեպքում կստանայինք՝ $\alpha < \beta$):

Նկատենք, որ պահպանվում է նաև փոխանցականության (տրանզիտիվության) օրենքը, այն է՝ եթե $\alpha < \beta$ և $\beta < \gamma$, ապա $\alpha < \gamma$ :

Այն դեպքում, երբ $\alpha = A / A'$-ը իռացիոնալ հատույթ է, որպեսզի $r$ ռացիոնալ թիվը պատկանի $A$ դասին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $r < \alpha$, այսինքն՝ $A$ դասի մեջ ընկած են այն ռացիոնալ թվերը, որոնք փոքր են $\alpha$-ից, իսկ $A'$-ի մեջ՝ նրանք, որոնք մեծ են $\alpha$-ից: Այսինքն՝ իռացիոնալ հատույթի դեպքում սահմանազատիչ թվի դերը կատարում է $\alpha$ իռացիոնալ թիվը:

---

* Այսքանով սահմանված ենք համարում նաև $\alpha \leq \beta$ և $\alpha \geq \beta$ առնչությունները՝ իրենց սովորական իմաստով:

**Լեմմա 1.1:** *Եթե* $\alpha = A/A'$ *և* $\beta = B/B'$ *հատույթները* $\alpha < \beta$ *պայմանին բավարարող կամայական իրական թվեր են, ապա նրանց միջև գոյություն ունի* $r$ *ռացիոնալ թիվ՝* $\alpha < r < \beta$ *:*

► Քանի որ $A \subset B$ և $A \neq B$, ուստի գոյություն ունի $r_1$ ռացիոնալ թիվ այնպիսին, որ $r_1 \in B$ և $r_1 \notin A$: Հետևաբար՝ $r_1 \in B$ և $r_1 \in A'$, այսինքն՝ $\alpha \leq r_1 < \beta$ : Քանի որ $B$ ստորին դասում մեծագույն տարր գոյություն չունի, ուրեմն $r_1$-ի և $\beta$-ի միջև գոյություն ունի $r$ ռացիոնալ թիվ՝ $r_1 < r < \beta$, որն էլ կլինի որոնելին: ■

**Լեմմա 1.2:** Դիցուք $\alpha$ և $\beta$ իրական թվերն այնպիսին են, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունեն $s$ և $s'$ ռացիոնալ թվեր, որոնք բավարարում են

ա) $s < \alpha < s',\ s < \beta < s'$;

բ) $s' - s < \varepsilon$

պայմաններին: Այդ դեպքում $\alpha = \beta$ :

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք, օրինակ՝ $\alpha < \beta$ : Նախորդ լեմման երկու անգամ կիրառելով՝ կստանանք $r_1$ և $r_2$ ռացիոնալ թվեր, որոնք բավարարում են $\alpha < r_1 < r_2 < \beta$ պայմանին: Մյուս կողմից, ա) պայմանից կստանանք՝ $s < r_1 < r_2 < s'$ : Այստեղից հետևում է՝ $s' - s > r_2 - r_1 > 0$ : Ընտրելով $\varepsilon = r_2 - r_1$՝ կգանք հակասության ((բ) պայմանը չի բավարարվի): ■

<u>**3. Իրական թվերի համակարգի լրիվությունը:**</u> Այժմ *դիտարկենք իրական թվերի բազմության հատույթներ*, այն է՝ իրական թվերի բազմության տրոհում $\overline{A}$ և $\overline{A}'$ երկու ոչ դատարկ դասերի, այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները.

*$1^0$. Յուրաքանչյուր իրական թիվ պատկանում է այդ դասերից մեկին և միայն մեկին:*

*$2^0$.* $\overline{A}$ *դասի յուրաքանչյուր* $\alpha$ *թիվ փոքր է* $\overline{A}'$ *դասի յուրաքանչյուր* $\alpha'$ *թվից:*

**Թեորեմ 1.1 (Դեդեկինդի թեորեմը):** *Իրական թվերի բազմության յուրաքանչյուր $\overline{A}\,/\,\overline{A}'$ հատույթի համար կամ $\overline{A}$ ստորին դասում կա մեծագույն տարր, կամ $\overline{A}'$ վերին դասում՝ փոքրագույն:*

Այլ կերպ ասած՝ իրական թվերի բազմության յուրաքանչյուր հատույթ ունի սահմանազատիչ թիվ:

► Ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ դիտարկենք հետևյալ $A\,/\,A'$ հատույթը. $A$ ստորին դասը կազմենք բոլոր այն ռացիոնալ թվերից, որոնք $\overline{A}$ դասից են, իսկ $A'$ դասը՝ $\overline{A}'$ դասին պատկանող ռացիոնալ թվերից: Ակնհայտ է, որ $A\,/\,A'$-ը հատույթ է ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ, հետևաբար, այն մի իրական թիվ է՝ $\alpha$, որը պետք է ընկած լինի $\overline{A}$ կամ $\overline{A}'$ դասերից մեկի ու միայն մեկի մեջ: Ապացուցենք, որ եթե $\alpha \in \overline{A}$, ապա $\alpha$-ն $\overline{A}$ դասի մեծագույն տարրն է: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ, այսինքն՝ ենթադրենք, թե $\overline{A}$ դասում կա $\alpha$-ից մեծ մի $\beta$ թիվ՝ $\alpha < \beta$: Լեմմա 1.2-ի համաձայն, նրանց միջև գոյություն ունի $r$ ռացիոնալ թիվ՝ $\alpha < r < \beta$: Բայց $\alpha < r$ պայմանից բխում է, որ $r \in A'$, հետևաբար՝ $r \in \overline{A}'$, իսկ $r < \beta \in \overline{A}$ պայմանից բխում է, որ $r \in \overline{A}$: Ուրեմն, միևնույն $r$ թիվը պատկանում է թե՛ $\overline{A}$ դասին, և թե՛ $\overline{A}'$ դասին, ինչը հակասում է հատույթի սահմանմանը:

Հանգունորեն ապացուցվում է, որ եթե $\alpha \in \overline{A}'$, ապա $\alpha$-ն $\overline{A}'$ վերին դասի փոքրագույն տարրն է: ■

<u>4. Ճշգրիտ եզրերի գոյությունը:</u> $X$ (ոչ դատարկ) թվային բազմությունը կոչվում է *վերևից սահմանափակ*, եթե գոյություն ունի $M$ թիվ այնպիսին, որ

$$x \le M, \ \forall x \in X: \tag{1.1}$$

(1.1) պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր $M$ թիվ կոչվում է $X$ բազմության *վերին եզր*: Եթե $M$-ը $X$ բազմության վերին եզր է և $M' > M$, ապա $M'$-ը նույնպես $X$ բազմության վերին եզր է:

$X$ բազմությունը կոչվում է *ներքևից սահմանափակ*, եթե գոյություն ունի $m$ թիվ այնպիսին, որ

$$m \le x,\ \forall x \in X : \tag{1.2}$$

(1.2) պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր $m$ թիվ կոչվում է $X$ բազմության *ստորին եզր*: Եթե $m$-ը $X$ բազմության ստորին եզր է և $m' < m$, ապա $m'$-ը նույնպես $X$ բազմության ստորին եզր է:

Բազմությունը կոչվում է *սահմանափակ*, եթե այն սահմանափակ է թե՛ վերևից, թե՛ ներքևից:

**Թեորեմ 1.2:** *Վերևից (ներքևից) սահմանափակ $X$ բազմության վերին (ստորին) եզրերի մեջ գոյություն ունի փոքրագույնը (մեծագույնը):*

Այդ փոքրագույն վերին եզրը կոչվում է $X$ բազմության *ճշգրիտ վերին եզր* և նշանակվում է $\sup X$ սիմվոլով ($\sup$-ը կարդացվում է՝ *սուպրեմում*): Նմանապես, մեծագույն ստորին եզրը կոչվում է $X$ բազմության *ճշգրիտ ստորին եզր* և նշանակվում է $\inf X$ սիմվոլով ($\inf$-ը կարդացվում է՝ *ինֆիմում*): Եթե $X$ բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, կնշանակենք՝ $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$):

► Կապացուցենք պնդումներից միայն մեկը՝ վերևից սահմանափակ $X$ բազմության ճշգրիտ վերին եզրի գոյությունը (մյուս պնդումն առաջարկում ենք ապացուցել ինքնուրույն): Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) *Դիցուք $X$ բազմության տարրերի մեջ գոյություն ունի մեծագույնը*: Այս դեպքում հենց այդ տարրն էլ կհանդիսանա $X$ բազմության փոքրագույն վերին եզրը:

բ) *Դիցուք $X$ բազմության տարրերի մեջ գոյություն չունի մեծագույնը:* Այս դեպքում իրական թվերի բազմության մեջ կառուցենք հետևյալ $A/A'$ հատույթը. $\overline{A'}$ վերին դասի մեջ ընդգրկենք $X$ բազմության բոլոր վերին եզրերը, իսկ $\overline{A}$ ստորին դասի մեջ՝ մնացած իրական թվերը: Մասնավորաբար, $X$ բազմության բոլոր տարրերն ընկած կլինեն $\overline{A}$ ստորին դասի մեջ, քանի որ $X$ բազմությանը պատկանող $X$-ի վերին եզր գոյություն չունի (չէ՞ որ $X$-ում չկար ամենամեծ տարր):

Դժվար չէ տեսնել, որ $\overline{A}$ ստորին դասում չկա մեծագույն տարր: Իրոք, եթե $\alpha \in \overline{A}$, ապա $\alpha$-ն $X$ բազմության վերին եզր չէ: Այդ պատճառով $X$-ում, հետևաբար և՝ $\overline{A}$-ում, գոյություն ունի $\alpha$-ից մեծ տարր:

Այժմ, Դեդեկինդի թեորեմի համաձայն, $\overline{A}'$ վերին դասը կունենա ամենափոքր տարր, այսինքն՝ $X$ բազմության վերին եզրերի մեջ կա փոքրագույնը: ■

## §2. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ

**1. Իրական թվերի գումարը:** Մենք գիտենք, որ ռացիոնալ թվերի համար սահմանված է գումարման գործողություն, որն օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով.

1) $a+b=b+a$ ,

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ ,

3) $a+0=a$ ,

4) $a+(-a)=0$ ,

5) եթե $a<b$ , ապա կամայական $c$ թվի համար՝ $a+c<b+c$ :

Այժմ մեր նպատակն է գումարման գործողությունը տարածել բոլոր իրական թվերի բազմության վրա, այնպես, որ պահպանվեն այդ հինգ հատկությունները:

Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը.

**Լեմմա 2.1** Դիցուք $\alpha$ -ն իրական թիվ է: Այդ դեպքում կամայական $\varepsilon>0$ ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունեն $a$ և $a'$ ռացիոնալ թվեր, որոնք բավարարում են հետևյալ երկու պայմաններին.

$$a<\alpha<a' ,$$

$$a'-a<\varepsilon :$$

► Ապացուցման կարիք կա միայն իռացիոնալ $\alpha$ -ի դեպքում: Դիցուք՝ $\alpha=A/A'$ և $a_0\in A$, $a_0'\in A'$: Դիտարկենք $a_0+n\frac{\varepsilon}{2}>a_0'$ պայմանին բավարարող $n$ բնական թիվը: Նշանակենք $n_0$-ով $n$-ը չգերազանցող և $a_0+n_0\frac{\varepsilon}{2}\in A'$ պայմանին բավարարող ամենափոքր բնական թիվը: Մնում է նկատել, որ

$$a = a_0 + \frac{(n_0 - 1)\varepsilon}{2} \text{ և } a' = a_0 + \frac{n_0\varepsilon}{2}$$

ռացիոնալ թվերը կբավարարեն նշված պայմաններին: ■

Անցնենք իրական թվերի գումարման սահմանմանը: Դիցուք $\alpha$ -ն և $\beta$ -ն կամայական իրական թվեր են: Դիտարկենք բոլոր այն $a$ ,$a'$ և $b$ ,$b'$ ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են

$$a < \alpha < a' \text{ և } b < \beta < b' \tag{2.1}$$

պայմաններին:

**Սահմանում:** $\alpha$ *և* $\beta$ *իրական թվերի գումար է կոչվում այն* $\gamma$ *թիվը, որը բավարարում է*

$$a + b < \gamma < a' + b' \tag{2.2}$$

*պայմանին՝ (2.1)-ին բավարարող բոլոր* $a$ , $a'$ , $b$ , $b'$ *ռացիոնալ թվերի համար:*

Ապացուցենք, որ *այդպիսի* $\gamma$ *գոյություն ունի և միակն է*:

Դիտարկենք (2.1) պայմանին բավարարող բոլոր $a, b$ թվերի գումարների $\{a+b\}$ բազմությունը: Այն սահմանափակ է վերևից, որովհետև (2.1)-ին բավարարող ցանկացած $a' + b'$ թիվ այդ բազմության վերին եզր է: Նշանակելով $\gamma = \sup\{a+b\}$՝ կունենանք

$$a + b \le \gamma \le a' + b'$$

անհավասարությունը: Վերջինիս մեջ հավասարության նշանները բացառվում են, որովհետև (2.1) պայմանին բավարարող $a,b$ թվերի մեջ չկա մեծագույնը, իսկ $a',b'$ թվերի մեջ՝ փոքրագույնը:

Միակությունն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ ռացիոնալ թիվ: Լեմմա 2.1-ի համաձայն, գոյություն ունեն (2.1) պայմանին բավարարող $a$ , $a'$ և $b$ , $b'$ ռացիոնալ թվեր, այնպիսիք, որ

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{2} \text{ և } b' - b < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Հետևաբար՝

$$(a' + b') - (a + b) < \varepsilon : \tag{2.3}$$

Եթե $\gamma_1$-ը նույնպես բավարարի (2.2) պայմանին, լեմմա 1.2-ի համաձայն, կստանանք՝ $\gamma=\gamma_1$:

Նկատենք, որ երբ $\alpha$ և $\beta$ թվերը ռացիոնալ են, այս նոր սահմանված գումարը և նախկին (սովորական կոտորակների) գումարը համընկնում են, քանի որ հե՛նց նախկին գումարն է, որ բավարարում է (2.2) պայմանին (դա ապացուցելու համար բավական է գումարել (2.1)-ի նույնանուն անհավասարությունները):

**Թեորեմ 2.1** *Իրական թվերի բազմության մեջ սահմանված գումարման գործողությունը օժտված է 1) - 5) հիմնական հատկություններով, այն է՝*

*1)* $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ *,*

*2)* $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$*,*

*3)* $\alpha+0=\alpha$ *,*

*4) Յուրաքանչյուր* $\alpha$ *իրական թվի համար գոյություն ունի հակադիր, այսինքն՝ մի իրական թիվ, որը կնշանակենք* $-\alpha$ *-ով, և որը բավարարում է* $\alpha+(-\alpha)=0$ *պայմանին:*

*5) եթե* $\alpha<\beta$ *և* $\gamma$ *-ն կամայական իրական թիվ է, ապա* $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$ *:*

► 1)-ը և 2)-ը բխում են իրական թվերի գումարի սահմանումից և ռացիոնալ թվերի գումարի համապատասխան հատկություններից: 3)-ն ապացուցելու համար վերցնենք $a$, $a'$ և $b$, $b'$ ռացիոնալ թվեր, այնպես, որ $a<\alpha<a'$, $b<0<b'$: Գումարի սահմանման համաձայն, ունենք՝

$$a+b<\alpha+0<a'+b':$$

Մյուս կողմից՝ $a+b<a<\alpha<a'<a'+b'$: Ստացվեց, որ $\alpha+0$ և $\alpha$ թվերն ընկած են $a+b$ և $a'+b'$ թվերի միջև, որոնց տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել (տե՛ս (2.3)-ը), հետևաբար, լեմմա 1.2-ի համաձայն, այդ թվերը համընկնում են:

4)-ն ապացուցենք իռացիոնալ թվերի համար: Վերցնենք $\alpha=A/A'$ իռացիոնալ թիվը և որոնելի $-\alpha$ թիվը որոշենք հետևյալ $B/B'$ հատույթի միջոցով. $B$ ստորին դասի մեջ ներգրավենք բոլոր $-a'$ ռացիոնալ թվերը, որտեղ $a'\in A'$, իսկ $B'$ վերին դասի մեջ՝ բոլոր $-a$ թվերը, որտեղ $a\in A$:

Գումարի սահմանման համաձայն, $\alpha+(-\alpha)$-ն միակ թիվն է, որի համար

$$a+(-a')<\alpha+(-\alpha)<a'+(-a):$$

անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր $a\in A$, $a'\in A'$ տարրերի համար:

Մյուս կողմից, ունենք $a-a'<0<a'-a$: Հետևաբար, $\alpha+(-\alpha)$ և 0 թվերը համընկնում են:

5)-ն ապացուցելու համար նախ օգտվենք լեմմա 1.1-ից. գոյություն ունեն $r_1$ և $r_2$ ռացիոնալ թվեր, այնպիսիք, որ $\alpha<r_1<r_2<\beta$: Այնուհետև, համաձայն լեմմա 2.1-ի, գոյություն ունեն $c$, $c'$ ռացիոնալ թվեր, այնպիսիք, որ բավարարվեն $c<\gamma<c'$ և $c'-c<r_2-r_1$ պայմանները:

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\alpha+\gamma<r_1+c'<r_2+c<\beta+\gamma: \blacksquare$$

Հետևանք: *$\alpha<\beta$ անհավասարությունը համարժեք է $\beta-\alpha>0$ անհավասարությանը:*

<u>**2. Իրական թվերի արտադրյալը:**</u> $\alpha$ և $\beta$ իրական թվերի արտադրյալը սահմանենք նախ այն դեպքում, երբ դրանք դրական են՝ $\alpha>0$, $\beta>0$: Դիտարկենք բոլոր այն $a$, $a'$ և $b$, $b'$ ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են

$$0<a<\alpha<a',\ \ 0<b<\beta<b' \tag{2.4}$$

պայմաններին:

**Սահմանում:** *$\alpha$ և $\beta$ դրական թվերի արտադրյալ է կոչվում այն $\gamma$ թիվը, որը բավարարում է*

$$ab<\gamma<a'b' \tag{2.5}$$

*պայմանին՝ (2.4)-ին բավարարող բոլոր $a$, $a'$, $b$, $b'$ ռացիոնալ թվերի համար:*

Ապացուցենք, որ *այդպիսի $\gamma$ գոյություն ունի և միակն է:*

Դիտարկենք $\{ab\}$ բազմությունը: Այն սահմանափակ է վերևից, որովհետև յուրաքանչյուր $a'b'$ թիվ այդ բազմության վերին եզր է: Նշանակենք՝

$\gamma = \sup\{ab\}$: Ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն, (2.4)-ին բավարարող բոլոր $a$, $a'$, $b$, $b'$ ռացիոնալ թվերի համար ունենք՝

$$ab \le \gamma \le a'b' :$$

Այստեղ հավասարության նշանները բացառվում են, որովհետև (2.4) պայմանին բավարարող $a$ թվերի մեջ չկա մեծագույնը, իսկ $a'$ թվերի մեջ՝ փոքրագույնը:

Ելնելով լեմմա 1.2-ից՝ (2.5) պայմանին բավարարող $\gamma$ թվի միակությունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ $a'b'$ և $ab$ տիպի թվերի տարբերությունը կարելի է փոքր դարձնել կամայական դրական թվից: Այդ նպատակով $a'$ և $b'$ տիպի թվերից ֆիքսենք կամայական երկուսը՝ $a_0'$ և $b_0'$, և ստորև դիտարկենք միայն այն $a'$ և $b'$ թվերը, որոնք բավարարում են

$$a' \le a_0' \text{ և } b' \le b_0' \tag{2.6}$$

պայմաններին:

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: (2.4) և (2.6) պայմանին բավարարող $a$, $a'$ և $b$, $b'$ թվերն ընտրենք այնպես, որ բավարարվեն

$$a' - a < \varepsilon, \quad b' - b < \varepsilon$$

անհավասարությունները:

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$a'b' - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < (a_0' + b_0')\varepsilon ,$$

այսինքն՝ $a'b' - ab$ տարբերությունը կարող ենք ցանկացած չափով փոքր դարձնել, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Նկատենք, որ երբ $\alpha$ և $\beta$ թվերը ռացիոնալ են, ապա նրանց սովորական $\gamma = \alpha\beta$ արտադրյալը կբավարարի (2.5) անհավասարություններին: Այսինքն, ռացիոնալ թվերի համար սահմանված այս նոր արտադրյալը կհամընկնի նախկինում սահմանված արտադրյալին:

Ոչ դրական թվերի (երբ գոնե մեկը դրական չէ) արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

*ա) եթե արտադրիչներից գոնե մեկը զրո է, ապա արտադրյալը զրո է՝*

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha \ ,$$

*իսկ մնացած դեպքերում գործում է սովորական «նշանի կանոնը».*

*բ)* $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$*, երբ* $\alpha$ *-ն և* $\beta$ *-ն նույն նշանի են,*

*գ)* $\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|)$*, երբ* $\alpha$ *-ն և* $\beta$ *-ն տարբեր նշանների են:*

Իրական թվերի արտադրյալն օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով.

*1)* $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ *,*

*2)* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ *,*

*3)* $\alpha \cdot 1 = \alpha$ *,*

*4) Յուրաքանչյուր* $\alpha \neq 0$ *իրական թվի համար գոյություն ունի հակադարձ, այսինքն՝ մի իրական թիվ, որը կնշանակենք* $\frac{1}{\alpha}$ *-ով, և որը բավարարում է* $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ *պայմանին:*

*5)* $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ *,*

*6) եթե* $\alpha < \beta$ *և* $\gamma > 0$*, ապա* $\alpha\gamma < \beta\gamma$ *:*

Այս հատկությունների ապացուցման վրա մենք կանգ չենք առնի, ցանկության դեպքում ընթերցողն այդ աշխատանքը կարող է կատարել ինքնուրույն:

Եթե որևէ բազմության վրա սահմանված են գումարման և բազմապատկման գործողություններ, որոնք օժտված են վերը նշված հատկություններով, ապա այդ բազմությունը կոչվում է *կարգավորված դաշտ*: Ուստի, այսուհետ իրական թվերի բազմությունը կանվանենք նաև *իրական թվերի դաշտ*:

## §3. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏԱԳԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

<u>1. Արմատի գոյությունը:</u> Իրական թվերի արտադրյալի սահմանումը մեզ հնարավորություն է տալիս սովորականի պես սահմանել ամբողջ ցուցիչով աստիճանը և կամայական $n$ աստիճանի թվաբանական արմատը*:

* $n$ -ը մեկից մեծ բնական թիվ է:

**Թեորեմ 3.1***: Իրական թվերի դաշտում կամայական $\alpha > 0$ թվի համար գոյություն ունի միակ $\beta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\beta^n = \alpha \ : \tag{3.1}$$

► $\beta$ -ի միակությունը հետևում է իրական թվերի արտադրյալի 6-րդ հիմնական հատկությունից: Ապացուցենք $\beta$ -ի գոյությունը:

Կարող ենք ենթադրել, որ (3.1) պայմանին բավարարող $\beta$ ռացիոնալ թիվ գոյություն չունի (հակառակ դեպքում թեորեմն ապացուցված է): Ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ կառուցենք $X / X'$ հատույթը հետևյալ կերպ. $X$ ստորին դասի մեջ ընդգրկենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերը, $0$ -ն և այն դրական ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են $x^n < \alpha$ պայմանին: $X'$ վերին դասը կազմենք մնացած $x'$ ռացիոնալ թվերից (դժվար չէ տեսնել, որ առկա է հատույթ): Նախ նկատենք, որ $X$ դասը զուրկ չէ դրական թվերից: Իրոք, եթե վերցնենք $m$ բնական թիվն այնպես, որ բավարարվի $\dfrac{1}{m} < \alpha$ պայմանը, ապա, շնորհիվ $\left(\dfrac{1}{m}\right)^n < \dfrac{1}{m} < \alpha$ գնահատականների, կունենանք՝ $\dfrac{1}{m} \in X$ :

Նշանակենք $\beta = X / X'$ և ապացուցենք, որ այդ $\beta$ թիվը բավարարում է (3.1) պայմանին: Դրա համար վերցնենք $0 < x < \beta < x'$ անհավասարություններին բավարարող որևէ $x$ և $x'$ ռացիոնալ թվեր: Դրական կողմերով անհավասարությունները բարձրացնելով $n$ աստիճան (դա թույլատրելի է՝ շնորհիվ իրական թվերի արտադրյալի 6-րդ հիմնական հատկության), կստանանք՝ $x^n < \beta^n < x'^n$ :

Մյուս կողմից՝ $0 < x \in X$ և $x' \in X'$, հետևաբար՝ $x^n < \alpha < x'^n$ :

Մնում է կիրառել լեմմա 1.2-ը. վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և $x, x'$ դրական ռացիոնալ թվերն այնպես, որ բավարարվեն $x < \beta < x'$ և $x' - x < \varepsilon$ պայմանները (տե՛ս լեմմա 2.1-ը): Կարող ենք համարել, որ $x'$ -ը չի գերազանցում մի որևէ ֆիքսած $x'_0$ -ը: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$x'^n - x^n = (x'-x)(x'^{n-1} + x'^{n-2}x + ... + x'x^{n-2} + x^{n-1}) < \varepsilon \cdot n x_0'^{n-1},$$

այսինքն՝ $x'^n - x^n$ տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել: Այսպիսով՝ $\beta^n = \alpha$ : ■

Արմատի գոյությունն ապացուցելուց հետո սովորական ձևով սահմանվում է (դրական թվի) ռացիոնալ ցուցիչով աստիճան՝ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ , և ապացուցվում են ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի հիմնական հատկությունները.

*1)* $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ ,

*2)* $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$ ,

*3)* $(ab)^r = a^r b^r$ ,

*4)* $(a/b)^r = a^r / b^r$ ,

*5)* $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$ ,

*6) Եթե* $a > 1$ *, ապա* $f(r) = a^r$ *ֆունկցիան աճող է ռացիոնալ թվերի բազմության վրա:*

__2. Իրական ցուցիչով աստիճան:__ Նախ դիտարկենք մեկից մեծ հիմքի դեպքը՝ $a > 1$ , և սահմանենք $a^\beta$ աստիճան, որտեղ $\beta$-ն կամայական իրական թիվ է: Այդ նպատակով դիտարկենք

$$b < \beta < b' \tag{3.2}$$

պայմանին բավարարող բոլոր $b$ և $b'$ ռացիոնալ թվերը:

**Սահմանում:** $a > 1$ *իրական թվի* $\beta$ *իրական աստիճան է կոչվում այն* $\gamma$ *իրական թիվը, որը բավարարում է*

$$a^b < \gamma < a^{b'} \tag{3.3}$$

*անհավասարություններին՝ (3.2) պայմանին բավարարող բոլոր* $b$ *,* $b'$ *ռացիոնալ թվերի համար:*

Այժմ ցույց տանք, որ *այդպիսի* $\gamma$ *գոյություն ունի և միակն է:*

Քանի որ $a^r$-ը աճող է ռացիոնալ թվերի բազմության վրա, այսինքն՝ $b < b'$ պայմանից հետևում է $a^b < a^{b'}$ պայմանը, ուստի $\{a^b\}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ է $a^{b'_0}$ թվով, որտեղ $b'_0$-ը $\beta$-ից մեծ կամայական ռացիոնալ թիվ է: Նշանակելով $\gamma = \sup\{a^b\}$՝ կունենանք

$$a^b \le \gamma \le a^{b'}$$

անհավասարությունը՝ (3.2)-ին բավարարող բոլոր $b$, $b'$ ռացիոնալ թվերի համար: Այստեղ հավասարության նշանները բացառվում են, որովհետև $a^b$ տեսքի թվերի մեջ չկա ամենամեծը, իսկ $a^{b'}$ տեսքի թվերի մեջ՝ ամենափոքրը:

Միակությունն ապացուցելու համար ցույց տանք, որ $a^{b'} - a^b$ տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել (որից հետո կկիրառենք լեմմա 1.2-ը):

Նախ, եթե $b$ և $b'$ ռացիոնալ թվերն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի $b' - b < \frac{1}{n}$ պայմանը ($n$-ը հետագայում կընտրենք), կունենանք՝

$$a^{b'} - a^b = a^b\left(a^{b'-b} - 1\right) < a^b\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right): \tag{3.4}$$

Նշանակենք՝ $a^{\frac{1}{n}} - 1 = x_n$ և օգտվենք Բեռնուլիի անհավասարությունից՝ $\left(1 + x_n\right)^n > 1 + nx_n$: Այստեղից կստանանք $x_n < \frac{a-1}{n}$ անհավասարությունը, որն էլ, համադրելով (3.4)-ի հետ, կունենանք

$$a^{b'} - a^b < a^b \frac{a-1}{n}$$

գնահատականը:

Մյուս կողմից՝ $a^b < a^{b'_0}$, հետևաբար տեղի ունի $a^{b'} - a^b < a^{b'_0} \frac{a-1}{n}$ անհավասարությունը: Որպեսզի աջում ստացված արտահայտությունը փոքր դառնա նախապես տրված $\varepsilon > 0$ թվից, բավական է վերցնել

$$n > \frac{a^{b'_0}(a-1)}{\varepsilon}:$$

Այսպիսով աստիճանի գոյությունն ու միակությունն ապացուցված է:

Նկատենք նաև, որ եթե $\beta$ -ն ռացիոնալ թիվ է, ապա այս նոր սահմանված $a^{\beta}$ արժեքը համընկնում է նրա սովորական արժեքի հետ: Իրոք. քանի որ $a^{r}$-ը աճող է, ուստի հենց $a^{\beta}$ -ի սովորական արժեքն է, որ բավարարում է (3.3) անհավասարություններին:

$0<a<1$ *դեպքում* $a^{\beta}$ *-ը սահմանվում է* $a^{\beta}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-\beta}$ *հավասարությամբ:*

Նշենք, որ նախորդ կետի վերջում ներկայացված ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի հիմնական հատկությունները պահպանվում են նաև կամայական իրական աստիճանների դեպքում: Ապացուցենք, օրինակ, դրանցից առաջինը՝ $a^{\gamma}a^{\beta}=a^{\gamma+\beta}$, որտեղ $\beta$ -ն և $\gamma$ -ն կամայական իրական թվեր են:

Այդ նպատակով դիտարկենք $b<\beta<b'$ և $c<\gamma<c'$ պայմաններին բավարարող բոլոր $b$, $b'$, $c$, $c'$ ռացիոնալ թվերը: Իրական ցուցիչով աստիճանի սահմանման համաձայն՝ ունենք

$$a^{b}<a^{\beta}<a^{b'},\quad a^{c}<a^{\gamma}<a^{c'},\quad a^{b+c}<a^{\beta+\gamma}<a^{b'+c'}$$

անհավասարությունները: Առաջին երկուսն անդամ առ անդամ բազմապատկելով՝ կստանանք

$$a^{b+c}<a^{\beta}a^{\gamma}<a^{b'+c'}$$

անհավասարությունը: Այսպիսով, $a^{\beta+\gamma}$ և $a^{\beta}a^{\gamma}$ թվերն ընկած են միևնույն $a^{b+c}$ և $a^{b'+c'}$ թվերի միջև, որոնց տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել: Հետևաբար, լեմմա 1.2-ի համաձայն՝ $a^{\beta+\gamma}=a^{\beta}\cdot a^{\gamma}$ :

<u>3. Լոգարիթմի գոյությունը:</u> *Ապացուցենք, որ եթե* $a>0, a\neq 1$ *և* $\beta>0$*, ապա գոյություն ունի* $\log_{a}\beta$*, այսինքն՝ գոյություն ունի միակ* $\gamma$ *իրական թիվ, որը բավարարում է*

$$a^{\gamma}=\beta \tag{3.5}$$

*պայմանին:*

Այս պնդումն ապացուցենք $a>1$ դեպքում: $0<a<1$ դեպքում $\log_{a}\beta$ -ն կորոշենք $\log_a \beta = -\log_{\frac{1}{a}} \beta$ հավասարությամբ:

Ենթադրենք, թե (3.5) պայմանին բավարարող $\gamma$ ռացիոնալ թիվ գոյություն չունի (հակառակ դեպքում պնդումն ապացուցված է): Ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ դիտարկենք $X / X'$ հատույթը հետևյալ կերպ. $X$ ստորին դասի մեջ ընդգրկենք $a^x < \beta$ պայմանին բավարարող բոլոր $x$ ռացիոնալ թվերը, իսկ $X'$ վերին դասի մեջ՝ $a^{x'} > \beta$ պայմանին բավարարող բոլոր $x'$ ռացիոնալ թվերը: Դժվար չէ տեսնել, որ այդ դասերը դատարկ չեն: Իրոք, քանի որ $a^n > 1 + n(a-1) > n(a-1)$ և $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} < \dfrac{1}{n(a-1)}$, ուստի բավականաչափ մեծ $n$-երի համար կունենանք՝

$$a^{-n} < \beta < a^n ,$$

այսինքն՝ $-n \in X$ և $n \in X'$:

Հատույթի մնացած հատկությունները ակնհայտ են: Նշանակելով $\gamma = X / X'$ և դիտարկելով $x < \gamma < x'$ պայմանին բավարարող բոլոր $x$, $x'$ ռացիոնալ թվերը, կունենանք՝

$$a^x < a^\gamma < a^{x'} \text{ և } a^x < \beta < a^{x'} : \tag{3.6}$$

Քանի որ $a^{x'} - a^x$ տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել, ապա լեմմա 1.2-ի համաձայն՝ (3.6) պայմանից բխում է (3.5) հավասարությունը:

$\gamma$-ի միակությունն անմիջապես հետևում է ցուցչային ֆունկցիայի աճող լինելուց:

**4. Իրական թվի տասնորդական ներկայացումը:** Դիցուք $\alpha$ իրական թիվը ոչ ամբողջ է, և ոչ էլ՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակ: Այդ դեպքում գոյություն ունի $C$ ամբողջ թիվ, այնպիսին, որ

$$C < \alpha < C + 1$$

(որպես $C$ վերցնում ենք $\alpha = A / A'$ հատույթի $A$ ստորին դասին պատկանող ամբողջ թվերից մեծագույնը):

Այնուհետև, վերցնենք $c_1$ թվանշանն այնպիսին, որ տեղի ունենա

$$C,c_1 < \alpha < C,c_1 + \frac{1}{10}$$

կրկնակի անհավասարությունը: Հաջորդ քայլում ընտրենք $c_2$ թվանշանը՝ ապահովելով

$$C,c_1c_2 < \alpha < C,c_1c_2 + \frac{1}{10^2}$$

անհավասարությունը:

Շարունակենք՝ եթե $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ թվանշաններն արդեն ընտրված են, $c_n$ թվանշանն ընտրենք այնպիսին, որ բավարարվի

$$C,c_1c_2...c_n < \alpha < C,c_1c_2...c_n + \frac{1}{10^n}$$

պայմանը:

Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք, այսպես կոչված, *անվերջ տասնորդական կոտորակ*՝ $C,c_1c_2...c_n...$, որի համար բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

$$C,c_1c_2...c_n < \alpha < C,c_1c_2...c_n + \frac{1}{10^n},\ n = 1,2,...: \tag{3.7}$$

Երբ $\alpha$-ն ամբողջ թիվ է կամ՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակ, կրկին նույն ձևով կստանանք $C,c_1c_2...c_n...$ անվերջ տասնորդական կոտորակ, միայն թե այս անգամ (3.7)-ի փոխարեն կառաջանա

$$C,c_1c_2...c_n \le \alpha \le C,c_1c_2...c_n + \frac{1}{10^n} \tag{3.7′}$$

պայմանը:

Օրինակ՝ $\alpha = 2,718$ թվի համար երրորդ քայլում կունենանք

ա) $2,718 \le \alpha < 2,718 + \frac{1}{10^3}$ կամ բ) $2,717 < \alpha \le 2,717 + \frac{1}{10^3}$ :

Այս երկու դեպքերից յուրաքանչյուրը կունենա իր շարունակությունը.

ա)-ն շարունակելու հաջորդ բոլոր նիշերը կլինեն 0-ներ՝ $c_4 = c_5 = \ldots = 0$, իսկ բ)-ն՝ 9-եր, $c_4 = c_5 = \ldots = 9$:

**Սահմանում:** *$C, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$ անվերջ տասնորդական կոտորակը կոչվում է $\alpha$ թվի տասնորդական վերլուծություն, եթե*

$$C, c_1 c_2 \ldots c_n \le \alpha \le C, c_1 c_2 \ldots c_n + \frac{1}{10^n}, \; n = 1,2,\ldots: \tag{3.8}$$

Ելնելով լեմմա 1.2-ից՝ *տարբեր թվեր չեն կարող ունենալ նույն վերլուծությունը*, որովհետև, $n$-ը մեծ վերցնելու շնորհիվ, $\frac{1}{10^n}$-ը կարող ենք փոքր դարձնել կամայական $\varepsilon > 0$ ռացիոնալ թվից: Իրոք, $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ պայմանը համարժեք է $10^n > \frac{1}{\varepsilon}$ պայմանին և, քանի որ $10^n > n$ (ապացուցե՛լ), բավական է վերցնել՝ $n > \frac{1}{\varepsilon}$:

Մյուս կողմից, հարց է ծագում. արդյո՞ք այս գործընթացին կմասնակցեն բոլոր անվերջ տասնորդական կոտորակները: Այսինքն՝ եթե վերցնենք կամայական անվերջ տասնորդական կոտորակ՝ $B, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$, արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի $\beta$ թիվ, որի տասնորդական վերլուծությունը հե՛նց $B, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ կոտորակն է՝

$$B, b_1 b_2 \ldots b_n \le \beta \le B, b_1 b_2 \ldots b_n + \frac{1}{10^n}: \tag{3.8′}$$

Պատասխանը դրական է: Ապացուցելու համար նշանակենք՝ $B_n = B, b_1 b_2 \ldots b_n$, $B'_n = B, b_1 b_2 \ldots b_n + \frac{1}{10^n}$ և նկատենք, որ $B_n$-ը աճող է, իսկ $B'_n$-ը՝ նվազող (լայն իմաստով): Հետևաբար, $B_n < B'_m$, $n, m = 1,2,\ldots$*:

Այժմ դիտարկենք $\{B_n\}$ բազմությունը: Քանի որ կամայական $B'_m$ այդ

* Իրոք. $k = \max\{m,n\} \Rightarrow B_n \le B_k < B'_k \le B'_m$ :

բազմության վերին եզր է, ուստի այն սահմանափակ է վերևից: Նշանակելով $\beta = \sup\{B_n\}$՝ կունենանք

$$B_n \le \beta \le B_n'$$

անհավասարությունը, այսինքն՝ (3.8′)-ը:

Եթե (3.7′) պայմանում հավասարության նշանը թույլատրենք միայն ձախից, ապա բ)-ն կբացառվի և յուրաքանչյուր իրական թիվ կունենա մեկ և միայն մեկ տասնորդական վերլուծություն (օրինակ՝ $\alpha = 2{,}718$ թվի տասնորդական վերլուծություն կհամարվի $2{,}71800... = 2{,}718(0)$ անվերջ տասնորդական կոտորակը և ոչ թե մյուս «հավակնորդը»՝ $2{,}717(9)$-ը):

Ավելին, եթե պայմանավորվենք նաև անվերջ տասնորդական կոտորակների շարքում 9 պարբերությամբ կոտորակները չդիտարկել՝ փոխարինելով դրանք համապատասխան վերջավոր տասնորդական կոտորակներով ($2{,}717(9) = 2{,}718$), ապա (3.8) անհավասարության միջոցով իրական թվերի և անվերջ տասնորդական կոտորակների միջև կստեղծվի *փոխադարձաբար միարժեք համապատասխանություն*:

Դպրոցական դասընթացից ընթերցողին հայտնի է, որ ռացիոնալ թվի տասնորդական վերլուծությունը վերջավոր է (ե՞րբ) կամ՝ անվերջ պարբերական (ապացուցե՛լ): Հետևաբար, *իռացիոնալ թվերը այն անվերջ տասնորդական կոտորակներն են, որոնք պարբերական չեն*:

<u>5. Թվային առանցք:</u> Հիշեցնենք, թե ինչպես էին ռացիոնալ թվերը տեղադրում թվային առանցքի վրա:

Ֆիքսենք ուղղի (որին էլ հենց կանվանենք *թվային առանցք*) որևէ հատված և դրա ձախ ու աջ ծայրակետերին վերագրենք համապատասխանաբար 0 և 1 թվերը: Այդ հատվածը կանվանենք *միավոր հատված*: Այնուհետև, $\dfrac{m}{n}$ դրական կոտորակին համապատասխանեցնենք ուղղի այն կետը, որը ստացվում է միավոր հատվածի $\dfrac{1}{n}$ մասը՝ սկսած 0 կետից $m$ անգամ հաջորդաբար տեղադրելով (0-ից դեպի 1 ուղղությամբ՝ ձախից դեպի աջ): $-\dfrac{m}{n}$ բացասական թվին համապատասխանեցնում ենք $\dfrac{m}{n}$ կետի սիմետրիկ կետը 0 կետի նկատմամբ:

Ռացիոնալ թվերը թվային առանցքի վրա տեղադրելու համար դիտարկենք $\alpha$ իռացիոնալ թվի տասնորդական վերլուծությունը՝

$$\alpha = C, c_1 \ldots c_n \ldots\ , \quad C_n := C, c_1 \ldots c_n < \alpha < C, c_1 \ldots c_n + \frac{1}{10^n} := C'_n\,,$$

և թվային առանցքի վրա դիտարկենք $\Delta_n = \left[C_n, C'_n\right]$ ներդրված հատվածները:

Երկրաչափական ուղղի լրիվության վերաբերյալ աքսիոմի համաձայն, ուղղի վրա գոյություն ունի միակ $M$ կետ, որը պատկանում է բոլոր այդ հատվածներին: $\alpha$ թվին համապատասխանեցնենք հե՛նց այդ $M$ կետը:

Ելնելով նախորդ կետում ապացուցված այն պնդումից, որ տարբեր իրական թվեր չեն կարող ունենալ նույն տասնորդական վերլուծությունը՝ դժվար չէ համոզվել, որ *տարբեր իրական թվերին համապատասխանում են թվային առանցքի տարբեր կետեր*:

Այժմ ապացուցենք, որ այսպիսի համապատասխանեցման արդյունքում սպառվում են ուղղի բոլոր կետերը և, այսպիսով, առաջանում է *փոխմիարժեք համապատասխանություն իրական թվերի բազմության և ուղղի կետերի բազմության միջև*:

Այդ նպատակով դրական կիսաառանցքի վրա վերցնենք կամայական $M$ կետ, որին ռացիոնալ թիվ չի համապատասխանում, և ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ դիտարկենք հետևյալ $A / A'$ հատույթը. $A'$ վերին դասի մեջ ընդգրկենք բոլոր այն ռացիոնալ թվերը, որոնց համապատասխան կետերը թվային ուղղի վրա ընկած են $M$-ից աջ, իսկ մնացած ռացիոնալ թվերը ներառենք $A$ ստորին դասի մեջ: Ստուգենք, որ ստացվել է հատույթ: Դրա համար բավական է համոզվել, որ

ա) $A'$-ը դատարկ չէ,

բ) եթե $a' \in A'$ և $a'_1 > a'$, ապա $a'_1 \in A'$:

Այս երկու պնդումներից առաջինը հետևում է երկրաչափական հատվածների վերաբերյալ *Արքիմեդի աքսիոմից*, ըստ որի, գոյություն ունի $n$ բնական թիվ, որին համապատասխան կետն ընկած է $M$-ից աջ: Իսկ բ) պնդումը հետևում է թվային առանցքի վրա ռացիոնալ թվերին կետեր համապատասխանեցնելու կանոնից:

Այսպիսով, $\alpha = A / A'$ -ը իռացիոնալ թիվ է: Մնում է նկատել, որ թվային առանցքի վրա $\alpha$ թվին համապատասխանող կետը հե՛նց $M$ -ն է:

# II ԳԼՈՒԽ
# ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

## §1. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆ

1. Հաջորդականության սահմանի սահմանումը: Բնական արգումենտի ֆունկցիան կոչվում է *հաջորդականություն*: Հաջորդականությունը սովորաբար նշանակում են $\{x_n\}$ սիմվոլով կամ գրում են $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ տեսքով: $x_1$-ը կոչվում է հաջորդականության առաջին անդամ, $x_2$-ը` երկրորդ և այլն: $x_n$-ը կոչվում է հաջորդականության $n$-րդ անդամ կամ` ընդհանուր անդամ:

Պարզության համար, այսուհետ $x_n$-ը կօգտագործենք նաև որպես հաջորդականության նշանակում` ընդունված $\{x_n\}$ նշանակման փոխարեն:

**Սահմանում:** *$a$ թիվը կոչվում է $x_n$ հաջորդականության սահման, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $N = N(\varepsilon)$ բնական թիվ[*], այնպիսին, որ*

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon : \tag{1.1}$$

(1.1)-ը նշանակում է, որ $x_n$ հաջորդականության $N$-ից մեծ համար (ինդեքս) ունեցող անդամները բավարարում են $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ պայմանին կամ, որ նույնն է,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{1.1'}$$

պայմանին:

(1.1')-ը նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա $x_n$ կետը պատկանում է $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ միջակայքին, որը կոչվում է *$a$ կետի $\varepsilon$-շրջակայք*:

Հաջորդականության սահմանի սահմանումը կարելի է տալ նաև, այսպես կոչված, *շրջակայքերի լեզվով.*

[*] $N(\varepsilon)$ գրելաձևը մատնանշում է, որ $N$-ը, ընդհանրապես ասած, կախված է $\varepsilon$-ից:

*$a$ թիվը կոչվում է $x_n$ հաջորդականության սահման, եթե*

*ա) $a$-ի կամայական շրջակայք[*] պարունակում է $x_n$ հաջորդականության բոլոր անդամները՝ սկսած ինչ-որ համարից,*
կամ, որ նույնն է,

*բ) $a$-ի կամայական շրջակայքից դուրս կարող են գտնվել $x_n$ հաջորդականության միայն վերջավոր քանակով անդամներ:*

Երբ $a$ թիվը $x_n$ հաջորդականության սահմանն է, կասենք $x_n$-ը *ձգտում է* $a$-ի՝ $n$-ը անվերջի ձգտելիս: Դա կնշանակենք $x_n \to a$ կամ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ սիմվոլներով:

Նկատենք, որ այս սահմանման մեջ $\varepsilon > 0$ թիվը կարող ենք կամայապես փոքր վերցնել: Հետևաբար, $x_n \to a$ նշանակում է, որ սկսած որոշ համարից, $x_n$-ը որքան կամենանք մոտ է դառնում $a$ թվին (այդ համարը կախված է մոտեցման չափից):

**Օրինակներ:**

1. $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$: Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Պետք է գտնենք այնպիսի $N(\varepsilon)$ բնական թիվ, որ $n > N(\varepsilon)$ պայմանից հետևի

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝ $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$: Վերջինս համարժեք է $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ անհավասարությանը: Որպես $N(\varepsilon)$ կարող ենք վերցնել $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$-ից մեծ կամ հավասար կամայական բնական թիվ, օրինակ՝ $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$:

2. $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n} \to 0$:

[*] Շրջակայք ասելով՝ հասկանում ենք որևէ $\varepsilon$ - շրջակայք:

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ $|x_n| \le \frac{2}{n}$, բավական է պահանջել, որ տեղի ունենա $\frac{2}{n} < \varepsilon$ անհավասարությունը: Լուծելով այն՝ կստանանք $n > \frac{2}{\varepsilon}$: Որպես $N(\varepsilon)$ կարող ենք վերցնել $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$-ը:

3. $x_n = \sqrt[n]{a} \to 1$, որտեղ $a > 1$: Նշանակենք՝ $\sqrt[n]{a} - 1 = y_n$: Կունենանք՝ $a = (1 + y_n)^n$ և, Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից ելնելով, կստանանք՝ $a > 1 + ny_n$: Ուստի՝

$$y_n < \frac{a-1}{n}: \tag{1.2}$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Պետք է ապացուցենք, որ սկսած որոշ համարից, բավարարվում է

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$$

անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝ $y_n < \varepsilon$: Դրա համար բավարար է (տե՛ս (1.2))

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon$$

պայմանը: Լուծելով այս անհավասարումը՝ կստանանք $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$: Որպես $N(\varepsilon)$ կարող ենք վերցնել $\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right] + 1$-ը:

4. $x_n = q^n \to 0$, որտեղ $0 < |q| < 1$: Ցույց տանք, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար, սկսած որոշ համարից, բավարարվում է $|q|^n < \varepsilon$ պայմանը: Լուծելով այդ անհավասարումը՝ կստանանք $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$: Որպես $N(\varepsilon)$ կա-

րող ենք վերցնել $\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$-ից մեծ կամայական բնական թիվ:

**Սահմանում:** *Կասենք, որ $x_n$ հաջորդականությունը ձգտում է պլյուս անվերջության և կնշանակենք՝ $x_n \to +\infty$*, եթե յուրաքանչյուր $E$ թվի համար գոյություն ունի $N(E)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ*

$$n > N(E) \Rightarrow x_n > E:$$

*Կասենք, որ $x_n$ հաջորդականությունը ձգտում է մինուս անվերջության և կնշանակենք՝ $x_n \to -\infty$, եթե յուրաքանչյուր $E$ թվի համար գոյություն ունի $N(E)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ*

$$n > N(E) \Rightarrow x_n < E:$$

Կամայական $E$ թվի համար $(E,+\infty)$ միջակայքը կանվանենք $+\infty$ *-ի շրջակայք*, իսկ $(-\infty,E)$ միջակայքը՝ $-\infty$ *-ի շրջակայք*: Անվերջ սահմանի սահմանումը նաև կարելի է ձևակերպել շրջակայքերի լեզվով, ինչը թողնում ենք ընթերցողին:

Հաջորդականությունը կոչվում է *զուգամետ*, եթե այն ձգտում է վերջավոր սահմանի, հակառակ դեպքում այն կոչվում է *տարամետ*:

<u>2. Զուգամետ հաջորդականությունների պարզագույն հատկություն-ները:</u>

**Հատկություն 1:** *Եթե $x_n \to a$ և $a > p$, ապա սկսած որոշ համարից՝ $x_n > p$ : Եթե $x_n \to a$ և $a < q$, ապա սկսած որոշ համարից՝ $x_n < q$ :*

► Առաջին դեպքում սահմանի սահմանման մեջ վերցնելով $\varepsilon = a - p$՝ կստանանք $p = a - \varepsilon < x_n$, երբ $n > N(\varepsilon)$: Նույն ձևով կապացուցենք նաև մյուս դեպքը: ■

*Մասնավոր դեպք:* Այս հատկության մեջ վերցնելով $p = 0$ $(q = 0)$՝ կստանանք հետևյալ արդյունքը. *եթե հաջորդականության սահմանը դրա-*

* Այսուհետ՝ $+\infty$ սիմվոլը նույնացվում է $\infty$ սիմվոլի հետ:

*կան է (բացասական է), ապա սկսած որոշ համարից, հաջորդականության անդամները նույնպես դրական են (բացասական են):*

**Հատկություն 2:** *Եթե* $x_n \geq p \quad (x_n \leq q)$ *և* $x_n \to a$ *, ապա* $a \geq p \quad (a \leq q)$ *:*

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Եթե $a < p$, ապա, առաջին հատկության համաձայն, սկսած որոշ համարից՝ $x_n < p$, որը հակասում է տրված պայմանին: Նույն ձևով կապացուցենք նաև մյուս դեպքը: ■

Նկատենք, որ եթե այս հատկության մեջ $x_n \geq p$ պայմանը փոխարինենք $x_n > p$ պայմանով, ապա $a \geq p$ եզրակացությունը չի կարելի փոխարինել $a > p$ եզրակացությամբ: Իրոք. օրինակ $x_n = \frac{1}{n} > 0$, բայց $x_n \to 0$:

**Հատկություն 3:** *Զուգամետ հաջորդականության սահմանը միակն է:*

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք $x_n \to a$ և $x_n \to b$, ընդ որում, $a \neq b$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու՝ կարող ենք ենթադրել, թե $a < b$: Սահմանի սահմանման մեջ վերցնելով $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, կստանանք.

ա) $x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$, եթե $n > N_1$ և բ) $\frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < x_n$, եթե $n > N_2$:

Նշանակենք $N = \max\{N_1, N_2\}$: Երբ $n > N$, $x_n$-ը կբավարարի թե՛ ա), թե՛ բ) պայմանին, ինչը հակասություն է: ■*

**Հատկություն 4:** *Զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է**:*

► Ենթադրենք՝ $x_n \to a$ ($a$-ն վերջավոր է): Ապացուցենք, որ գոյություն

---

* Փորձեք հանգունորեն ապացուցել ավելի ընդհանուր պնդում. եթե հաջորդականությունն ունի սահման (թեկուզ անվերջ), ապա այդ սահմանը միակն է:

** Հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե բավարարվում է (1.3) պայմանը:

ունեն $m$ և $M$ թվեր, այնպիսիք, որ

$$m \le x_n \le M,\ n = 1,2,\ldots: \tag{1.3}$$

Սահմանի սահմանման մեջ վերցնելով $\varepsilon = 1$ ՝ կստանանք

$$a-1 < x_n < a+1,\ \text{երբ}\ n > N: \tag{1.4}$$

Նշանակելով $m = \min\{a-1, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, $M = \max\{a+1, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ ՝ (1.4)-ից կստանանք (1.3)-ը: ■

<u>3. Անվերջ փոքրեր:</u>

**Սահմանում:** $x_n$ *հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե* $x_n \to 0$*:*

**Թեորեմ 1.1:** *Որպեսզի $x_n$ հաջորդականությունը զուգամիտի $a$ թվին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $x_n - a$ հաջորդականությունը լինի անվերջ փոքր:*

Այս թեորեմի ապացույցն անմիջապես բխում է սահմանի և անվերջ փոքրի սահմանումներից:

**Լեմմա 1.1:** *Վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է:*

► Ապացուցենք $\alpha_n$ և $\beta_n$ երկու գումարելիների դեպքում: Ունենք՝ $\alpha_n \to 0$ և $\beta_n \to 0$, պետք է ապացուցել, որ $\alpha_n + \beta_n \to 0$: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն՝

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{երբ}\ n > N_1\ \text{և}\ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{երբ}\ n > N_2:$$

Նշանակելով $N = \max\{N_1, N_2\}$ ՝ կունենանք.

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,\ \text{երբ}\ n > N,$$

ինչ և պետք էր ապացուցել:

Երկուսից ավելի գումարելիների դեպքն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: ■

**Լեմմա 1.2:** *Սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:*

► Ունենք, որ մի ինչ որ դրական $L$ թվի համար՝ $|x_n| \le L$ և $\alpha_n \to 0$: Ապացուցենք, որ $x_n\alpha_n \to 0$: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի $N(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{L}:$$

Այդ դեպքում $n$-ի նույն արժեքների համար կունենանք՝

$$|x_n\alpha_n| = |x_n||\alpha_n| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

ինչն էլ հենց նշանակում է, որ $x_n\alpha_n \to 0$: ■

**4. Անվերջ մեծեր:**

**Սահմանում:** $x_n$ *հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ մեծ, եթե* $|x_n| \to \infty$ *:*

**Թեորեմ 1.2:** *Որպեսզի* $x_n$ *հաջորդականությունը** *լինի անվերջ մեծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\frac{1}{x_n}$ *հաջորդականությունը լինի անվերջ փոքր:*

► *Անհրաժեշտություն:* Ունենք՝ $|x_n| \to \infty$, պետք է ապացուցել, որ $\frac{1}{x_n} \to 0$: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Անվերջ սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի $N(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}:$$

Այդ դեպքում $n$-ի նույն արժեքների համար կունենանք՝

* Ենթադրվում է, որ $x_n \ne 0,\ n = 1, 2, \ldots$:

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon ,$$

ինչն էլ նշանակում է, որ $\dfrac{1}{x_n}$-ը անվերջ փոքր է: Բավարարությունն ապացուցելու համար դատողությունները կատարում ենք հակառակ հերթականությամբ: ■

<u>5. Թվաբանական գործողություններ զուգամետ հաջորդականությունների հետ:</u>

**Թեորեմ 1.3:** *Եթե $x_n \to a$ , $y_n \to b$ ($a$ -ն, $b$ -ն վերջավոր են), ապա*

*1) $x_n \pm y_n \to a \pm b$ ;*

*2) $x_n y_n \to ab$ ;*

*3) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ , եթե $y_n \neq 0,\ b \neq 0$ :*

► *1)-ի ապացույցը:* Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն $N_1$ և $N_2$ բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};\ \ n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Նշանակենք՝ $N = \max\{N_1, N_2\}$ : Երբ $n > N$ , կունենանք՝

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

*2)-ի ապացույցը:* Քանի որ $y_n$ զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է՝ $|y_n| \le M$ , ուստի $a = 0$ դեպքում ապացույցը հետևում է լեմմա 1.2-ից: Դիցուք՝ $a \neq 0$ : Ունենք՝

$$|x_n y_n - ab| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \le |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| : \quad (1.5)$$

Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն $N_1$ և $N_2$ բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}\,; \;\; n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}\,:$$

Նշանակենք՝ $N = \max\{N_1, N_2\}$: Երբ $n > N$, (1.5)-ից կունենանք՝

$$|x_n y_n - ab| < \varepsilon\,,$$

ինչ և պետք էր ապացուցել:

*3)-ի ապացույցը:* Ապացուցենք, որ $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$, և հարցը կբերվի նախորդ դեպքին: Ունենք՝

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{by_n}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|}\,: \tag{1.6}$$

Քանի որ $|y_n| \to |b| > 0$ (որովհետև $\big||b| - |y_n|\big| \le |b - y_n|$), զուգամետ հաջորդականությունների պարզագույն հատկություններից առաջինի համաձայն, գոյություն ունի $N_1$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2}\,: \tag{1.7}$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի $N_2$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon\,: \tag{1.8}$$

Նշանակենք՝ $N = \max\{N_1, N_2\}$: Հաշվի առնելով (1.7) և (1.8) գնահատականները՝ (1.6) հավասարությունից կստանանք

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon\,,$$

որը նշանակում է՝ $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$ : ■

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից՝ թեորեմ 1.3-ի 1) և 2) պնդումները կարելի է ապացուցել ցանկացած թվով գումարելիների կամ արտադրիչների դեպքում:

Որպես օրինակ, դիտարկենք անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան՝ $a, \ aq, \ aq^2, \ ..., \ aq^{n-1}, \ ...; \ 0<|q|<1$:

Նշանակենք՝ $S_n = a + aq + ... + aq^{n-1}$ :

Որպես անվերջ նվազող պրոգրեսիայի $S$ գումար ընդունվում է $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ սահմանը: Հաշվենք այդ գումարը: Քանի որ $q^n \to 0$, ուստի՝

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}(1-q^n) \to \frac{a}{1-q}:$$

Այսպիսով, ստացանք $S = \dfrac{a}{1-q}$ բանաձևը:

<u>6. Անորոշություններ:</u> *Կասենք* $\dfrac{x_n}{y_n}$ $(y_n \neq 0)$ *հարաբերությունը* $\dfrac{0}{0}$ *տեսքի անորոշություն է*[*], *եթե* $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ *:*

Անորոշություն անվանումը պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ պայմանի առկայությամբ $\dfrac{x_n}{y_n}$ հարաբերությունը տարբեր դեպքերում կարող է ձգտել թե' վերջավոր սահմանի, թե' $+\infty$, թե' $-\infty$, և թե' սահման չունենալ:

**Օրինակներ:**

ա) $x_n = \dfrac{a}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} \to a$;

բ) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n^3} \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$;

գ) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$:

---

[*] Այս տերմինաբանությունը կօգտագործենք միայն սահման հաշվելիս:

Վերջին դեպքում $\frac{x_n}{y_n}$ հարաբերությունը սահման չունի:

Նման ձևով սահմանվում է $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշությունը:

**Օրինակ:** Դիցուք՝ $x_n = \left(2 + (-1)^n\right)n$, $y_n = n$: Կունենանք՝ $\frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^n$: Այս դեպքում՝ $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$, իսկ $\frac{x_n}{y_n}$ հարաբերությունը ոչ մի սահմանի չի ձգտում:

Ընթերցողին առաջարկվում է սահմանել $0 \cdot \infty$ և $\infty - \infty$ տեսքի անորոշությունները և բերել օրինակներ:

**7. Սահմանային անցում անհավասարություններում:**

**Թեորեմ 1.4:** *Եթե $x_n \to a$, $y_n \to b$ և $x_n \le y_n$, ապա $a \le b$:*

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք՝ $b < a$: Վերցնենք որևէ $c$ թիվ, այնպիսին, որ $b < c < a$: Զուգամետ հաջորդականությունների առաջին պարզագույն հատկության համաձայն, գոյություն ունեն $N_1$ և $N_2$ բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow x_n > c; \quad n > N_2 \Rightarrow y_n < c:$$

Նշանակելով $N = \max\{N_1, N_2\}$՝ կունենանք

$$n > N \Rightarrow y_n < c < x_n,$$

որը հակասում է թեորեմի պայմանին: ■

**Թեորեմ 1.5:** *Եթե $x_n \le z_n \le y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to a$, ապա $z_n \to a$:*

► Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն $N_1$ և $N_2$ թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n; \quad n > N_2 \Rightarrow y_n < a + \varepsilon:$$

Նշանակելով $N = \max\{N_1, N_2\}$՝ կունենանք

$$n > N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon ,$$

այսինքն՝ $z_n \to a$ : ■

**Օրինակ:** Դիցուք՝ $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ \dots \ + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ :

Ունենք՝

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le z_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

(մի դեպքում ամենափոքր գումարելին ենք բազմապատկում գումարելիների թվով, մյուս դեպքում՝ ամենամեծը):

Քանի որ

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1 \text{ և } \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 1 ,$$ [*]

ուստի $z_n \to 1$ :

## §2. ՄՈՆՈՏՈՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

### 1. Մոնոտոն հաջորդականության սահմանը:

**Սահմանում:** $x_n$ *հաջորդականությունը կոչվում է աճող կամ աճող՝ լայն իմաստով, եթե* $x_{n+1} \ge x_n$, $n = 1, 2, \dots$ *: Եթե* $x_{n+1} > x_n$, *հաջորդականությունը կոչվում է խիստ աճող: Նման ձևով սահմանվում է խիստ նվազող և լայն իմաստով նվազող հաջորդականությունը:*

$x_n$ *հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն, եթե այն աճող է կամ՝ նվազող:*

**Թեորեմ 2.1:** *Եթե աճող հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, ապա այն զուգամետ է, հակառակ դեպքում՝ ձգտում է* $+\infty$ *:*

---

[*] Ընթերցողին առաջարկում ենք խիստ ապացուցել այս երկու սահմանային առնչությունները:

► Ունենք՝ $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$ և $x_n \le M$ : Ճշգրիտ վերին եզրի գոյության թեորեմի համաձայն, $x_n$ հաջորդականության ընդունած արժեքների բազմությունն ունի վերջավոր ճշգրիտ վերին եզր: Նշանակենք

$$a = \sup\{x_n\}$$

և ապացուցենք, որ $x_n \to a$ :

Քանի որ $a$-ն $x_n$ հաջորդականության ընդունած արժեքների բազմության վերին եզր է, ապա $x_n \le a$ :

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ $a$-ն վերին եզրերից փոքրագույնն է, ապա $(a-\varepsilon)$-ը վերին եզր չէ: Հետևաբար գոյություն ունի $n_0$ այնպես, որ

$$x_{n_0} > a - \varepsilon :$$

Մոնոտոնության շնորհիվ կունենանք՝ $x_{n_0} \le x_n$, երբ $n > n_0$ : Այսինքն՝

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le a < a + \varepsilon :$$

Հետևաբար՝ $x_n \to a$ :

Այժմ ապացուցենք, որ եթե աճող հաջորդականությունը սահմանափակ չէ վերևից, ապա այն ձգտում է $+\infty$ :

Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $E$ թիվ: Քանի որ $x_n$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ վերևից, ապա գոյություն ունի $n_0$, այնպիսին, որ $x_{n_0} > E$ : Մոնոտոնության շնորհիվ կունենանք՝

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \ge x_{n_0} > E ,$$

ինչը և պետք էր ապացուցել: ■

Նման ձևով կապացուցվի նաև հետևյալ պնդումը.

**Թեորեմ** 2.1′: *Եթե նվազող հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, ապա այն զուգամետ է, հակառակ դեպքում՝ ձգտում է* $-\infty$ *:*

*Դիտողություն:* Ներկայացված պնդումները ճիշտ են նաև այն հաջորդականությունների համար, որոնք մոնոտոն են՝ սկսած մի ինչ-որ համարից: Այդպիսի հաջորդականությունները կոչվում են *ի վերջո մոնոտոն հաջորդականություններ*:

**Օրինակ:** Դիցուք՝ $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$ : Ունենք՝ $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{a}{n+1} < 1$, եթե $n$ -ը բավականաչափ մեծ է: Հետևաբար $x_n$ հաջորդականությունն ի վերջո նվազող է:

Մյուս կողմից, $x_n$ հաջորդականությունը դրական է, հետևաբար՝ սահմանափակ է ներքևից: Թեորեմ 2.1′-ի համաձայն, $x_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է՝ $x_n \to c$ :

Ապացուցենք, որ $c = 0$ : Ունենք՝

$$x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1} :$$

Հավասարության երկու մասերում անցնելով սահմանի՝ կստանանք $c = c \cdot 0 = 0$ :

<u>2. e թիվը:</u> Դիտարկենք $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ հաջորդականությունը: *Ապացուցենք, որ այն աճող է և սահմանափակ (վերևից):*

Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի համաձայն, ունենք՝

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \tag{2.1}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ \ldots \ \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) :$$

Այստեղից բխում է, որ $x_n$ -ը խիստ աճող է: Իրոք. $n$ -ը ($n + 1$)-ով փոխարինելիս՝ կմեծանան բոլոր փակագծերի մեջ գրված թվերը և կավելանա ևս մեկ դրական գումարելի:

Մյուս կողմից, քանի որ փակագծերի մեջ գրված թվերը փոքր են մեկից, կստանանք՝

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad n = 2, \ 3, \ \ldots : \tag{2.2}$$

Հայտարարներում 2-ից մեծ արտադրիչները 2-ով փոխարինելիս՝ անհավասարության աջ մասը կմեծանա, հետևաբար՝

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} ... + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3:$$

Այսպիսով՝ $x_n$ -ը աճող և վերևից սահմանափակ հաջորդականություն է:

Համաձայն թեորեմ 2.1-ի, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *հաջորդականությունը զուգամետ է, որի սահմանն այսուհետև կնշանակենք* $e$ *-ով.* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e:$

<u>3. $e$ թվի մոտավոր հաշվումը:</u> Ցույց տանք, որ

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

*հաջորդականությունը նույնպես զուգամիտում է* $e$ *թվին:*

(2.1) հավասարությունից ունենք՝

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < x_n \quad (n > k):$$

Ֆիքսելով $k$ -ն և $n$ -ը ձգտեցնելով $\infty$ -ի՝ կստանանք

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{k!} \le e, \ k = 1, 2, ... :^*$$

Հաշվի առնելով նաև (2.2) անհավասարությունը՝ կստանանք

$$x_n < y_n < e: \tag{2.3}$$

Քանի որ $x_n \to e$, (2.3)-ից բխում է, որ $y_n \to e$:

$e$ թվի մոտավոր հաշվման բանաձև ստանալու համար գնահատենք $y_{n+m} - y_n$ տարբերությունը.

---

* Այս անհավասարության մեջ հավասարության դեպքը բացառվում է, քանի որ այդտեղ $k$ -ն $(k+1)$ -ով փոխարինելիս, անհավասարությունը պետք է պահպանվի:

$$y_{n+m}-y_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...+\frac{1}{(n+m)!}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{1}{(n+2)(n+3)...(n+m)}\right]<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right]<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}:$$

Այս անհավասարության մեջ ֆիքսելով $n$-ը, իսկ $m$-ը ձգտեցնելով $\infty$-ի՝ կստանանք

$$e-y_n\le\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}:$$

Հաշվի առնելով (2.3)-ը՝ այստեղից կստանանք

$$0<e-y_n\le\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+2}{(n+1)^2}:$$

Քանի որ $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$, ապա ունենք՝

$$0<e-y_n<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}: \tag{2.4}$$

Նշանակելով $\theta=\dfrac{e-y_n}{\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}}$, (2.4)-ից կունենանք՝ $0<\theta<1$ և, համաձայն այս նշանակման, կստանանք՝

$$e-y_n=\frac{\theta}{n!n}:$$

Դա նույնն է, որ

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n},\quad 0<\theta<1: \tag{2.5}$$

(2.5) մոտավոր հաշվման բանաձևից հետևում է, որ $e$ *-ն իռացիոնալ թիվ է:*

Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք $e$ -ն ռացիոնալ թիվ է՝ $e=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbf{N}$ : Այդ դեպքում, (2.5) բանաձևի մեջ վերցնելով $n=q$ , կստանանք՝

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{\theta}{q!q}:$$

Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով $q!$-ով կստանանք, որ $\theta/q$ -ն ամբողջ թիվ է, ինչը հակասություն է:

**<u>4. Շտոլցի թեորեմը:</u>**

**Թեորեմ 2.2:** *Դիցուք ՝*

*1)* $y_1<y_2<\ldots<y_n<\ldots$ , $y_n\to\infty$ *;*

*2)* $\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\to a$ *:*

*Այդ դեպքում* $\dfrac{x_n}{y_n}\to a$ *(*$a$ *-ն կարող է լինել թե՛ վերջավոր, և թե՛ անվերջ):*

► Ապացույցը բերենք այն դեպքի համար, երբ $a$ -ն վերջավոր է:*

Վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի $n_0>1$ բնական թիվ այնպես, որ

$$k\ge n_0 \quad\Rightarrow\quad a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_k-x_{k-1}}{y_k-y_{k-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}\ :$$

Անհավասարության բոլոր մասերը բազմապատկելով $y_k-y_{k-1}$ դրական թվով՝ կստանանք

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \left(y_k-y_{k-1}\right)<x_k-x_{k-1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \left(y_k-y_{k-1}\right):$$

* $a=\pm\infty$ դեպքերում ապացուցել ինքնուրույն:

$k$-ին տալով $n_0+1,...,n$ արժեքները և, գումարելով ստացված նույնանուն անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(y_n-y_{n_0}\right)<x_n-x_{n_0}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(y_n-y_{n_0}\right):$$

Անհավասարության բոլոր մասերը բաժանելով $y_n$ դրական թվի վրա ($n_0$-ն կարող էինք այնպես ընտրել, որ սկսած այդ համարից՝ $y_n>0$)՝ որոշ ձևափոխություններից հետո կստանանք

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{y_{n_0}}{y_n}\right)+\frac{x_{n_0}}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<\frac{x_{n_0}}{y_n}+\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{y_{n_0}}{y_n}\right): \qquad (2.6)$$

Քանի որ $\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{y_{n_0}}{y_n}\right)+\frac{x_{n_0}}{y_n}\to a-\frac{\varepsilon}{2}$, ապա, սկսած մի ինչ-որ $N_1$ համարից այն մեծ կդառնա $a-\varepsilon$ թվից: Նման ձևով, սկսած $N_2$ համարից, (2.6) անհավասարության աջ կողմի արտահայտությունը փոքր կդառնա $(a+\varepsilon)$-ից:

Նշանակելով $N=\max\{N_1,\ N_2,\ n_0\}$՝ կունենանք

$$n>N\Rightarrow a-\varepsilon<\frac{x_n}{y_n}<a+\varepsilon,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

**Հետևանք (Կոշիի թեորեմը):** *Եթե* $a_n\to a$, *ապա*

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\to a\ : \qquad (2.7)$$

Ապացուցելու համար նշանակենք՝ $x_n=a_1+a_2+...+a_n$, $y_n=n$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a_n\to a:$$

Հետևաբար, (2.7) պնդումն անմիջապես բխում է Շտոլցի թեորեմից:

Շտոլցի թեորեմը վերաբերում էր $\infty/\infty$ տեսքի անորոշություններին: Ընթերցողին առաջարկվում է ապացուցել $0/0$ տեսքի անորոշությունների վերաբերյալ հետևյալ պնդումը. *եթե*

*1)* $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$ , $y_n \to 0$ *;* *2)* $x_n \to 0$ *;* *3)* $\dfrac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} \to a$ ,

*ապա* $\dfrac{x_n}{y_n} \to a$ *:*

*Ցուցում.*

$$(a-\varepsilon)\left(y_k - y_{k+1}\right) < x_k - x_{k+1} < (a+\varepsilon)\left(y_k - y_{k+1}\right) \quad \left(k = n, n+1, \ldots, n+m-1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-\varepsilon)\left(y_n - y_{n+m}\right) < x_n - x_{n+m} < (a+\varepsilon)\left(y_n - y_{n+m}\right):$$

**5. Ներդրված հատվածների լեմման:**

**Թեորեմ 2.3:** *Դիցուք՝*

*1)* $x_n$ *հաջորդականությունը աճող է, իսկ* $y_n$ *-ը՝ նվազող;*

*2)* $x_n < y_n$ *;*

*3)* $y_n - x_n \to 0$ *:*

*Այդ դեպքում* $x_n$ *և* $y_n$ *հաջորդականությունները զուգամետ են և ունեն նույն սահմանը:*

► Քանի որ $x_n < y_n \le y_1$, ուստի $x_n$ աճող հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է: Հետևաբար այն զուգամետ է՝ $x_n \to c$: Մյուս կողմից՝ $x_1 \le x_n < y_n$: Այսինքն՝ $y_n$ նվազող հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, հետևաբար, այն նույնպես զուգամետ է՝ $y_n \to c_1$:

Ցույց տանք, որ $c = c_1$: Իրոք.

$$0 = \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = c_1 - c : \blacksquare$$

**Երկրաչափական մեկնաբանում:** Թվային առանցքի վրա դիտարկենք $[x_n, y_n]$ հատվածները: 1) և 2) պայմաններից կունենանք, որ այդ *հատվածները ներդրված են՝*

$$[x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset ... \supset [x_n, y_n] \supset ... :$$

3) պայմանը նշանակում է,որ այդ հատվածների երկարություններից կազմած հաջորդականությունը ձգտում է 0-ի:

Թեորեմ 2.3-ի եզրակացությունը նշանակում է, որ գոյություն ունի մեկ և միայն մեկ $c$ կետ, որը պատկանում է այդ բոլոր հատվածներին:

Այսպիսով՝ թեորեմ 2.3-ը թվային առանցքի վրա կարող ենք ձևակերպել հետևյալ կերպ.

**Ներդրված հատվածների լեմման:** *Եթե ներդրված հատվածների երկարությունների հաջորդականությունը ձգտում է 0-ի, ապա գոյություն ունի մեկ և միայն մեկ կետ, որը պատկանում է բոլոր այդ հատվածներին:*

## §3. ԵՆԹԱՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՄԱՍՆԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆ

### 1. Մասնակի սահման:

**Սահմանում:** *Դիցուք $x_n$ -ը կամայական հաջորդականություն է, իսկ $n_k$ -ն՝ բնական թվերի խիստ աճող հաջորդականություն: Այդ դեպքում $y_k = x_{n_k}$ հաջորդականությունը կոչվում է $x_n$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն:*

**Թեորեմ 3.1**: *Եթե $x_n \to a$, ապա նրա կամայական ենթահաջորդականություն ևս կձգտի այդ նույն $a$ սահմանին:*

Թեորեմի ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին՝ ստուգելու սահմանի սահմանման իր իմացությունը:

**Սահմանում**: *Եթե $x_{n_k} \to c$, որտեղ $x_{n_k}$ -ն $x_n$ -ի որևէ ենթահաջորդականություն է, ապա $c$ -ն կոչվում է $x_n$ հաջորդականության մասնակի սահման:*

**Օրինակ**: $x_n = (-1)^{n+1}$ հաջորդականության համար ունենք՝ $x_{2k-1} = 1$, $x_{2k} = -1$: Հետևաբար, $1$-ը և $-1$-ը կհանդիսանան այդ հաջորդականության մասնակի սահմաններ: Նկատենք, որ $x_n$-ը այլ մասնակի սահմաններ չունի:

Ընդհանուր դեպքում, մասնակի սահմանների բազմությունը որոշելու համար, հարմար է օգտվել հետևյալ թեորեմից.

**Թեորեմ 3.2:** Որպեսզի $a$-ն (վերջավոր կամ անվերջ) հանդիսանա $x_n$ հաջորդականության մասնակի սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $a$-ի կամայական շրջակայք պարունակի $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

► *Անհրաժեշտությունն* անմիջապես բխում է մասնակի սահմանի սահմանումից:

*Բավարարություն:* Ապացուցենք այն դեպքում, երբ $a$-ն վերջավոր է: Առաջին քայլում վերցնենք $a$ կետի $(a-1,\ a+1)$ շրջակայքը: Քանի որ այդ միջակայքը պարունակում է $x_n$ հաջորդականության անդամներ, ապա գոյություն ունի $n_1$ ինդեքս, այնպիսին, որ $a-1<x_{n_1}<a+1$:

Երկրորդ քայլում դիտարկենք $a$ կետի $\left(a-\frac{1}{2}\ ,a+\frac{1}{2}\right)$ շրջակայքը: Քանի որ այդ շրջակայքը պարունակում է $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ, ապա գոյություն ունի $n_2$, այնպիսին, որ $n_2>n_1$ և $a-\frac{1}{2}<x_{n_2}<a+\frac{1}{2}$:

Եթե $n_1,n_2,\ ...,n_{k-1}$ ինդեքսներն արդեն ընտրված են, $n_k$ ինդեքսն ընտրում ենք այնպես, որ

$$n_k>n_{k-1} \text{ և } a-\frac{1}{k}<x_{n_k}<a+\frac{1}{k},\ k=2,3,...:$$

Այսպիսի ընտրությունն իրոք հնարավոր է, քանի որ $a$ կետի $\left(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k}\right)$ շրջակայքը պարունակում է $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Այսպիսով՝ ստանում ենք $x_n$ հաջորդականության $x_{n_k}$ ենթահաջորդականություն, որը բավարարում է

$$a-\frac{1}{k}<x_{n_k}<a+\frac{1}{k},\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

պայմանին: Այստեղից բխում է, որ $x_{n_k}\to a$ :

$a=\pm\infty$ դեպքերում դիտարկում ենք համապատասխանաբար $(k,\infty)$ և $(-\infty,-k)$ շրջակայքերը և կատարում նույն դատողությունը: ■

**2. <u>Հաջորդականության վերին և ստորին սահմանները:</u>**

**Սահմանում:** $x_n$ *հաջորդականության մասնակի սահմաններից մեծագույնը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է այդ հաջորդականության վերին սահման և նշանակվում է* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ *կամ* $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n$ *սիմվոլով: Մասնակի սահմաններից փոքրագույնը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է հաջորդականության ստորին սահման և նշանակվում`* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ *կամ* $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n$ *:*

**<u>Թեորեմ 3.3</u>** *Կամայական հաջորդականություն ունի վերին և ստորին սահմաններ:*

► Ապացուցենք վերին սահմանի գոյությունը (ստորինի գոյությունը կարելի է ապացուցել նույն դատողություններով):

Նախ, երբ $x_n$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ չէ, $+\infty$-ի կամայական շրջակայք կպարունակի $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ: Հետևաբար, $+\infty$-ը կհանդիսանա $x_n$ հաջորդականության մասնակի սահման և կլինի նրանցից մեծագույնը:

Մնում է դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_n$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է:

Նշանակենք` $y_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\ldots\}$ :

$y_n$ հաջորդականությունը նվազող է (լայն իմաստով), հետևաբար ունի սահման, վերջավոր կամ $-\infty$ :

Այդ դեպքերը քննարկենք առանձին:

Քանի որ $x_n \le y_n$, ապա $y_n \to -\infty$ դեպքում կունենանք՝ $x_n \to -\infty$: Հետևաբար, $-\infty$-ը կլինի $x_n$-ի միակ մասնակի սահմանը, ուստի և՝ ամենամեծը:

Մնում է քննարկել այն դեպքը, երբ $y_n$-ը նվազելով ձգտում է $c$ վերջավոր սահմանի:

Ցույց տանք, որ հենց $c$-ն կհանդիսանա $x_n$ հաջորդականության մասնակի սահմաններից մեծագույնը:

Իրոք, նախ $c$-ից մեծ մասնակի սահման գոյություն չունի, որովհետև յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $N$, այնպիսին, որ

$$n > N \Rightarrow \ y_n < c + \varepsilon \ \ \Rightarrow x_n < c + \varepsilon :$$

Մյուս կողմից, $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ մեծ են $(c-\varepsilon)$-ից, հակառակ դեպքում, սկսած որոշ համարից, տեղի կունենար $y_n \le c - \varepsilon$ անհավասարությունը, ինչը հակասություն է:

Այսպիսով՝ $c$ կետի յուրաքանչյուր $(c-\varepsilon,\ \ c+\varepsilon)$ շրջակայք պարունակում է $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ: Հետևաբար, $c$-ն $x_n$ հաջորդականության մասնակի սահման է: ■

Ընթերցողին առաջարկում ենք ապացուցել, որ եթե

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a \ ,$$

ապա $x_n \to a$:

<u>3. Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմման:</u>

**Թեորեմ 3.4:** *Յուրաքանչյուր սահմանափակ $x_n$ հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն:*

► Քանի որ $x_n$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա գոյություն ունեն $a$ և $b$ թվեր, այնպիսիք, որ $a \le x_n \le b$:

Դիտարկենք $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ և $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ հատվածները: Այդ հատվածներից գոնե մեկը կպարունակի $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ: Այն նշանակենք $[a_1,b_1]$-ով (եթե երկու կեսերն էլ պարունակեն անվերջ թվով անդամներ, կվերցնենք որևէ մեկը):

Երկրորդ քայլում կիսենք $[a_1,b_1]$ հատվածը և $[a_2,b_2]$-ով նշանակենք այն կեսը, որը պարունակում է $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Անվերջ շարունակենք այս պրոցեսը: Այսինքն՝ եթե $[a_n,b_n]$ հատվածը արդեն կառուցել ենք այնպես, որ այն պարունակի $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ, ապա $[a_{n+1},b_{n+1}]$ հատվածը կառուցելու համար կիսում ենք $[a_n,b_n]$-ը և վերցնում այն կեսը, որը պարունակում է $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Այսպիսով, ստանում ենք ներդրված հատվածներ՝

$$[a_1,\ b_1]\supset[a_2,\ b_2]\supset\ldots\supset[a_n,\ b_n]\supset\ldots\ ,$$

որտեղ $n$-րդ հատվածի երկարությունը հավասար է $\dfrac{b-a}{2^n}$, որը ձգտում է 0-ի: Հետևաբար, ներդրված հատվածների լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի մի $c$ թիվ, այնպիսին, որ

$$a_n\to c,\quad b_n\to c:$$

Այստեղից բխում է, որ $c$ կետի կամայական շրջակայք պարունակում է որևէ $[a_n,b_n]$ հատված, հետևաբար և՝ $x_n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ: Այսպիսով՝ $c$-ն հաջորդականության մասնակի սահման է, այսինքն՝ գոյություն ունի $x_{n_k}$ զուգամետ ($c$-ին ձգտող) ենթահաջորդականություն: ■

*Մեկ այլ ապացույց:* Թեորեմ 3.3-ի համաձայն՝ $\exists\, x_{n_k}\to\varliminf_{n\to\infty}x_n\in[a,b]$:

## §4. ԿՈՇԻԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

**Սահմանում:** $x_n$ *հաջորդականությունը կոչվում է ֆունդամենտալ, եթե յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի* $N(\varepsilon)$ *բնական թիվ, այնպիսին, որ*

$$n, n' > N \Rightarrow \left| x_{n'} - x_n \right| < \varepsilon :$$

Այս պայմանը կարելի է գրել նաև այսպես.

$$n > N \Rightarrow \left| x_{n+m} - x_n \right| < \varepsilon \ , \ m = 1,2,... :$$

<u>1. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:</u>

**Թեորեմ 4.1:** *Որպեսզի* $x_n$ *հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:*

► *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք՝ $x_n \to a$ ($a$ -ն վերջավոր է): Այդ դեպքում, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $N$, այնպիսին, որ

$$n > N \Rightarrow \left| x_n - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} :$$

Հետևաբար, եթե $n, n' > N$, ապա

$$\left| x_{n'} - x_n \right| = \left| (x_{n'} - a) + (a - x_n) \right| \le \left| x_{n'} - a \right| + \left| a - x_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Այսպիսով, $x_n$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է:

*Բավարարություն:* Ունենք $x_n$ ֆունդամենտալ հաջորդականությունը: Պետք է ապացուցենք, որ այն զուգամետ է:

Նախ ապացուցենք, որ ֆունդամենտալ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Դրա համար վերցնենք որևէ $\varepsilon_0 > 0$ թիվ: Գոյություն ունի $N$, այնպիսին, որ

$$n', n > N \Rightarrow \left| x_n - x_{n'} \right| < \varepsilon_0 ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$n', n > N \Rightarrow x_{n'} - \varepsilon_0 < x_n < x_{n'} + \varepsilon_0 :$$

$n'$ -ը ֆիքսենք և նշանակենք՝

$$m = \min\left\{x_{n'} - \varepsilon_0, x_1, x_2, ..., x_N\right\},$$

$$M = \max\left\{x_{n'} + \varepsilon_0, x_1, x_2, ..., x_N\right\}:$$

Կունենանք՝ $m \le x_n \le M$ և, համաձայն Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմա-յի, գոյություն ունի $x_n$ հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $x_{n_k} \to c$ :

Ցույց տանք, որ $x_n \to c$ :

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ $x_n$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, գոյություն ունի $N$ բնական թիվ, այնպիսին, որ $N$ -ից մեծ կամայական $n$ և $n_k$ ինդեքսների համար տեղի ունի

$$\left|x_n - x_{n_k}\right| < \varepsilon \tag{4.1}$$

անհավասարությունը:

(4.1) անհավասարության մեջ ֆիքսենք $n$ -ը և անցնենք սահմանի, երբ $k \to \infty$ : Կստանանք՝

$$n > N \Rightarrow \left|x_n - c\right| \le \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

**Օրինակ:** $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \to +\infty$ :

Իրոք. $x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, հետևաբար $x_n$ -ը ֆունդամենտալ չէ: Համաձայն Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի, այն տարամետ է: Մյուս կողմից, $x_n$ -ը աճող է: Ուրեմն, ըստ թեորեմ 2.1-ի՝ $x_n \to +\infty$ :

## §5. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

<u>**1.Կուտակման կետ:**</u> Դիցուք $X$ -ը կամայական թվային բազմություն է:

**Սահմանում:** *$a$ -ն (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $X$ բազմության կուտակման կետ, եթե $a$ -ի յուրաքանչյուր շրջակայք պարունակում է $X$ բազմության անվերջ թվով տարրեր:*

Կարելի է տալ կուտակման կետի մեկ այլ սահմանում. *$a$ կետը կոչվում է $X$ բազմության կուտակման կետ, եթե $a$ կետի յուրաքանչյուր շրջակայք պարունակում է $a$ -ից տարբեր գոնե մեկ կետ այդ բազմությունից:*

Առաջին հայացքից թվում է, թե այս երկրորդ սահմանման մեջ պահանջն ավելի թույլ է, քան առաջին սահմանման պահանջը: Բայց դա միայն թվացյալ է: Ապացուցենք, որ երկրորդից բխում է առաջինը (հակառակն ակնհայտ է):

Ապացույցը տանենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք $a$ -ի որևէ շրջակայք պարունակում է $X$ բազմության վերջավոր թվով տարրեր՝ $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

Երբ $a$ -ն վերջավոր է, նշանակենք՝ $\delta = \min\limits_{x_i \neq a} |x_i - a|$: Այդ դեպքում $a$ կետի $(a-\delta, a+\delta)$ շրջակայքը $X$ բազմությանը պատկանող՝ $a$ -ից տարբեր կետ չի պարունակի, որը հակասություն է:

Երբ $a$ -ն անվերջ է, ասենք՝ $a = +\infty$, կնշանակենք՝ $E = \max\limits_{1 \le i \le m} x_i$: Այդ դեպքում $(E, \infty)$ -ը $X$ բազմության ոչ մի տարր չի պարունակի, ինչը կրկին հակասություն է:

**Լեմմա 5.1:** *Եթե $a$ -ն (վերջավոր կամ անվերջ) $X$ բազմության կուտակման կետ է, ապա գոյություն ունի $x_n \in X$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $x_n \to a$ և $x_n \neq a$ :*

► Ապացուցենք վերջավոր $a$ -ի դեպքում: Յուրաքանչյուր բնական $n$-ի համար դիտարկենք $a$ կետի $\left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right)$ շրջակայքը: Կուտակման կետի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի $x_n$ կետ, այնպիսին, որ $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \in \left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right)$, այսինքն՝

$$a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n},\ n=1,2,\ldots:$$

Հետևաբար՝ $x_n \to a$ : ■

<u>2. Ֆունկցիայի սահմանի Կոշիի սահմանումը:</u> Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ բազմության վրա, որի համար $a$-ն կուտակման կետ է ( $a$-ն կարող է լինել թե' վերջավոր, և թե' անվերջ):

**Սահմանում:**

*1) Դիցուք $a$-ն վերջավոր է: Կասենք, որ $x$-ը $a$-ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է $A$ վերջավոր սահմանին և կգրենք՝*

$$f(x)\to A\ \ (x\to a)\ \ \text{կամ}\ \lim_{x\to a} f(x)=A\,,$$

*եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$0<|x-a|<\delta,\ x\in X \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\ :$$

*2) Կասենք, որ $f(x)\to A\ \ (x\to+\infty)$ (այստեղ $a=+\infty$ , իսկ $A$-ն կրկին վերջավոր է), եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $E$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$x>E, x\in X \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\ :$$

Ֆունկցիայի սահմանի Կոշիի սահմանումը ընդհանուր դեպքում (չառանձնացնելով $a$-ի և $A$-ի վերջավոր կամ անվերջ լինելու դեպքերը) ձևակերպվում է շրջակայքերի լեզվով. *կասենք $x$-ը $a$-ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է $A$ սահմանին, եթե $A$-ի կամայական $V$ շրջակայքի համար գոյություն ունի $a$-ի այնպիսի $U$ շրջակայք, որ*

$$x\in X\cap U,\ x\neq a \Rightarrow f(x)\in V\ :$$

Ելնելով այս վերջին սահմանումից՝ նախորդ սահմանումը կարելի է համալրել *3)* $f(x)\to+\infty\ \ (x\to+\infty)$ ; *4)* $f(x)\to+\infty\ \ (x\to a)$ և մնացած (հինգ) դեպքերով, ինչը թողնում ենք ընթերցողին:

Մասնավորաբար, երբ $X$ բազմությունը համընկնում է $\mathbf{N}$ բնական թվերի բազմության հետ, *2)* սահմանումը կհամընկնի հաջորդականության սահմանի սահմանմանը: Այսինքն՝ ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը հաջորդականության սահմանի գաղափարի ընդհանրացումն է: Եվ հաջորդականության սահմանի շատ հատկություններ տարածվում են ֆունկցիայի սահմանի վրա:

**Օրինակ 1:** $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$:

Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և գտնենք $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|x-0\right| < \delta \Rightarrow \left|a^x - 1\right| < \varepsilon : \tag{5.1}$$

Առանց ընդհանրությունը խախտելու՝ ենթադրենք, թե $a > 1$ և $\varepsilon < 1$ : Այդ դեպքում (5.1) առնչությունը համարժեք է հետևյալին.

$$\left|x\right| < \delta \Rightarrow \log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon) :$$

Քանի որ $\log_a(1-\varepsilon) < -\log_a(1+\varepsilon)$, բավական է պահանջել, որ տեղի ունենա

$$-\log_a(1+\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon)$$

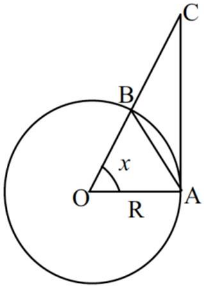
անհավասարությունը:

Այսպիսով, կարող ենք վերցնել՝ $\delta = \log_a(1+\varepsilon)$ :

**Օրինակ 2:** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$:

Ապացույցը կատարենք երկրաչափական դատողությունների օգնությամբ: Նախ ապացուցենք հետևյալ անհավասարությունը.

$$\sin x < x < tgx \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right): \tag{5.2}$$




$R$ շառավղով շրջանում դիտարկենք $x$ ռադիանային մեծության $AOB$ սուր անկյունը: Դիցուք՝ $AC \perp OA$ : Ունենք, որ $AOB$ եռանկյան մակերեսը փոքր է $AOB$ սեկտորի մակերեսից, ինչն էլ փոքր է $AOC$ եռանկյան մակերեսից:

Տեղադրելով այդ մակերեսների արժեքները՝ կստանանք

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2tgx$$

անհավասարությունը, որի բոլոր կողմերը բաժանելով $\frac{1}{2}R^2$-ու, կստանանք (5.2)-ը:

Քանի որ (5.2) անհավասարության բոլոր կողմերը դրական են, ապա դրանց հակադարձների համար ճիշտ է

$$\frac{\cos x}{\sin x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$$

անհավասարությունը: Վերջինիս բոլոր կողմերը բազմապատկելով $-\sin x$-ով՝ կստանանք

$$-1<-\frac{\sin x}{x}<-\cos x$$

անհավասարությունը, որտեղից էլ՝

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right):$$

Սակայն $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x$, ուստի՝

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x:$$

Քանի որ $\frac{\sin x}{x}$ և $|x|$ ֆունկցիաները զույգ են, վերջին գնահատականից կստանանք՝

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<|x|\quad\left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right):$$

Ստացված անհավասարությունն արդեն լուծում է մեր խնդիրը. կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար կընտրենք՝ $\delta=\min\left\{\frac{\pi}{2},\varepsilon\right\}$:

<u>3. Ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումը:</u> Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X$ բազմության վրա, որի համար $a$-ն (վերջավոր կամ անվերջ) կուտակման կետ է:

**Սահմանում:** *Կասենք $x$-ը $a$-ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է $A$ սահմանին, եթե յուրաքանչյուր $x_n \in X$, $x_n \neq a$ հաջորդականության համար՝*

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A:$$

Ապացուցենք, որ *Կոշիի և Հայնեի սահմանումները համարժեք են*: Սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ $a$-ն և $A$-ն վերջավոր են:

*Կոշիի պայմանից բխում է Հայնեի պայմանը:* Իրոք, $f(x)$-ը բավարարում է Կոշիի պայմանին, նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta, \ x \in X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon:$$

Այժմ վերցնենք որևէ $a \neq x_n \in X$, $x_n \to a$ հաջորդականություն: Այդ դեպքում գոյություն ունի $N(\delta)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\delta) \Rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon:$$

Իսկ դա նշանակում է, որ $f(x_n) \to A$:

*Հայնեի պայմանից բխում է Կոշիի պայմանը:* Ապացույցը տանենք հակասող ենթադրությամբ: Կոշիի պայմանը չի բավարարվում, նշանակում է, որ մի որևէ $\varepsilon_0 > 0$ թվի համար ինչպիսի $\delta > 0$ թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա գոնե մեկ $x_\delta \in X$ կետ, այնպիսին, որ չնայած՝ $0 < |x_\delta - a| < \delta$, բայց՝ $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$:

Վերցնելով $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ և համապատասխան կետերը նշանակելով $x_n$, կստանանք՝ $a \neq x_n \in X$, $x_n \to a$, բայց՝ $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$: Սա հակասում է Հայնեի $f(x_n) \to A$ պայմանին:

<u>**4. Միակողմանի սահման:**</u> Ենթադրենք $a$ կետը *աջից* $X$ *բազմության կուտակման կետ է*, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար $(a, a+\varepsilon)$ միջակայքը պարունակում է $X$ բազմության անվերջ թվով կետեր:

Այսպիսի $a$ կետում կարող ենք սահմանել $f(x)$ *ֆունկցիայի աջակողմյան սահման*՝ սահմանի սահմանման մեջ դնելով լրացուցիչ պայման. $x > a$:

Ներկայացնենք, օրինակ, վերջավոր աջակողմյան սահմանի Կոշիի սահմանումը (մնացած դեպքերն առաջարկում ենք ձևակերպել ինքնուրույն).

**Սահմանում:** *$A$ թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան սահման՝$a$ կետում, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$0 < x - a < \delta,\ x \in X \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon :$$

Աջակողմյան սահմանը կնշանակենք

$$\lim_{x \to a+} f(x)$$

սիմվոլով:

Եթե $a$ *կետը ձախից կուտակման կետ է*, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար $(a-\varepsilon, a)$ միջակայքը պարունակում է $X$ բազմության անվերջ թվով կետեր, սահմանվում է *ձախակողմյան սահման*՝ սահմանի սահմանման մեջ լրացուցիչ դնելով $x < a$ պայմանը: Ձախակողմյան սահմանը կնշանակենք

$$\lim_{x \to a-} f(x)$$

սիմվոլով:

Աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները կոչվում են *միակողմանի սահմաններ*:

Երբ $a$-ն կուտակման կետ է թե՛ աջից, և թե՛ ձախից, բերված սահմանումներից անմիջապես բխում է հետևյալ պնդումը.

*որպեսզի* $\lim_{x \to a} f(x) = A$ *($A$-ն կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ՝ անվերջ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\lim_{x \to a-} f(x) = A$ *և* $\lim_{x \to a+} f(x) = A$ *:*

**Օրինակ:** $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ ֆունկցիան 0 կետում սահման չունի: Իրոք, քանի որ $2^x\to\infty\ (x\to\infty)$ և $2^x\to 0\ \left(x\to-\infty\right)$, հետևաբար

$$\lim_{x\to 0+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty \text{ և } \lim_{x\to 0-}2^{\frac{1}{x}}=0 \ :$$

<u>**5. e թվի ընդհանուր բանաձևը:**</u> *Ապացուցենք, որ*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e:$$

Բավական է ապացուցել, որ

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x}=e, \tag{5.3}$$

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{1/x}=e: \tag{5.4}$$

Օգտվենք Հայնեի սահմանումից: Վերցնենք որևէ $x_k>0,\ x_k\to 0$ հաջորդականություն և ցույց տանք, որ

$$\left(1+x_k\right)^{1/x_k}\to e:$$

Նշանակենք՝ $\left[\dfrac{1}{x_k}\right]=n_k$, կունենանք՝ $n_k\le\dfrac{1}{x_k}<n_k+1$, որտեղից էլ՝

$$1+\frac{1}{n_k+1}<1+x_k\le\frac{1}{n_k}+1:\ ^*$$

Հաշվի առնելով աստիճանային և ցուցչային ֆունկցիաների մոնոտոնությունը՝ կստանանք

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+x_k\right)^{1/x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

անհավասարությունը: Քանի որ $n_k\to\infty$, օգտվելով Հայնեի սահմանումից և հաշվի առնելով $e$ թվի բանաձևը, կստանանք, որ այդ անհավասարության ծայրանդամները ձգտում են $e$-ի: Հետևաբար, նրա միջին անդամը նույնպես կձգտի $e$-ի: (5.3)-ն ապացուցված է:

---

* Կարող ենք համարել՝ $x_k<1$, ուստի՝ $n_k\neq 0$:

(5.4)-ն ապացուցելու համար վերցնենք $-1 < x_k < 0,\ x_k \to 0$ պայման-ների բավարարող որևէ $x_k$ հաջորդականություն և նշանակենք $y_k = -x_k$ : Կունենանք՝

$$\left(1+x_k\right)^{1/x_k} = \left(1-y_k\right)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{1/y_k} = \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{1/y_k} =$$

$$= \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right):$$

Այսպիսով, հարցը բերվեց նախորդ դեպքին: Իրոք. $z_k := \dfrac{y_k}{1-y_k} > 0$ և $z_k \to 0$, հետևաբար՝ $\left(1+z_k\right)^{1/z_k}\left(1+z_k\right) \to e\cdot 1 = e$ :

<u>**6. Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիայի պարզագույն հատկություն-ները:**</u>

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X$ բազմության վրա, որի համար $a$-ն կուտակման կետ է: Եթե $a$-ն վերջավոր է, ապա ճիշտ են հետևյալ հատկությունները.

*1) Եթե $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ և $A > p$ ($A < q$ ), ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$0 < \left|x-a\right| < \delta, x \in X \Rightarrow f(x) > p \quad \left(f(x) < q\right): \tag{5.5}$$

Իրոք, դիցուք՝ $0 < \varepsilon < A - p$ : Օգտվենք Կոշիի սահմանումից. գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < \left|x-a\right| < \delta, x \in X \Rightarrow A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon\ ,$$

որից էլ բխում է (5.5)-ը:

*Մասնավոր դեպք: Եթե $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$ ), ապա $a$-ին բավա-կանաչափ մոտ ($a$-ից տարբեր) $x$-երի համար ֆունկցիան նույնպես դրա-կան է (բացասական է):*

*2) Եթե $x$ -ը $a$ -ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, ապա $a$ -ի մի ինչ-որ շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է:*

Այս հատկությունը նույնպես բխում է սահմանի Կոշիի սահմանումից:

Ընթերցողին առաջարկվում է ձևակերպել և ապացուցել բերված հատկությունների անալոգները $a=\pm\infty$ դեպքերում:

<u>7. Թվաբանական գործողություններ վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ:</u>

Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $X$ բազմության վրա, որի համար $a$ -ն (վերջավոր կամ անվերջ) կուտակման կետ է: Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն

$$\lim_{x\to a} f(x),\ \ \lim_{x\to a} g(x)$$

վերջավոր սահմանները: Այդ դեպքում

*1) Ֆունկցիաների գումարը $a$ կետում նույնպես ունի սահման և գումարի սահմանը հավասար է գումարելիների սահմանների գումարին՝*

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)\,;$$

*2) Ֆունկցիաների արտադրյալը $a$ կետում նույնպես ունի սահման և՝*

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)\,;$$

*3) Եթե $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, ապա $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ քանորդը $a$ կետում նույնպես ունի սահման և՝*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\,:$$

Նկատենք, որ $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ պայմանից հետևում է, որ $a$ -ից տարբեր և $a$ -ին բավականաչափ մոտ $x$ -երի համար՝ $g(x)\neq 0$ (տե'ս նախորդ կետը):

Օգտվելով ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից՝ հարցը բերվում է հաջորդականությունների համապատասխան հատկություններին:

<u>8. Մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանը:</u> Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X$ բազմության վրա, որի համար $a$-ն կուտակման կետ է: Ենթադրենք $X$ բազմության բոլոր տարրերը փոքր են $a$-ից՝

$$x < a\,,\quad x \in X\;:$$

Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ թեորեմը.

**Թեորեմ 5.1:** *Եթե $f(x)$ աճող ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից, ապա $x$-ը $a$-ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում այն ձգտում է $+\infty$ :*

► Քանի որ $f(x)$-ը սահմանափակ է վերևից, նրա ընդունած արժեքների բազմության ճշգրիտ վերին եզրը վերջավոր է: Նշանակենք՝

$$A = \sup_{x\in X} f(x)\,,$$

և ապացուցենք, որ

$$\lim_{x\to a} f(x) = A\;:$$

Նախ ունենք, որ

$$f(x) \le A\;: \tag{5.6}$$

Այնուհետև, վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Ճշգրիտ վերին եզրի հատկության համաձայն, գոյություն ունի $x_1 \in X$, այնպիսին, որ

$$A - \varepsilon < f(x_1)\;:$$

Ֆունկցիայի աճելու շնորհիվ ունենք՝

$$x_1 < x < a,\, x \in X \Rightarrow f(x_1) \le f(x)\;: \tag{5.7}$$

(5.6) և (5.7) անհավասարություններից կստանանք՝

$$x_1 < x < a,\, x \in X \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon\,,$$

ինչը նշանակում է, որ $x$-ը $a$-ին ձգտելիս՝ $f(x)$-ը ձգտում է $A$-ի:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $f(x)$ ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ: Վերցնենք կամայական $E$ թիվ: Գոյություն ունի $x_1 \in X$, այնպիսին, որ $f(x_1) > E$: Ֆունկցիայի աճելու շնորհիվ կունենանք՝

$$x_1 < x < a,\, x \in X \Rightarrow f(x) \ge f(x_1) > E\,,$$

ինչը նշանակում է, որ $x$ -ը $a$ -ին ձգտելիս՝ $f(x)$ -ը ձգտում է $+\infty$ : ■

Նման ձևով կապացուցվի նաև հետևյալ արդյունքը.

**Թեորեմ 5.1':** *Եթե նվազող $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից, ապա $x$ -ը $a$ -ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում այն ձգտում է $-\infty$ :*

Այս թեորեմների նմանակները ճիշտ են նաև այն դեպքի համար, երբ $a$ կուտակման կետը փոքր է $X$ բազմության տարրերից (ձևակերպե՛լ):

<u>9. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:</u> Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X$ բազմության վրա, որի համար $a$ կետը (վերջավոր) կուտակման կետ է:

**Թեորեմ 5.2:** *Որպեսզի $x$ -ը $a$ -ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{array}{l} 0<|x'-a|<\delta \\ 0<|x-a|<\delta \\ x,\, x' \in X \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x')-f(x)|<\varepsilon : \tag{5.8}$$

► *Անհրաժեշտությունն* անմիջապես բխում է սահմանի սահմանումից:

*Բավարարություն:* Օգտվելու ենք ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից: Դիտարկենք $x_n \in X$, $a \neq x_n \to a$ պայմաններին բավարա-րող կամայական $x_n$ հաջորդականություն: Ունենք, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի (5.8) պայմանին բավարարող $\delta > 0$ թիվ: Վերջինիս համար գոյություն ունի $N(\delta)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\delta) \Rightarrow |x_n - a| < \delta :$$

Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (5.8)-ը, կունենանք՝

$$n, n' > N(\delta) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0<|x_n-a|<\delta \\ 0<|x_{n'}-a|<\delta \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x_n)-f(x_{n'})|<\varepsilon :$$

Այսինքն՝ $f(x_n)$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, հետևաբար, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, այն զուգամիտում է $A$ վերջավոր սահմանին:

Մնում է ապացուցել, որ այդ $A$ թիվը $x_n$ հաջորդականության ընտրությունից կախված չէ: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ:

Ենթադրենք, թե $x'_n$ հաջորդականությունը ևս ձգտում է $a$-ին և $f(x'_n) \to B \neq A$:

Այդ դեպքում կազմենք $a$-ին ձգտող մի նոր հաջորդականություն՝ $x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..., x_n, x'_n, ...$: Այս հաջորդականության վրա ֆունկցիայի ընդունած արժեքների հաջորդականությունը կլինի՝

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), ...,$$

որը սահման չունի: Բայց դա հակասում է արդեն ապացուցված այն փաստին, որ $a$-ին ձգտող կամայական $x_n$ հաջորդականության համար ֆունկցիայի արժեքների $f(x_n)$ հաջորդականությունը զուգամետ է: ■

$a = \pm\infty$ դեպքում Կոշիի սկզբունքը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

*1) Որպեսզի $x$-ը $+\infty$-ի ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $E$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{aligned} x' &> E \\ x'' &> E \\ x', x'' &\in X \end{aligned}\right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

*2) Որպեսզի $x$-ը $-\infty$-ի ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $E$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{aligned} x' &< E \\ x'' &< E \\ x', x'' &\in X \end{aligned}\right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

## III ԳԼՈՒԽ

# ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

## §1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ

1. Անընդհատության սահմանումը: Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X \subset R$ բազմության վրա և արժեքներ է ընդունում $R$-ից՝ $f: X \to R$:

**Սահմանում:** *$f$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $x_0 \in X$ կետում, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ x \in X \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : \qquad (1.1)$$

Այն դեպքում, երբ $x_0 \in X$ կետը $X$ բազմության կուտակման կետ է, (1.1) պայմանը նշանակում է՝ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$: Այս դեպքում, օգտվելով ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից, կստանանք, որ (1.1)-ը համարժեք է հետևյալին. յուրաքանչյուր $x_n \in X$, $x_n \to x_0$ հաջորդականության համար տեղի ունի

$$f(x_n) \to f(x_0) \qquad (1.1')$$

առնչությունը:

Ներկայացված սահմանումներից առաջինը կոչվում է ֆունկցիայի անընդհատության *Կոշիի սահմանում*, իսկ երկրորդը՝ *Հայնեի սահմանում*:

Այն մասնավոր դեպքում, երբ $x_0 \in X$ կետը $X$ բազմության կուտակման կետ չէ (*մեկուսացված կետ է*), ինչպիսին էլ որ լինի $f$ ֆունկցիան, (1.1) պայմանը բավարարվում է: Այսինքն՝ *որոշման տիրույթի մեկուսացված կետում բոլոր ֆունկցիաներն անընդհատ են**:

**Սահմանում:** *Եթե $x_0 \in X$ կետում $f$ ֆունկցիան անընդհատ չէ, ապա ասում են, որ այն խզվում է $x_0$ կետում, իսկ $x_0$-ն անվանում են $f$ ֆունկցիայի խզման կետ:*

---

* Հենց այս նկատառումով էլ ֆունկցիայի անընդհատությունը այսուհետ հետազոտելու ենք միայն նրա որոշման տիրույթի կուտակման կետերում:

**Սահմանում:** *$f$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $X$ բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է $X$ բազմության բոլոր կետերում: $X$ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիաների դասը նշանակվում է՝ $C(X)$ :*

<u>2. Թվաբանական գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ:</u>

**Թեորեմ** 1.1: *Դիցուք $f$ և $g$ ֆունկցիաները որոշված են $X$ բազմության վրա և $x_0 \in X$ կետը $X$ բազմության կուտակման կետ է: Եթե $f$ և $g$ ֆունկցիաներն անընդհատ են $x_0$ կետում, ապա այդ կետում անընդհատ են նաև $f \pm g$ , $f \cdot g$ , $\dfrac{f}{g}$ ֆունկցիաները, վերջին դեպքում ենթադրելով, որ $g(x_0) \neq 0$ :*

Այս պնդումն անմիջապես բխում է վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ թվաբանական գործողությունների վերաբերյալ թեորեմից:

**Օրինակներ:**

$1^0$. $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ բազմանդամն անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Իրոք, $a_k$ $(0 \le k \le n)$ գործակիցները՝ որպես հաստատուն ֆունկցիաներ, անընդհատ են: Քանի որ $f(x) = x$ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է, ուստի յուրաքանչյուր

$$a_k x^k = a_k \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x \qquad (k = 1,2,...,n)$$

միանդամ ևս անընդհատ է: Իսկ $P(x)$ բազմանդամը հանդիսանում է այդպիսի միանդամների գումար, հետևաբար, այն նույնպես անընդհատ է:

$2^0$. $R(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m}$ ռացիոնալ ֆունկցիան անընդհատ է թվային առանցքի բոլոր այն կետերում, որտեղ հայտարարը 0 չէ:

$3^0$. $f(x) = a^x$ ցուցչային ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա, քանի որ $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right) \to 0$, երբ $x \to x_0$ :

$4^0$. $f(x)=\sin x$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա, քանի որ $\sin x-\sin x_0=2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\to 0$, երբ $x\to x_0$:

<u>3. Միակողմանի անընդհատություն:</u>

**Սահմանում:** *Դիցուք $x_0$-ն $X$ բազմության կուտակման կետ է աջից (ձախից) և $x_0\in X$: $X$ բազմության վրա որոշված $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում կոչվում է անընդհատ աջից (ձախից), եթե տեղի ունի*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0) \qquad \left(\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)\right)$$

*պայմանը:*

Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը միջակայք է, ապա միջակայքի ձախ (աջ) ծայրակետում կարող ենք խոսել միայն աջից (ձախից) անընդհատության մասին:

**Թեորեմ 1.2:** *Որպեսզի միջակայքի ներքին կետում ֆունկցիան լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն այդ կետում լինի անընդհատ թե՛ աջից, և թե՛ ձախից:*

Այս թեորեմն անմիջապես հետևում է ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ նախորդ գլխի 4-րդ կետում ձևակերպված պնդումից:

**Սահմանում:** *Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ բազմության վրա և $x_0$-ն $X$-ի կուտակման կետ է աջից (ձախից):*

*ա) Եթե $x_0\in X$* [*] *և գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) \quad \left(\lim_{x\to x_0-} f(x)\right) \tag{1.2}$$

*վերջավոր միակողմանի սահմանը, որը հավասար չէ $f(x_0)$ թվին, ապա կասենք, որ $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում աջից (ձախից) ունի առաջին սեռի խզում:*

---

[*] Այն դեպքում, երբ $f$-ը $x_0$ կետում որոշված չէ, բայց գոյություն ունի (1.2) վերջավոր միակողմանի սահմանը, ընդունված է ասել, որ ֆունկցիան $x_0$ կետում աջից (ձախից) ունի *վերացնելի խզում*: Այս անվանումը պայմանավորված է նրանով, որ $x_0$ կետում $f$-ը լրացուցիչ կարելի է որոշել այնպես, որ այն այդ կետում դառնա անընդհատ աջից (ձախից):

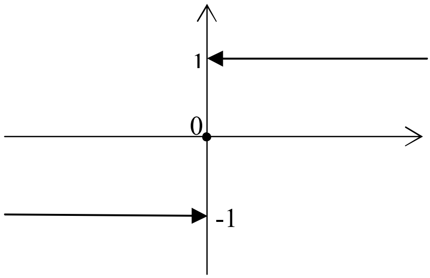
*բ) Երբ (1.2) սահմանը գոյություն չունի կամ անվերջ է, կասենք, որ $f$ ֆունկցիան աջից (ձախից) ունի երկրորդ սեռի խզում (անկախ այն բանից, $x_0$ -ն պատկանում է $X$ -ին, թե ոչ):*

*ա) կամ բ) պայմանին բավարարող կետերը կոչվում են $f$ ֆունկցիայի խզման կետեր (համապատասխանաբար՝ առաջին կամ երկրորդ սեռի):*

**Օրինակներ:**

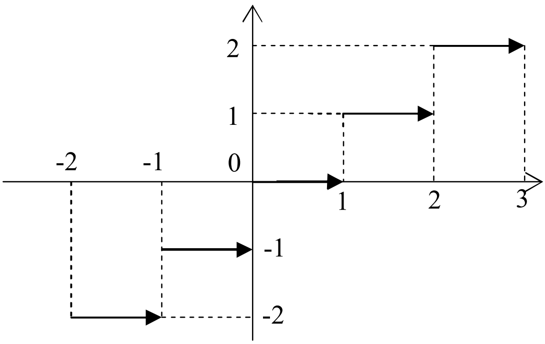
$1^0$. Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան (կարդում ենք՝ սիգնում իքս)՝

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, \quad x = 0 \\ 1, \quad x > 0 \end{cases} :$$




Այն 0 կետում թե' աջից և թե' ձախից ունի առաջին սեռի խզում: Իսկապես. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$, $f(0) = 0$ :

$2^0$. $f(x) = [x]$ ($[x]$-ը $x$ թվի ամբողջ մասի ընդունված նշանակումն է)




ֆունկցիան 0 կետում (նաև՝ կամայական ամբողջ կետում)

աջից անընդհատ է, իսկ ձախից ունի առաջին սեռի խզում՝

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0), \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq f(0):$$

$3^0$. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան 0 կետում թե' աջից և թե' ձախից ունի երկրորդ սեռի խզում: Իրոք. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$:

**<u>4. Մոնոտոն ֆունկցիայի խզումները և անընդհատությունը:</u>** Դիցուք $f$ ֆունկցիան աճող է (լայն իմաստով) $X$ միջակայքում*, $x_0\in X$ և $x_0$-ն $X$-ի ձախ ծայրակետ չէ: Մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի

$$f(x_0-):=\lim_{x\to x_0-}f(x)$$

վերջավոր սահմանը, ընդ որում, $f(x_0-)\le f(x_0)$: Եթե այդ սահմանը հավասար է ֆունկցիայի արժեքին $x_0$ կետում, ապա ֆունկցիան այդ կետում կլինի ձախից անընդհատ: Իսկ եթե $f(x_0-)<f(x_0)$, ապա ֆունկցիան $x_0$ կետում ձախից կունենա առաջին սեռի խզում:

Նման դատողություններ կարող ենք կատարել նաև այն դեպքում, երբ $x_0\in X$ կետը $X$-ի աջ ծայրակետ չէ և $x\to x_0+$:

Այսպիսով, *մոնոտոն ֆունկցիան իր որոշման միջակայքին պատկանող կետերում կամ անընդհատ է (աջից կամ ձախից), կամ ունի առաջին սեռի խզում (միջակայքին չպատկանող ծայրակետում կարող է ունենալ երկրորդ սեռի խզում):*

Այժմ ձևակերպենք մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատության հետևյալ հայտանիշը:

**Թեորեմ 1.3:** *Եթե $f$ ֆունկցիան մոնոտոն է $X$ միջակայքում և նրա ընդունած արժեքների $Y$ բազմությունը նույնպես միջակայք է, ապա $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $X$ միջակայքում:*

► Դիտարկենք միայն աճող ֆունկցիայի դեպքը և ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք, թե մի ինչ-որ $x_0\in X$ կետում $f$ ֆունկցիան, ասենք թե՝ ձախից անընդհատ չէ:

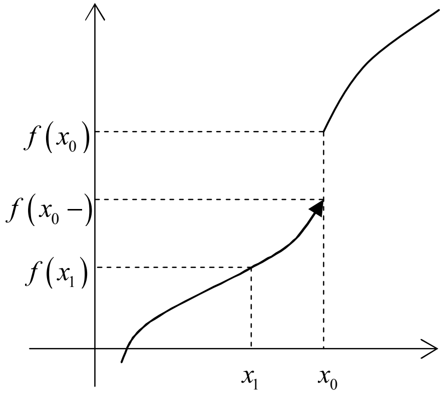
---

* $x_1,x_2\in X,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$:

Այդ դեպքում $f(x_0-)<f(x_0)$: Վերցնելով $X$ միջակայքի $x_1<x_0$ կետ՝ կստանանք

$$f(x_1)\le f(x_0-)<f(x_0)$$

անհավասարությունները, ինչը հակասություն է:




Իսկապես. $\big(f(x_0-),f(x_0)\big)$ միջակայքի կետերը, ընկած լինելով $Y$ բազմությանը պատկանող $f(x_1)$-ի և $f(x_0)$-ի միջև, չեն պատկանում $Y$ բազմությանը: Իսկ դա նշանակում է, որ $Y$-ը միջակայք չէ:

Նման ձևով, հակասության ենք հանգում նաև $x_1>x_0$ դեպքում: ■

**Օրինակներ:**

$1^0$. Ցույց տանք, որ $f(x)=\log_a x$ ($a>0$, $a\ne 1$) ֆունկցիան անընդհատ է $(0,\infty)$ միջակայքում:

Որոշակիության համար դիտարկենք $a>1$ դեպքը: Այս դեպքում $\log_a x$ ֆունկցիան խիստ աճող է և նրա արժեքների բազմությունը $(-\infty,\infty)$ միջակայքն է, որովհետև կամայական $y_0\in(-\infty,\infty)$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $x_0=a^{y_0}$ կետում:

$2^0$. Ապացուցենք, որ $f(x)=x^\alpha$ ($\alpha$-ն ամբողջ թիվ չէ) ֆունկցիան անընդհատ է $(0,\infty)$ միջակայքում:

$\alpha>0$ դեպքում ֆունկցիան աճող է, իսկ $\alpha<0$ դեպքում՝ նվազող: Մյուս կողմից, ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը միջակայք է՝ $(0,\infty)$-ը: Իրոք՝ կամայական $y_0\in(0,\infty)$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $x_0=y_0^{1/\alpha}$ կետում:

**5. Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը:**

**Սահմանում:** *Դիցուք $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան որոշված է $T$ միջակայքում և արժեքներ է ընդունում $X$ միջակայքից, իսկ $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված* *է $X$ միջակայքում: Այդ դեպքում $g(t)=f\left(\varphi(t)\right)$ ֆունկցիան, որը որոշված է $T$ միջակայքում, այն կոչվում է բարդ ֆունկցիա կամ սուպերպոզիցիա:*

**Թեորեմ 1.4:** *Եթե $\varphi(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է $t_0\in T$ կետում, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0=\varphi(t_0)$ պատկեր-կետում, ապա $g(t)=f\left(\varphi(t)\right)$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է $t_0$ կետում:*

► Օգտվենք անընդհատության սահմանման $\varepsilon-\delta$ լեզվից: $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0$ կետում, նշանակում է՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\eta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$x\in X,\ |x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon : \tag{1.3}$$

Քանի որ $\varphi(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է $t_0$ կետում, ապա այդ $\eta$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

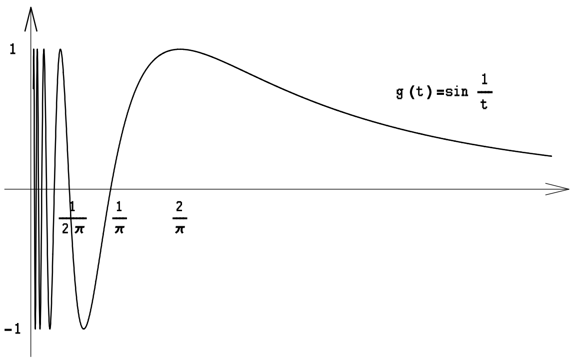
$$t\in T,\ |t-t_0|<\delta\Rightarrow|\varphi(t)-\varphi(t_0)|<\eta : \tag{1.4}$$

(1.3) և (1.4) առնչություններից կստանանք՝

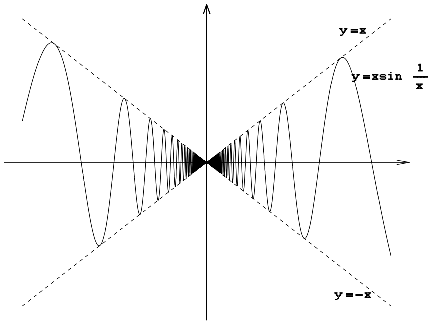
$$|t-t_0|<\delta\Rightarrow|\varphi(t)-\varphi(t_0)|<\eta\Rightarrow|g(t)-g(t_0)|=|f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))|<\varepsilon : \blacksquare$$

**Օրինակներ:**

$1^0$. $g(t)=\sin\dfrac{1}{t}$ ֆունկցիան (այս դեպքում $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}$, $f(x)=\sin x$) անընդհատ է թվային առանցքի բոլոր կետերում, բացի $t=0$ կետից, իսկ $t=0$ կետում թե' աջից, և թե' ձախից $g(t)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ սեռի խզում:



$t$ -ն 0-ի ձգտելիս՝ $g(t)$ ֆունկցիան սահման չունի, որովհետև $t_k = \dfrac{1}{\pi k}$ հաջորդականության վրայով $g(t)$ ֆունկցիան ձգտում է 0-ի, իսկ $t_k' = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi k}$ հաջորդականության վրայով՝ 1-ի:




$2^0$. $h(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, $h(0)=0$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Իրոք՝ ֆունկցիան անընդհատ է 0 կետում, քանի որ $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x|$ հայտնի գնահատականից հետևում է՝ $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$: Իսկ 0-ից տարբեր կետերում $h$ -ը անընդհատ է՝ որպես երկու անընդհատ ֆունկցիաների արտադրյալ:

**<u>6. Երեք հիմնական սահմանները:</u>** *Ապացուցենք հետևյալ սահմանային առնչությունները.*

*ա)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ *; բ)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ *;* *գ)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ :*

Ունենք, որ

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x}:$$

Նշանակենք՝ $\varphi(x) = (1+x)^{1/x}$, $\varphi(0) = e$: Քանի որ $\varphi(x) \to e\ (x\to 0)$, $\varphi$ ֆունկցիան անընդհատ է 0 կետում: Մյուս կողմից, $\log_a y$ ֆունկցիան

---

* ա)-ն հաճախ հանդիպում է $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ տեսքով, իսկ բ)-ն՝ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ տեսքով: բ) առնչության կարևոր հետևանքներից է նաև $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ սահմանը:

անընդհատ է $y=e$ կետում: Ուստի, բարդ ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, տեղի ունի ա) առնչությունը:

բ)-ն ապացուցելու համար նշանակենք՝ $a^x-1=y$: Կունենանք՝ $x=\log_a(1+y)$: Քանի որ $a^x$ ֆունկցիան 0 կետում անընդհատ է, ուստի՝ $x\to 0 \Rightarrow y\to 0$: Հետևաբար՝

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\dfrac{\log_a(1+y)}{y}}\to\frac{1}{\log_a e}=\ln a\ \left(x\to 0\right):$$

գ)-ն ապացուցելու համար նշանակենք՝ $(1+x)^\alpha-1=y$: Կունենանք՝ $(1+x)^\alpha=1+y$, որտեղից էլ՝ $\alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)$:

Քանի որ $(1+x)^\alpha$ ֆունկցիան $x=0$ կետում անընդհատ է, ուստի $y=(1+x)^\alpha-1\to 0\ (x\to 0)$: Հետևաբար՝

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\to\alpha\ \ (x\to 0)\ :$$

## §2. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

### 1. Բոլցանո - Կոշիի թեորեմները:

**Թեորեմ 2.1 (Բոլցանո-Կոշիի I թեորեմը):** *Եթե $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի $c\in(a,b)$ կետ, այնպիսին, որ $f(c)=0$:*

►**(Առաջին ապացույց)** Որոշակիության համար ենթադրենք, թե $f(a)<0$, $f(b)>0$: Թեորեմն ապացուցենք $[a,b]$ հատվածը հաջորդաբար կիսելու մեթոդով:

Դիտարկենք $[a,b]$ հատվածի $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ միջնակետը: Եթե $f(x_0)=0$, ապա որպես $c$ կվերցնենք հենց այդ $x_0$ կետը և թեորեմի ապացույցը կավարտվի: Եթե $f(x_0) \neq 0$, ապա $[a_1, b_1]$-ով կնշանակենք $[a,b]$ հատվածի այն կեսը, որի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ: Այսինքն՝ երբ $f(x_0) < 0$, որպես $[a_1, b_1]$ վերցնում ենք $[x_0, b]$-ն, իսկ եթե $f(x_0) > 0$, ապա՝ $[a, x_0]$-ն: Երկու դեպքում էլ՝ $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$:

Երկրորդ քայլում կիսենք $[a_1, b_1]$ հատվածը: Կրկին՝ կամ $f(x)$ ֆունկցիան $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ միջնակետում դառնում է 0 և այս դեպքում թեորեմի ապացույցն ավարտվում է, կամ՝ $f(x_1) \neq 0$ և այս դեպքում $[a_2, b_2]$-ով նշանակում ենք $[a_1, b_1]$ հատվածի այն կեսը, որի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ՝ $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$:

Շարունակելով այս պրոցեսը՝ կամ վերջավոր թվով քայլերից հետո առաջացած հատվածի միջնակետում ֆունկցիան կընդունի 0 արժեքը և թեորեմի ապացույցը կավարտվի, կամ էլ պրոցեսը կշարունակվի անվերջ և կստանանք $[a_n, b_n]$, $n = 1,2,\ldots$ ներդրված հատվածները, այնպիսիք, որ

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0: \tag{2.1}$$

Քանի որ $[a_n, b_n]$ հատվածի երկարությունը հավասար է

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0,$$

ուստի, համաձայն ներդրված հատվածների լեմմայի, կունենանք՝

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c:$$

Քանի որ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ $[a,b]$ հատվածում, հետևաբար և՝ $c \in [a,b]$ կետում, ապա, հաշվի առնելով (2.1)-ը, կստանանք՝

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0; \quad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0:$$

Այս երկու անհավասարություններից հետևում է, որ $f(c)=0$: Թեորեմն ապացուցված է: ■

►**(Երկրորդ ապացույց)** Կրկին համարենք, որ $f(a)<0$ և $f(b)>0$: Նշանակենք $E$-ով $[a,b]$ հատվածի այն $x$ կետերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի $f(x)<0$ պայմանը: Նկատենք, որ մասնավորաբար՝ $a\in E$ և $b\notin E$: Նշանակենք՝ $c=\sup E$ և ապացուցենք, որ $f(c)=0$:

Քանի որ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, ապա այն այդ հատվածի բոլոր կետերում ունի վերջավոր սահման: Հետևաբար, վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների առաջին հատկության համաձայն, եթե որևէ կետում $f(x)$ ֆունկցիան դրական է (բացասական է), ապա այդ կետի մի ինչ-որ շրջակայքում ֆունկցիան կպահպանի իր նշանը:

Ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն, $c$-ից աջ գտնվող $E$ բազմության կետեր չկան, ինչի պատճառով էլ $f(c)$-ն բացասական լինել չի կարող: Մյուս կողմից, $c$ կետից ձախ $c$-ին կամայապես մոտ կետեր կան $E$ բազմությունից, ուստի $f(c)$-ն դրական լինել չի կարող: Այսպիսով՝ $f(c)=0$: ■

**Թեորեմ 2.2 (Բոլցանո-Կոշիի II թեորեմը):** *Դիցուք $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ՝ $f(a)\neq f(b)$: Այդ դեպքում, $f(a)$ և $f(b)$ թվերի միջև ընկած յուրաքանչյուր $C$ թվի համար գոյություն ունի $c\in(a,b)$ կետ, այնպիսին, որ $f(c)=C$:*

► Ենթադրենք՝ $f(a)<C<f(b)$: Դիտարկենք

$$\varphi(x)=f(x)-C$$

օժանդակ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և $\varphi(a)<0$, $\varphi(b)>0$:

Բոլցանո - Կոշիի առաջին թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի $c\in(a,b)$ կետ, այնպիսին, որ $\varphi(c)=0$, այսինքն՝ $f(c)=C$: ■

**Հետևանք:** *Եթե հաստատունից տարբեր $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $X$ միջակայքում, ապա այդ միջակայքի վրա նրա ընդունած արժեքների $f(X)$ բազմությունը նույնպես միջակայք է:*

► $X$ միջակայքի վրա $f$ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների $f(X)$ բազմությունը նշանակենք $Y$-ով:

Որպեսզի ցույց տանք, որ $Y$-ը միջակայք է, անհրաժեշտ է ապացուցել, որ $Y$-ին պատկանող կամայական $y_1$ և $y_2$ իրարից տարբեր թվերի միջև ընկած յուրաքանչյուր $C$ թիվ նույնպես $Y$-ից է, այսինքն՝ ֆունկցիայի արժեք է:

Քանի որ $y_1$-ը և $y_2$-ը $f$ ֆունկցիայի արժեքներ են, ուստի գոյություն ունեն $x_1, x_2 \in X$ այնպիսիք, որ $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$: Ենթադրենք, թե $x_1 < x_2$ և $[x_1, x_2]$ հատվածի վրա կիրառենք Բոլցանո - Կոշիի երկրորդ թեորեմը. գոյություն ունի $c \in (x_1, x_2)$ այնպիսին, որ $f(c) = C$: Այսպիսով, $C$-ն հանդիսանում է $f$ ֆունկցիայի արժեք: ■

<u>2. Հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը և անընդհատությունը:</u> Դիցուք $f$-ը խիստ աճող (նվազող) և անընդհատ ֆունկցիա է $X$ միջակայքում: Նրա ընդունած արժեքների բազմությունը, որը ևս միջակայք է, նշանակենք $Y$-ով: Այդ դեպքում *գոյություն ունի $f$-ի հակադարձ ֆունկցիան*, որը որոշված է $Y$ միջակայքում:

Իրոք, $Y$ միջակայքի յուրաքանչյուր $y$ կետին համապատասխանության մեջ դնելով նրա միակ $x$ *<u>նախապատկերը</u>* (այն $x$-ը*, որի համար՝ $f(x) = y$), կստանանք $x = g(y)$ հակադարձ ֆունկցիան:

Ֆունկցիայի մոնոտոնության սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ $X$-ի վրա որոշված $f$ խիստ աճող (նվազող) ֆունկցիայի *հակադարձ $g$ ֆունկցիան խիստ աճող է (նվազող է) $Y$ միջակայքում*:

Ապացուցենք, որ $g$ *-ն նաև անընդհատ է $Y$ միջակայքում*: Դրա համար

---

* Այդ $x$-ը միակն է, որովհետև $f$ ֆունկցիան խիստ աճող է:

բավական է նկատել, որ նրա ընդունած արժեքների բազմությունը միջակայք է ($X$-ը), այնուհետև՝ կիրառել մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատությանը վերաբերող թեորեմ 1.3-ը:

3. Վայերշտրասի թեորեմները:

**Թեորեմ 2.3 (Վայերշտրասի I թեորեմը):** *Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է:*

► Ենթադրենք, որ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և ապացուցենք, որ այն սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունեն $m$ և $M$ թվեր, այնպիսիք, որ

$$m \le f(x) \le M\,,\ \ x \in [a,b]:$$

Ենթադրենք հակառակը՝ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ չէ, օրինակ՝ վերևից: Դա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $E$ թվի համար գոյություն ունի $x_E \in [a,b]$ այնպիսին, որ $f(x_E) > E$: Վերցնելով $E = n$ բնական թիվը և, համապատասխան կետը նշանակելով $x_n$, կստանանք՝

$$f(x_n) > n\,,\ \ n = 1,2,...: \tag{2.2}$$

Քանի որ

$$a \le x_n \le b\,,$$

ապա, Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի $x_n$ հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x_{n_k} \to c \in [a,b]:$$

Ֆունկցիայի անընդհատության Հայնեի սահմանման համաձայն՝

$$f(x_{n_k}) \to f(c): \tag{2.3}$$

Բայց մյուս կողմից, (2.2)-ից հետևում է, որ $f(x_{n_k}) \to \infty$, ինչը հակասում է (2.3)-ին: Այսպիսով, թեորեմն ապացուցված է: ■

Ելնելով այս թեորեմից՝ $[a,b]$ հատվածում անընդհատ $f$ ֆունկցիան սահմանափակ է, հետևաբար, այն ունի վերջավոր ճշգրիտ եզրեր*.

* Ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրեր են անվանում նրա արժեքների բազմության ճշգրիտ եզրերը:

$$M = \sup_{[a,b]} f(x)\,,\ m = \inf_{[a,b]} f(x):$$

Հարց է ծագում. արդյոք այդ թվերը կհանդիսանա՞ն ֆունկցիայի արժեք-ներ, թե ոչ: Կամ, որ նույնն է, արդյոք $f(x)$ ֆունկցիայի ընդունած արժեք-ների բազմության մեջ գոյություն ունե՞ն մեծագույն և փոքրագույն տարրեր՝ $\max_{[a,b]} f(x)$ և $\min_{[a,b]} f(x)$:

Այդ հարցին պատասխանում է հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ 2.4 (Վայերշտրասի II թեորեմը):** *Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:*

► Ապացուցենք մեծագույնի գոյությունը՝ հակասող ենթադրության մեթոդով: Ենթադրենք, թե $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ թիվը ֆունկցիայի արժեք չէ և դիտարկենք

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

օժանդակ ֆունկցիան: Քանի որ $M$ -ը $f(x)$ ֆունկցիայի արժեք չէ, ուստի $M - f(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$: Հետևաբար, $\varphi(x)$ ֆունկցիան նույնպես անընդ-հատ է $[a,b]$ հատվածում: Նախորդ թեորեմի համաձայն, $\varphi(x)$ -ը սահմա-նափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունի $\mu > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\frac{1}{M - f(x)} \le \mu\,,\quad x \in [a,b]:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$f(x) \le M - \frac{1}{\mu}\,,\ x \in [a,b],$$

ինչը հակասում է ճշգրիտ վերին եզրի սահմանմանը: Թեորեմն ապացուց-ված է: ■

► **(Երկրորդ ապացույց)** Ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն, յուրաքանչյուր $n$ բնական թվի համար գոյություն ունի $x_n \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,...: \qquad (2.4)$$

Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, $x_n$ հաջորդականությունը պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x_{n_k} \to c \in [a,b]:$$

(2.4) անհավասարությունից հետևում է, որ

$$f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}, \; k = 1,2,..., \qquad (2.4')$$

իսկ $c$ կետում ֆունկցիայի անընդհատությունից հետևում է՝

$$f(x_{n_k}) \to f(c):$$

Այժմ, (2.4′) անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, կստանանք՝

$$f(c) \geq M:$$

Սակայն $f(c)$-ն $M$-ից մեծ լինել չի կարող, հետևաբար՝ $f(c) = M$: Այսինքն՝ ֆունկցիայի ճշգրիտ վերին եզրը հանդիսանում է ֆունկցիայի արժեք: ■

**Սահմանում:** *Հատվածում անընդհատ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը կոչվում է ֆունկցիայի տատանում այդ հատվածի վրա և նշանակվում է $\omega$ տառով՝ $\omega = M - m$:*

*Եթե $f(x)$ ֆունկցիան (պարտադիր չէ՝ անընդհատ) սահմանափակ է $X$ բազմության վրա, ապա նրա տատանումը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝*

$$\omega = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x):$$

Ընթերցողին առաջարկում ենք ապացուցել, որ

$$\omega = \sup_{x', x'' \in X} \left[ f(x'') - f(x') \right]:$$

**<u>4. Հավասարաչափ անընդհատություն:</u>**

**Սահմանում:** *$X$ բազմության վրա որոշված $f$ ֆունկցիան կոչվում է հավասարաչափ անընդհատ $X$-ի վրա, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $|x'' - x'| < \delta$ պայմանին* *բավարարող կամայական* $x', x'' \in X$ *կետերի համար տեղի ունի*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

*անհավասարությունը:*

**Թեորեմ 2.5:** *$X$ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ բազմության վրա:*

► Վերցնենք կամայական $x_0 \in X$ կետ և ցույց տանք, որ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ կետում:

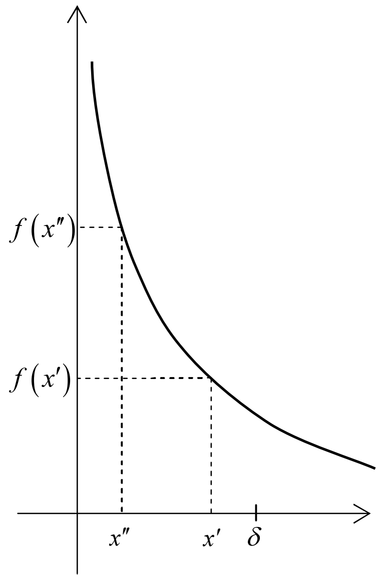
Իրոք, հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ վերցնելով $x' = x_0$, $x'' = x$, կստանանք, որ $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում բավարարում է անընդհատության պայմանին ($\varepsilon - \delta$ լեզվով): ■

Այս թեորեմի հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ, այսինքն՝ ֆունկցիան կարող է լինել անընդհատ, բայց՝ ոչ հավասարաչափ:

**Օրինակներ:**

$1^0$. $(0,1)$ միջակայքում դիտարկենք $f(x) = \dfrac{1}{x}$ անընդհատ ֆունկցիան: Ցույց տանք, որ $f$-ը հավասարաչափ անընդհատ չէ այդ միջակայքում:

Դրա համար բավական է նկատել, որ, օրինակ, $\varepsilon_0 = 1$ թվի համար հավասարաչափ անընդհատության $\delta$ գոյություն չունի: Այսինքն՝ ինչպիսի $\delta > 0$ թիվ էլ որ վերցնենք, $(0,1)$ միջակայքում գոյություն կունենան ($\delta$-ից կախված) $x'$ և $x''$ կետեր այնպիսիք, որ չնայած՝




$|x'' - x'| < \delta$, բայց՝ $|f(x'') - f(x')| \geq 1$:

Իսկապես, որպես $x'$ կարելի է վերցնել $(0,\delta)$ միջակայքի կամայական կետ, իսկ $x''$-ն ընտրել այդ նույն $(0,\delta)$-ից, այնպես ($0$-ին բավականաչափ մոտ), որ տեղի ունենա $f(x'')\geq 1+f(x')$ պայմանը:

$2^0$. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է $(0,1)$ միջակայքում, բայց հավասարաչափ անընդհատ չէ այդտեղ:

Կրկին ցույց տանք, որ $\varepsilon_0=1$ թվի համար $\delta$ գոյություն չունի: Դրա համար վերցնենք $(0,\delta)$ միջակայքը և այդ միջակայքում $x'$ և $x''$ կետերն ընտրենք այնպես, որ $f(x')=-1$, $f(x'')=1$: Այդ դեպքում կունենանք՝ $|x''-x'|<\delta$, բայց՝ $|f(x'')-f(x')|=2$ :

**Թեորեմ 2.6 (Կանտորի թեորեմը):** *Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:*

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք, որ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, բայց՝ ոչ հավասարաչափ: Դա նշանակում է, որ մի որևէ $\varepsilon_0>0$ թվի համար հավասարաչափ անընդհատության $\delta$ գոյություն չունի, այսինքն՝ ինչպիսի $\delta>0$ թիվ էլ վերցնենք, նրան համապատասխան գոյություն կունենան ($\delta$-ից կախված) $x'_\delta$ և $x''_\delta$ կետեր այնպիսիք, որ չնայած՝ $|x''_\delta-x'_\delta|<\delta$, բայց՝

$$|f(x''_\delta)-f(x'_\delta)|\geq\varepsilon_0 :$$

Վերցնելով $\delta=\dfrac{1}{n}, n=1,2,...$ և համապատասխան $x'_\delta$ և $x''_\delta$ կետերը համապատասխանաբար նշանակելով $x'_n$ և $x''_n$՝ կունենանք

$$|x''_n-x'_n|<\frac{1}{n},\ |f(x''_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon_0 \qquad (2.5)$$

անհավասարությունները:

Քանի որ $x'_n\in[a,b]$, ապա, Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի $x'_n$-ի զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x'_{n_k} \to x_0 \in [a,b]:$$

Դիտարկենք նույն՝ $n_k$ ինդեքսներով մյուս՝ $x''_{n_k}$ հաջորդականությունը: Քանի որ

$$x''_{n_k} - x_0 = \left(x'_{n_k} - x_0\right) + \left(x''_{n_k} - x'_{n_k}\right) \text{ և } \left|x''_{n_k} - x'_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k} \to 0,$$

ուստի $x''_{n_k}$-ը ևս կձգտի $x_0$ սահմանին:

Քանի որ $x_0$ կետում ֆունկցիան անընդհատ էր, ուստի՝

$$f(x'_{n_k}) \to f(x_0),\ f(x''_{n_k}) \to f(x_0),$$

հետևաբար՝

$$f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \to 0:$$

Բայց վերջինս հակասում է (2.5) պայմանից բխող $\left|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \geq \varepsilon_0$ անհավասարությանը: ■

Այժմ ձևակերպենք Կանտորի թեորեմի՝ հետագայում կարևոր դեր ունեցող մի հետևանք: Այդ նպատակով նախ տանք մի քանի սահմանումներ.

$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ վերջավոր բազմությունը կանվանենք $[a,b]$ *հատվածի տրոհում*, եթե $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$:

Նշված $x_0, x_1, ..., x_n$ կետերը կոչվում են *տրոհման կետեր*, իսկ $[x_i, x_{i+1}], i = 0,1,...,n-1$ հատվածները՝ *տրոհման հատվածներ*:

$\lambda = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ թիվը կոչվում է *տրոհման տրամագիծ*:

**Հետևանք:** *Եթե $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ $[a,b]$ հատվածի $\lambda$ տրամագծով կամայական տրոհման համար տեղի ունի*

$$\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i(f) < \varepsilon,\ i = 0,1,...,n-1 \qquad (2.6)$$

*պայմանը, որտեղ* $\omega_i(f)$ *-ը* $f$ *ֆունկցիայի տատանումն է տրոհման* $[x_i, x_{i+1}]$ *հատվածի վրա:*

► Դիցուք $\varepsilon$ -ը կամայական դրական թիվ է: Համաձայն Կանտորի թեորեմի, $f$ -ը հավասարաչափ անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, ուստի տրված $\varepsilon$ -ի համար գոյություն ունի հավասարաչափ անընդհատության $\delta$ : Ցույց տանք, որ հենց այդ $\delta$ -ն բավարարում է (2.6) պայմանին:

Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի $\delta$ -ից փոքր տրամագծով կամայական տրոհում՝

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b; \; x_{i+1} - x_i < \delta, \; i = 0,1,\ldots,n-1:$$

Քանի որ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ $[a,b]$ հատվածի վրա, ապա այն անընդհատ կլինի նաև $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$ հատվածների վրա: Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածի վրա այն կընդունի իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, ասենք թե, $x_i'$ և $x_i''$ կետերում: Այդ դեպքում, $\delta$ -ի ընտրության համաձայն, կունենանք՝

$$\omega_i(f) = f(x_i') - f(x_i'') < \varepsilon, \; i = 0,1,\ldots,n-1,$$

ինչը և պետք էր ապացուցել: ■

## §3. ԲՈՐԵԼԻ ԼԵՄՄԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

### 1. Բորելի լեմման:

**Սահմանում:** *Կասենք, որ* $\{\Delta_\alpha\}$ *բաց միջակայքերի ընտանիքը* հանդիսանում է* $X$ *բազմության ծածկույթ (կամ՝ ծածկում է* $X$ *բազմությունը), եթե* $X$ *-ի յուրաքանչյուր կետ պատկանում է այդ ընտանիքի անդամներից գոնե մեկին:*

**Օրինակ:** Որպես $X$ վերցնենք $(0,1)$ բաց միջակայքը և դիտարկենք $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right\}$, $n = 2,3,\ldots$ բաց միջակայքերի ընտանիքը: Դժվար չէ տեսնել, որ

---

* Բազմությանը (վերջավոր կամ անվերջ), որի տարրերն իրենց հերթին նս բազմություններ են, ընդունված է անվանել ընտանիք:

այդ ընտանիքը ծածկում է $(0,1)$ միջակայքը, որովհետև յուրաքանչյուր $x_0 \in (0,1)$ կետի համար, սկսած ինչ-որ համարից, բավարարվում է $\frac{1}{n} < x_0$ անհավասարությունը, այսինքն՝

$$x_0 \in \left(\frac{1}{n}, 1\right), n > n_0:$$

Ցույց տանք, որ այդ ընտանիքի ոչ մի վերջավոր ենթաբազմություն չի ծածկի $(0,1)$ միջակայքը (գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ):

Իրոք, այդ ընտանիքի ինչպիսի վերջավոր ենթաբազմություն էլ վերցնենք՝

$$\left(\frac{1}{n_1}, 1\right), \left(\frac{1}{n_2}, 1\right), \ldots, \left(\frac{1}{n_m}, 1\right),$$

և նշանակենք՝ $x_1 = \min\left\{\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \ldots, \frac{1}{n_m}\right\}$, կունենանք, որ $(0, x_1]$ միջակայքի կետերը ծածկված չեն այդ վերջավոր ընտանիքով:

Բորելի լեմման պնդում է, որ երբ $X$ վերջավոր միջակայքը փակ է, այսպիսի երևույթը բացառվում է:

**Թեորեմ 3.1 (Բորելի լեմման):** $[a,b]$ *հատվածի կամայական* $\{\Delta_\alpha\}$ *բաց միջակայքերի անվերջ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:*

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ՝ կիրառելով հատվածը կիսելու մեթոդը:

Եթե $[a,b]$ հատվածը հնարավոր չէ ծածկել $\{\Delta_\alpha\}$ ընտանիքին պատկանող վերջավոր թվով միջակայքերով, ապա նույնը կարելի է ասել $[a,b]$ հատվածի $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ և $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ երկու կեսերից առնվազն մեկի մասին: Այդ կեսը նշանակենք $[a_1, b_1]$-ով և նույն դատողությունը կատարենք $[a_1, b_1]$-ի համար:

Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ ներդրված հատվածները: Համաձայն ներդրված հատվածների լեմմայի, գոյություն ունի $c \in [a, b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$a_n \to c\,,\ \ b_n \to c\,,\ \ c \in [a_n, b_n]\,:$$

Քանի որ $[a, b]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետ պատկանում է $\{\Delta_\alpha\}$ բաց միջակայքերի ընտանիքի անդամներից գոնե մեկին, ուստի գոյություն ունի $\Delta_{\alpha_0} := (\beta, \gamma)$ միջակայք, այնպիսին, որ

$$\beta < c < \gamma\,:$$

Զուգամետ հաջորդականությունների առաջին հատկության համաձայն, սկսած որոշ համարից տեղի կունենան

$$\beta < a_n \le c \le b_n < \gamma$$

անհավասարությունները: Հետևաբար, սկսած հենց այդ համարից, $[a_n, b_n]$ հատվածը ծածկվում է $\{\Delta_\alpha\}$ ընտանիքին պատկանող ընդամենը մեկ՝ $\Delta_{\alpha_0}$ միջակայքով: Դա հակասում է $[a_n, b_n]$ հատվածների ընտրության պայմանին: Թեորեմն ապացուցված է: ■

<u>2. Բորելի լեմմայի ընդհանուր ձևակերպումը:</u>

**Սահմանում:** Դիցուք $\Delta$-ն թվային բազմություն է՝ $\Delta \subset \mathbb{R}$ :

*ա) $\Delta$ բազմության $a$ կետը կոչվում է այդ բազմության ներքին կետ, եթե գոյություն ունի $a$-ի շրջակայք, որը պարունակվում է $\Delta$-ում:*

*բ) $\Delta$-ն կոչվում է բաց բազմություն, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են:*

*գ) Բազմությունը կոչվում է փակ, եթե նրա լրացումը* բաց է:*

Փակ բազմությունը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ. *բազմությունը կոչվում է փակ, եթե նրա վերջավոր կուտակման կետերը պատկանում են իրեն:* Այս և նախորդ սահմանումների համարժեքության ապացույցը թողնենք ընթերցողին:

---

* $A \subset \mathbb{R}$ բազմության լրացում է կոչվում $\mathbb{R} \setminus A$ բազմությունը, որը նշանակվում է $A^c$-ով:

**Թեորեմ 3.2 (Բորելի լեմմայի ընդհանուր ձևակերպումը):** *$E$ փակ և սահմանափակ բազմության կամայական $\{\Delta_\alpha\}$ բաց բազմությունների անվերջ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:*

► Քանի որ $E$-ն սահմանափակ է, ուրեմն գոյություն ունի $[a,b]$ հատված, այնպիսին, որն ընդգրկում է $E$-ն՝ $E\subset[a,b]$:

Կրկին կիրառենք հակասող ենթադրության մեթոդը: Եթե $E$-ն հնարավոր չէ ծածկել $\{\Delta_\alpha\}$ ընտանիքի վերջավոր թվով բազմություններով, ապա $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]\cap E$ և $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\cap E$ բազմություններից առնվազն մեկը նույնպես չի ծածկվի այդ ընտանիքի վերջավոր թվով անդամներով: $[a,b]$ հատվածի համապատասխան կեսը նշանակենք $[a_1,b_1]$-ով և նույն դատողությունը կատարենք $[a_1,b_1]$-ի համար: Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք $[a_n,b_n]$, $n=1,2,\ldots$ ներդրված հատվածներ և, կիրառելով նախորդ թեորեմի ապացույցի դատողությունները, կհանգենք հակասության: ■

**Սահմանում:** *Բաց բազմություններից բաղկացած ծածկույթն անվանում են բաց ծածկույթ: $K\subset\mathbb{R}$ բազմությունը կոչվում է կոմպակտ, եթե նրա յուրաքանչյուր բաց ծածկույթ պարունակում է վերջավոր ենթածածկույթ:*

«Կոմպակտ» տերմինի միջոցով Բորելի լեմման ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. *յուրաքանչյուր փակ սահմանափակ բազմություն կոմպակտ է:*

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը (ապացուցե՛լ)*:

**<u>3. Վայերշտրասի առաջին թեորեմի ապացույցը Բորելի լեմմայի օգնությամբ:</u>** Դիցուք $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում: Ապացուցենք, որ այն սահմանափակ է, օրինակ, վերևից:

Վերցնենք կամայական $\alpha\in[a,b]$ կետ: Քանի որ $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$, ուստի, վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների առաջին հատկության համաձայն, գոյություն ունի $\delta_\alpha>0$ թիվ, այնպիսին, որ

* Տե՛ս VII գլուխ, § 3, կետ 2:

$$x \in [a,b], \left| x - \alpha \right| < \delta_\alpha \Rightarrow \left| f(x) - f(\alpha) \right| < 1 : \qquad (3.1)$$

Այս դատողությունը կատարենք $[a,b]$ հատվածի բոլոր $\alpha$ կետերի համար և նշանակենք՝ $\Delta_\alpha = \left(\alpha - \delta_\alpha, \alpha + \delta_\alpha\right)$: Այդ դեպքում $\left\{\Delta_\alpha\right\}$ բաց միջակայքերի ընտանիքը կծածկի $[a,b]$ հատվածը:

Բորելի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի $[a,b]$-ի վերջավոր ենթածածկույթ՝

$$\left\{\left(\alpha_1 - \delta_{\alpha_1}, \alpha_1 + \delta_{\alpha_1}\right), ..., \left(\alpha_m - \delta_{\alpha_m}, \alpha_m + \delta_{\alpha_m}\right)\right\} : \qquad (3.2)$$

Նշանակենք՝

$$M = \max\left\{f(\alpha_1) + 1, ..., f(\alpha_m) + 1\right\},$$

և ցույց տանք, որ

$$f(x) \le M \;,\; x \in [a,b] :$$

Իրոք, $[a,b]$ հատվածի յուրաքանչյուր $x$ կետ պատկանում է (3.2) վերջավոր ընտանիքի միջակայքերից գոնե մեկին՝ $x \in \left(\alpha_i - \delta_{\alpha_i}, \alpha_i + \delta_{\alpha_i}\right)$: Հետևաբար, (3.1) պայմանից կունենանք՝ $f(x) < f(\alpha_i) + 1 \le M$ : ■

<u>**4. Կանտորի թեորեմի ապացույցը Բորելի լեմմայի օգնությամբ:**</u> Դիցուք $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում: Ապացուցենք, որ այն հավասարաչափ անընդհատ է:

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և $\alpha \in [a,b]$ կետ: $\alpha$ կետում $f$ ֆունկցիայի անընդհատությունից բխում է, որ գոյություն ունի $\delta_\alpha$ թիվ, այնպիսին, որ

$$x', x'' \in [a,b],\; \left|x' - \alpha\right| < \delta_\alpha ,\; \left|x'' - \alpha\right| < \delta_\alpha \Rightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon :$$

Դրանում համոզվելու համար, որպես $\delta_\alpha$ կարելի է վերցնել $\dfrac{\varepsilon}{2}$ թվին համապատասխանող անընդհատության $\delta$ -ն՝

$$x \in [a,b], \left|x - \alpha\right| < \delta_\alpha \Rightarrow \left|f(x) - f(\alpha)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

և օգտվել

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\le\left|f(x')-f(\alpha)\right|+\left|f(\alpha)-f(x'')\right|$$

եռանկյան անհավասարությունից:

Այժմ $[a,b]$ հատվածի յուրաքանչյուր $\alpha$ կետի համար նշանակենք՝ $\Delta_\alpha=\left(\alpha-\frac{\delta_\alpha}{2},\alpha+\frac{\delta_\alpha}{2}\right)$: Այդ դեպքում $\{\Delta_\alpha\}$ բաց միջակայքերի ընտանիքը կծածկի $[a,b]$ հատվածը և, Բորելի լեմմայի համաձայն, կպարունակի վերջավոր ենթածածկույթ՝

$$\left\{\Delta_{\alpha_1},\Delta_{\alpha_2},...,\Delta_{\alpha_m}\right\}: \tag{3.3}$$

Դիտարկենք համապատասխան $\delta_{\alpha_1},...,\delta_{\alpha_m}$ թվերը և նշանակենք՝

$$\delta=\min\left\{\frac{\delta_{\alpha_1}}{2},...,\frac{\delta_{\alpha_m}}{2}\right\}:$$

Ցույց տանք, որ հենց այս $\delta$ թիվը բավարարում է հավասարաչափ անընդհատության $\delta$-ի վրա դրված պայմանին՝

$$x',x''\in[a,b],\ \left|x'-x''\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon\ :$$

Այդ նպատակով վերցնենք $\left|x'-x''\right|<\delta$ պայմանին բավարարող կամայական $x',x''\in[a,b]$ կետեր: Քանի որ (3.3) ընտանիքը ծածկում է $[a,b]$ հատվածը, ուստի $x'$ կետը պետք է պատկանի այդ ընտանիքի միջակայքերից գոնե մեկին՝ $x'\in\Delta_{\alpha_i}$, այսինքն՝

$$\left|x'-\alpha_i\right|<\frac{\delta_{\alpha_i}}{2}<\delta_{\alpha_i}\ : \tag{3.4}$$

Մյուս կողմից՝ $\left|x'-x''\right|<\delta$, հետևաբար՝

$$\left|x''-\alpha_i\right|\le\left|x''-x'\right|+\left|x'-\alpha_i\right|<\delta+\frac{\delta_{\alpha_i}}{2}\le\frac{\delta_{\alpha_i}}{2}+\frac{\delta_{\alpha_i}}{2}=\delta_{\alpha_i}\ : \tag{3.5}$$

$\delta_{\alpha_i}$ թվի ընտրության պայմանի շնորհիվ, (3.4) և (3.5) անհավասարություններից բխում է՝ $\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$ : ■

**5. Իրական թվերի լրիվությանը համարժեք պնդումներ:**

**Թեորեմ 3.3:** *Հետևյալ պնդումները համարժեք են.*

$1^\circ$. *Դեդեկինդի թեորեմը (I գլուխ, թեորեմ 1.1):*

$2^\circ$. *Ճշգրիտ եզրերի գոյության թեորեմը (I գլուխ, թեորեմ 1.2):*

$3^\circ$. *Մոնոտոն հաջորդականության սահմանի գոյության թեորեմը (II գլուխ, թեորեմ 2.1):*

$4^\circ$. *Ներդրված հատվածների լեմման (II գլուխ, թեորեմ 2.3):*

$5^\circ$. *Բորելի լեմման (III գլուխ, թեորեմ 3.1):*

$6^\circ$. *Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման (II գլուխ, թեորեմ 3.4):*

$7^\circ$. *Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը (II գլուխ, թեորեմ 4.1):*

► Քանի որ $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow \begin{cases} 5^\circ \\ 6^\circ \Rightarrow 7^\circ \end{cases}$ առնչություններն արդեն ապացուցված են, ուստի նշված պնդումների համարժեքությունը ցույց տալու համար բավական է ապացուցել հետևյալ առնչությունները.

ա) $5^\circ \Rightarrow 6^\circ$, բ) $7^\circ \Rightarrow 4^\circ$, գ) $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ :

*ա)-ի ապացույցը:* Ապացուցենք, որ եթե Բորելի լեմման ճիշտ է, ապա յուրաքանչյուր $a \le x_n \le b$ սահմանափակ հաջորդականություն ունի մասնակի սահման:

Կատարենք հակառող ենթադրություն. դիցուք $[a,b]$ հատվածի ոչ մի կետ $x_n$ հաջորդականության մասնակի սահման չէ: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $x \in [a,b]$ կետ կունենա մի այնպիսի $\Delta_x$ շրջակայք, որը պարունակում է $x_n$ հաջորդականության վերջավոր քանակով անդամներ*:

Դիտարկենք $[a,b]$ հատվածի բոլոր $x$ կետերի $\Delta_x$ շրջակայքերը: Առաջացած բաց միջակայքերի $\{\Delta_x\}$ ընտանիքը կհանդիսանա $[a,b]$ հատվածի ծածկույթ և, համաձայն Բորելի լեմմայի, կպարունակի վեր-

---

* Այդ քանակը կարող է նաև զրո լինել:

ջավոր ենթածածկույթ՝ $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_p}$ ։ Բայց, քանի որ նշված միջակայքերից յուրաքանչյուրը պարունակում է $x_n$ հաջորդականության վերջավոր քանակով անդամներ, ուստի $x_n$ հաջորդականությունն առհասարակ բաղկացած է վերջավոր քանակով անդամներից, ինչը հակասություն է։

բ)-ի ապացույցը։ Դիցուք $\left[a_n, b_n\right], n=1,2,...$ հատվածները ներդրված են և $b_n - a_n \to 0$ ։ Այդ դեպքում տեղի ունեն

$$0 \le a_{n+m} - a_n < b_n - a_n \quad \left(n, m \in \mathbb{N}\right)$$

անհավասարությունները, ինչից հետևում է, որ $a_n$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է։ Համաձայն Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի, $a_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է՝ $a_n \to c$ ։ Մյուս կողմից՝ $b_n = (b_n - a_n) + a_n \to c$ ։ Պնդումն ապացուցված է։

գ)-ի ապացույցը։ Դիցուք $A / A'$-ը իրական թվերի հատույթ է։ Ապացուցենք, որ այս հատույթն ունի սահմանազատիչ թիվ, այսինքն՝ գոյություն ունի մի $\gamma$ իրական թիվ, այնպիսին, որ

$$\alpha < \gamma \Rightarrow \alpha \in A \text{ և } \gamma < \beta \Rightarrow \beta \in A' \text{ ։} \tag{3.6}$$

Այդ նպատակով վերցնենք որևէ $\alpha_1 \in A$ և $\beta_1 \in A'$ իրական թվեր և կիսենք $\left[\alpha_1, \beta_1\right]$ հատվածը։ $\left[\alpha_2, \beta_2\right]$-ով նշանակենք առաջացած կեսերից այն, որի ծայրակետերը $A / A'$ հատույթի տարբեր դասերից են, այսինքն՝ $\alpha_2 \in A$ և $\beta_2 \in A'$ ։ Նույն սկզբունքով կիսենք $\left[\alpha_2, \beta_2\right]$ հատվածը և այլն։ Անվերջ շարունակելով հատվածները կիսելու պրոցեսը՝ կհանգենք $\left[\alpha_n, \beta_n\right], \ n=1,2,...$ ներդրված հատվածներին, ընդ որում,

$$\alpha_n \in A, \ \beta_n \in A', \beta_n - \alpha_n \to 0 \text{ ։}$$

Կիրառելով ներդրված հատվածների լեմման՝ կունենանք, որ $\alpha_n$ և $\beta_n$ հաջորդականությունները զուգամիտում են միևնույն $\gamma$ սահմանին։ Մնում է նկատել, որ այդ $\gamma$ թիվը բավարարում է (3.6) պայմանին։■

# IV ԳԼՈՒԽ
# ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

## §1. ԱԾԱՆՑՅԱԼ

<u>1. Ածանցյալի սահմանումը:</u> Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում և $x_0 \in X$: Նշանակենք՝ $\Delta x = x - x_0$, որը կանվանենք *արգումենտի աճ* $x_0$ կետում*: Այնուհետև, նշանակենք՝

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

որը կանվանենք $y = f(x)$ *ֆունկցիայի աճ* $x_0$ կետում (անհրաժեշտության դեպքում $\Delta f$-ի փոխարեն կգրենք $\Delta f(x_0)$, լրացուցիչ նշելով, որ ֆունկցիայի աճը դիտարկված է $x_0$ կետում):

Դիտարկենք այդ աճերի հարաբերության սահմանը՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ կամ, որ նույնն է, } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} : \tag{1.1}$$

**Սահմանում:** *Եթե (1.1) սահմանը գոյություն ունի (որը կարող է լինել թե՛ վերջավոր, և թե՛ $\pm\infty$), ապա այն կոչվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ $x_0$ կետում և նշանակվում է $f'(x_0)$ սիմվոլով՝*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} :$$

Այս սահմանը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : \tag{1.1'}$$

Այն դեպքում, երբ $x_0$-ն $X$ միջակայքի ծայրակետ է, (1.1$'$)-ը հասկացվում է որպես միակողմանի սահման (ձախ ծայրակետում՝ որպես աջակողմյան սահման, իսկ աջ ծայրակետում՝ ձախակողմյան):

---

* Ենթադրվում է, որ $x \in X$ :

$f'(x_0)$ նշանակման փոխարեն օգտագործվում է նաև $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ նշանակումը:

Այն դեպքում, երբ $f$ ֆունկցիան $X$ միջակայքի բոլոր կետերում ունի վերջավոր ածանցյալ, $f'(x)$-ը որոշված է $X$ միջակայքի բոլոր կետերում ($X$ միջակայքում): Սահմանված $f'(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *ածանցյալ ֆունկցիա* $X$ միջակայքում, կամ պարզապես՝ *ածանցյալ*:

Ածանցյալ ֆունկցիայի համար օգտագործվում են նաև

$$y', \ \frac{dy}{dx}, \ y'_x$$

նշանակումները:

__2. Ածանցման բանաձևերը:__ Ապացուցենք հետևյալ բանաձևերը.

$$1^0.\ C' = 0,\ 2^0.\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ 3^0.\ (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$4^0.\ (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e,\ 5^0.\ (\sin x)' = \cos x,\ 6^0.\ (\cos x)' = -\sin x :$$

**$1^0$-ի ապացույցը:** $f(x) = C$ ֆունկցիան $(-\infty, \infty)$ միջակայքի բոլոր կետերում ընդունում է միևնույն $C$ արժեքը, հետևաբար՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} = 0 \to 0 \ \ (\Delta x \to 0) :$$

**$2^0$-ի ապացույցը:** Դիտարկենք $f(x) = x^\alpha$ ֆունկցիան, որտեղ $\alpha$-ն զրոյից տարբեր կամայական իրական թիվ է: Ենթադրենք, որ $x_0$-ն պատկանում է այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին և $x_0 \neq 0$: Երբ $\Delta x \to 0$, օգտվելով երրորդ հիմնական սահմանից, կունենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = x_0^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\Delta x}{x_0}} \to x_0^{\alpha-1} \cdot \alpha \ :$$

Եթե $x_0=0$ կետը պատկանում է $f$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ապա $2^0$ բանաձևը կրկին մնում է ուժի մեջ: Իսկապես, $\alpha>1$ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\alpha}}{\Delta x}=(\Delta x)^{\alpha-1}\to 0\ \ (\Delta x\to 0),$$

$\alpha=1$ դեպքում՝ $f'(0)=1$, իսկ $0<\alpha<1$ դեպքում՝ $f'(0)=\infty$:

**$3^0$-ի ապացույցը:** Դիտարկենք $f(x)=a^x$ ֆունկցիան, որտեղ $a>0$, $a\neq 1$, $x\in(-\infty,\infty)$: Կամայական $x_0\in(-\infty,\infty)$ կետի համար, օգտվելով երկրորդ հիմնական սահմանից, կունենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}}{\Delta x}=a^{x_0}\,\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to a^{x_0}\ln a\ \ (\Delta x\to 0):$$

**$4^0$-ի ապացույցը:** Դիտարկենք $f(x)=\log_a x$ ֆունկցիան $(x>0)$: Կամայական $x_0\in(0,\infty)$ կետի համար, օգտվելով առաջին հիմնական սահմանից, կունենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\log_a(x_0+\Delta x)-\log_a x_0}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0\cdot\dfrac{\Delta x}{x_0}}\to\frac{1}{x_0}\cdot\log_a e\ \ (\Delta x\to 0):$$

**$5^0$-ի ապացույցը:** $f(x)=\sin x$ ֆունկցիայի համար կամայական $x_0$ կետում ունենք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\to\cos x_0\ \ (\Delta x\to 0):$$

Այստեղ օգտվում ենք $\cos x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից և $\dfrac{\sin t}{t}\to 1\ \left(t=\dfrac{\Delta x}{2}\to 0\right)$ սահմանից:

**$6^0$-ն ապացուցվում է $5^0$-ի նման:**

<u>**3. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը:**</u> Ենթադրենք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում և $x_0 \in X$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում, ըստ ածանցյալի սահմանման, ունենք՝

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \ \left(\Delta x \to 0\right):$$

Նշանակելով

$$\alpha := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0),$$

կունենանք՝

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x-x_0) \tag{1.2}$$

կամ, որ նույնն է՝

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{1.2$'$}$$

որտեղ $\alpha$-ն կախված է $\Delta x$-ից և նրա հետ մեկտեղ ձգտում է զրոյի:

Այս բանաձևը կոչվում է *ֆունկցիայի աճի բանաձև*:

*Դիտողություն:* Մինչ այժմ ենթադրվում էր, որ $\Delta x \neq 0$: Սակայն, եթե պայմանավորվենք $\Delta x = 0$ դեպքում $\alpha$-ին վերագրել 0 արժեքը՝ $\alpha(0)=0$, ապա ֆունկցիայի աճի բանաձևը ճիշտ կլինի նաև $\Delta x = 0$ $\left(x = x_0\right)$ դեպքում:

**Հետևանք՝ ֆունկցիայի աճի բանաձևից:** *Եթե $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա այդ կետում $f$ ֆունկցիան անընդհատ է:*

Հակառակ պնդումը ճիշտ չէ. ֆունկցիան կարող է լինել անընդհատ, բայց ածանցյալ չունենալ: Այդպիսին է, օրինակ, $f(x)=|x|$ ֆունկցիան $x_0 = 0$ կետում (համոզվե՛լ ինքնուրույն): Բերենք մեկ այլ օրինակ. դիցուք՝ $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ և $f(0)=0$: Այս ֆունկցիան կրկին 0 կետում անընդհատ է (տե՛ս III գլուխ, §1, կետ 5, օրինակ $2^\circ$), բայց ածանցյալ չունի: Իրոք, քանի որ

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

հետևաբար, $\Delta x$ -ը $0$ -ի ձգտելիս աճերի հարաբերությունը սահման չունի:

Տեղին է բերել նաև ֆունկցիայի օրինակ, որը խզվող է, բայց ունի ածանցյալ (բնականաբար՝ անվերջ): Այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ է հանդիսանում $f(x)=\operatorname{sgn} x$ ֆունկցիան (III գլուխ, §1, կետ 3, օրինակ $1^\circ$ ):

$f(x)=\operatorname{sgn} x$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում ունի առաջին սեռի խզում: Սակայն դժվար չէ համոզվել, որ այդ կետում աճերի հարաբերությունը ձգտում է $+\infty$ -ի: Իրոք.

եթե $\Delta x\to 0+$ , ապա $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\to+\infty$ ,

եթե $\Delta x\to 0-$ , ապա $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-\dfrac{1}{\Delta x}\to+\infty$ :

<u>4. Ածանցման կանոնները:</u> Դիցուք $u$ և $v$ ֆունկցիաները որոշված են միևնույն $X$ միջակայքում և այդ միջակայքի $x_0$ կետում ( $X$ միջակայքում) ունեն վերջավոր ածանցյալ:

Այդ դեպքում $x_0$ *կետում (* $X$ *միջակայքում) վերջավոր ածանցյալ ունեն նաև այդ ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը, քանորդը** *և տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը.*

$1^0$. $(cu)'=cu'$ ,

$2^0$. $(u\pm v)'=u'\pm v'$ ,

$3^0$. $(uv)'=u'v+uv'$ ,

$4^0$. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ :

Ապացուցենք, օրինակ, վերջինը: Այդ նպատակով նշանակենք՝

$$F(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

* Քանորդի դեպքում ենթադրում ենք, որ $v(x_0)\neq 0$ :

և, հաշվի առնելով $u(x_0+\Delta x)=u(x_0)+\Delta u$ հավասարությունը, հաշվենք աճերի հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta x\to 0$ :

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u(x_0)+\Delta u}{v(x_0)+\Delta v}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right]=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x_0)-\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u(x_0)}{v(x_0)v(x_0+\Delta x)}\to\frac{u'v-v'u}{v^2}:$$

Վերջին քայլում օգտվեցինք $x_0$ կետում $v$ ֆունկցիայի անընդհատությունից (վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիան անընդհատ է):

**Օրինակներ:**

$1^0$. $(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}:$

$2^0$. $(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}:$

**<u>5. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը:</u>** Դիտարկենք $F(x)=f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան: Ապացուցենք, որ *եթե $\varphi$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ $x_0$ կետում, իսկ $f$ ֆունկցիան՝ $t_0=\varphi(x_0)$ կետում, ապա $F$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ և*

$$F'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)\,: \qquad (1.3)$$

Ֆունկցիայի աճի բանաձևի համաձայն, ունենք՝

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=f\left(\varphi(x_0+\Delta x)\right)-f\left(\varphi(x_0)\right)=$$

$$=f\left(\varphi(x_0)+\Delta\varphi\right)-f\left(\varphi(x_0)\right)=f'\left(\varphi(x_0)\right)\cdot\Delta\varphi+\alpha\cdot\Delta\varphi,$$

որտեղ $\alpha$-ն կախված է $\Delta\varphi$-ից և նրա հետ մեկտեղ ձգտում է $0$-ի: Հավասարության երկու կողմը բաժանելով $\Delta x$-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=f'\left(\varphi(x_0)\right)\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\ :$$

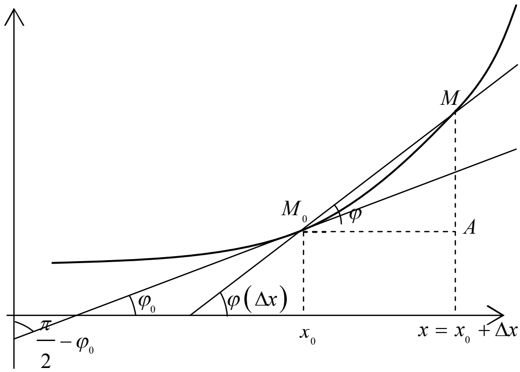
Այժմ, եթե $\Delta x \to 0$, ապա $\Delta\varphi \to 0$ (որովհետև վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիան անընդհատ է): Հետևաբար՝

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \to f'\big(\varphi(x_0)\big)\cdot\varphi'(x_0) \quad \big(\Delta x \to 0\big),$$

ինչը և պետք էր ապացուցել:

<u>6. Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը:</u> Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում և $x_0 \in X$ կետում ունի ածանցյալ (վերջավոր կամ անվերջ):

$y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա դիտարկենք $M_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$ ֆիքսված և $M = \big(x, f(x)\big)$ փոփոխական կետերը: Միացնելով այդ կետերը՝ կստանանք $M_0M$ հատողը (լարը): Այդ հատողի՝ աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյունը նշանակենք $\varphi(\Delta x)$-ով, այսինքն՝




$\varphi(\Delta x) := arctg\, k(\Delta x)$, որտեղ $k(\Delta x)$-ը $M_0M$ հատվածի անկյունային գործակիցն է: Ունենք՝

$$k(\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0) \ \big(\Delta x \to 0\big): \qquad (1.4)$$

Այսպիսով, եթե $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի ածանցյալ, ապա $k(\Delta x)$ անկյունային գործակիցը $\Delta x \to 0$ դեպքում ունի սահման, որը հենց այդ ածանցյալն է:

**Սահմանում:** *Եթե $\Delta x$-ը զրոյի ձգտելիս՝ $k(\Delta x)$-ը ունի սահման, ապա ասում են, որ $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $M_0$ կետում ունի շոշափող:*

*Որպես շոշափող ընդունվում է այն ուղիղը, որն անցնում է $M_0$ կետով, և որի անկյունային գործակիցը հավասար է՝*

$$\lim_{\Delta x\to 0} k(\Delta x) = k_0 \text{*}: \tag{1.5}$$

(1.5) պայմանը, $arctgx$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, կարելի է գրել նաև

$$\lim_{\Delta x\to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$$

տեսքով: Այս նկատառումով էլ ասում են, որ *շոշափողը հատողի սահմանային դիրքն է*:

Հաշվի առնելով (1.4)-ը, կստանանք, որ *եթե $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի ածանցյալ, ապա նրա գրաֆիկը $M_0$ կետում ունի շոշափող, որի անկյունային գործակիցը $f'(x_0)$ -ն է՝ $k_0 = f'(x_0)$ :*

Երբ $f'(x_0)$ ածանցյալը վերջավոր է, շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$y - y_0 = k_0(x - x_0):$$

Տեղադրելով $y_0$ -ի և $k_0$ -ի արժեքները՝ կստանանք

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

հավասարումը:

Իսկ երբ ածանցյալն անվերջ է, շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$x = x_0:$$

<u>**7. Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը:**</u> Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան $X$ միջակայքում խիստ մոնոտոն է ու անընդհատ, և նրա ընդունած արժեքների բազմությունը $Y$ միջակայքն է: Այդ դեպքում, հակադարձ ֆունկցիայի գոյության թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի $x = g(y)$ անընդհատ հակադարձ ֆունկցիան, որը որոշված է $Y$ միջակայքում:

**Թեորեմ** 1.1: *Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան $x_0 \in X$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ և $f'(x_0) \neq 0$, ապա $x = g(y)$ հակադարձ ֆունկցիան $y_0 = f(x_0)$ պատկեր-կետում ունի ածանցյալ և*

---

* Անվերջ անկյունային գործակցով ուղիղ է համարվում $OX$ առանցքին ուղղահայաց ուղիղը:

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}: \tag{1.6}$$

► Դիտարկենք աճերի հետևյալ հարաբերությունը՝

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{y-y_0}{x-x_0}}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}: \tag{1.7}$$

Եթե $y\to y_0$, ապա $x=g(y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից կբխի, որ $x\to x_0$: Այնուհետև, (1.7) հավասարությունում անցնելով սահմանի, կստանանք (1.6)-ը: ■

Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևն ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն. եթե $M_0$ կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողը $x$-երի առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է $\varphi_0$ անկյուն, ապա այդ շոշափողը $y$-ների առանցքի դրական ուղղության հետ կկազմի $\pi/2-\varphi_0$ անկյուն (տե՛ս գծագիրը): Եվ, քանի որ ածանցյալը այդ շոշափողի անկյունային գործակիցն է, ապա

$$g'(y_0)=tg\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)=\frac{1}{tg\varphi_0}=\frac{1}{f'(x_0)}:$$

**Օրինակներ:**

$1^0$. $y=\arcsin x$, $x=\sin y$, $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ :

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}:$$

Արմատի դիմաց վերցնում ենք «+» նշանը, որովհետև $\cos y$ ֆունկցիան $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում դրական է:

$2^0$. $y=arctgx$, $x=tgy$:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}:$$

Նման դատողություններով կարելի է ապացուցել նաև հետևյալ բանաձևերը.

$3^0$. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ :

$4^0$. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ :

## §2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

### 1. Դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:

**Սահմանում:** *Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում: Կասենք այն դիֆերենցելի է $x_0 \in X$ կետում, եթե այդ կետում նրա աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{2.1}$$

*որտեղ $A$ թիվը կախված չէ $\Delta x$ -ից, իսկ $\alpha$ -ն $\Delta x$ -ից կախված անվերջ փոքր է, երբ $\Delta x \to 0$ :*

Վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի աճի բանաձևը ցույց է տալիս, որ *եթե $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա այդ կետում $f$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ընդ որում, $A = f'(x_0)$* :

Ապացուցենք հակառակ պնդումը: Դիցուք $f$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0$ կետում, այսինքն՝ $f$ ֆունկցիայի աճը $x_0$ կետում կարելի է ներկայացնել (2.1) տեսքով: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha\ ,\ \ \alpha \to 0\ \ (\Delta x \to 0) :$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x \to 0$՝ կստանանք, որ $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում, $f'(x_0) = A$ :

Այսպիսով, *որպեսզի $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն այդ կետում ունենա վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում, $A = f'(x_0)$ :*

(2.1) ներկայացման մեջ մասնակցող $A\Delta x$ գումարելին, որը գծորեն է կախված $\Delta x$ -ից, կոչվում է *ֆունկցիայի աճի գլխավոր մաս*: Այսպիսի անվանումը պայմանավորված է նրանով, որ ( $A \neq 0$ դեպքում) $\Delta x$ -ը $0$ -ի ձգտելիս՝ այդ գումարելին ավելի դանդաղ է ձգտում $0$ -ի, քան մյուսը՝ $\alpha\Delta x$ -ը:

**Սահմանում:** *$x_0$ կետում դիֆերենցելի $f$ ֆունկցիայի աճի գլխավոր մասը կոչվում է ֆունկցիայի դիֆերենցիալ այդ կետում և նշանակվում է $df(x_0)$ կամ $dy(x_0)$ սիմվոլով:*

Այսպիսով՝

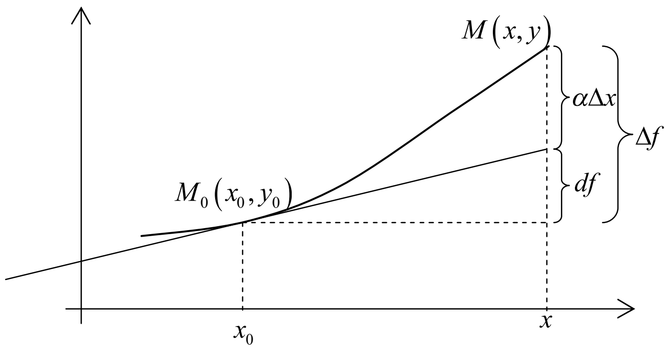
$$df(x_0) = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x :$$

Մասնավորաբար, վերցնելով $f(x) = x$ ֆունկցիան, կստանանք՝ $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ : Հետևաբար, $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կարելի է ներկայացնել նաև

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

տեսքով:

Դիֆերենցիալն ունի պարզ երկրաչափական իմաստ:




$f$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը $x_0$ կետում՝ դա $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին՝ նրա $M_0 = (x_0, y_0)$ կետում տարված շոշափողի օրդինատի աճն է: Իրոք, այդ աճի համար ունենք՝

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) = df(x_0) :$$

<u>**2. Դիֆերենցման կանոնները:**</u> Դիցուք $u$ և $v$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $x_0$ կետում ($X$ միջակայքում): Այդ դեպքում $x_0$ *կետում ($X$ միջակայքում) դիֆերենցելի կլինեն նաև* $cu$, $u \pm v$, $uv$ *և* $u/v$ *(վերջին դեպքում՝* $v \neq 0$ *) ֆունկցիաները, ընդ որում,*

$1^0$. $dcu = cdu$ ,

$2^0$. $d(u \pm v) = du \pm dv$ ,

$3^0$. $d(uv) = vdu + udv$ ,

$4^0$. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ :

Նշված ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը բխում է նրանից, որ դրանք ունեն վերջավոր ածանցյալ (տե՛ս 1, 4): Բերված բանաձևերից ապացուցենք, օրինակ, $3^0$-ը: Ըստ ածանցման համապատասխան կանոնի, ունենք՝ $(uv)' = v \cdot u' + u \cdot v'$: Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով $dx$ -ով՝ կստանանք

$$d(uv) = (uv)'dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv$$

հավասարությունը:

## §3. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

<u>1. Բարձր կարգի ածանցյալներ:</u> Ենթադրենք՝ $y = f(x)$ ֆունկցիան $X$ միջակայքում ունի վերջավոր ածանցյալ և դիտարկենք $f'(x)$ ֆունկցիան:

Եթե $f'(x)$ ֆունկցիան $x_0 \in X$ կետում ($X$ միջակայքում) ունի ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալը կոչվում է $f$ *ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ* $x_0$ *կետում ($X$ միջակայքում)* և այն նշանակում են $y''$, $f''(x_0)$, $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ սիմվոլներից որևէ մեկով:

Նման ձևով սահմանվում են երրորդ, չորրորդ և այլ կարգի ածանցյալները: Որպեսզի կարողանանք սահմանել $n$ -րդ կարգի ածանցյալը $x_0$ կետում, անհրաժեշտ է, որ $f$ ֆունկցիան այդ կետի շրջակայքում ունենա ($n-1$)-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0):$$

**Օրինակներ:**

$1^0$. $y = x^\alpha, y' = \alpha x^{\alpha-1}, y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ldots, y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$:

$2^0$. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$, ..., $y^{(n)} = a^x \ln^n a$:

$3^0$. $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$, ..., $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$:

$4^0$. $y = \sin x$, $y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, ..., $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$5^0$. $y = \cos x$, $y' = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, ..., $y^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$6^0$. $y = arctgx$, $y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin n\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)$:

Նշված բանաձևերը ապացուցվում են մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Ներկայացնենք միայն $6^0$ -ի ապացույցը:

$n = 1$ դեպքում ունենք՝

$$y' = \cos^2 y = \cos y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right):$$

Այժմ ենթադրենք, որ $6^0$ բանաձևը ճիշտ է $n$-ի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև ($n+1$)-ի համար: Իրոք՝

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \left[(n-1)!\cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]' =$$

$$= (n-1)!\left[-n\cos^{n-1} y \sin y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^n y \cdot n\cos n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] y' =$$

$$= n!\cos^{n+1} y\left[\cos y \cos n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= n!\cos^{n+1} y \cos\left[(n+1)y + n\frac{\pi}{2}\right] = n!\cos^{n+1} y \sin(n+1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right):$$

Պնդումն ապացուցված է:

Օգտվելով ածանցման կանոններից՝ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել, որ եթե $u$ և $v$ ֆունկցիաները ունեն $n$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա $cu$ և $u \pm v$ ֆունկցիաները ևս կունենան $n$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ և

$$(cu)^{(n)} = cu^{(n)},\ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}: \tag{3.1}$$

<u>**2. Լայբնիցի բանաձևը:**</u> Ապացուցենք, որ *եթե $u$ և $v$ ֆունկցիաներն ունեն $n$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա $y = uv$ ֆունկցիան նույնպես կունենա $n$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում,*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \tag{3.2}$$

*որտեղ $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v$, իսկ $C_n^k,\ 0 \le k \le n$ թվերը Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի գործակիցներն են՝ $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$:*

(3.2)-ը կոչվում է Լայբնիցի բանաձև: Ապացուցենք այն մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

$n = 1$ դեպքում ունենք՝

$$y' = (uv)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^{1} C_1^k u^{(1-k)} v^{(k)}:$$

Այժմ ենթադրենք, որ (3.2) բանաձևը ճիշտ է $n$-ի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է $n+1$-ի համար: Ունենք՝

$$y^{(n+1)} = \left[(uv)^n\right]' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[u^{(n-k)} v^{(k)}\right]' == \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[u^{(n-k+1)} v^{(k)} + u^{(n-k)} v^{(k+1)}\right] =$$

$$= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{[n-(k-1)]} v^{(k)} + uv^{(n+1)},$$

որտեղ վերջին քայլում կատարեցինք $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k-1}$ ձևափոխությունը:

Այժմ, հաշվի առնելով $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ հավասարությունը, կստանանք (3.2) բանաձևը $n+1$-ի համար:

<u>3. Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ:</u> Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0$ կետի շրջակայքում: $dx$-ը համարելով հաստատուն՝ $x_0$ կետի շրջակայքում դիտարկենք $dy=f'(x)dx$ ֆունկցիան: Եթե այն դիֆերենցելի է $x_0$ կետում (այսինքն՝ $f'(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ $x_0$ կետում՝ $f''(x_0)$), ապա այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ* $x_0$ կետում, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է *երկու անգամ (կամ կրկնակի) դիֆերենցելի* $x_0$ կետում:

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի համար կօգտագործենք

$$d^2 f(x_0),\ d^2 y,\ d^2 f$$

նշանակումները: Այսպիսով՝

$$d^2 f(x_0)=f''(x_0)(dx)^2 :$$

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է $X$ միջակայքում, ապա տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$d^2 y=d(dy)=d\big(f'(x)dx\big)=\big(df'(x)\big)\cdot dx=\big(f''(x)dx\big)dx=f''(x)(dx)^2 :$$

Հետագայում $(dx)^2$-ու փոխարեն կգրենք $dx^2$: Երկիմաստությունից խուսափելու համար՝ $x^2$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կնշանակենք $d(x^2)$:

Նման ձևով սահմանվում են երրորդ, չորրորդ, ..., $n$-րդ կարգի դիֆերենցիալները և $n$ անգամ դիֆերենցելիությունը. $y=f(x)$ ֆունկցիայի $n$-րդ կարգի դիֆերենցիալն այդ ֆունկցիայի ($n-1$)-րդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալն է՝

$$d^n y=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)dx^n :$$

Վերջին հավասարությունն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Լայբնիցի բանաձևի երկու կողմը բազմապատկելով $dx^n$-ով՝ կստանանք

$$d^n(uv)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u d^k v$$

հավասարությունը, որտեղ $d^0 u=u$ :

## §4. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ

### 1.Ֆերմայի թեորեմը:

**Թեորեմ 4.1:** *Եթե $f$ ֆունկցիան $X$ միջակայքի $x_0$ ներքին կետում ընդունում է իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը և գոյություն ունի $f'(x_0)$ ածանցյալը, ապա $f'(x_0)=0$:*

► Ապացուցենք մեծագույնի դեպքում: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան $x_0$ ներքին կետում ունի ածանցյալ, ապա գոյություն ունեն *աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալները* և հավասար են $f'(x_0)$՝

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,\ f'(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0:$$

Այս երկու անհավասարություններից բխում է, որ $f'(x_0)=0$: ■

Հաշվի առնելով ածանցյալի երկրաչափական իմաստը՝ կստանանք, որ *Ֆերմայի թեորեմի պայմանների դեպքում $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկին՝ նրա $(x_0, f(x_0))$ կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին:*

### 2. Ռոլի թեորեմը:

**Թեորեմ 4.2:** *Դիցուք $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված $f$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

*ա) անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում,*

*բ) ունի ածանցյալ առնվազն $(a,b)$ բաց միջակայքում,*

*գ) $f(a)=f(b)$:*

*Այդ դեպքում գոյություն ունի $c$ կետ ($a<c<b$), այնպիսին, որ $f'(c)=0$:*

► Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $[a,b]$ հատվածում անընդհատ $f$ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝ $M$, $m$:

Եթե $M=m$, ապա $f$ ֆունկցիան հաստատուն է, հետևաբար՝ $f'(x)=0$, $x\in[a,b]$:

Մնում է քննարկել այն դեպքը, երբ $m<M$: Այս դեպքում, հաշվի առնելով, որ $[a,b]$ հատվածի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է հավասար արժեքներ, եզրակացնում ենք, որ $m$ և $M$ արժեքներից գոնե մեկը $f$ ֆունկցիան կընդունի $[a,b]$ հատվածի ներքին կետում՝ $c$: Ֆերմայի թեորեմի համաձայն՝ $f'(c)=0$: ■

<u>3. Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը:</u>

**Թեորեմ 4.3:** *Եթե $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և ունի վերջավոր ածանցյալ առնվազն $(a,b)$ բաց միջակայքում, ապա գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածի $c$ ներքին կետ, այնպիսին, որ*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c): \tag{4.1}$$

► Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ $\varphi$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, գոյություն ունի $c\in(a,b)$ կետ, այնպիսին, որ $\varphi'(c)=0$:

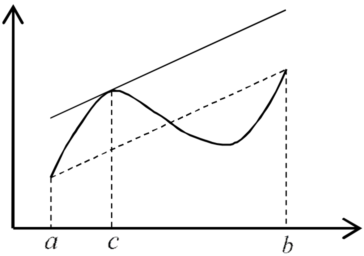
Մյուս կողմից՝

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

որը համարժեք է (4.1)-ին: ■

Այս թեորեմը կիրառելով $[x_0,x_0+\Delta x]$ հատվածի վրա՝ կստանանք $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x$ հավասարությունը:

Քանի որ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ թիվը հանդիսանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $(a,f(a))$ և $(b,f(b))$ կետերը միացնող լարի անկյունային գործակիցը, ապա թեորեմ 4.3-ի եզրակացությունը երկրաչափորեն նշանակում է, որ *գոյություն ունի* $[a,b]$ *հատվածի* $c$ *ներքին կետ, այնպիսին, որ ֆունկցիայի գրաֆիկին՝ նրա* $(c, f(c))$ *կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է գրաֆիկի ծայրակետերը միացնող լարին: (տե՛ս գծագիրը):*




**Հետևանք:** *Դիցուք* $f$ *ֆունկցիան անընդհատ է* $[x_0, x_0+h]$ *հատվածում և ունի վերջավոր ածանցյալ* $(x_0, x_0+h)$ *բաց միջակայքում: Այդ դեպքում, եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to x_0+} f'(x) = K \tag{4.2}$$

*սահմանը, ապա* $x_0$ *կետում* $f$ *ֆունկցիան ունի աջակողմյան ածանցյալ, որը հավասար է նույն* $K$ *-ին՝* $f'(x_0) = K$ *(*$K$ *-ն կարող է լինել թե՛ վերջավոր, թե՛ անվերջ):*

► Դիցուք՝ $0 < \Delta x < h$ և $[x_0, x_0+\Delta x]$ հատվածի վրա կիրառենք Լագրանժի թեորեմը (թեորեմ 4.3-ը).

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c)\,,\ x_0 < c < x_0 + \Delta x: \tag{4.3}$$

Եթե $\Delta x \to 0$, $c$ -ն կձգտի $x_0$ -ին: Հաշվի առնելով (4.2)-ը՝ (4.3) հավասարությունում անցնենք սահմանի: Կստանանք՝

$$\lim_{\Delta x\to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = K\,,$$

ինչ և պետք էր ապացուցել: ■

Նկատենք, որ ձևակերպված հետևանքից անմիջապես հետևում է, որ *ածանցյալ ֆունկցիայի խզման կետերը կարող են լինել միայն երկրորդ սեռի:* Իսկ եթե $f'$ ածանցյալ ֆունկցիան անընդհատ է մի ինչ-որ բազմության վրա, ապա ասում են, որ $f$ *ֆունկցիան անընդհատ դիֆերեն-*

*ցելի է* այդտեղ: $X$-ում անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասն ընդունված է նշանակել $C^1(X)$-ով:

**4. Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը:**

**Թեորեմ 4.4:** *Եթե $f$ և $g$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a,b]$ հատվածում և դիֆերենցելի են $(a,b)$ բաց միջակայքում, ընդ որում, $g'(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$, ապա գոյություն ունի $c \in (a,b)$ կետ, այնպիսին, որ*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} : \tag{4.4}$$

► Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]:$$

Նկատենք, որ այստեղ $g(b)-g(a) \neq 0$: Իրոք, հակառակ դեպքում $g$ ֆունկցիան կբավարարի Ռոլի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար, գոյություն կունենա $c \in (a,b)$, այնպիսին, որ $g'(c)=0$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը:

Դժվար չէ համոզվել, որ $\varphi$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, $\exists\, c \in (a,b)$, այնպիսին, որ $\varphi'(c)=0$: Մյուս կողմից ունենք՝

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

որը համարժեք է (4.4)-ին: ■

**5. Դարբուի թեորեմը:**

**Թեորեմ 4.5:** *Եթե $f$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[a,b]$ հատվածում և*

$$f'(a)f'(b) < 0,$$

*ապա գոյություն ունի $c \in (a,b)$ կետ, այնպիսին, որ $f'(c)=0$:*

► Որոշակիության համար ենթադրենք, թե $f'(a)>0$ և $f'(b)<0$: Ցույց տանք, որ այս դեպքում $f$ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է $[a,b]$ հատվածի ներքին կետում: Դրա համար ապացուցենք, որ $f(a)$-ն և $f(b)$-ն ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը չեն: Իրոք, ունենք՝

$$0 < f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} :$$

Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիայի առաջին հատկության համաձայն, $a$ կետի մի ինչ-որ (աջակողմյան) շրջակայքում տեղի ունի

$$0 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

անհավասարությունը: Քանի որ այս կոտորակի հայտարարը դրական է, ապա նշված շրջակայքում կունենանք՝ $f(x) - f(a) > 0$ կամ, որ նույնն է՝

$$f(x) > f(a) :$$

Հետևաբար, $f(a)$-ն $f$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը չէ:

Նման դատողություններով կհամոզվենք, որ $f(b)$-ն նույնպես մեծագույն արժեքը չէ: Հետևաբար, ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին $c$ կետում: Այժմ, Ֆերմայի թեորեմի համաձայն՝ $f'(c) = 0$, ինչ և պետք էր ապացուցել: ■

**Լրացում:** *Եթե $f$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[a,b]$ հատվածում և $f'(a) < C < f'(b)$, ապա գոյություն ունի $c \in (a,b)$ կետ, այնպիսին, որ*

$$f'(c) = C : \tag{5.5}$$

► Դիտարկենք $\varphi(x) = f(x) - Cx$ օժանդակ ֆունկցիան: Դժվար չէ համոզվել, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Դարբուի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, $\exists\ c \in (a,b)$, այնպիսին, որ $\varphi'(c) = 0$:

Մյուս կողմից, $0 = \varphi'(c) = f'(c) - C$, որը համարժեք է (5.5)-ին: ■

## §5. ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՑՄԱՆ ԼՈՊԻՏԱԼԻ ԿԱՆՈՆԸ

1. $0/0$ **տեսքի անորոշություններ:**

**Թեորեմ 5.1:** *Դիցուք՝*

*ա) $f$ և $g$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $(a,b)$ միջակայքում, ընդ որում, $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$;*

*բ)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

*գ)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$ :

*Այդ դեպքում՝*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K\ : \tag{5.1}$$

► Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $a$-ն վերջավոր է: Այս դեպքում կարող ենք $f$ և $g$ ֆունկցիաները լրացուցիչ որոշել $a$ կետում այնպես, որ նրանք լինեն անընդհատ այդ կետում: Դրա համար պետք է ընդունենք՝ $f(a)=g(a)=0$ :

Այժմ վերցնենք կամայական $x\in(a,b)$ կետ և $[a,x]$ հատվածի վրա կիրառենք Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad a<c<x\ :$$

Անցնելով սահմանի, երբ $x\to a$, և հաշվի առնելով գ)-ն՝ կստանանք (5.1)-ը:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $a=-\infty$, իսկ $K$-ն վերջավոր է: Վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ: գ) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի մի $E$ թիվ, այնպիսին, որ

$$c<E\Rightarrow K-\varepsilon<\frac{f'(c)}{g'(c)}<K+\varepsilon\ : \tag{5.2}$$

Այժմ վերցնենք $y<x<E$ կետեր և $[y,x]$ հատվածում կիրառենք Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad y<c<x\ :$$

Հաշվի առնելով (5.2)-ը՝ այստեղից կստանանք

$$K-\varepsilon<\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}<K+\varepsilon \tag{5.3}$$

անհավասարությունները: Այստեղ ֆիքսենք $x$-ը, իսկ $y$-ը ձգտեցնենք $a$-ի: Հաշվի առնելով բ)-ն՝ կստանանք, որ

$$x < E \Rightarrow K - \varepsilon \le \frac{f(x)}{g(x)} \le K + \varepsilon ,$$

ինչն էլ նշանակում է, որ տեղի ունի (5.1)-ը:

$a = -\infty$, $|K| = \infty$ դեպքում թեորեմն ապացուցում ենք նման դատողություններով: ■

**Դիտողություն:** (5.3) անհավասարության մեջ կարող ենք անցնել սահմանի, որովհետև հայտարարի սահմանը զրո չէ՝ $g(x) \ne 0$: Դա բխում է $g'(x) \ne 0$, $x \in (a,b)$ պայմանից (ապացուցել):

<u>2. $\infty/\infty$ **տեսքի անորոշություններ:**</u>

**Թեորեմ 5.2:** *Դիցուք՝*

*ա) $f$ և $g$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $(a,b)$ միջակայքում, ընդ որում, $g'(x) \ne 0$, $x \in (a,b)$ :*

*բ)* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ *:*

*գ)* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$ *:*

*Այդ դեպքում՝*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K : \tag{5.4}$$

► Ապացուցենք այն դեպքի համար, երբ $K$-ն վերջավոր է (իսկ $a$-ն՝ վերջավոր կամ $-\infty$): Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Կրկնելով նախորդ թեորեմի դատողությունները՝ կստանանք, որ գոյություն ունի մի $E$ թիվ, այնպիսին, որ

$$a < y < x < E \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} < K + \varepsilon : \tag{5.5}$$

բ) պայմանից բխում է, որ գոյություն ունի մի $E_1 \in (a,E)$ թիվ, այնպիսին, որ (ֆիքսված $x$-ի դեպքում)

$$a < y < E_1 \Rightarrow g(y) - g(x) > 0\,,\ g(y) > 0\,:$$

(5.5) անհավասարությունը բազմապատկելով $\dfrac{g(y)-g(x)}{g(y)}$-ով՝ կստանանք

$$(K-\varepsilon)\frac{g(y)-g(x)}{g(y)} < \frac{f(y)-f(x)}{g(y)} < (K+\varepsilon)\frac{g(y)-g(x)}{g(y)}\ ,$$

անհավասարությունը, կամ, որ նույնն է՝

$$(K-\varepsilon)\left(1-\frac{g(x)}{g(y)}\right)+\frac{f(x)}{g(y)} < \frac{f(y)}{g(y)} < (K+\varepsilon)\left(1-\frac{g(x)}{g(y)}\right)+\frac{f(x)}{g(y)}\ :$$

Ֆիքսված $x$-ի դեպքում՝ $\dfrac{g(x)}{g(y)} \underset{y\to a}{\to} 0,\ \dfrac{f(x)}{g(y)} \underset{y\to a}{\to} 0$, հետևաբար, գոյություն ունի $E_2 < E_1$ թիվ, այնպիսին, որ

$$a < y < E_2 \Rightarrow K - 2\varepsilon < \frac{f(y)}{g(y)} < K + 2\varepsilon\,,$$

ինչը համարժեք է (5.4)-ին: ■

**Օրինակներ:**

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2\,,\quad (0/0):$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0\,,\ \alpha > 0\quad (\infty/\infty):$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0\,,\alpha > 0\ (0\cdot\infty):$

4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0\,,\ a > 1\,,\ n\in N\ \ (\infty/\infty):$

► Ապացուցենք, օրինակ, $n = 2$ դեպքում՝

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{a^x\ln a}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{a^x\ln^2 a}=0:$$

Ընդհանուր դեպքում կկիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիա: ■

5) $0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+\cos x}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\sin x}=1:$

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ եթե բ) պայմանը չի բավարարվում, ապա Լոպիտալի կանոնը կիրառելի չէ:

6) $1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\neq\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x):$

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ Լոպիտալի կանոնի հակադարձը ճիշտ չէ ( գ) պայմանը (5.4)-ից չի հետևում):

## §6. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

<u>1. Թեյլորի բանաձևը բազմանդամների համար:</u> Դիտարկենք

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n,\ a_n\neq 0 \tag{6.1}$$

$n$ աստիճանի բազմանդամը: Մեր նպատակն է $a_k$ $\left(0\le k\le n\right)$ գործակիցներն արտահայտել $P$ բազմանդամի և նրա ածանցյալների՝ 0 կետում ընդունած արժեքների միջոցով:

Ածանցյալներ հաշվելու կանոնների համաձայն՝

$$P^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{n}a_m(x^m)^{(k)},\ 0\le k\le n:$$

Մյուս կողմից (տես 3, 1, օրինակ $1^\circ$), ունենք՝

$$(x^m)^{(k)}=\begin{cases}0 & ,\ m<k\\ m(m-1)...(m-k+1)x^{m-k}, & k\le m\le n\end{cases}:$$

Այս արժեքները տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$P^{(k)}(x)=\sum_{m=k}^{n}a_m m(m-1)...(m-k+1)x^{m-k},\ 0\le k\le n$$

հավասարությունը, որտեղից էլ՝

$$P^{(k)}(0) = a_k \cdot k!,\ 0 \le k \le n :$$

Հետևաբար՝

$$a_0 = P(0),\ a_1 = \frac{P'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \ldots,\ a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!} :$$

Գործակիցների ստացված արժեքները տեղադրելով (6.1)-ի մեջ՝ ստանում ենք

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (6.2)$$

բանաձևը, որը կոչվում է *Թեյլորի բանաձև*:

Այժմ ստանանք այնպիսի բանաձև, որտեղ $x$-ի աստիճանների փոխարեն մասնակցեն ($x - x_0$)-ի աստիճանները ($x_0$-ն կամայական թիվ է):

Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի համաձայն, ունենք՝

$$x^m = \left[(x - x_0) + x_0\right]^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (x - x_0)^k x_0^{m-k},\ m = 1,2,\ldots,n :$$

Տեղադրելով (6.1)-ի մեջ և կատարելով նման անդամների միացում՝ $P(x)$ բազմանդամի համար կստանանք

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n \qquad (6.3)$$

ներկայացումը:

Այժմ, նշանակելով $x - x_0 = y$ և կրկնելով նախորդ դատողությունները, կստանանք՝

$$b_0 = P(x_0),\ b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!},\ b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}, \ldots,\ b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} :$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով (6.3)-ի մեջ՝ կստանանք

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ներկայացումը, որը կոչվում է $P(x)$ բազմանդամի *Թեյլորի բանաձև՝* $x_0$ *կետի շրջակայքում*:

**Դիտողություն:** *Եթե $P(x)$ բազմանդամը ներկայացված է*

$$P(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-x_0)+\frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n$$

*տեսքով, ապա* $c_k=P^{(k)}(x_0)$, $0\le k\le n$ *:*

<u>**2. Թեյլորի բանաձևը կամայական ֆունկցիայի համար:**</u> Դիցուք $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի մինչև $n$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ: Նշանակենք՝

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

և $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$, կամ, որ նույնն է՝

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+ \\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x) \tag{6.4}$$

Աջ մասում ստացված արտահայտությունը կոչվում է $f$ *ֆունկցիայի Թեյլորի վերլուծություն*՝ $x_0$ *կետի շրջակայքում (կամ Թեյլորի բանաձև)*, իսկ $r_n(x)$-ը կոչվում է *մնացորդային անդամ*: Քանի դեռ $r_n(x)$-ի մասին լրացուցիչ տեղեկություն չունենք, (6.4) բանաձևը կիրառելի չէ, որովհետև այն ուղղակի նշանակում է (ուրիշ՝ ոչինչ):

Մեր առաջիկա նպատակն է. ելնելով $f$ ֆունկցիայի հատկություններից՝ $r_n(x)$-ի մասին ստանալ լրացուցիչ տեղեկություններ:

<u>**3. Մնացորդային անդամը Պեանոյի տեսքով:**</u>

**Թեորեմ 6.1:** *Եթե $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի մինչև $n$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ, ապա*

$$r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)\quad\left(x\to x_0\right),$$

*այսինքն՝*

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\to 0\quad\left(x\to x_0\right): \tag{6.5}$$

Այս պնդումն անմիջապես բխում է հետևյալ լեմմայից.

**Լեմմա 6.1:** *Եթե $r(x)$ ֆունկցիան բավարարում է*

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \ldots = r^{(n)}(x_0) = 0 \tag{6.6}$$

*պայմանին, ապա*

$$r(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \quad \left(x \to x_0\right):$$

► Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$ դեպքում ունենք՝ $r(x_0) = r'(x_0) = 0$: Հետևաբար,

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} \to r'(x_0) = 0 \quad \left(x \to x_0\right),$$

այսինքն՝ $n = 1$ դեպքում լեմման ճիշտ է:

Այժմ ապացուցենք, որ եթե $n$-ի դեպքում լեմման ճիշտ է, ապա այն ճիշտ է նաև ($n + 1$)-ի դեպքում: Լեմման ($n + 1$)-ի դեպքում ապացուցելու համար պետք է ենթադրենք, որ $r(x)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \ldots = r^{(n)}(x_0) = r^{(n+1)}(x_0) = 0$$

պայմանին: Սա նշանակում է, որ $r'(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (6.6) պայմանին: Հետևաբար, $r'(x)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի (6.5) պայմանին (լեմմայի եզրակացությանը)՝

$$\frac{r'(x)}{(x - x_0)^n} \to 0 \ \left(x \to x_0\right): \tag{6.7}$$

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r'(c)}{(x - x_0)^n} = \frac{r'(c)}{(c - x_0)^n} \cdot \left(\frac{c - x_0}{x - x_0}\right)^n, \tag{6.8}$$

որտեղ երկրորդ քայլում կիրառեցինք Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ $x_0 < c < x$ (որոշակիության համար ենթադրենք, որ $x_0 < x$):

Այժմ, եթե $x \to x_0$, ապա $c \to x_0$, և (6.7)-ից ու (6.8)-ից բխում է, որ

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \to 0 \ \left(x \to x_0\right),$$

քանի որ $0 < \dfrac{c - x_0}{x - x_0} < 1$: ■

Նախորդ կետի դիտողության համաձայն, $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$-ը բավարարում է (6.6) պայմանին, հետևաբար (6.5)-ը բխում է լեմմայից:

Մնացորդային անդամի ստացված արտահայտությունը տեղադրելով (6.4)-ի մեջ, կստանանք՝

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \quad \left(x \to x_0\right):$$

<u>4. Մնացորդային անդամը Լագրանժի և Կոշիի տեսքերով:</u> Դիցուք $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետի շրջակայքում ունի մինչև ( $n+1$ )-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ: Այդ շրջակայքում հաստատագրենք $x$-ը և $[x_0, x]$ հատվածում (որոշակիության համար ենթադրենք՝ $x_0 < x$ ) դիտարկենք

$$\varphi(z) = f(x) - \left\{ f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x - z) + \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n \right\}$$

ֆունկցիան : Պարզ հաշվումները ցույց են տալիս, որ

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n :$$

Այժմ վերցնենք $[x_0, x]$ հատվածում դիֆերենցելի $\psi(z)$ ֆունկցիա (որը հետագայում հարմար ձևով կընտրենք) և կիրառենք Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը.

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} :$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) = \frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(c)} \varphi'(c) :$$

Քանի որ $\varphi(x_0) = r_n(x)$, $\varphi(x) = 0$, ուստի

$$r_n(x) = -\frac{\psi(x_0)-\psi(x)}{\psi'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n : \qquad (6.9)$$

*Մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքը* ստանալու համար վերցնենք՝ $\psi(z)=(x-z)^{n+1}$ : Այդ դեպքում $\psi'(c)=-(n+1)(x-c)^n$ և, տեղադրելով (6.9)-ում, կստանանք՝

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad x_0<c<x :$$

*Մնացորդային անդամի Կոշիի տեսքը* ստանալու համար վերցնենք՝ $\psi(z)=x-z$ : Այս դեպքում՝ $\psi'(c)=-1$ և, տեղադրելով այն (6.9)-ում, կստանանք՝

$$r_n(x)=(x-x_0)\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ x_0<c<x : \qquad (6.10)$$

Նշանակենք՝ $\theta=\dfrac{c-x_0}{x-x_0}$, $0<\theta<1$, $c=x_0+\theta(x-x_0)$ : Տեղադրելով (6.10)-ի մեջ՝ կստանանք մնացորդային անդամի Կոշիի տեսքը.

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \ 0<\theta<1 :$$

**5. Հիմնական տարրական ֆունկցիաների Թեյլորի բանաձևերը:** Կդիտարկենք Թեյլորի վերլուծությունները 0 կետի շրջակայքում՝

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x) :$$

1) $f(x)=e^x$, $f^{(k)}(x)=e^x$, $f^{(k)}(0)=1$, $0\le k\le n$,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x) :$$

2) $f(x)=\sin x$, $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0)=\sin k\dfrac{\pi}{2}, 0\le k\le 2m$,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}+r_{2m}(x) :$$

3) $f(x)=\cos x$ , $f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0)=\cos k\dfrac{\pi}{2}$ , $0\le k\le 2m$ ,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+...+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+r_{2m}(x):$$

4) $f(x)=(1+x)^m$ , $f^{(k)}(x)=m(m-1)(m-2)...(m-k+1)(1+x)^{m-k}$ ,

$f^{(k)}(0)=m(m-1)...(m-k+1)$ , $1\le k\le n$ ,

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+r_n(x):$$

5) $f(x)=\ln(1+x)$ , $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ , $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x):$$

6) $f(x)=arctgx$ , $f^{(k)}(x)=(k-1)!\cos^k y\sin k\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=arctgx$ ,

$f^{(k)}(0)=(k-1)!\sin k\dfrac{\pi}{2}$ , $1\le k\le 2m$ ,

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1}+r_{2m}(x):$$

## §7. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

### 1. Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանը:

**Թեորեմ** 7.1: *Եթե $f$ ֆունկցիայի ածանցյալը $X$ միջակայքում հավասար է զրոյի, ապա $f$ ֆունկցիան այդ միջակայքում հաստատուն է:*

► Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $x_1, x_2\in X$ կետեր և ապացուցենք, որ $f(x_1)=f(x_2)$: Դրա համար կիրառենք Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը $[x_1,x_2]$ հատվածում՝

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0: \blacksquare$$

**Դիտողություն:** Այս թեորեմի մեջ բավական էր պահանջել, որ $X$ միջակայքի ներքին կետերում ֆունկցիան ունենա վերջավոր (զրոյի հավասար) ածանցյալ, իսկ ծայրակետերում լինի անընդհատ (եթե նրանք պատկանում են $X$ միջակայքին):

**Հետևանք:** *Եթե $f$ և $g$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $X$ միջակայքում և $f'(x) = g'(x)$, $x \in X$, ապա նրանք տարբերվում են հաստատունով՝*

$$f(x) = g(x) + c\ :$$

► Ապացուցվում է՝ կիրառելով նախորդ թեորեմը $f(x) - g(x)$ տարբերության համար: ■

2. Ֆունկցիայի մոնոտոն լինելու պայմանը:

**Թեորեմ 7.2**: *Որպեսզի $X$ միջակայքում դիֆերենցելի $f$ ֆունկցիան այդ միջակայքում լինի աճող (նվազող) լայն իմաստով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $x \in X$ :*

► Բավարարությունն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ կետեր և կիրառենք Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$f(x_1) \leq f(x_2)\ :$$

Անհրաժեշտությունն անմիջապես բխում է ածանցյալի սահմանումից: ■

**Դիտողություն:** Եթե պահանջենք, որ ածանցյալը լինի դրական, այդ դեպքում կեզրակացնենք, որ ֆունկցիան խիստ աճող է: Սակայն $f(x) = x^3$ ֆունկցիայի օրինակը ցույց է տալիս, որ հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ՝ $f'(0) = 0$ :

Նշենք նաև, որ նախորդ կետում արված դիտողությունը վերաբերում է նաև այս կետին:

<u>3. Էքստրեմումներ:</u>

**Սահմանում:** *Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում, որի համար $x_0$-ն ներքին կետ է: Կասենք, $x_0$-ն մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ**

$$\left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)):$$

*Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը կոչվում են էքստրեմումի կետեր, իսկ ֆունկցիայի արժեքներն այդ կետերում՝ էքստրեմումներ:*

**Թեորեմ 7.3 (Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը):** *Եթե $x_0$ էքստրեմումի կետում $f$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ, ապա*

$$f'(x_0) = 0 : \tag{7.1}$$

► Ապացուցելու համար կկիրառենք Ֆերմայի թեորեմը $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ միջակայքում: ■

Ինչպես ցույց է տալիս $f(x) = x^3$ ֆունկցիայի օրինակը, (7.1) պայմանը էքստրեմումի համար բավարար չէ ( $f'(x_0) = 0$, բայց 0 կետը $f(x) = x^3$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ):

(7.1) պայմանին բավարարող կետերը կոչվում են *ստացիոնար կետեր*:

<u>4. Էքստրեմումներ գտնելու առաջին կանոնը:</u>

**Թեորեմ 7.4:** *Դիցուք $f$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(x_0 - \delta, x_0)$ և $(x_0, x_0 + \delta)$ միջակայքերում, իսկ $x_0$ կետում անընդհատ է: Այդ դեպքում*

*$1^0$. Եթե $f'(x) > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ և $f'(x) < 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, ապա $x_0$ կետը մաքսիմումի կետ է:*

*$2^0$. Եթե $f'(x) < 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ և $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, ապա $x_0$-ն մինիմումի կետ է:*

*$3^0$. Եթե $f'(x)$-ը նշանը չի փոխում ($(x_0 - \delta, x_0)$ և $(x_0, x_0 + \delta)$ միջակայքերում $f'(x)$-ը ունի նույն նշանը), ապա $x_0$-ն էքստրեմումի կետ չէ:*

---

* Եթե $0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, ապա $x_0$-ն կոչվում է խիստ մաքսիմումի կետ:

► Այս թեորեմը բխում է ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանից (թեորեմ 7.2): ■

5. Էքստրեմումներ գտնելու երկրորդ կանոնը:

**Թեորեմ 7.5:** *Դիցուք $x_0$-ն $f$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է և այդ կետում $f$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում՝*

*$1^0$. Եթե $f''(x_0)>0$, ապա $x_0$-ն մինիմումի կետ է:*

*$2^0$. Եթե $f''(x_0)<0$, ապա $x_0$-ն մաքսիմումի կետ է:*

► Գրենք $f$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը $x_0$ կետի շրջակայքում: Վերցնենք $n=2$, իսկ մնացորդային անդամը Պեանոյի տեսքով՝

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\alpha(x-x_0)^2,\ \alpha\to 0\ \ (x\to x_0):$$

Դա նույնն է, որ

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)+2\alpha}{2}(x-x_0)^2:$$

Քանի որ $f''(x_0)\neq 0$, ուստի աջ կողմում գրված արտահայտության նշանը կհամընկնի $f''(x_0)$-ի նշանի հետ (երբ $x$-ը բավականաչափ մոտ է $x_0$-ին, $x\neq x_0$), ինչից և բխում են $1^0$ և $2^0$ պնդումները: ■

Դիտարկենք $-x^4$, $x^4$ և $x^3$ ֆունկցիաները ($0$ կետում): Երեք դեպքում էլ՝ $f''(0)=0$: Սակայն $0$-ն առաջին ֆունկցիայի համար մաքսիմումի կետ է, երկրորդ ֆունկցիայի համար՝ մինիմումի կետ, իսկ երրորդ ֆունկցիայի համար էքստրեմումի կետ չէ: Այս օրինակները ցույց են տալիս, որ եթե $f''(x_0)=0$, ապա էքստրեմումի մասին ոչինչ ասել չենք կարող:

6. Բարձր կարգի ածանցյալների օգտագործումը:

**Թեորեմ 7.6:** *Դիցուք $x_0$-ն $f$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է և*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2k-1)}(x_0)=0,\ f^{(2k)}(x_0)\neq 0:$$

*Այդ դեպքում՝*

*$1^0$. Եթե $f^{(2k)}(x_0)>0$, ապա $x_0$-ն մինիմումի կետ է:*

*$2^0$. Եթե $f^{(2k)}(x_0)<0$, ապա $x_0$ -ն մաքսիմումի կետ է:*

► Թեյլորի բանաձևի մեջ վերցնենք $n=2k$, իսկ մնացորդային անդամը՝ Պեանոյի տեսքով: Կստանանք՝

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(2k)}(x_0)+(2k)!\alpha}{(2k)!}(x-x_0)^{2k},\ \alpha\to 0\ (x\to x_0):$$

Քանի որ $f^{(2k)}(x_0)\neq 0$, ապա աջ կողմում գրված արտահայտության նշանը կհամընկնի $f^{(2k)}(x_0)$ -ի նշանի հետ, ինչից և բխում են $1^0$-ը և $2^0$-ը:

Այժմ քննարկենք այն դեպքը, երբ

$$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(2k)}(x_0)=0,\ f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0:$$

Այս դեպքում կստանանք՝

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(2k+1)}(x_0)+(2k+1)!\alpha}{(2k+1)!}(x-x_0)^{2k+1}:$$

Քանի որ աջ կողմում գրված արտահայտության մեջ $(x-x_0)^{2k+1}$ արտադրիչը $x_0$ կետում նշանը փոխում է, ուստի այս դեպքում $x_0$-ն էքստրեմումի կետ չէ: ■

<u>7. Գոգավորության ուղղություն:</u> Դիցուք $g$ ֆունկցիան որոշված է $E\subset R$ բազմության վրա և $a\in E$: Կասենք, որ $(a,b)$ *կետն ընկած է $g$ ֆունկցիայի գրաֆիկից վերև (համապատասխանաբար խիստ վերև, ներքև, խիստ ներքև),* եթե $b\geq g(a)$ (համապատասխանաբար $b>g(a)$, $b\leq g(a)$, $b<g(a)$):

Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում և դիֆերենցելի է $x_0\in X$ ներքին կետում: Կասենք, որ *$f$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $x_0$ կետում գոգավորությամբ ուղղված է վերև (ներքև)*, եթե $\exists\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $(x_0-\delta,x_0)$ և $(x_0,x_0+\delta)$ միջակայքերում $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետերն ընկած են գրաֆիկին $(x_0,f(x_0))$ կետում տարված շոշափողից խիստ վերև (խիստ ներքև):

**Թեորեմ 7.7:** *Եթե $x_0$ կետում $f$ -ը կրկնակի դիֆերենցելի է և $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), ապա $x_0$ կետում $f$ -ի գրաֆիկը գոգավորությամբ ուղղված է վերև (ներքև):*

► Քննարկենք $f''(x_0)>0$ դեպքը: Գրենք $f$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը՝ վերցնելով $n=2$, իսկ մնացորդային անդամը՝ Պեանոյի տեսքով.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\alpha(x-x_0)^2: \quad (7.2)$$

Քանի որ $Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ հավասարումով որոշվող $Y$ -ը գրաֆիկի $(x_0,f(x_0))$ կետում տարված շոշափողի օրդինատն է $x$ կետում, ապա (7.2)-ից հետևում է, որ $\exists\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$f(x)-Y=\frac{f''(x_0)+2\alpha}{2}(x-x_0)^2>0\text{, երբ }0<\left|x-x_0\right|<\delta: ■$$

8. Շրջման կետ:

**Սահմանում:** *$f$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $(x_0,f(x_0))$ կետը կոչվում է շրջման կետ*, եթե գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $(x_0,f(x_0))$ կետում տարված շոշափողը $(x_0-\delta,x_0)$ միջակայքում ընկած է գրաֆիկի մի կողմում, իսկ $(x_0,x_0+\delta)$ միջակայքում՝ մյուս կողմում (խիստ իմաստով):*

Նախորդ թեորեմից բխում է, որ եթե $(x_0,f(x_0))$-ն շրջման կետ է և $x_0$ կետում $f$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է, ապա $f''(x_0)=0$:

**Թեորեմ 7.8:** *Դիցուք $x_0$ կետի շրջակայքում $f$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է: Եթե գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $(x_0-\delta,x_0)$ միջակայքում $f''(x)$ -ը մի նշանի է, իսկ $(x_0,x_0+\delta)$ միջակայքում՝ հակառակ նշանի, ապա $(x_0,f(x_0))$ -ն շրջման կետ է:*

► Գրենք Թեյլորի բանաձևը $n=1$ դեպքում՝ մնացորդային անդամը վերցնելով Լագրանժի տեսքով.

---

* Երբեմն շրջման կետ են անվանում ուղղակի $x_0$ աբսցիսը:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 :$$

Շոշափողի օրդինատը նշանակելով $y$, այստեղից ստանում ենք

$$f(x) - y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 ,$$

ինչից և բխում է թեորեմի պնդումը: ■

9. Ասիմպտոտներ:

**Սահմանումներ:**

*ա) $y = b$ ուղիղը կոչվում է $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հորիզոնական ասիմպտոտ, եթե*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{կամ} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b :$$

*բ) $y = kx + b$ ($k \neq 0$) ուղիղը կոչվում է $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկի թեք ասիմպտոտ, եթե*

$$\lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - (kx + b) \right] = 0 \quad \text{կամ} \quad \lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - (kx + b) \right] = 0 : \qquad (7.3)$$

*գ) $x = a$ ուղիղը կոչվում է $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ուղղահայաց (կամ վերտիկալ) ասիմպտոտ, եթե*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \infty \quad \text{կամ} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = \infty^{*} :$$

**Թեորեմ 7.9:** *Որպեսզի $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ ուղիղը հանդիսանա $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկի թեք ասիմպտոտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[ f(x) - kx \right] = b : \qquad (7.4)$$

► Քանի որ (7.4) պայմաններից երկրորդը համարժեք է (7.3)-ին, ապա ապացուցման կարիք ունի (7.4) պայմաններից միայն առաջինի անհրաժեշտությունը: Իսկ դա ապացուցելու համար (7.3) պայմանը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) - (kx + b) = \alpha \; , \; \alpha \to 0 \;\; (x \to \pm\infty) :$$

---

[*] Այստեղ $\infty$ նշանը հասկացվում է $+\infty$ կամ $-\infty$:

Հետևաբար՝

$$\frac{f(x)}{x}-k=\frac{\alpha}{x}+\frac{b}{x}\to 0 \quad (x\to\pm\infty):\blacksquare$$

**Օրինակ:** Գտնենք $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտները:

Քանի որ $f$ ֆունկցիան կենտ է, ապա նրա գրաֆիկը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

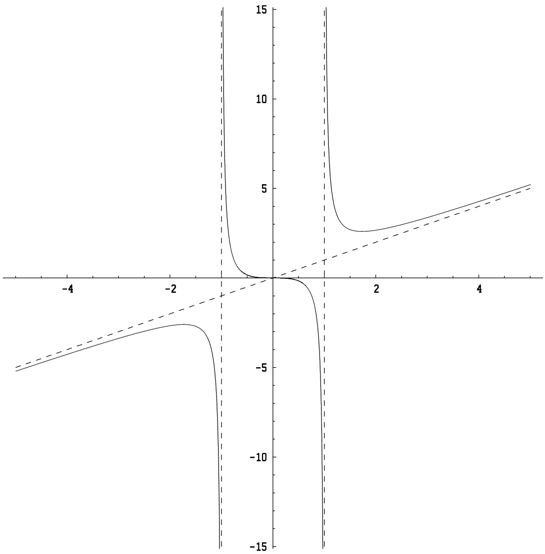
Հաշվենք (7.4) սահմանները.

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2}{x^2-1}\to 1 \ (x\to+\infty),\ f(x)-x=\frac{x}{x^2-1}\to 0 \ (x\to+\infty),$$

հետևաբար, $y=x$ ուղիղը թեք ասիմպտոտ է:

Ուղղահայաց ասիմպտոտները գտնելու համար հայտարարը հավասարեցնենք զրոյի՝ $x^2-1=0$, $x=\pm 1$: Հետևաբար, $x=-1$ և $x=1$ ուղիղները ասիմպտոտներ են:

Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա հետևյալ տեսքը:



Ընթերցողին առաջարկվում է գրաֆիկի տեսքը հետազոտել $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$ և $f''(x)=2x\dfrac{x^2+3}{(x^2-1)^3}$ ածանցյալների օգնությամբ:

## §8. ՈՒՌՈՒՑԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

### 1. Ուռուցիկ ֆունկցիայի սահմանումը և անընդհատությունը:

**Սահմանում**: *$f$ ֆունկցիան կոչվում է ուռուցիկ $X$ միջակայքում, եթե յուրաքանչյուր $x, y \in X$ կետերի զույգի և յուրաքանչյուր $\lambda \in [0,1]$ թվի համար տեղի ունի*

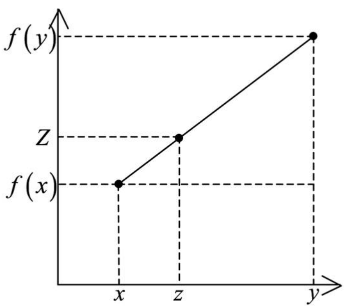
$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \le (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \tag{8.1}$$

*անհավասարությունը:*

Որպեսզի հասկանանք, թե (8.1) պայմանը ի՞նչ երկրաչափական իմաստ ունի, նշանակենք՝

$$z=(1-\lambda)x+\lambda y:$$

Այդ դեպքում (տե՛ս գծագիրը), եթե $f(x) \ne f(y)$, ապա




$$\lambda=\frac{z-x}{y-x}=\frac{Z-f(x)}{f(y)-f(x)}:$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$Z=(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),$$

որն իրենից ներկայացնում է $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $(x, f(x))$ և $(y, f(y))$ կետերը միացնող լարի օրդինատը $z$ կետում:

$f(x)=f(y)$ դեպքում (8.1)-ից հետևում է, որ $f(z) \le f(x)$:

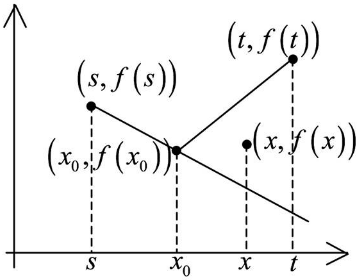
Այսպիսով, (8.1) անհավասարությունը երկրաչափորեն նշանակում է, որ *$[x,y]$ հատվածում $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ընկած է $(x, f(x))$ և $(y, f(y))$ կետերը միացնող լարից ներքև (լայն իմաստով):*

**Թեորեմ 8.1:** *Բաց միջակայքում ուռուցիկ ֆունկցիան անընդհատ է:*

► Դիցուք $f$ ֆունկցիան ուռուցիկ է $X$ բաց միջակայքում: Վերցնենք կամայական $x_0 \in X$ կետ և ապացուցենք, որ $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում անընդհատ է, ասենք թե՝ աջից.

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0): \qquad (8.2)$$

Այդ նպատակով դիտարկենք $s < x_0 < t$, $s, t \in X$ ֆիքսված կետերը:

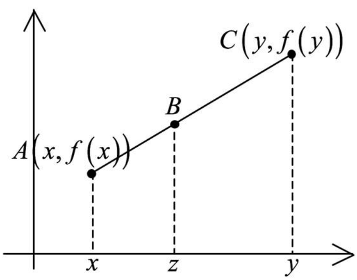



Եթե $x_0 < x < t$, ապա մի կողմից, $(x, f(x))$ կետը պետք է ընկած լինի $(s, f(s))$ և $(x_0, f(x_0))$ կետերով անցնող ուղղից վերև, իսկ մյուս կողմից՝ $(x_0, f(x_0))$ և $(t, f(t))$ կետերը միացնող ուղղից ներքև (տե՛ս գծագիրը): Այստեղից և բխում է (8.2)-ը: ■

**Թեորեմ 8.2:** *Որպեսզի $f$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ $X$ միջակայքում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $x < z < y$, $x, y, z \in X$ եռյակի համար բավարարվի*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \le \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \qquad (8.3)$$

*պայմանը:*




► $AB$ և $BC$ հատվածների անկյունային գործակիցները հավասար են (տե'ս գծագիրը): Եթե $B$ կետը աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց իջեցնենք ներքև, ապա $AB$-ի անկյունային գործակիցը կփոքրանա, իսկ $BC$-ինը՝ կմեծանա: Այդտեղից էլ բխում է (8.3) անհավասարությունը: ■

2. Դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիաներ:

**Թեորեմ 8.3:** *Որպեսզի $X$ միջակայքում դիֆերենցելի $f$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ածանցյալը լինի աճող (լայն իմաստով):*

► *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $x, y \in X$, $x < y$: Վերցնենք կամայական $z \in (x, y)$ կետ և օգտվենք (8.3) անհավասարությունից: Այդ անհավասարության մեջ $z$-ը մի դեպքում ձգտեցնելով $x$-ի, մյուս դեպքում՝ $y$-ի, կստանանք՝

$$f'(x) \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le f'(y): \qquad (8.4)$$

*Բավարարություն:* Եթե ֆունկցիայի ածանցյալը աճող է, ապա, Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն, բավարարվում է (8.3) պայմանը: Իսկ դա բավարար է, որ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ: ■

**Դիտողություն:** *(8.4) պայմանը նույնպես համարժեք է ուռուցիկությանը:*

**Հետևանք:** *Որպեսզի $X$ միջակայքում կրկնակի դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ, $f''(x) \ge 0$, $x \in X$ :*

Այս պնդումն անմիջապես բխում է ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանից:

**Թեորեմ 8.4:** *Որպեսզի $X$ բաց միջակայքում դիֆերենցելի $f$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր $(x_0, f(x_0))$ կետում տարված շոշափողը ընկած լինի գրաֆիկից ներքև (լայն իմաստով):*

► Շոշափողի՝ գրաֆիկից ներքև ընկած լինելու պայմանն է.

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ x \in X : \qquad (8.5)$$

Հետևաբար, մենք պետք է ապացուցենք, որ (8.4) և (8.5) պայմանները համարժեք են:

Երբ $x > x_0$, (8.5)-ը համարժեք է

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge f'(x_0)$$

գնահատականին, ինչը իր հերթին համարժեք է (8.4) անհավասարություն-ների առաջինին:

Երբ $x < x_0$, (8.5)-ը համարժեք է՝

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \le f'(x_0),$$

որը համարժեք է (8.4) անհավասարություններից երկրորդին: ■

<u>3. Ոչ դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիաներ:</u>

**Թեորեմ 8.4'**: Որպեսզի $f$ ֆունկցիան $X$ բաց միջակայքում լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր $(x_0, f(x_0))$ կետի համար գոյություն ունենա այդ կետով անցնող ուղիղ, որն ընկած է $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկից ներքև:

► *Անհրաժեշտություն:* Եթե $x', x \in X$ և $x < x_0 < x'$, ապա

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{և} \quad \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

ֆունկցիաները աճող են (համապատասխանաբար, ըստ $x$-ի և $x'$-ի) և տեղի ունի

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

անհավասարությունը:

Հետևաբար, մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, գոյություն ունեն

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \quad \text{և} \quad \lim_{x' \to x_0 +} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = f'_+(x_0)$$

ձախակողմյան և աջակողմյան ածանցյալները, ընդ որում,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \le \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} : \qquad (8.4')$$

Այժմ, եթե $(x_0, f(x_0))$ կետով անցնող $y = kx + b$ ուղիղն ընտրենք այնպես, որ $f'_-(x_0) \le k \le f'_+(x_0)$, ապա այդ ուղիղը կլինի որոնելին:

*Բավարարություն*: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Եթե $f$ -ը ուռուցիկ չէ, ապա $\exists\ x, y \in X$, $x_0 \in (x, y)$, այնպիսիք, որ $(x_0, f(x_0))$ կետն ընկած է $(x, f(x))$ և $(y, f(y))$ կետերը միացնող լարից խիստ վերև: Այս դեպքում գոյություն չունի $(x_0, f(x_0))$ կետով անցնող ուղիղ, որի կետերն ընկած են $f$ -ի գրաֆիկից ներքև: ■

**4. Յենսենի անհավասարությունը:**

**Թեորեմ 8.5:** *Դիցուք՝*

*ա) $f$ ֆունկցիան ուռուցիկ է $X$ միջակայքում,*

*բ) $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $n \geq 2$,*

*գ) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ թվերը դրական են և $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$:*

*Այդ դեպքում՝*

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n) : \qquad (8.6)$$

► Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 2$ դեպքում (8.6)-ը համարժեք է ուռուցիկության սահմանմանը:

Այժմ ենթադրենք, թե (8.6)-ը ճիշտ է $n$ գումարելիի դեպքում և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է $(n+1)$ գումարելիի դեպքում: Այսինքն. ունենք՝

$$x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in X \quad \text{և} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,$$

և պետք է ապացուցենք, որ տեղի ունի

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

անհավասարությունը:

Օգտվենք ինդուկտիվ ենթադրությունից. կունենանք՝

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1}) =$$

$$= f\left(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1} + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) \cdot (\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1})\right) \leq$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1}\right) \leq$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}):$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

Երբ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ պայմանը չի բավարարվում, Յենսենի անհավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}\right) \le \frac{\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} :$$

(8.7)

Դա ապացուցելու համար նշանակենք՝ $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$ : Այդ դեպքում $\beta_1 + \ldots + \beta_n = 1$ և, գրելով Յենսենի անհավասարությունն այդ գործակիցներով, կստանանք (8.7)-ը:

**Հետևանք (Միջինների անհավասարությունը)**:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}; \quad a_i > 0,\ i = 1,\ldots,n : \tag{8.8}$$

► Քանի որ $f(x) = e^x$ ֆունկցիան ուռուցիկ է $(-\infty,\infty)$ միջակայքում $\left(f''(x) > 0\right)$, ապա, ըստ Յենսենի անհավասարության՝

$$e^{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}} \le \frac{e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}}{n} :$$

Այստեղ վերցնելով $x_i = \ln a_i$, կստանանք (8.8)-ը: ■

<u>5. Հյոլդերի անհավասարությունը:</u>

**Թեորեմ 8.6:** *Դիցուք՝*

*ա)* $p > 1,\ q > 1$ *և* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *:*

*բ)* $a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n$ *թվերը դրական են:*

*Այդ դեպքում՝*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} : \tag{8.9}$$

► Նշանակենք՝

$$A_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}} :$$

Այդ դեպքում

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i^q = 1, \tag{8.10}$$

հետևաբար (8.9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \le 1: \tag{8.11}$$

Այժմ $x_i$ և $y_i$ թվերն ընտրենք այնպես, որ

$$A_i = e^{\frac{x_i}{p}}, \quad B_i = e^{\frac{y_i}{q}}:$$

Այժմ, հաշվի առնելով $e^x$ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը և ա) պայմանը, կստանանք՝

$$A_i B_i = e^{\frac{1}{p}x_i + \frac{1}{q}y_i} \le \frac{1}{p} e^{x_i} + \frac{1}{q} e^{y_i} = \frac{1}{p} A_i^p + \frac{1}{q} B_i^q:$$

Այս անհավասարությունը գրենք $i = 1,2,\ldots,n$ ինդեքսների համար և գումարենք ստացված անհավասարությունները: Կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} A_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} B_i^q:$$

Հաշվի առնելով (8.10)-ը, այստեղից կստանանք (8.11)-ը: ■

Երբ բ) պայմանը չի բավարարվում, Հյոլդերի անհավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \le \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q}:$$

<u>**6. Մինկովսկիի անհավասարությունը:**</u>

**Թեորեմ 8.7:** *Դիցուք $a_1,\ldots,a_n$; $b_1,\ldots,b_n$ թվերը դրական են և $p > 1$: Այդ դեպքում՝*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right\}^{1/p} \le \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{1/p}: \tag{8.12}$$

► Ունենք՝

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}:$$

Աջ կողմում գրված գումարներից յուրաքանչյուրի համար կիրառենք Հյոլդերի անհավասարությունը՝ հաշվի առնելով $(p-1)q=p$ հավասարությունը (որը ստացվում է $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ հավասարությունից): Կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}:$$

Ստացված անհավասարության երկու կողմը բաժանելով $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$ արտահայտության վրա՝ կստանանք (8.12)-ը: ■

Երբ $a_1,\dots,a_n$; $b_1,\dots,b_n$ թվերը դրական չեն, Մինկովսկու անհավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right\}^{1/p}\le\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right\}^{1/p}:$$

Մասնավոր դեպքում՝ երբ $p=2$, այս անհավասարությունն ապացուցել է Կոշին:

# V ԳԼՈՒԽ

# ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎ

## §1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ: $F(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական $X$ միջակայքում, եթե

$$F'(x)=f(x)\,,\quad x\in X\,:$$

Այս պարագրաֆում մենք կենթադրենք, որ դիտարկվող ֆունկցիաներն ունեն նախնական: Հետագայում կապացուցենք, որ յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա ունի նախնական:

Եթե $F(x)$-ը $f(x)$-ի նախնական է, ապա $(F(x)+C)$-ն նույնպես կլինի $f(x)$-ի նախնական, որտեղ $C$-ն կամայական հաստատուն է: Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանի համաձայն, ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը՝ եթե $G(x)$-ը $f(x)$-ի նախնական է, ապա գոյություն ունի $C_G$ հաստատուն, այնպիսին, որ $G(x)=F(x)+C_G\,,\ x\in X$ :

Այսպիսով, եթե $f(x)$-ը անընդհատ է $X$ միջակայքում, ապա այն ունի նախնական՝ $F(x)$, և $f(x)$-ի բոլոր նախնական ֆունկցիաները կարելի է ներկայացնել

$$F(x)+C$$

տեսքով, որտեղ $C$-ն կամայական հաստատուն է:

$f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնականների բազմությունը կոչվում է այդ ֆունկցիայի *անորոշ ինտեգրալ* և նշանակվում է

$$\int f(x)dx$$

սիմվոլով: Հետևաբար,

$$\int f(x)dx=F(x)+C\,,\quad C\in R\,,$$

որտեղ $F(x)$-ը $f(x)$-ի որևէ նախնական է, իսկ $C$-ն՝ կամայական հաստատուն:

$f(x)dx$ -ը կոչվում է *ենթինտեգրալ արտահայտություն*, իսկ $f(x)$ -ը՝ *ենթինտեգրալ ֆունկցիա*:

Անորոշ ինտեգրալի սահմանումից անմիջապես բխում են հետևյալ հատկությունները.

$1^0.\ d\int f(x)dx = f(x)dx$ :  $2^0.\ \int F'(x)dx = F(x) + C$ :

Ելնելով ֆունկցիաների ածանցման բանաձևերից՝ կարող ենք կազմել անորոշ ինտեգրալների հետևյալ աղյուսակը.

1. $\int 0dx = C$ :
2. $\int 1dx = \int dx = x + C$ :
3. $\int x^\mu dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$:
4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ :
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ , $\int e^x dx = e^x + C$ :
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$ :
7. $\int \cos xdx = \sin x + C$ :
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ :
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ :
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$ :
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ :

**2. Ինտեգրման պարզագույն կանոնները:**

*ա) Եթե* $a$ *-ն հաստատուն է, ապա*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx := aF(x) + C \quad (F'(x) = f(x)),$$

*այսինքն՝ հաստատուն արտադրիչը կարելի է ինտեգրալի նշանի տակից դուրս հանել:*

*բ)* $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx := F(x) \pm G(x) + C$ ,

$$(G'(x) = g(x)),$$

*այսինքն՝ ֆունկցիաների գումարի (տարբերության) ինտեգրալը հավասար է այդ ֆունկցիաների ինտեգրալների գումարին (տարբերությանը):*

*գ) Եթե* $F(x)$ *-ը* $f(x)$ *-ի որևէ նախնական է՝* $F'(x) = f(x)$ *, ապա*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \ :$$

Այս կանոնները բխում են անորոշ ինտեգրալի սահմանումից և ածանցման համապատասխան կանոններից:

**Օրինակներ:**

1) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$ ,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}dx = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1):$$

2) $\int \sin mx dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C$ , $\int \cos mx dx = \frac{1}{m}\sin mx + C \quad (m \neq 0):$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0):$

4) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C :$

5) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C :$

6) Քանի որ $\cos^2 mx = \frac{1+\cos 2mx}{2}$ և $\sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2}$ ,

ապա $\int \cos^2 mx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4m}\sin 2mx + C,\ \int \sin^2 mx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4m}\sin 2mx + C$ :

<u>3. Փոփոխականի փոխարինում:</u> *Եթե $f(t)$ և $\varphi'(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են համապատասխանաբար $T$ և $X$ միջակայքերում, ընդ որում, $\varphi(X) \subset T$ , ապա*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C\,, \tag{1.1}$$

*որտեղ $F'(t) = f(t)$ :*

Այս բանաձևը բխում է անորոշ ինտեգրալի սահմանումից և բարդ ֆունկցիայի ածանցման բանաձևից:

Փոփոխականի փոխարինման (1.1) բանաձևը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt\,, \tag{1.1'}$$

որտեղ ենթադրվում է, որ աջ կողմի ինտեգրալը հաշվելուց հետո, արդյունքում պետք է տեղադրել $t = \varphi(x)$ :

(1.1') բանաձևը կարելի է գրել նաև

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt \tag{1.1''}$$

տեսքով:

Մասնավորապես՝ $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$ :

**Օրինակներ:**

1) $\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d\sin x = \int t^3 dt = \dfrac{t^4}{4} + C = \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$ ,

(այստեղ՝ $t = \sin\, x$ ):

2) $\int \sin^3 x dx = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x = -\int (1-t^2)dt =$

$= -t + \dfrac{t^3}{3} + C = -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$:

Հաճախ հարկ է լինում (1.1') փոփոխականի փոխարինման բանաձևը օգտագործել հակառակ ուղղությամբ՝

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx:$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ աջ կողմի ինտեգրալը հաշվելուց հետո, արդյունքում պետք է տեղադրել $x = \varphi^{-1}(t)$ :

Որպես օրինակ հաշվենք հետևյալ ինտեգրալը.

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, $a > 0$, $-a \le x \le a$ :

Նշանակենք՝ $x = a\sin t$, $dx = a\cos dt$, $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ ($x$ և $t$ տառերի տեղերը փոխված են):

Տեղադրելով՝ կստանանք

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C:$$

Հաշվենք մեկ այլ հաճախ հանդիպող ինտեգրալ.

4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$ ($\alpha \ge 0$):

Նշանակենք՝ $\sqrt{x^2 + \alpha} = t - x$ : Կունենանք՝

$$x^2 + \alpha = t^2 - 2tx + x^2,\ x = \frac{t^2 - \alpha}{2t},$$

հետևաբար,

$$\sqrt{x^2 + \alpha} = t - \frac{t^2 - \alpha}{2t} = \frac{t^2 + \alpha}{2t},\ dx = \frac{t^2 + \alpha}{2t^2}dt:$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C:$$

**<u>4. Մասերով ինտեգրում:</u>** Ապացուցենք, որ *եթե $u$ և $v$ ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են $X$ միջակայքում*[*], *ապա*

$$\int udv = uv - \int vdu: \tag{1.2}$$

[*] $f$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ դիֆերենցելի $X$ միջակայքում, եթե $f' \in C(X)$ :

Արտադրյալի դիֆերենցման կանոնի համաձայն` $d\left(uv\right)=udv+vdu$, ուստի` $udv=d\left(uv\right)-vdu$: Ինտեգրելով և օգտվելով տարբերության ինտեգրալի բանաձևից` կստանանք (1.2)-ը:

**Օրինակներ:**

1) $\int x\cos xdx=\int xd\sin x=x\sin x-\int \sin xdx=x\sin x+\cos x+C$:

2) $\int x^3\ln xdx=\int \ln xd\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4}\ln x-\int \frac{x^4}{4}d\ln x=$

$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$:

3) $\int arctgxdx=xarctgx-\int xdarctgx=xarctgx-\int \frac{x}{1+x^2}dx=$

$=xarctgx-\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$:

4) $I=\int \sqrt{x^2+\alpha}dx=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int xd\sqrt{x^2+\alpha}=x\sqrt{x^2+\alpha}-$

$-\int \frac{x^2+\alpha-\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int \sqrt{x^2+\alpha}dx+\alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$:

Հաշվի առնելով նախորդ կետի 4) օրինակը` այստեղից կստանանք

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C$$

բանաձևը:

5) $I_1=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a}\int \cos bxde^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx$,

$I_2=\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{a}\int \sin bxde^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bxdx$:

Տեղադրելով մեկը մյուսի մեջ` կստանանք

$$I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}I_1,$$

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I_2$$

բանաձևերը: Այստեղից կարող ենք հաշվել $I_1$-ը և $I_2$-ը`

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C:$$

6) $$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int xd(x^2+a^2)^{-n}=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2a^2nI_{n+1}:$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$I_{n+1}=\frac{1}{2a^2n}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2a^2n}I_n:$$

Այսպիսով, $I_{n+1}$-ը արտահայտվեց $I_n$-ի միջոցով: Այսպիսի բանաձևը կոչվում է *ռեկուրենտ բանաձև*:

Հաշվի առնելով, որ

$$I_1=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C,$$

մենք կարող ենք հերթականությամբ հաշվել $I_2$-ը, $I_3$-ը և այլն:

Վերջում նշենք, որ տարրական ֆունկցիայի ինտեգրալը հաճախ տարրական ֆունկցիա չէ: Ահա այդպիսի օրինակներ[*] .

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx:$$

## §2. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

**1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը:** Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $[a,b]$ հատվածում[**]: Կետերի $x_0,x_1,...,x_n$ շարվածքը կոչվում է $[a,b]$ *հատվածի տրոհում*, եթե $a=x_0<x_1<...<x_n=b$:

Դիտարկենք այդ հատվածի կամայական $P$ տրոհում՝

[*] Г.Харди, Интегрирование элементарных функций. М., 1935.

[**] $f$-ը կարող է և $a,b$ ծայրակետերում որոշված չլինել:

$$P: a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b :$$

Նշանակենք՝ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,1,...,n-1$ և $\lambda = \max\limits_{0 \le i < n} \Delta x_i$: $\lambda$ -ն կոչվում է $P$ *տրոհման տրամագիծ*:

$[x_i, x_{i+1}]$ տրոհման հատվածներից յուրաքանչյուրում կամայապես վերցնենք մեկ $\xi_i$ կետ՝

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1},\ 0 \le i \le n-1,$$

և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

որը կոչվում է *Ռիմանի ինտեգրալային գումար*:

Կասենք, որ $\lambda$ -ն $0$ -ի ձգտելիս, $\sigma$ ինտեգրալային գումարը ձգտում է $I$ վերջավոր սահմանին և կգրենք՝

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I ,$$

եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $\lambda < \delta$ տրամագծով կամայական տրոհմանը համապատասխանող յուրաքանչյուր $\sigma$ գումար բավարարում է $|\sigma - I| < \varepsilon$ անհավասարությանը:

Եթե այդ $I$ վերջավոր սահմանը գոյություն ունի, ապա այն կոչվում է $f$ *ֆունկցիայի ինտեգրալ (կամ՝ որոշյալ ինտեգրալ, կամ՝ Ռիմանի ինտեգրալ)* $[a,b]$ հատվածում, նշանակվում է հետևյալ կերպ՝

$$I = \int_a^b f(x)dx ,$$

և ասում են, որ $f$ ֆունկցիան *ինտեգրելի է* $[a,b]$ *հատվածում* $f \in \Re[a,b]$:

<u>2. Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը:</u>

**Թեորեմ 2.1**: *Ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է:*

► Ապացուցենք, որ եթե $f \in \Re[a,b]$, ապա այն սահմանափակ է, օրինակ՝ վերևից:

Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ. $f$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածում վերևից սահմանափակ չէ: Այդ դեպքում տրոհման հատվածներից գոնե մեկի վրա այն նույնպես վերևից սահմանափակ չէ:

Թող, որ դա լինի $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ հատվածը: Ֆիքսելով $\xi_i$, $i \neq i_0$, կետերը և փոփոխելով $\xi_{i_0}$-ն՝ $f(\xi_{i_0})$-ն, ու նրա հետ մեկտեղ, նաև $\sigma$ գումարը, կարող ենք կամայապես մեծ դարձնել: Հետևաբար, $\sigma$ գումարը վերջավոր սահման չունի, ինչը հակասում է $f$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությանը: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմ 2.1-ի պնդման հակադարձը ճշմարիտ չէ: Օրինակ,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$$

*Դիրիխլեի ֆունկցիան* թվային առանցքի յուրաքանչյուր հատվածում սահմանափակ է, սակայն ինտեգրելի չէ: Իսկապես, օրինակ $[0,1]$ հատվածում այս ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը ըստ $\xi_i$ ռացիոնալ կետերի հավասար է 1, իսկ ըստ իռացիոնալ կետերի՝ 0:

Այսպիսով, ստորև մենք կդիտարկենք միայն սահմանափակ ֆունկցիաները:

<u>**3. Դարբուի գումարները:**</u> Դիցուք $f$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a,b]$ հատվածում և $P$-ն այդ հատվածի կամայական տրոհում է: Նշանակենք՝

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \; M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \; \left(0 \le i \le n-1\right)$$

և ներմուծենք

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \;, \; S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

գումարները, որոնց համապատասխանաբար կոչում են *Դարբուի ստորին և վերին գումարներ* ( $P$ տրոհման համար):

Քանի որ

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i \,, \; 0 \le i \le n-1 \,,$$

ապա, բազմապատկելով այս անհավասարությունների բոլոր կողմերը $\Delta x_i$ -երով ու ստացված անհավասարությունները գումարելով, կստանանք՝

$$s \le \sigma \le S :$$

**Դիտողություն:** Ֆիքսած տրոհման դեպքում $s$ և $S$ գումարները ֆիքսված են (անփոփոխ են), իսկ $\sigma$ գումարը կարող է փոփոխվել ($\xi_i$ կետերի փոփոխման հաշվին): Մյուս կողմից, $\xi_i$ կետը փոփոխելով $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում, կարող ենք $f(\xi_i)$-ն ցանկացած չափով մոտեցնել թե՛ $m_i$-ին, և թե՛ $M_i$-ին: Այդ պատճառով էլ $\sigma$ գումարը կարող է կամայապես մոտ լինել թե՛ $s$ -ին, և թե՛ $S$ -ին:

Այսինքն՝ *ֆիքսված տրոհման դեպքում $s$ -ը և $S$ -ը հանդիսանում են $\sigma$ ինտեգրալային գումարների, համապատասխանաբար, ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերը:*

Դարբուի գումարներն օժտված են հետևյալ երկու հատկություններով.

**Առաջին հատկություն:** *Տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս՝ Դարբուի ստորին գումարը կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ փոքրանալ:*

► Ապացուցենք միայն վերին գումարին վերաբերող պնդումը: Ենթադրենք, թե $x_i \left(0 \le i \le n\right)$ տրոհման կետերին ավելացնում ենք ևս մեկ կետ՝ $x'$, ընդ որում,

$$x_k < x' < x_{k+1} :$$

Եթե այս նոր տրոհմանը համապատասխանող վերին գումարը նշանակենք $S'$-ով, ապա այն նախկին $S$-ից կտարբերվի ընդամենը նրանով, որ վերջինիս մեջ մտնող $M_k(x_{k+1} - x_k)$ գումարելին փոխարինված է

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x')$$

գումարով, որտեղ $\overline{M}_k$-ը և $\overline{\overline{M}}_k$-ը $f$ ֆունկցիայի ճշգրիտ վերին եզրերն են համապատասխանաբար $[x_k, x']$ և $[x', x_{k+1}]$ հատվածներում:

Քանի որ $\overline{M}_k \le M_k$ և $\overline{\overline{M}}_k \le M_k$, ապա

$$\overline{M}_k(x' - x_k) \le M_k(x' - x_k),$$

$$\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') \le M_k(x_{k+1} - x') :$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կստանանք

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') \le M_k(x_{k+1} - x_k)$$

անհավասարությունը, որտեղից էլ հետևում է, որ $S' \le S$ : ■

**Լրացում:** $f$ ֆունկցիայի տատանումն ամբողջ $[a,b]$ հատվածի վրա նշանակենք $\Omega$-ով: Քանի որ $M_k - \overline{M}_k$ և $M_k - \overline{\overline{M}}_k$ տարբերությունները չեն գերազանցում $\Omega$-ն, ուստի $S - S'$ տարբերությունը չի գերազանցի $\Omega\lambda$ արտադրյալը ($\Omega \Delta x_k \le \Omega\lambda$): Եթե տրոհման կետերին ավելացվի $m$ հատ կետ, ապա վերին գումարների տարբերությունը չի գերազանցի $m\Omega\lambda$ թիվը:

**Երկրորդ հատկություն:** *Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը:*

► Դիցուք $P_1$-ը և $P_2$-ը $[a,b]$ հատվածի կամայական տրոհումներ են: Նրանց համապատասխան Դարբուի գումարները նշանակենք $s_1$, $S_1$ և $s_2$, $S_2$ : Պետք է ապացուցենք, որ

$$s_1 \le S_2 :$$

Այդ նպատակով կազմենք մի նոր $P$ տրոհում, որը ստացվում է $P_1$ և $P_2$ տրոհումները միավորելիս, այսինքն՝ որպես $P$ տրոհման կետեր վերցնում ենք $P_1$-ի ու $P_2$-ի տրոհման բոլոր կետերը: Այս նոր տրոհմանը համապատասխանող Դարբուի գումարները նշանակենք $s$ և $S$ : Առաջին հատկության համաձայն, ունենք՝

$$s_1 \le s\,; \quad S \le S_2 :$$

Սակայն՝ $s \le S$, որպես նույն տրոհմանը համապատասխանող ստորին և վերին գումարներ: Համադրելով ստացված երեք անհավասարություն-ները՝ ստանում ենք պահանջվող անհավասարությունը: ■

Այժմ դիտարկենք բոլոր ստորին գումարների բազմությունը՝ $\{s\}$ (բոլոր տրոհումներին համապատասխանող): Այն սահմանափակ է վերևից յուրաքանչյուր $S$ վերին գումարով (երկրորդ հատկությանը համաձայն):

Նշանակենք՝

$$I_* = \sup\{s\} :$$

Քանի որ ճշգրիտ վերին եզրը վերին եզրերից փոքրագույնն է, ապա $I_* \le S$, որտեղ $S$ -ը կամայական վերին գումար է: Ուստի, նշանակելով

$$I^* = \inf\{S\},$$

կստանանք՝

$$I_* \le I^* :$$

Այսպիսով՝

$$s \le I_* \le I^* \le S : \tag{2.1}$$

$I_*$ և $I^*$ թվերը կոչվում են, համապատասխանաբար, *Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալներ:*

4. <u>Ինտեգրալի գոյության պայմանը:</u>

**Թեորեմ 2.2:** *Ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա*

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0 \tag{2.2}$$

*հավասարությունը:*

► *Անհրաժեշտություն:* Ունենք, որ $f$ ֆունկցիան ինտեգրելի է, այսինքն՝

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I ,$$

կամ, որ նույնն է, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon : \tag{2.3}$$

Քանի որ ֆիքսած տրոհման դեպքում $s$ -ը և $S$ -ը հանդիսանում են $\sigma$ ինտեգրալային գումարների ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերը (տե'ս կետ 3-ի դիտողությունը), ապա

$$\lambda < \delta \Rightarrow I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon :$$

Հետևաբար՝

$$\lambda < \delta \Rightarrow S - s \le 2\varepsilon ,$$

ինչը նշանակում է, որ տեղի ունի (2.2) պայմանը:

*Բավարարություն:* (2.2) պայմանը նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow S - s < \varepsilon : \tag{2.4}$$

Այստեղից և (2.1) անհավասարություններից հետևում է, որ

$$I_* = I^* :$$

Նշանակենք $I = I_*$ և ցույց տանք, որ

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I :$$

Քանի որ $s \le I \le S$ և $s \le \sigma \le S$, ապա հաշվի առնելով (2.4)-ը, կստանանք՝

$$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon : \blacksquare$$

Վերադառնալով Դարբուի գումարների նշանակումներին՝ ինտեգրալի գոյության (2.2) պայմանը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i = 0 :$$

Նշանակելով $\omega_i = M_i - m_i$ (ֆունկցիայի տատանումը $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածի վրա)՝ այդ պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0 : \tag{2.2$'$}$$

**Թեորեմ 2.3 (Դարբու):** *Յուրաքանչյուր սահմանափակ $f$ ֆունկցիայի համար ճշմարիտ են հետևյալ սահմանային առնչությունները.*

$$\lim_{\lambda \to 0} s = I_*, \ \lim_{\lambda \to 0} S = I^* : \tag{2.5}$$

► Ապացուցենք նշված առնչություններից միայն երկրորդը: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ $I^*$-ը $S$-երի ճշգրիտ ստորին եզրն է, ապա գոյություն ունի մի $P_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ տրոհում, որի համապատասխան $S_1$ վերին գումարը բավարարում է

$$S_1 < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

պայմանին:

Այժմ վերցնենք կամայական $P$ տրոհում, որի $\lambda$ տրամագիծը բավարարում է

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{2m\Omega} \coloneqq \delta \tag{2.7}$$

անհավասարությանը ($\Omega$-ն $f$-ի տատանումն է $[a,b]$ հատվածում): Այդ տրոհմանը համապատասխանող Դարբուի վերին գումարը նշանակենք $S$-ով և ապացուցենք

$$S - I^* < \varepsilon \tag{2.8}$$

անհավասարությունը, որը համարժեք է (2.5)-ի երկրորդ առնչությանը:

Այդ նպատակով կազմենք $P_2 \coloneqq P \cup P_1$ տրոհումը և նրա համապատասխան Դարբուի վերին գումարը նշանակենք $S_2$-ով: Ունենք՝

$$S - I^* = (S - S_2) + (S_2 - I^*) \,: \tag{2.9}$$

Դարբուի գումարների առաջին հատկության լրացմանը համաձայն՝

$$S - S_2 \le m\Omega\lambda \ ,$$

քանի որ $P_2$-ը ստացվում է $P$-ից՝ ավելացնելով $P_1$-ի կետերը, իսկ այդ ավելացված կետերի քանակը չի գերազանցում $m$-ը:

Այժմ, հաշվի առնելով (2.7)-ը, կստանանք՝

$$S - S_2 < \frac{\varepsilon}{2} \ : \tag{2.10}$$

Մյուս կողմից, $P_2$-ը ստացվում է $P_1$-ից՝ ավելացնելով $P$-ի կետերը, ուստի՝ $S_2 \le S_1$: Հաշվի առնելով (2.6)-ը, կստանանք

$$S_2 - I^* < \frac{\varepsilon}{2} \,: \tag{2.11}$$

Համեմատելով (2.9) - (2.11)-ը՝ կստանանք (2.8)-ը: ■

**Հետևանք 1:** *Ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $I_* = I^*$ *:*

Այս պնդումը հետևում է ինտեգրալի գոյության (2.2) պայմանից և Դարբուի թեորեմից:

**Հետևանք 2:** *Եթե սահմանափակ* $f$ *ֆունկցիան այնպիսին է, որ կամայական* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի մի այնպիսի* $P$ *տրոհում, որին համապատասխանող Դարբուի գումարները բավարարում են* $S - s < \varepsilon$ *պայմանին, ապա* $f$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է:*

Ապացույցը բխում է (2.1)-ից և նախորդ հետևանքից:

## §3. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐ

Օգտվելով ինտեգրալի գոյության (2.2') պայմանից կամ Դարբուի թեորեմի երկրորդ հետևանքից՝ կարող ենք բացահայտել ինտեգրելի ֆունկցիաների որոշ դասեր:

**Թեորեմ 3.1:** *Եթե* $f$ *ֆունկցիան անընդհատ է* $[a,b]$ *հատվածում, ապա այն ինտեգրելի է այդ հատվածում*[*]*:*

► Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Կանտորի թեորեմի հետևանքի համաձայն, գոյություն ունի մի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ կամայական $P$ տրոհման համար՝ $\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i < \varepsilon$ :

Այդ դեպքում՝ $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a)$, այսինքն՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \to 0 \text{, երբ } \lambda \to 0 :$$

Ինտեգրալի գոյության (2.2) պայմանի համաձայն՝ $f \in \Re[a,b]$: ■

**Թեորեմ 3.2:** *Եթե* $f$ *ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանափակ* $(a,b)$ *բաց միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է* $[a,b]$ *հատվածում:*

[*] Կարճ՝ $C[a,b] \subset \Re[a,b]$:

► Վերցնենք $b-a$-ից փոքր կամայական $\varepsilon>0$ թիվ: Կանտորի թեորեմի հետևանքի համաձայն, գոյություն ունի $\left[a+\frac{\varepsilon}{2},b-\frac{\varepsilon}{2}\right]$ հատվածի

$$a+\frac{\varepsilon}{2}=x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}=b-\frac{\varepsilon}{2}$$

տրոհում, այնպիսին, որ $\omega_i<\varepsilon$, $i=1,2,\ldots,n-2$:

Ընտրենք $[a,b]$ հատվածի հետևյալ $P$ տրոհումը.

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b:$$

Այդ տրոհման համար կունենանք՝

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<2\Omega\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon(b-a),$$

որտեղ $\Omega$-ն $f$-ի տատանումն է $[a,b]$ հատվածում:

Այժմ, Դարբուի թեորեմի երկրորդ հետևանքի համաձայն, $f$-ը ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում: ■

Նման ձևով կապացուցվի նաև հետևյալ պնդումը.

*եթե $[a,b]$ հատվածում սահմանափակ $f$ ֆունկցիան ինտեգրելի է կամայական $[a',b']\subset(a,b)$ հատվածում, ապա այն ինտեգրելի է նաև $[a,b]$ հատվածում:*

**Թեորեմ 3.3:** *Եթե $f$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a,c]$ և $[c,b]$ հատվածներում ($a<c<b$), ապա այն ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում:*

► Վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ: $f$ ֆունկցիայի $[a,c]$ և $[c,b]$ հատվածներում ինտեգրելիությունից հետևում է, որ գոյություն ունեն այդ հատվածների $P_1$ և $P_2$ տրոհումներ՝ համապատասխանաբար Դարբուի $s_1$, $S_1$ և $s_2$, $S_2$ գումարներով, այնպիսիք, որ

$$S_1-s_1<\frac{\varepsilon}{2},\ S_2-s_2<\frac{\varepsilon}{2}:$$

Որպես $[a,b]$ հատվածի $P$ տրոհում վերցնենք $P_1$ և $P_2$ տրոհումների միավորումը: $s:=s_1+s_2$-ը և $S:=S_1+S_2$-ը կհանդիսանան այս տրոհման Դարբուի գումարները, հետևաբար,

$$S - s = S_1 - s_1 + S_2 - s_2 < \varepsilon :$$

Համաձայն Դարբուի թեորեմի երկրորդ հետևանքի, $f$ -ը ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում: ■

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիա՝ կհամոզվենք, որ այս թեորեմի եզրակացությունը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ $[a,b]$ հատվածը տրոհվում է ոչ թե երկու, այլ կամայական վերջավոր թվով հատվածների:

Թեորեմ 3.2-ից և թեորեմ 3.3-ից բխում է, որ *եթե հատվածում սահմանափակ $f$ ֆունկցիան խզվում է ընդամենը վերջավոր թվով կետերում, ապա այն ինտեգրելի է այդ հատվածում:*

**Թեորեմ 3.4:** *Հատվածում մոնոտոն ֆունկցիան ինտեգրելի է:*

► Ապացուցենք այն դեպքում, երբ ֆունկցիան աճող է (լայն իմաստով): Ունենք՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ f(x_{i+1}) - f(x_i) \right] \Delta x_i \le \lambda \left[ f(b) - f(a) \right],$$

որտեղ $\lambda$ -ն տրոհման տրամագիծն է: Հետևաբար՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \to 0 \;\; (\lambda \to 0) : ■$$

Ճիշտ է նաև հետևյալ պնդումը. *եթե $f$ -ը մոնոտոն է և սահմանափակ $(a,b)$ բաց միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում:*

Ապացուցվում է թեորեմ 3.2-ի սխեմայով:

## §4. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

### 1. Հավասարությունով արտահայտվող հատկություններ:

**Թեորեմ 4.1:** *Եթե $f$ -ը ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում, ապա այն ինտեգրելի կլինի նաև $[a,c]$ և $[c,b]$ ($a < c < b$ ) հատվածներում, ընդ որում,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx : \tag{4.1}$$

► Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի $P$ տրոհում, այնպիսին, որ այն պարունակի $c$ կետը: Այդ դեպքում՝

$$\sum_a^b \omega_i \Delta x_i = \sum_a^c \omega_i \Delta x_i + \sum_c^b \omega_i \Delta x_i \ :$$

Քանի որ աջ կողմի գումարելիները դրական են, ապա

$$\sum_a^c \omega_i \Delta x_i \le \sum_a^b \omega_i \Delta x_i \to 0 \ (\lambda \to 0), \ \sum_c^b \omega_i \Delta x_i \le \sum_a^b \omega_i \Delta x_i \to 0 \ (\lambda \to 0):$$

Հետևաբար, $f$ -ը ինտեգրելի է $[a,c]$ և $[c,b]$ հատվածներում:

(4.1) հավասարությունն ապացուցելու համար գրենք համապատասխան հավասարությունը Ռիմանի գումարների համար.

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i \ :$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք (4.1)-ը: ■

Մինչ այժմ մենք սահմանել ենք $f$ ֆունկցիայի ինտեգրալ $[a,b]$ հատվածում, որտեղ $a<b$: Օգտակար է ընդլայնել սահմանումը $b \le a$ դեպքում՝

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{և} \quad \int_a^a f(x)dx = 0 \ :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ այս պայմանավորվածության դեպքում (4.1) հավասարությունը մնում է ուժի մեջ՝ $a$, $b$ և $c$ կետերի կամայական դասավորվածության դեպքում, միայն թե $f$ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի դիտարկվող հատվածներից ամենամեծում:

**Թեորեմ 4.2:** *Դիցուք $f$ և $g$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են $[a,b]$ հատվածում և $C$ -ն որևէ հաստատուն է: Այդ դեպքում*

*ա) $f(x) \pm g(x)$, բ) $Cf(x)$, գ) $|f(x)|$, դ) $f(x)g(x)$*

*ֆունկցիաները նույնպես կլինեն ինտեգրելի $[a,b]$ հատվածում, ընդ որում,*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \ , \qquad (4.2)$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx : \tag{4.3}$$

► ա) և բ) ֆունկցիաների ինտեգրելիությունն ու (4.2), (4.3) հավասարությունները բխում են Ռիմանի համապատասխան գումարների հավասարություններից:

*գ)-ի ապացույցը:* Քանի որ $\left||f(x)| - |f(y)|\right| \le |f(x) - f(y)|$, իսկ

$$\omega_i(f) = \sup_{x,y\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x) - f(y)|, \ \omega_i(|f|) = \sup_{x,y\in[x_i,x_{i+1}]} \left||f(x)| - |f(y)|\right|,$$

ապա $\omega_i(|f|) \le \omega_i(f)$ և $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(|f|)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x \to 0 \ (\lambda \to 0)$: ■

*դ)-ի ապացույցը:* Քանի որ $f$ և $g$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են, ապա դրանք սահմանափակ են՝ $|f(x)| \le L$, $|g(x)| \le K$, $x \in [a,b]$:

Մյուս կողմից, երբ $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$, ունենք՝

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \le |f(x)g(x) - f(x)g(y)| +$$
$$+ |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \le L\omega_i(g) + K\omega_i(f):$$

Հետևաբար՝ $\omega_i(fg) \le L\omega_i(g) + K\omega_i(f)$, ուստի՝

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(fg)\Delta x_i \le L\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(g)\Delta x_i + K\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i \to 0 \ (\lambda \to 0) : ■$$

<u>2. Անհավասարություններով արտահայտվող հատկություններ:</u>

**Թեորեմ 4.3:** *Դիցուք՝ $f, g \in \Re[a,b]$: Այդ դեպքում*

*ա) եթե $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$, ապա*

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0,$$

*բ) եթե $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$, ապա*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx,$$

*գ) եթե* $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, *ապա*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

*դ)* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ *:*

► *ա)* Քանի որ $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$, ուստի $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$ :

Այս անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք ա)-ն:

*բ)*-ն ապացուցելու համար ա)-ն կկիրառենք $g - f$ ֆունկցիայի համար և կօգտվենք նախորդ թեորեմի (4.2) հավասարությունից:

*գ)*-ն անմիջապես բխում է բ)-ից ( $m \le f(x) \le M$ ):

*դ)*-ն ապացուցելու համար կգրենք համապատասխան անհավասարությունը Ռիմանի գումարների համար, կօգտվենք նախորդ թեորեմի գ) պնդումից և կանցնենք սահմանի, երբ $\lambda \to 0$ : ■

<u>3. Միջին արժեքի թեորեմը:</u>

**Թեորեմ 4.4**: *Եթե* $f$ *-ը ինտեգրելի է* $[a,b]$ *հատվածում, ապա գոյություն ունի* $\mu \in [m,M]$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

*որտեղ* $M$ *-ը և* $m$ *-ը* $f$ *ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրերն են* $[a,b]$ *հատվածում:*

► Նախորդ թեորեմի գ) պնդումից ունենք՝

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M :$$

Նշանակելով

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

կստանանք պահանջվող հավասարությունը: ■

Այն դեպքում, երբ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, $M$ և $m$ ճշգրիտ եզրերը հանդիսանում են $f$ ֆունկցիայի արժեքներ (համաձայն Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի), և նրանց միջև ընկած $\mu$ թիվը ևս հանդիսանում է $f$ ֆունկցիայի արժեք (համաձայն Բոլցանո - Կոշիի երկրորդ թեորեմի հետևանքի): Հետևաբար, *եթե $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, ապա ապա գոյություն ունի $c\in[a,b]$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a):$$

<u>4. Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը:</u>

**Թեորեմ 4.5:** *Եթե $f$ և $g$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են $[a,b]$ հատվածում և $g$ -ն նշանը չի փոխում այդ հատվածում, ապա գոյություն ունի $\mu\in[m,M]$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx,$$

*որտեղ $m$ -ը և $M$ -ը $f$ ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրերն են $[a,b]$ -ում:*

Այս թեորեմի մեջ վերցնելով $g(x)\equiv 1$, կստանանք նախորդ թեորեմը:

► Ապացուցենք այն դեպքում, երբ $g(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$: Ունենք՝

$$m\le f(x)\le M\ ,\ x\in[a,b]:$$

Հետևաբար՝

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),\ x\in[a,b]:$$

Օգտվելով թեորեմ 4.3-ի գ) պնդումից և թեորեմ 4.2-ից՝ կստանանք

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx \tag{4.4}$$

անհավասարությունները, որտեղ, համաձայն թեորեմ 4.3-ի ա) պնդման,

$$\int_a^b g(x)dx \geq 0 :$$

Եթե այս ինտեգրալը դրական է, ապա (4.4) անհավասարության բոլոր կողմերը բաժանելով այդ ինտեգրալի վրա և նշանակելով

$$\mu = \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx ,$$

կստանանք պահանջվող հավասարությունը:

Այն դեպքում, երբ $g$-ի ինտեգրալը $0$ է, (4.4) անհավասարությունից բխում է, որ $fg$-ի ինտեգրալը նույնպես $0$ է, հետևաբար, թեորեմի պնդումը ճիշտ է $[m,M]$ հատվածին պատկանող բոլոր $\mu$-երի համար: ■

Այն դեպքում, երբ $f$-ը անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, ինչպես և նախորդ թեորեմում, այստեղ նույնպես $\mu$-ն կարելի է փոխարինել $f$ ֆունկցիայի արժեքով:

## §5. ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ՝ ՈՐՊԵՍ ՎԵՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Դիցուք $f$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում: Նշանակենք՝

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; a \leq x \leq b :$$

Հիշենք, որ պայմանավորվածության համաձայն՝ $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$:

**Թեորեմ 5.1:** *Եթե $f$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում, ապա $F$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ հատվածում:*

► Վերցնենք կամայական $x_0 \in [a,b]$ կետ և ապացուցենք $F$-ի անընդհատությունն այդ կետում, որից և կբխի թեորեմի պնդումը:

Ինտեգրալի առաջին հատկության համաձայն, ունենք՝

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt : \tag{5.1}$$

Հետևաբար, թեորեմ 4.3-ի դ) և գ) պնդումների համաձայն՝

$$\left|F(x_0+\Delta x)-F(x_0)\right|\le K\left|\Delta x\right|\to 0 \quad (\Delta x\to 0),$$

որտեղ $K=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|$ : ■

**Թեորեմ 5.2:** Եթե $f$ -ը ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում և անընդհատ է $x_0\in[a,b]$ կետում, ապա $F$ ֆունկցիան $x_0$ կետում ունի ածանցյալ և

$$F'(x_0)=f(x_0):$$

► (5.1) հավասարությունից բխում է, որ

$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[f(t)-f(x_0)\right]dt : \tag{5.2}$$

Մյուս կողմից, քանի որ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0$ կետում, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|\Delta x\right|<\delta\Rightarrow\left|f(t)-f(x_0)\right|<\varepsilon\ ,\ t\in[x_0,x_0+\Delta x]: \tag{5.3}$$

Օգտվելով (5.2) հավասարությունից և կիրառելով թեորեմ 4.3-ի դ) և գ) կետերը՝ (5.3)-ից կստանանք

$$\left|\Delta x\right|<\delta\Rightarrow\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right|\le\frac{1}{\left|\Delta x\right|}\cdot\varepsilon\left|\Delta x\right|=\varepsilon$$

գնահատականը: Այսպիսով՝

$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}\to f(x_0)\ \ (\Delta x\to 0): ■$$

Այն դեպքում, երբ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ $[a,b]$ հատվածում, $F'(x)=f(x)$ հավասարությունը ճիշտ կլինի $[a,b]$ հատվածի բոլոր կետերում: Այսինքն՝ $[a,b]$ հատվածում $F(x)$-ը կհանդիսանա $f(x)$-ի նախնական:

## §6. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԸ (ՆՅՈՒՏՈՆ - ԼԱՅԲՆԻՑ)

**Թեորեմ 6.1:** *Եթե $f$ -ը անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և $\Phi$ -ն նրա որևէ նախնական է, ապա*

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi\Big|_a^b : \tag{6.1}$$

► Նշանակենք՝

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt :$$

Թեորեմ 5.2-ի համաձայն, $F$ -ը նույնպես կհանդիսանա $f$ -ի նախնական: Հետևաբար, գոյություն ունի մի $C$ հաստատուն, այնպիսին, որ $\Phi(x) = F(x) + C$, $x \in [a,b]$:

Վերցնելով $x = a$՝ կստանանք $\Phi(a) = C$ : Այսինքն՝

$$\Phi(x) = F(x) + \Phi(a),\ x \in [a,b]:$$

Այստեղ տեղադրելով $x = b$՝ կստանանք պահանջվող հավասարությունը: ■

**Թեորեմ 6.2:** *Դիցուք $f$ -ը ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում, $\Phi$ -ն անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և $[a,b]$ -ում, բացի վերջավոր թվով կետերից, տեղի ունի*

$$\Phi'(x) = f(x)$$

*հավասարությունը: Այդ դեպքում ճշմարիտ է (6.1) բանաձևը:*

► Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական $P$ տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, այնպիսին, որն ընդգրկում է վերը նշված բացառիկ կետերը:

Ունենք՝

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i , \tag{6.2}$$

որտեղ $\xi_i \in \left(x_i, x_{i+1}\right)$: Վերջին հավասարությունը ստացվում է Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից՝ $\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Phi'(\xi_i)\Delta x_i$:

(6.2) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք (6.1)-ը: ■

## §7. ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԹԵՈՐԵՄԸ (ԲՈՆՆԵ)

**Թեորեմ** 7.1: *Եթե $f$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածում նվազող է և դրական, իսկ $g$-ն ինտեգրելի է այդ հատվածում, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx: \tag{7.1}$$

► Նշանակենք՝

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx,\ G(x) = \int_a^x g(t)dt,\ M = \max_{x\in[a,b]} G(x),\ m = \min_{x\in[a,b]} G(x):$$

Այնուհետև, վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, և առաջին ինտեգրալը ներկայացնենք գումարի միջոցով.

$$\begin{gathered} I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - f(x_i)\right]g(x)dx + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx := \rho + \sigma: \end{gathered} \tag{7.2}$$

Քանի որ $g$-ն ինտեգրելի է, ուստի այն սահմանափակ է՝ $\left|g(x)\right| \le L$: Հետևաբար՝

$$\left|\rho\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(x) - f(x_i)\right|\left|g(x)\right|dx \le L\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)\Delta x_i \to 0\ \ (\lambda \to 0):$$

Այժմ (7.2) հավասարությունից բխում է, որ $\sigma \to I \quad (\lambda \to 0)$ :

Մյուս կողմից ունենք՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[G(x_{i+1}) - G(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] + G(x_n) f(x_{n-1}):$$

Քանի որ $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$ և $f(x_{n-1}) \geq 0$, ապա վերջին հավասարությունից կստանանք՝ $mf(a) \leq \sigma \leq Mf(a)$: Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք՝ $mf(a) \leq I \leq Mf(a)$, կամ, որ նույնն է,

$$I = \mu f(a), \ m \leq \mu \leq M :$$

Քանի որ $G$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքների միջև ընկած $\mu$ թիվը ֆունկցիայի արժեք է՝ գոյություն ունի $\xi \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ $\mu = G(\xi)$ :

Այսպիսով՝ $I = f(a)G(\xi)$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Նման ձևով կարելի է ապացուցել նաև հետևյալ պնդումը.

*եթե $f$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածում աճող է և դրական, իսկ $g$ -ն ինտեգրելի է, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx :$$

Վերջապես, *եթե $f$ ֆունկցիան մոնոտոն է, իսկ $g$ -ն՝ ինտեգրելի, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx : \tag{7.3}$$

Իրոք, դիցուք $f$ -ը նվազող է: Այդ դեպքում՝ $f(x) - f(b) \geq 0$: Այժմ, (7.1) բանաձևը գրելով $f(x) - f(b)$ ֆունկցիայի համար, կստանանք

$$\int_a^b \left[f(x) - f(b)\right]g(x)dx = \left[f(a) - f(b)\right]\int_a^\xi g(x)dx$$

հավասարությունը, որտեղից էլ արտածվում է (7.3)-ը:

## §8. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄ ԵՎ ՄԱՍԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ

### 1. Փոփոխականի փոխարինում:

**Թեորեմ** 8.1: *Դիցուք՝ 1)* $f(x)$ *ֆունկցիան անընդհատ է* $[a,b]$ *հատվածում, 2)* $\varphi(t)$ *-ն անընդհատ դիֆերենցելի է* $[\alpha,\beta]$ *հատվածում**, *ընդ որում,* $\varphi$ *-ի արժեքները դուրս չեն գալիս* $[a,b]$ *հատվածից, 3)* $\varphi(\alpha)=a$ , $\varphi(\beta)=b$ *: Այդ դեպքում*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt : \qquad (8.1)$$

► Ապացույցը անմիջապես բխում է Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից: Իրոք, եթե $F$ -ը $f$ -ի նախնական է $[a,b]$ հատվածում, այդ դեպքում $F(\varphi(t))$ -ն կհանդիսանա $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ -ի նախնական $[\alpha,\beta]$ հատվածում: Հետևաբար՝

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt : \blacksquare$$

**Օրինակ:** Կատարելով $x = a\sin t$ , $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ փոփոխականի փոխարինումը, կստանանք՝

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4} :$$

### 2. Մասերով ինտեգրում:

**Թեորեմ** 8.2: *Եթե* $u$ *և* $v$ *ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են* $[a,b]$ *հատվածում, ապա*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu : \qquad (8.2)$$

► Քանի որ $udv = duv - vdu$ , ապա

---

* Տե՛ս IV, 4, 3:

$$\int_a^b udv = \int_a^b duv - \int_a^b vdu : \tag{8.3}$$

Մյուս կողմից, Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$\int_a^b duv = \int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b :$$

Այս ինտեգրալի արժեքը տեղադրելով (8.3)-ի մեջ, կստանանք (8.2)-ը: ■

**Օրինակ:**

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m xdx = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} xd(-\cos x) = -\cos x\sin^{m-1} x\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+\int_0^{\pi/2} (m-1)\sin^{m-2} x\cos^2 xdx = (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)dx:$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$mJ_m = (m-1)J_{m-2}\,; \quad J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2} :$$

Այժմ, կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիա, ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} xdx = \frac{(2n-1)(2n-3)...3\cdot 1}{2n(2n-1)...4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\,, \tag{8.4}$$

$$J_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} xdx = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} : \tag{8.5}$$

<u>**3. Վալիսի բանաձևը:**</u> Նշանակենք՝

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdots 2n\,; \quad (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1 :$$

Այդ դեպքում (8.4) և (8.5) բանաձևերը կընդունեն հետևյալ տեսքերը.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} xdx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\,; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} xdx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} : \tag{8.6}$$

Այնուհետև, ինտեգրելով $\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x\,, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ անհավասարությունը, կստանանք՝

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx ,$$

որից էլ, հաշվի առնելով (8.6) հավասարությունները, կստանանք՝

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} :$$

Ստացված անհավասարության բոլոր կողմերը բաժանենք $\frac{\pi}{2}$-ի գործակցի վրա և կստանանք՝

$$a_n := \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \le \frac{\pi}{2} \le \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n} =: b_n :$$

Քանի որ

$$b_n - a_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)2n} \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n} \to 0 ,$$

ուստի $b_n \to \frac{\pi}{2}$ և $a_n \to \frac{\pi}{2}$ : Այսինքն, ստանում ենք

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

սահմանային առնչությունը, որն էլ անվանում են Վալիսի բանաձև:

<u>**4. Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամը:**</u>

**Թեորեմ 8.3:** *Եթե $f$ ֆունկցիան $[x_0, x]$ հատվածում ունի մինչև $(n+1)$-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, ապա ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \ : \qquad (8.7)$$

► Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(t)dt=-\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t)=$$

$$=-f'(t)(x-t)\Big|_{t=x_o}^{x}+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt,$$

կամ, որ նույնն է,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt:$$

Այսինքն՝ $n=1$ դեպքում (8.7) բանաձևը ճիշտ է: Այնուհետև կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիա.

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=-\frac{1}{n!(n+1)}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)d(x-t)^{n+1}=$$

$$=-\frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^{x}+\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt:$$

Տեղադրելով $r_n(x)$-ի ստացված արժեքը (8.7)-ի մեջ՝ կստանանք պահանջվող հավասարությունը: ■

VI ԳԼՈՒԽ

# ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

## §1. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍ

1. Քառակուսելի պատկերներ: Հարթության բոլոր կետերի բազմությունը կնշանակենք $R^2$-ով: $M \in R^2$ *կետի* $\varepsilon$ *- շրջակայք* ասելով՝ կհասկանանք $M$ կենտրոնով և $\varepsilon$ շառավղով բաց շրջանը:

Դիցուք $E$-ն $R^2$-ի որևէ ենթաբազմություն է: $M \in E$ կետը կոչվում է այդ *բազմության ներքին կետ*, եթե գոյություն ունի $\varepsilon > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $M$ կետի $\varepsilon$ - շրջակայքի բոլոր կետերը պատկանում են $E$ բազմությանը:

$M \notin E$ կետը կոչվում է $E$ *բազմության արտաքին կետ*, եթե գոյություն ունի $\varepsilon > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $M$ կետի $\varepsilon$ - շրջակայքը $E$ բազմության կետ չի պարունակում (կամ՝ $M$-ը $E$-ի լրացման ներքին կետ է):

$M$ կետը կոչվում է $E$ *բազմության եզրային կետ*, եթե $M$ կետի յուրաքանչյուր շրջակայք պարունակում է թե՛ $E$ բազմությանը պատկանող կետ, և թե՛ $E$ բազմությանը չպատկանող կետ:

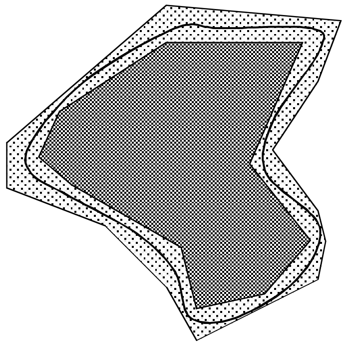
$E$ բազմության եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է $E$ *բազմության եզր* և նշանակվում է $\partial E$ սիմվոլով:

$E$ բազմությունը կոչվում է *սահմանափակ*, եթե գոյություն ունի շրջան, որը պարունակում է $E$-ի բոլոր կետերը:

*Հարթ պատկեր* ասելով՝ կհասկանանք սահմանափակ բազմություն, որի ներքին կետերի բազմությունը դատարկ չէ:

*Պարզ պատկեր կամ բազմանկյունային պատկեր* կոչվում են այնպիսի պատկերները, որոնք ստացվում են վերջավոր թվով եռանկյունների միավորումից: Այդպիսի պատկերները մենք նաև կանվանենք *բազմանկյուններ (ընդհանրացված իմաստով)* և կնշանակենք $(A)$, $(B)$, ... սիմվոլներով, իսկ նրանց մակերեսները՝ համապատասխանաբար $A$, $B$, ... (առանց փակագծերի) սիմվոլներով:

Այժմ դիտարկենք կամայական հարթ պատկեր՝ $(P)$, դիտարկենք այդ պատկերի մեջ ընդգրկված բոլոր $(A)$ բազմանկյունները և այդ պատկերը ընդգրկող բոլոր $(B)$ բազմանկյունները:



Քանի որ $(A)\subset(B)$, ապա $A\le B$: Հետևաբար, $\{A\}$ թվային բազմությունը սահմանափակ է վերևից յուրաքանչյուր $B$ թվով: Նշանակենք

$$P_*=\sup\{A\},\ P^*=\inf\{B\}:$$

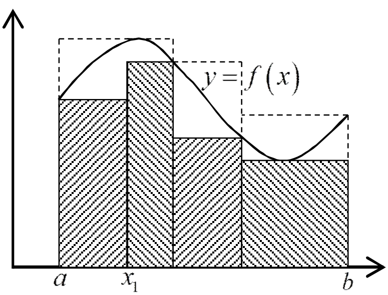
Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $B$ թիվ կբավարարի $P_*\le B$ անհավասարությանը, հետևաբար,

$$A\le P_*\le P^*\le B: \qquad (1.1)$$

**Սահմանում:** $(P)$ *պատկերը կոչվում է քառակուսելի, եթե* $P_*=P^*$*: Երբ պատկերը քառակուսելի է, այդ ընդհանուր արժեքը կնշանակենք* $P$*-ով և կանվանենք* $(P)$ *պատկերի մակերես:*

Քառակուսելի պատկերները կոչվում են նաև *Ժորդանի իմաստով չափելի բազմություններ*: Այդ դեպքում $P$-ն կոչվում է $(P)$ *պատկերի Ժորդանի չափ*, իսկ $P_*$-ը և $P^*$-ը՝ համապատասխանաբար *ներքին և արտաքին չափեր*, որոնք մեզ հիշեցնում են Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալները:

<u>2. Կորագիծ սեղանի մակերեսը:</u>




Դիցուք $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և $f(x)\ge 0,\ x\in[a,b]$: Դիտարկենք $(P)$ կորագիծ սեղանը, որը վերևից սահմանափակված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով, կողքերից՝ $x=a$ և $x=b$ ուղիղներով, իսկ ներքևից՝ աբսցիսների առանցքով:

*Ապացուցենք, որ այդ կորագիծ սեղանը քառակուսելի է և*

$$P = \int_a^b f(x)dx : \quad (1.2)$$

Այդ նպատակով վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, և դիտարկենք այդ տրոհմանը համապատասխանող Դարբուի գումարները՝

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \ , \ S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \ ,$$

որտեղ $m_i$ -ն և $M_i$ -ն $f$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում: Նկատենք, որ $s$ -ը հանդիսանում է $(P)$ -ի մեջ ներգծված բազմանկյան մակերես (տե'ս վերևի գծագիրը), իսկ $S$ -ը՝ ընդգրկողի:

Հետևաբար՝

$$s \le P_* \le P^* \le S : \quad (1.3)$$

Քանի որ $f$ անընդհատ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

ինտեգրալը միակ թիվն է, որը, անկախ տրոհման ընտրությունից, բավարարում է $s \le I \le S$ անհավասարություններին: Ուստի, (1.3)-ից բխում է, որ $P_* = P^* = I$ :Սա նշանակում է, որ $(P)$ պատկերը քառակուսելի է և նրա մակերեսը հավասար է $I$ ինտեգրալին:

**3. Քառակուսելիության հայտանիշներ:**

*$1^0$. Որպեսզի $(P)$ պատկերը լինի քառակուսելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենան $(A)$ և $(B)$ բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ $(A) \subset (P) \subset (B)$ և*

$$B - A < \varepsilon :$$

► *Անհրաժեշտություն:* Ճշգրիտ եզրերի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն $(A)$ և $(B)$ բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ

$$(A)\subset(P)\subset(B)$$

և բավարարվում են

$$P_*-A<\frac{\varepsilon}{2},\ B-P^*<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.4}$$

անհավասարությունները: Քանի որ $(P)$ պատկերը քառակուսելի է, ապա $P_*=P^*=P$: Հաշվի առնելով (1.4)-ը, կստանանք`

$$B-A=B-P+P-A<\varepsilon:$$

*Բավարարությունը* բխում է (1.1) անհավասարությունից: ■

*$2^0$. Որպեսզի $(P)$ պատկերը լինի քառակուսելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան $(A_n)\subset(P)\subset(B_n)$ բազմանկյունների հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ*

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n: \tag{1.5}$$

► *Անհրաժեշտություն:* Նախորդ հայտանիշի համաձայն, $\varepsilon=1/n$ թվի համար գոյություն ունեն $(A_n)\subset(P)\subset(B_n)$ բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ

$$B_n-A_n<\frac{1}{n},\ A_n<P<B_n:$$

Այստեղից բխում է, որ $A_n$ և $B_n$ հաջորդականությունները ձգտում են միևնույն $P$ սահմանին:

*Բավարարությունը* բխում է (1.1) անհավասարությունից: ■

Դժվար չէ նկատել, որ այս հայտանիշի մեջ $(A_n)$ և $(B_n)$ բազմանկյունները կարելի է փոխարինել $(Q_n)$ և $(R_n)$ կամայական քառակուսելի պատկերներով:

Երրորդ հայտանիշը ձևակերպելու համար տանք *զրո մակերեսի բազմության սահմանումը.*

*կասենք, որ* $E \subset R^2$ *բազմությունը զրո մակերեսի է (կամ ունի 0 մակերես), եթե յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի* $(C)$ *բազմանկյուն, այնպիսին, որ*

$$E \subset (C) \text{ և } C < \varepsilon :$$

*3[0]. Որպեսզի* $(P)$ *պատկերը լինի քառակուսելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա եզրն ունենա 0 - մակերես:*

► *Անհրաժեշտություն:* Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Առաջին հայտանիշի համաձայն՝ գոյություն ունեն $(A)$ և $(B)$ բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ $(A) \subset (P) \subset (B)$ և $B - A < \varepsilon$ :

Այժմ, եթե $(B)$ բազմանկյունից դեն գցենք $(A)$ բազմանկյան ներքին կետերը, կստանանք մի $(C)$ բազմանկյուն, որը կպարունակի $(P)$-ի եզրը և որի մակերեսը կլինի՝ $B - A < \varepsilon$ : Այսինքն՝ $(P)$-ի եզրը զրո մակերեսի է:

*Բավարարություն*:* Եթե $(P)$-ի եզրը զրո մակերեսի է, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի մի $(C)$ բազմանկյուն, այնպիսին, որ $(C) \supset \partial(P)$ և $C < \varepsilon$ :

Այժմ, որպես $(A)$ կվերցնենք $(P)$-ի այն կետերի բազմությունը, որոնք $(C)$-ին չեն պատկանում (փոքր $\varepsilon$-ի դեպքում այդ բազմությունը դատարկ չի լինի), իսկ որպես $(B)$ կվերցնենք $(A) \cup (C)$-ն: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$B - A = C < \varepsilon ,$$

և կօգտվենք $1^0$ հայտանիշից: ■

<u>**4. Մակերեսի ադիտիվությունը:**</u> Դիցուք $(P_1)$ և $(P_2)$ քառակուսելի պատկերները ընդհանուր ներքին կետ չունեն: *Ապացուցենք, որ այդ դեպքում* $(P) = (P_1) \cup (P_2)$ *միավորումը ևս կլինի քառակուսելի և*

$$P = P_1 + P_2 : \tag{1.5}$$

---

* Այս ապացույցը նկարագրական բնույթ ունի: Ճշգրիտ ապացույցը տե՛ս կրկնակի ինտեգրալների գլխում:

Իրոք, քանի որ $\partial P \subset \partial P_1 \cup \partial P_2$, իսկ $\partial P_1$ և $\partial P_2$ եզրերը 0 - մակերեսի են, ապա թե' $\partial P_1 \cup \partial P_2$ միավորումը, և թե' նրա $\partial P$ ենթաբազմությունը կլինեն 0 - մակերեսի: Հետևաբար, $(P)$ -ն քառակուսելի է:

Մնում է ապացուցել (1.5) հավասարությունը: Այդ նպատակով դիտարկենք $(A_1) \subset (P_1) \subset (B_1)$ և $(A_2) \subset (P_2) \subset (B_2)$ բազմանկյունները: Քանի որ $(A_1)$-ը և $(A_2)$-ը ընդհանուր ներքին կետ չունեն, ապա $(A) = (A_1) \cup (A_2)$ միավորումն ընդգրկված է $(P)$-ի մեջ և $A = A_1 + A_2$, իսկ $(B) = (B_1) \cup (B_2)$ բազմանկյունը ընդգրկում է $(P)$ -ն և $B \le B_1 + B_2$:

Հետևաբար,

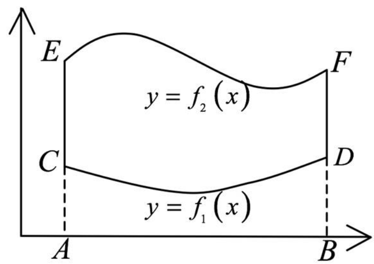
$$A_1 + A_2 = A \le P \le B \le B_1 + B_2,$$

$$A_1 + A_2 \le P_1 + P_2 \le B_1 + B_2:$$

Քանի որ $B_1 + B_2$ և $A_1 + A_2$ թվերի տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել, ապա նրանց միջև ընկած $P$ և $P_1 + P_2$ թվերը համընկնում են: Պնդումն ապացուցված է:

Դժվար չէ նկատել, որ այս հատկության մեջ $(P_1)$-ի և $(P_2)$-ի քառակուսելիության փոխարեն կարելի է պահանջել $(P)$-ի և $(P_1)$-ի քառակուսելիությունը (եթե $(P_2)$-ը $(P_1)$-ի հետ չունի ընդհանուր ներքին կետ):

Եթե կորագիծ սեղանը թե' վերևից, թե' ներքևից սահմանափակված է կորերով, որոնց հավասարումներն են` $y = f_1(x)$ և $y = f_2(x)$, $a \le x \le b$, ապա այն դիտարկելով որպես $ABFE$ և $ABDC$ պատկերների տարբերություն, նրա մակերեսի համար կստանանք

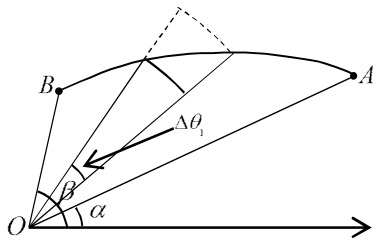



$$P = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

բանաձևը:

## 5. Մակերեսի արտահայտումը բևեռային կոորդինատներով:

Դիտարկենք $AOB$ կորագիծ սեկտորը, որը սահմանափակված է $OA$ և $OB$ շառավիղ վեկտորներով և $AB$ կորով, որի հավասարումը տրված է բևեռային կոորդինատների միջոցով՝




$$r = g(\theta),\ \ \alpha \le \theta \le \beta ,$$

որտեղ $g(\theta)$-ն դրական անընդհատ ֆունկցիա է:

Վերցնենք $[\alpha, \beta]$ հատվածի կամայական տրոհում՝ $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \beta$ և տանենք $\theta_i$ անկյունների համապատասխան շառավիղ վեկտորները: Նշանակենք՝ $m_i = \min\limits_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} g(\theta)$ և $M_i = \sup\limits_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} g(\theta)$:

Այնուհետև, հաշվենք $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ բացվածքով կենտրոնական անկյան $m_i$ և $M_i$ շառավիղներով շրջանային սեկտորների մակերեսները (անկյունը չափվում է ռադիաններով)՝

$$\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\theta_i ,\ \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\theta_i :$$

Հետևաբար, $s = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i^2 \Delta\theta_i$ գումարն իրենից ներկայացնում է տրված պատկերի մեջ ընդգրկված քառակուսելի պատկերի մակերես, իսկ $S = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i^2 \Delta\theta_i$-ն՝ ընդգրկող:

Հետևաբար,

$$s \le P_* \le P^* \le S : \tag{1.6}$$

Մյուս կողմից, $s$-ը և $S$-ը $\frac{1}{2}[g(\theta)]^2$ ֆունկցիայի Դարբուի գումարներն են՝

$$s \le I \le S ,\ I = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta , \tag{1.7}$$

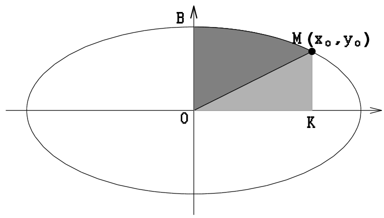
հետևաբար, $I$ -ն միակ թիվն է, որ բավարարում է (1.7)-ին:

(1.6)-ից բխում է, որ տրված կորագիծ սեկտորը քառակուսելի է, և նրա մակերեսի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$P=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[g(\theta)\right]^2 d\theta : \tag{1.8}$$

**Օրինակներ:**

ա) Դիտարկենք $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը և նրա վրա $M(x_0,y_0)$ կետը: Հաշվենք $BOKM$ կորագիծ սեղանի և $OMB$ *էլիպտիկ սեկտորի* մակերես-




ները: $BM$ կորի հավասարումն է՝ $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ , հետևաբար՝

$$P=S_{BOKM}=\int_0^x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^{x_0}=$$

$$=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x_0}{a}+\frac{x_0y_0}{2}:$$

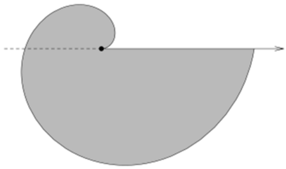
Քանի որ վերջին գումարելին $OKM$ եռանկյան մակերեսն է, ապա $OMB$ սեկտորի մակերեսի համար ստանում ենք

$$P_1=S_{OMB}=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x_0}{a}:$$

Տեղադրելով $x=a$՝ կստանանք, որ քառորդ էլիպսի մակերեսը հավասար է $\dfrac{\pi ab}{4}$, հետևաբար, ամբողջ էլիպսի մակերեսը կլինի՝ $\pi ab$ :

Շրջանի դեպքում՝ $a=b=r$ , $P=\pi r^2$ :

բ) Հաշվենք *Արքիմեդի գալարագծի*՝ $r = a\theta$ կորի, մեկ գալարով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:



(1.8) բանաձևի համաձայն, ունենք՝

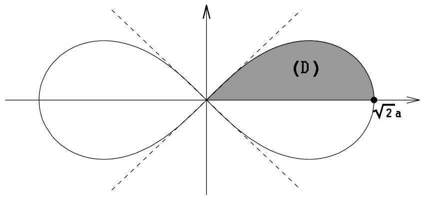
$$P=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta=\frac{a^2}{6}\theta^3\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2:$$

գ) Հաշվենք *լեմնիսկատով* սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2(x^2-y^2),$$

$$r^2=2a^2\cos 2\varphi,$$

$$\left.\begin{matrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{matrix}\right\},$$




$$D=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}2a^2\cos 2\varphi d\varphi=a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2},\ P=4D=2a^2:$$

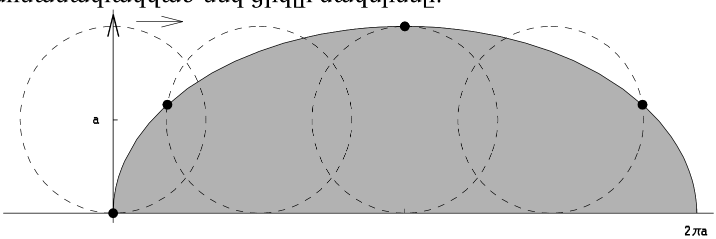
դ) Դիցուք կորագիծ սեղանի մեջ կորի հավասարումը տրված է *պարամետրական տեսքով*՝

$$\left.\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{matrix}\right\},\quad \begin{matrix} t_0\le t\le T \\ \varphi',\psi\in C[t_0,T] \end{matrix}:$$

Այդ դեպքում, կորագիծ սեղանի մակերեսի բանաձևի մեջ փոփոխականի փոխարինում կատարելով, կստանանք՝

$$P=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx=\int_{t_0}^T\psi(t)\varphi'(t)dt:$$

Որպես օրինակ՝ հաշվենք $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ *ցիկլոիդով* սահմանափակված մեկ ցիկլի մակերեսը.



$$P = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \left( \frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 :$$

## §2. ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

<u>1. Խորանարդելի մարմիններ:</u> Եռաչափ տարածության բոլոր կետերի բազմությունը կնշանակենք $R^3$-ով: $M \in R^3$ կետի $\varepsilon$ *-շրջակայք* ասելով՝ կհասկանանք $M$ կենտրոնով և $\varepsilon$ շառավղով բաց գունդը:

Եռաչափ տարածության մեջ բազմության *ներքին կետ, արտաքին կետ, եզրային կետ* և *եզր* սահմանվում է ճիշտ այնպես, ինչպես հարթության դեպքում:

$E \subset R^3$ բազմությունը կոչվում է *սահմանափակ*, եթե գոյություն ունի գունդ, որն ընդգրկում է $E$ -ն:

*Եռաչափ մարմին* (կամ ուղղակի՝ մարմին) ասելով՝ կհասկանանք սահմանափակ բազմություն, որի ներքին կետերի բազմությունը դատարկ չէ:

*Պարզ մարմին կամ բազմանիստ* կոչվում են այն մարմինները, որոնք ստացվում են վերջավոր թվով եռանկյան բուրգերի միավորումից:

Այժմ դիտարկենք կամայական $(V)$ մարմին: Դիտարկենք այդ մարմնի մեջ ընդգրկված բոլոր $(X)$ բազմանիստերը և այդ մարմինը ընդգրկող բոլոր $(Y)$ բազմանիստերը: Դրանց ծավալները կնշանակենք նույն տառով՝ առանց փակագծի: Նշանակենք՝ $V_* = \sup\{X\}$, $V^* = \inf\{Y\}$ :

Ունենք՝

$$X \le V_* \le V^* \le Y : \tag{2.1}$$

Եթե $V_* = V^*$, ապա $(V)$ մարմինը կոչվում է *խորանարդելի*: $V_* = V^*$ ընդհանուր արժեքը կոչվում է $(V)$ մարմնի ծավալ և նշանակվում է $V$ տառով:

Այստեղ ճշմարիտ են խորանարդելիության հետևյալ հայտանիշները (դրանց ապացույցները նման են «հարթ դեպքին»).

*$1^0$. Որպեսզի $(V)$ մարմինը լինի խորանարդելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենան $(X)$ և $(Y)$ բազմանիստեր, այնպիսիք, որ*

$$(X)\subset(V)\subset(Y),\ Y - X < \varepsilon :$$

*$2^0$. Որպեսզի $(V)$ մարմինը լինի խորանարդելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան $(X_n)\subset(V)\subset(Y_n)$ բազմանիստերի հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n = V$$

*(կամ գոյություն ունենան խորանարդելի մարմինների $(T_n)$ և $(U_n)$ հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ*

$$(T_n)\subset(V)\subset(U_n);\ \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = V\ ):$$

**Սահմանում:** *Կասենք, որ $E \subset R^3$ բազմությունը զրո ծավալի է (կամ ունի 0 ծավալ), եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $(Z)$ բազմանիստ, այնպիսին, որ*

$$E \subset (Z)\ \text{և}\ Z < \varepsilon :$$

*$3^0$. Որպեսզի $(V)$ մարմինը լինի խորանարդելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա եզրը լինի զրո ծավալի:*

Եռաչափ մարմնի ծավալը նույնպես օժտված է ադիտիվության հատկությամբ:

**<u>2. Գլանի ծավալը:</u>**

**Թեորեմ 2.1**: *Քառակուսելի հիմքով ուղիղ գլանը խորանարդելի է և նրա ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:*

► Իրոք, գլանի հիմքը թող լինի $(P)$ քառակուսելի պատկերը, իսկ բարձրությունը՝ $H$ : Վերցնենք $(A_n)\subset(P)\subset(B_n)$ բազմանկյունների հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = P :$$

Կառուցենք $(X_n)$ և $(Y_n)$ ուղիղ պրիզմաներ, որոնց հիմքերն են $(A_n)$ -ը և $(B_n)$ -ը, և յուրաքանչյուրի բարձրությունն է՝ $H$ :

Այդ դեպքում $(X_n)$ պրիզմաները կընդգրկվեն գլանի մեջ, $(Y_n)$-երը կընդգրկեն գլանը և

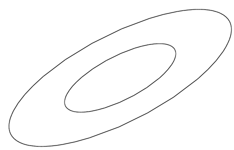
$$X_n = A_n H\ ,\ \ Y_n = B_n H\ ,$$

որոնք ձգտում են միևնույն $PH$ սահմանին:

Խորանարդելիության $2^0$ հայտանիշի համաձայն, գլանը կլինի խորանարդելի և նրա ծավալը կլինի $PH$-ը: ■

**<u>3. Ծավալի արտահայտումն ինտեգրալով:</u>** Դիցուք $(V)$ մարմինն ընկած է $x=a$ և $x=b$ հարթությունների միջև: Դիտարկենք $(V)$ մարմնի հատույթները աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց բոլոր հարթություններով: Ենթադրենք, որ այդ բոլոր հատույթները քառակուսելի են և աբսցիսի $x$ արժեքին համապատասխանող հատույթի մակերեսը $P(x)$-ն է: Կենթադրենք, որ $P(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում:

Բացի դրանից, կենթադրենք, որ եթե այդ հատույթները պրոյեկտենք աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց որևէ հարթության վրա, ապա կամայական երկու պրոյեկցիաներից մեկը ընկած կլինի մյուսի մեջ (մասնակի հատվել կամ մեկը մյուսից դուրս ընկած լինել չեն կարող):



*Ապացուցենք, որ նշված պայմանների դեպքում $(V)$ մարմինը խորանարդելի է և*

$$V = \int_a^b P(x)dx := I\ : \tag{2.2}$$

Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ և $x = x_i$, $i = 0,1,\ldots,n$ հարթություններով $(V)$ մարմինը տրոհենք շերտերի՝ $(V_i)$, $i = 0,1,\ldots,n-1$ ($(V_i)$-ն $(V)$ մարմնի այն մասն է, որն ընկած է $x = x_i$ և $x = x_{i+1}$ հարթությունների միջև):

$[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում $P(x)$ անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է $m_i$ փոքրագույն և $M_i$ մեծագույն արժեքները: Եթե այդ հատվածի բոլոր կետերի համապատասխան հատույթները պրոյեկտենք $x = x_i$ հարթության վրա, ապա նրանք բոլորը ընկած կլինեն $M_i$ արժեքի համապատասխան $(M_i)$ հատույթի մեջ, և բոլորը կընդգրկեն $m_i$ արժեքի համապատասխան $(m_i)$ հատույթը: $(m_i)$ և $(M_i)$ հիմքերի վրա կառուցենք $\Delta x_i$ բարձրությամբ ուղիղ գլաններ՝ $(T_i)$ և $(U_i)$, որտեղ $(T_i) \subset (V_i) \subset (U_i)$: Դրանց ծավալները համապատասխանաբար կլինեն՝ $m_i \Delta x_i$ և $M_i \Delta x_i$:

Այժմ նշանակենք

$$(T) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (T_i), \ (U) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (U_i):$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$(T) \subset (V) \subset (U), \ T = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \ U = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i:$$

Բացի դրանից՝

$$s = T \le V_* \le V^* \le U = S: \qquad (2.3)$$

Քանի որ $I$-ն միակ թիվն է, որը բավարարում է $T \le I \le U$ անհավասարություններին, ապա (2.3)-ից բխում է, որ

$$V_* = V^* = I,$$

այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

**Օրինակ:** Հաշվենք $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ էլիպսոիդով սահմանափակված մարմնի (որին նույնպես ընդունված է անվանել էլիպսոիդ) ծավալը:

Այս դեպքում աբսցիսի $x$ արժեքին համապատասխանող հատույթի պրոյեկցիայի ( $yz$ հարթության վրա) եզրագծի հավասարումը կլինի

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1,$$

որը $b' = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c' = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ կիսաառանցքներով էլիպսն է:

Հետևաբար,

$$P(x)=\pi b'c'=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right):$$

Այժմ, (2.2) բանաձևի համաձայն, կունենանք՝

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $a=b=c=R$, կստանանք գնդի ծավալը՝

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3:$$

<u>4. Պտտման մարմնի ծավալը:</u> Դիցուք $f$-ը դրական և անընդհատ ֆունկցիա է $[a,b]$ հատվածում: Դիտարկենք այն մարմինը, որը ստացվում է՝ պտտելով $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված կորագիծ սեղանը աբսցիսների առանցքի շուրջը:

Այս դեպքում $P(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$, $a\le x\le b$ : Հետևաբար,

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx:$$

**Օրինակներ:**

ա) *Կոնի ծավալը:* Այս դեպքում՝ $y=\frac{R}{H}x$, $0\le x\le H$ :

$$V=\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2\int_0^H x^2dx=\frac{1}{3}\pi R^2H:$$

բ) *Հատած կոնի ծավալը:* Այս դեպքում՝ $y=r+\frac{R-r}{H}x$, $0\le x\le H$ :

$$V=\pi\int_0^H\left(r+\frac{R-r}{H}x\right)^2dx=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr):$$

## §3. ԿՈՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

### 1. Ուղղելի կորեր:

**Սահմանում:**

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ \alpha \le t \le \beta \tag{3.1}$$

*անընդհատ ֆունկցիաների զույգը կոչվում է կոր (կամ հարթ կոր):*

Նշանակելով $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, կստանանք մի արտապատկերում, որը $[\alpha, \beta]$ հատվածն արտապատկերում է կոորդինատային հարթության մեջ: Երբեմն, կոր ասելով՝ հասկանում են այդ արտապատկերման ընդունած արժեքների բազմությունը, որը կոչվում է $\gamma$ *կորի կրիչ կամ՝ երկրաչափական կոր:* Այդ դեպքում (3.1) ֆունկցիաների զույգը կոչվում է այդ *երկրաչափական կորի պարամետրացում:* Հասկանալի է, որ միևնույն երկրաչափական կորը կունենա անթիվ բազմությամբ պարամետրացումներ ((3.1)-ի մեջ տեղադրելով $t = t(\tau)$, $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$՝ կստանանք միևնույն երկրաչափական կորի մի նոր պարամետրացում):

Այսպիսով, համաձայն վերևում տրված սահմանման, կոր ասելով՝ մենք կհասկանանք ոչ թե երկրաչափական կոր, այլ անընդհատ ֆունկցիաների զույգ (այդ կորի մի որոշակի պարամետրացում):

**Սահմանումներ:** *Կորը կոչվում է պարզ, եթե $t_1 \ne t_2$ պայմանից հետևում է, որ $\gamma(t_1) \ne \gamma(t_2)$ (կորը ինքնահատում չունի):*

*Կորը կոչվում է փակ, եթե $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ (կորի ծայրակետերը համընկնում են):*

*Եթե $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, $t_1 < t_2$ պայմանը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $t_1 = \alpha$ և $t_2 = \beta$, ապա կորը կոչվում է պարզ փակ կոր:*

Այժմ դիտարկենք $[\alpha, \beta]$ հատվածի կամայական տրոհում՝ $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, և նշանակենք $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0,1,\ldots,n$:

Այնուհետև դիտարկենք $(P) = M_0 M_1 M_2 ... M_n$ բեկյալը և նրա երկարությունը նշանակենք $p$-ով:

**Սահմանում:** *Եթե գոյություն ունի* $\lim\limits_{\lambda \to 0} p := l$ *վերջավոր սահմանը, որտեղ* $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta t_i$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, *ապա (3.1) կորը կոչվում է ուղղելի և* $l$ *թիվը կոչվում է կորի երկարություն:*

**2. Կորի երկարության արտահայտումն ինտեգրալով:**

**Թեորեմ 3.1:** *Եթե* $\varphi$ *և* $\psi$ *ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են* *, *ապա (3.1) կորն ուղղելի է և*

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt : \tag{3.2}$$

► $(P)$ բեկյալի երկարության համար ունենք՝

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2} :$$

Այստեղ կիրառելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\, \Delta t_i, \quad \tau_i, \tau_i^* \in [t_i, t_{i+1}],$$

հավասարությունը, որի աջ կողմը մեզ հիշեցնում է (3.2) ինտեգրալի ինտեգրալային գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i :$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, ենթաինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $\sigma \to l$, երբ $\lambda \to 0$: Մեզ մնում է ապացուցել, որ $p - \sigma \to 0$, երբ $\lambda \to 0$:

Օգտվելով հետևյալ տարրական անհավասարությունից՝

$$\left| \sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right| \le |b_1 - b|,$$

կստանանք՝

$$|p - \sigma| \le \sum_{i=0}^{n-1} \left| \psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i) \right| \Delta t_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\psi') \Delta t_i \to 0 \quad \left(\lambda \to 0\right),$$

---

* Նշված պայմանի դեպքում ընդունված է կորն անվանել ողորկ:

որտեղ $\omega_i(\psi')$ -ը $\psi'$ ֆունկցիայի տատանումն է $[t_i, t_{i+1}]$ հատվածում: Վերջին առնչությունը բխում է նրանից, որ $\psi'$ անընդհատ ֆունկցիան ինտեգրելի է: ■

Երբ կորի հավասարումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $y = f(x)$, $a \le x \le b$, այս դեպքում $t$ պարամետրի դերը կատարում է $x$ -ը: Այսինքն՝ (3.1) զույգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= f(x) \end{aligned}\right\}, \ a \le x \le b:$$

Հետևաբար, այս մասնավոր դեպքում կստանանք՝

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx: \tag{3.3}$$

Վերջապես, երբ կորի հավասարումը տրված է բևեռային կոորդինատների միջոցով՝

$$r = g(\theta), \ \alpha \le \theta \le \beta,$$

օգտագործելով բևեռային կոորդինատներից դեկարտյան կոորդինատներին անցման բանաձևերը, կստանանք՝

$$x = r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta, \ y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta:$$

Այս դեպքում՝

$$x'_\theta = g'(\theta)\cos\theta - g(\theta)\sin\theta, \ \ y'_\theta = g'(\theta)\sin\theta + g(\theta)\cos\theta:$$

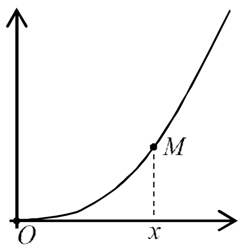
Տեղադրելով (3.2) բանաձևի մեջ՝ կստանանք

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}\, d\theta \tag{3.4}$$

հավասարությունը:

**Օրինակներ:**

1) Դիտարկենք $y = \dfrac{x^2}{2p}$ պարաբոլը: Վերցնենք $x$ աբսցիսն ունեցող $M$ կետը և հաշվենք $\overset{\frown}{OM}$ աղեղի երկարությունը:




(3.3) բանաձևի համաձայն, կստանանք՝

$$l = \overset{\frown}{OM} = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}:$$

2) Հաշվենք $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ ($0 \le t \le 2\pi$) հավասարումներով տրված ցիկլոիդի երկարությունը:

(3.2) բանաձևի համաձայն՝

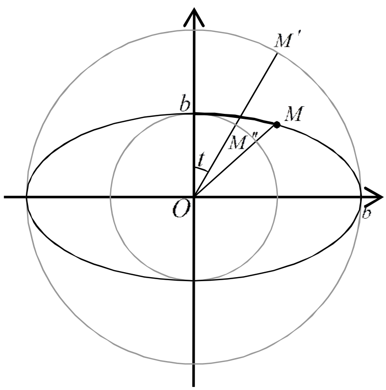
$$l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a:$$

3) Հաշվենք $r = a\theta$ գալարագծի 0 բևեռի և $M$ կետի ($\theta$ անկյանը համապատասխան) միջև ընկած աղեղի երկարությունը:

(3.4) բանաձևի համաձայն՝

$$l = a\int_0^{\theta} \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]:$$

4) Հաշվենք $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսի $(a \ge b)$ փոքր առանցքի վերին ծայրակետից մինչև առաջին քառորդում ընկած $M$ կետն ընկած աղեղի $l$ երկարությունը:




Այդ նպատակով դիտարկենք էլիպսի պարամետրական հավասարումը՝

$$x = a\sin t,\ y = b\cos t,$$

որտեղ $t$-ն $M'$ (կամ $M''$) կետի շառավիղ վեկտորի՝ օրդինատների առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյունն է: Այս դեպքում

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\sin^2 t} = a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

որտեղ $\varepsilon=\sqrt{(a^2-b^2)/a^2}$ էլիպսի *էքսցենտրիսիտետն է:*

Տեղադրելով (3.2) բանաձևի մեջ, կստանանք

$$l=a\int_0^{\theta}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt$$

բանաձևը, որտեղ $\theta$ –ն $OM$ վեկտորի կազմած անկյունն է $OY$ առանցքի դրական ուղղության հետ: Երբ $a\neq b$, այս ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաների միջոցով չի արտահայտվում: Այն կոչվում է *երկրորդ սեռի էլիպտիկ ինտեգրալ:*

**3. Տարածական կորի երկարությունը:** Տարածական կորի պարամետրացումը տրվում է երեք ֆունկցիաների միջոցով՝

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\chi(t)\end{array}\right\},\ \alpha\leq t\leq\beta:$$

Այս դեպքում կորի երկարությունը սահմանվում է նույն կերպ, ինչ որ հարթ կորի դեպքում: Տարածական ողորկ կորի երկարությունը հաշվում են (3.2) բանաձևի անալոգով.

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\chi'(t)\right]^2}\,dt:$$

Այս բանաձևն ապացուցելիս օգտվում ենք

$$\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b_1^2+c_1^2}\right|\leq\left|b_1-b\right|+\left|c_1-c\right|$$

անհավասարությունից:

**4. Կորի երկարության երկրորդ սահմանումը:** Դիտարկենք հարթ կորի դեպքը.

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right\},\ \alpha\leq t\leq\beta: \qquad (3.5)$$

Դիտարկենք կորին ներգծված բոլոր բեկյալների երկարությունների բազմությունը, և այդ բազմության ճշգրիտ վերին եզրը նշանակենք $S$ -ով՝

$$S=\sup\{p\},$$

որը կարող է լինել նաև $+\infty$:

**Սահմանում 2:** *Կորը կոչվում է ուղղելի, եթե* $S<\infty$ *: Այդ դեպքում* $S$ *թիվը կոչվում է կորի երկարություն:*

Ապացուցենք, որ կորի երկարության երկու սահմանումները համարժեք են: Այլ կերպ ասած, ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ 3.2:** *Որպեսզի կորը լինի ուղղելի նախկին իմաստով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\{p\}$ *բազմությունը լինի սահմանափակ, ընդ որում,* $l=\sup\{p\}$ *:*

► *Անհրաժեշտություն:* Նկատենք, որ $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$ տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս բեկյալի երկարությունը կարող է միայն մեծանալ: Ընդ որում, եթե եղած կետերին ավելացնենք մեկ տրոհման կետ՝ $t'\in(t_i,t_{i+1})$, այդ դեպքում $(P)$ բեկյալի երկարությունը կմեծանա ամենաշատը

$$\sqrt{\left[\varphi(t')-\varphi(t_i)\right]^2+\left[\psi(t')-\psi(t_i)\right]^2}+\sqrt{\left[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t')\right]^2+\left[\psi(t_{i+1})-\psi(t')\right]^2}$$

չափով, որը չի գերազանցում $2\left[\omega_i(\varphi)+\omega_i(\psi)\right]$ մեծությունը, որտեղ $\omega_i(\varphi)$-ն և $\omega_i(\psi)$-ն համապատասխանաբար $\varphi$ և $\psi$ ֆունկցիաների տատանումներն են $[t_i,t_{i+1}]$ հատվածում:

Հետևաբար, եթե կորն ուղղելի է նախկին իմաստով, ապա նախ՝ $p\le l$, և բացի դրանից՝ $l=\sup\{p\}$:

*Բավարարություն:* Ունենք՝ $\sup\{p\}=S<\infty$: Ցույց տանք, որ

$$\lim_{\lambda\to 0}p=S:$$

Ապացուցենք Դարբուի թեորեմի ապացույցի սխեմայով: Վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ և, դրան համապատասխան, $P_1:\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_m$ տրոհում, այնպիսին, որ տեղի ունենա

$$S-p_1<\frac{\varepsilon}{2}$$

պայմանը ($p_1$-ը համապատասխան բեկյալի երկարությունն է):

Այնուհետև, քանի որ $\varphi$ և $\psi$ ֆունկցիաներն անընդհատ են, ապա, Կանտորի թեորեմի հետևանքի համաձայն, այդ $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i(\varphi), \omega_i(\psi) < \frac{\varepsilon}{8m}:$$

Այժմ վերցնենք կամայական $P$ տրոհում, որի տրամագիծը փոքր է այդ $\delta$ -ից, և կառուցենք $P_2$ տրոհում՝ $P_2 = P \cup P_1$: Վերջինիս համապատասխան բեկյալի երկարությունը նշանակենք՝ $p_2$: Այդ դեպքում՝

$$S - p = S - p_2 + p_2 - p \le S - p_1 + 2m\left(\frac{\varepsilon}{8m} + \frac{\varepsilon}{8m}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

որով էլ ավարտվում է թեորեմի ապացույցը: ■

# VII ԳԼՈՒԽ

# ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

## §1. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ $R^m$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

**1. $R^m$ -ը որպես գծային նորմավորված տարածություն:**

$$R^m = R\times R\times\cdots\times R$$

դեկարտյան արտադրյալի յուրաքանչյուր $x\in R^m$ տարր ներկայացվում է $x=(x^1,...,x^m)$ տեսքով, որտեղ $x^i$ -ն ($1\le i\le m$) կոչվում է $x$ -ի $i$ -րդ կոորդինատ: $R^m$ -ի տարրերը կոչվում են կետեր կամ վեկտորներ: $m=2$ դեպքում $(x^1,x^2)$ նշանակման փոխարեն հաճախ օգտագործվում է $(x,y)$ նշանակումը, իսկ $m=3$ դեպքում $(x^1,x^2,x^3)$ -ի փոխարեն՝ $(x,y,z)$ -ը:

$R^m$ -ը գծային (վեկտորական) տարածություն է, որտեղ գործողությունները սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$(x^1,...,x^m)+(y^1,...,y^m)=(x^1+y^1,...,x^m+y^m),$$

$$\alpha(x^1,...,x^m)=(\alpha x^1,...,\alpha x^m),\quad (\alpha\in R):$$

Նշանակենք՝

$$|x|=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2},$$

որը կոչվում է $x$ վեկտորի նորմ (բացարձակ արժեք կամ երկարություն):

Դժվար չէ համոզվել, որ նորմը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

ա) $|x|\ge 0$, ընդ որում, $|x|=0$ պայմանը տեղի ունի միայն $x=0$ դեպքում;

բ) $|\alpha x|=|\alpha||x|$, $(\alpha\in R)$;

գ) $|x+y|\le|x|+|y|$, $(x,y\in R^m)$:

Իրոք, ա)-ն և բ)-ն անմիջապես հետևում են նորմի սահմանումից, իսկ գ)-ն Կոշիի անհավասարությունն է (տես IV գլուխ, § 8, կետ 6):

$x, y \in R^m$ երկու կետերի $d(x, y)$ հեռավորությունը սահմանվում է

$$d(x, y) = |x - y|$$

բանաձևի միջոցով:

գ) անհավասարությունից հետևում է *եռանկյան անհավասարությունը*[*]

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in R^m:$$

Հեռավորության գաղափարից ելնելով՝ կարող ենք սահմանել $a \in R^m$ կենտրոնով և $r > 0$ շառավղով $m$ - չափանի *բաց գունդ*՝

$$B(a,r) := \left\{x \in R^m : d(x,a) < r\right\} = \left\{x \in R^m : |x - a| < r\right\},$$

և *փակ գունդ*՝

$$\overline{B}(a,r) := \left\{x \in R^m : |x - a| \le r\right\}:$$

$m = 2$ դեպքում (երկչափ) գունդը շրջանն է:

$a \in R^m$ կենտրոնով և $2\eta$ երկարությամբ կողով $C(a, \eta)$ *բաց խորանարդը* սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$C(a,\eta) = \left\{(x^1, ..., x^m) : a^i - \eta < x^i < a^i + \eta, \quad 1 \le i \le m \right\}:$$

$a$ կենտրոնով գնդերի և խորանարդների համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$B(a,r) \subset C(a,r) \subset B\left(a, \sqrt{m} \quad r\right), \tag{1.1}$$

որոնք բխում են

$$\left|x^i - a^i\right| \le |x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x^i - a^i)^2}, \ i = 1, 2, ..., m$$

անհավասարություններից:

<u>2. Հաջորդականության սահման:</u> Դիցուք $x_n = (x_n^1, ..., x_n^m)$ -ը $R^m$ տարածության կետերի հաջորդականություն է:

**Սահմանում:** $a = (a^1, ..., a^m) \in R^m$ *կետը կոչվում է* $x_n$ *հաջորդականության սահման և նշանակվում է՝* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ *, եթե յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի* $n_0$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon :$$

---

[*] գ)-ն նույնպես անվանում են եռանկյան անհավասարություն:

Այսինքն, սկսած որոշ համարից, $x_n$ կետը պատկանում է $B(a,\varepsilon)$ բաց գնդին: Վերջինս կոչվում է *$a$ կետի $\varepsilon$ - շրջակայք* ($a$ -ի շրջակայք են կոչվում նաև $a$ կենտրոնով խորանարդները):

Այսպիսով, սահմանի սահմանումը $R^m$ տարածությունում ըստ էության նույնն է, ինչ որ թվային հաջորդականությունների դեպքում ($m=1$): Այդ պատճառով էլ սահմանների տեսության շատ դրույթներ (որոնք իմաստ ունեն այս դեպքում*) ապացուցվում են այնպես, ինչպես թվային հաջորդականությունների դեպքում:

Սահմանենք նաև անվերջ սահման:

**Սահմանում**: *Կասենք, որ $x_n$ -ը ձգտում է անվերջության** և կգրենք՝*

$$x_n \to \infty \ ,$$

*եթե յուրաքանչյուր $r>0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| > r \ :$$

Այս սահմանումը շրջակայքերի լեզվով ձևակերպելու համար $\infty$ -ի $r$ - շրջակայք կհամարենք $\overline{B}(0,r)$ փակ գնդի լրացումը՝

$$\left\{ x \in R^m : |x| > r \right\} \quad (r>0):$$

<u>**3. Կոորդինատային զուգամիտություն:**</u> Նորմի սահմանումից բխում են

$$\left|x^i\right| \le |x| \le \left|x^1\right| + \cdots + \left|x^m\right|, \ \ 1 \le i \le m \ , \tag{1.2}$$

անհավասարությունները, ինչից էլ բխում է հետևյալ պնդումը.

**Թեորեմ 1.1: (Կոորդինատային զուգամիտության թեորեմը)** *Դիցուք՝ $a=(a^1,...,a^m) \in R^m$ : Որպեսզի $x_n \to a$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\left.\begin{array}{l} x_n^1 \to a^1 \\ x_n^2 \to a^2 \\ \ . \quad . \quad . \quad . \\ x_n^m \to a^m \end{array}\right\} : \tag{1.3}$$

---

* Իրական թվերի բազմության կարգավորվածությանն առնչվող պնդումներն այստեղ իմաստ չունեն:

** $m \ge 2$ դեպքում $x_n \to +\infty$ և $x_n \to -\infty$ արտահայտություններն իմաստ չունեն:

► (1.2) անհավասարությունները գրենք $x_n - a$ վեկտորի համար.

$$\left|x_n^i - a^i\right| \le \left|x_n - a\right| \le \left|x_n^1 - a^1\right| + \cdots + \left|x_n^m - a^m\right| : \qquad (1.4)$$

Այժմ (1.3) պայմանի անհրաժեշտությունը հետևում է (1.4)-ի առաջին անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ երկրորդից: ■

Այս թեորեմի միջոցով $R^m$ տարածության հաջորդականությունների ուսումնասիրությունը բերվում է թվային հաջորդականությունների դեպքին:

<u>4. Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմման:</u>

**Թեորեմ 1.2**: *Յուրաքանչյուր սահմանափակ* $x_n \in R^m$ *հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն:*

► Նախ ապացուցենք $m = 2$ դեպքում: Ունենք $x_n = (x_n^1, x_n^2)$ սահմանափակ հաջորդականությունը՝ $\left|x_n\right| \le L$, $n \in N$ : (1.2)-ի համաձայն ունենք՝

$$\left|x_n^1\right| \le L\,,\ \left|x_n^2\right| \le L :$$

Թվային հաջորդականությունների վերաբերյալ Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, $x_n^1$ հաջորդականությունը պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x_{n_k}^1 \to x_0^1 : \qquad (1.5)$$

Այժմ, $x_{n_k}^2$ հաջորդականության համար կիրառելով Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմման, կստանանք՝

$$x_{n_{k_l}}^2 \to x_0^2\,,\ l \to \infty : \qquad (1.6)$$

Նախորդ թեորեմի համաձայն, (1.5)-ից և (1.6)-ից հետևում է

$$x_{n_{k_l}} \to (x_0^1, x_0^2)\,,\ l \to \infty :$$

Քանի որ $x_{n_{k_l}}$ -ը $x_n$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն է, ապա $m = 2$ դեպքում ապացույցն ավարտված է:

Ընդհանուր դեպքում պնդումն ապացուցելու համար կկիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ $m$ -ի: ■

5. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:

**Թեորեմ** 1.3: *Որպեսզի $x_n \in R^m$ հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $n_0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$n > n_0 \Rightarrow \left| x_{n+m} - x_n \right| < \varepsilon, \quad m = 1,2,\ldots :$$

► Անհրաժեշտության ապացույցը նույնն է, ինչ որ $m=1$ դեպքում: Ապացուցենք բավարարությունը: (1.3)-ի համաձայն, ունենք՝

$$\left| x_{n+m}^i - x_n^i \right| \le \left| x_{n+m} - x_n \right|, \quad 1 \le i \le m :$$

Ուրեմն $x_n^i$ թվային հաջորդականությունները ($1 \le i \le m$) ֆունդամենտալ են, ուստի և, զուգամետ են՝ $x_n^i \to a^i$, $1 \le i \le m$ :

Կոորդինատային զուգամիտության թեորեմի համաձայն կստանանք՝

$$x_n \to a := (a^1, \ldots, a^m) : \blacksquare$$

## §2. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

1. Կուտակման կետ $R^m$-ում:

**Սահմանում**: *$a \in R^m$ կետը կոչվում է $E \subset R^m$ բազմության կուտակման կետ, եթե $a$ կետի յուրաքանչյուր $B(a,\varepsilon)$ շրջակայք պարունակում է $E$ բազմությանը պատկանող անվերջ թվով կետեր: $E$ բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակվում է $E'$ :*

**Լեմմա** 2.1: *Եթե $a \in E'$, ապա գոյություն ունի $x_n \in E$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $x_n \neq a$ և $x_n \to a$ :*

Ապացուցվում է նույն կերպ, ինչպես $m=1$ դեպքում:

2. Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը: Եթե $f$ ֆունկցիան որոշված է $E \subset R^m$ բազմության վրա, ապա այն կոչվում է $m$ փոփոխականի կամ շատ փոփոխականի ֆունկցիա:

Դիցուք $a$-ն $E$ բազմության կուտակման կետ է՝ $f: E \to R$, $a \in E'$ :

**Սահմանում**: *Կասենք $x$ -ը $a$ -ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է $b$ թվին (կամ $f$ -ի սահմանը $a$ կետում $b$ -ն է) և կգրենք՝*

$$f(x)\to b \text{, երբ } x\to a \text{ կամ } \lim_{x\to a} f(x)=b,$$

*եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{array}{c} 0<\left|x-a\right|<\delta \\ x\in E \end{array}\right\}\Rightarrow\left|f(x)-b\right|<\varepsilon : \qquad (2.1)$$

Եթե $x$ և $a$ վեկտորները ներկայացնենք իրենց կոորդինատների միջոցով, ապա այս սահմանումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

*կասենք $x$ -ը $a$ -ին ձգտելիս՝ $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է $b$ -ի, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\eta>0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{array}{l} \left|x^i-a^i\right|<\eta \\ i=1,2,\ldots,m \\ x\neq a,\quad x\in E \end{array}\right\}\Rightarrow\left|f(x^1,\ldots,x^m)-b\right|<\varepsilon : \qquad (2.1')$$

Այս դեպքում գրում են՝ $\lim\limits_{\substack{x^i\to a^i\\ i=1,\ldots,m}} f(x^1,\ldots,x^m)=b$ :

(2.1) և (2.1') պայմանների համարժեքությունը բխում է (1.1)-ից:

**Թեորեմ 2.1**: *Որպեսզի $f(x)\to b$, երբ $x\to a$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $x_n\in E$ հաջորդականության համար, որը բավարարում է $x_n\neq a$ և $x_n\to a$ պայմաններին, տեղի ունենա*

$$f(x_n)\to b$$

*սահմանային առնչությունը:*

Սա նշանակում է, որ Կոշիի և Հայնեի սահմանումները համարժեք են նաև մի քանի փոփոխականների դեպքում*:

Թեորեմ 2.1-ն ապացուցվում է այնպես, ինչպես $m=1$ դեպքում:

* Այստեղ պահպանված են $m=1$ դեպքի անվանումները:

Անվերջ սահմանները նույնպես սահմանվում են $m=1$ դեպքի նման (ձևակերպել ինքնուրույն):

<u>3. Թվաբանական գործողություններ:</u> Դիցուք $f$ և $g$ ֆունկցիաները որոշված են $E$ բազմության վրա, որի համար $a$-ն կուտակման կետ է, և $f(x)\to b_1$ ու $g(x)\to b_2$, երբ $x\to a$ ($b_1$, $b_2$ թվերը վերջավոր են):

Այդ դեպքում

*1) Նրանց գումարը նույնպես ունի վերջավոր սահման և գումարի սահմանը հավասար է գումարելիների սահմանների գումարին՝*

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x):$$

*2) Նրանց արտադրյալը նույնպես ունի վերջավոր սահման և*

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a}g(x)\right]:$$

*3) Եթե $b_2\neq 0$, ապա $f/g$ քանորդը նույնպես ունի վերջավոր սահման և*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}:$$

► Հայնեի սահմանման միջոցով հարցը բերվում է թվային հաջորդականությունների համապատասխան հատկություններին: ■

<u>4. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:</u>

**Թեորեմ 2.2** : *Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $E\subset R^m$ բազմության վրա, որի համար $a$-ն կուտակման կետ է: Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, երբ $x\to a$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{array}{l}0<\left|x'-a\right|<\delta\\ 0<\left|x''-a\right|<\delta\\ x',x''\in E\end{array}\right\}\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon:$$

Ապացուցվում է այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի դեպքում (փորձեք ապացուցել ինքնուրույն):

**5. Հաջորդական սահմաններ:** Դիցուք $X, Y \subset R$, $a$-ն $X$-ի կուտակման կետ է, $b$-ն՝ $Y$-ի և $f: X \times Y \to R$ *:

Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր հաստատագրված $y \in Y$, $y \neq b$ թվի համար գոյություն ունի

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$$

վերջավոր սահմանը (որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սահման): Այդ դեպքում $\varphi(y)$ ֆունկցիան որոշված է $Y \setminus \{b\}$ բազմության վրա:

Եթե գոյություն ունի $\lim_{y \to b} \varphi(y)$ սահմանը, ապա այն կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի *հաջորդական սահման* և նշանակվում է՝

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y):$$

Նման ձևով սահմանվում է մյուս հաջորդական սահմանը՝

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y):$$

**Թեորեմ 2.3:** *Եթե*

*1) գոյություն ունի*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \tag{2.2}$$

*(վերջավոր կամ անվերջ) կրկնակի սահմանը* **,

*2) յուրաքանչյուր հաստատագրված $y \in Y$, $y \neq b$ արժեքի դեպքում գոյություն ունի*

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$$

*վերջավոր սահմանը,*

*ապա գոյություն ունի*

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)$$

---

* Նույնիսկ բավական է, որ $f: (X \setminus \{a\}) \times (Y \setminus \{b\}) \to R$ :

** Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանն ընդունված է կրկնակի սահման անվանել:

*հաջորդական սահմանը և հավասար է $A$:*

► Ապացուցենք վերջավոր $A$-ի դեպքում: (2.2)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |x-a| < \delta \\ 0 < |y-b| < \delta \\ (x,y) \in X \times Y \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon :$$

Այնուհետև հաստատագրենք $y$-ը, իսկ $x$-ը ձգտեցնենք $a$-ի.

$$0 < |y-b| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - A| \le \varepsilon ,$$

որը նշանակում է, որ $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y) = A$: ■

**Լրացում:** *Եթե այս թեորեմի մեջ բացի 1) և 2) պայմաններից բավարարվի նաև հետևյալ պայմանը.*

*3) յուրաքանչյուր $x \in X$ , $x \ne a$ արժեքի դեպքում գոյություն ունի*

$$\lim_{y\to b} f(x,y) = \psi(x)$$

*վերջավոր սահմանը,*

*ապա գոյություն կունենա նաև $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ հաջորդական սահմանը և հավասար կլինի նույն $A$-ին, այսինքն՝ երկու հաջորդական սահմանները գոյություն կունենան և հավասար կլինեն:*

**Օրինակներ.**

ա) $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$; $(a,b) = (0,0)$:

Քանի որ $|x\sin 1/y| \le |x|$, ապա $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$ , բայց $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ սահմանը գոյություն չունի:

բ) $f:(0,\infty)\times(0,\infty) \to R$ ֆունկցիան որոշենք հետևյալ կերպ. $f(x,y) = 0$ , երբ $x \ne y$ և $f(x,y) = 1$ , երբ $x = y$ : Այդ դեպքում՝

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0 ,$$

բայց $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ կրկնակի սահմանը գոյություն չունի:

գ) Կոորդինատային առաջին քառորդում որոշենք՝ $f(x,y)=0$, երբ $y>x>0$; $f(x,y)=1$, երբ $0<y\le x$: Այս դեպքում՝

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0\,;\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1\,:$$

<u>**6. Վեկտոր - ֆունկցիայի սահմանը:**</u> Այժմ ենթադրենք, որ $f$ ֆունկցիան որոշված է $E\subset R^m$ բազմության վրա և արժեքներ է ընդունում $R^k$ տարածությունից, այսինքն՝ ֆունկցիայի արժեքները նույնպես վեկտորներ են: Յուրաքանչյուր հաստատագրված $x\in E$ դեպքում այդ ֆունկցիայի արժեքը (վեկտորը) կարելի է ներկայացնել կոորդինատների միջոցով՝

$$f(x)=\left(f^1(x),\ldots,f^k(x)\right),$$

որտեղ $f^i(x)$-երը, $1\le i\le k$, իրական թվեր են: Փոփոխելով $x$-ը $E$ բազմության վրա՝ ստանում ենք նոր ֆունկցիաներ.

$$f^i : E\to R,\ \ 1\le i\le k,$$

որոնք կոչվում են $f$ ֆունկցիայի *կոորդինատային ֆունկցիաներ:* Այս դեպքում ասում են, որ $f$-ը *վեկտորարժեք ֆունկցիա է (կամ կարճ՝ վեկտոր-ֆունկցիա),* իսկ $f^i$ կոորդինատային ֆունկցիաները *իրականարժեք կամ թվային ֆունկցիաներ են:*

**Սահմանում**: *Դիցուր $E\subset R^m$ և $a$-ն $E$ բազմության կուտակման կետ է: $b\in R^k$ վեկտորը կոչվում է $f:E\to R^k$ ֆունկցիայի սահման $a$ կետում և նշանակվում է՝ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի մի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $0<|x-a|<\delta$ պայմանին բավարարող բոլոր $x\in E$ կետերի համար տեղի ունենա $|f(x)-b|<\varepsilon$ անհավասարությունը:*

**Թեորեմ 2.4**: *Որպեսզի $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{x\to a} f^i(x)=b^i,\ \ 1\le i\le k,\ \ b=(b^1,\ldots,b^k)\,:$$

Ապացույցը բխում է

$$\left|f^i(x)-b^i\right| \le \left|f(x)-b\right| \le \left|f^1(x)-b^1\right| + \cdots + \left|f^k(x)-b^k\right|$$

անհավասարություններից (ինչպես կոորդինատային զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի դեպքում):

## §3. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

**1. $R^m$ տարածության տոպոլոգիան:** Դիցուք` $D \subset R^m$ :

$D$ բազմությանը պատկանող $a$ կետը կոչվում է այդ բազմության *ներքին կետ*, եթե գոյություն ունի $\varepsilon > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(a,\varepsilon) \subset D$ :

$D$ բազմությունը կոչվում է *բաց բազմություն*, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են: Բաց բազմության պարզագույն օրինակներ են բաց գունդը և $m$ - չափանի բաց զուգահեռանիստը`

$$I(a,b) = \left\{(x^1,\ldots,x^m) : a^i < x^i < b^i\right\},\ (-\infty < a^i < b^i < +\infty,\ i=1,\ldots,m) :$$

$F \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է *փակ*, եթե նրա բոլոր կուտակման կետերը պատկանում են իրեն:

Հետևյալ թեորեմը անմիջապես բխում է սահմանումներից:

**Թեորեմ 3.1:** *Որպեսզի $F$ բազմությունը լինի փակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա լրացումը`*

$$F^C := R^m \setminus F\ ,$$

*լինի բաց:*

Հեշտ է տեսնել, որ յուրաքանչյուր $E \subset R^n$ բազմության կուտակման կետերի բազմությունը` $E'$-ը, փակ է:

$E \cup E'$ բազմությունը կոչվում է $E$ *բազմության փակույթ* և նշանակվում է $\overline{E}$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ $\overline{E}$ բազմությունը փակ է և հավասար է $E$-ն պարունակող բոլոր փակ բազմությունների հատմանը`

$$\overline{E} = \bigcap_F \left\{F \supset E;\ F - \text{ փակ է } \right\}:$$

$R^m$ տարածությունում $a$ և $b$ *կետերը միացնող հատված* է կոչվում $[0,1]$ հատվածի պատկերը`

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a)\ ,\ \ t \in [0,1]$$

արտապատկերման դեպքում: Այդ դեպքում $a$-ն և $b$-ն կոչվում են հատվածի ծայրակետեր, ընդ որում, $a$-ն՝ սկզբնակետ, իսկ $b$-ն՝ վերջնակետ: Հատվածը նշանակվում է $[a,b]$ սիմվոլով:

$L \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է *բեկյալ*, եթե գոյություն ունի $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset R^m$ վերջավոր բազմություն, այնպիսին, որ

$$L = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] :$$

Այդ դեպքում $x_i$, $0 \le i \le n$ կետերը կոչվում են բեկյալի գագաթներ: $x_0$-ն կոչվում է $L$ բեկյալի սկզբնակետ, իսկ $x_n$-ը՝ վերջնակետ: $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$ հատվածները կոչվում են բեկյալի կողմեր: Բեկյալը գրվում է նաև $L = x_0 x_1 ... x_n$ տեսքով:

$D \subset R^m$ բաց բազմությունը կոչվում է *կապակցված*, եթե յուրաքանչյուր $a \in D$, $b \in D$ կետերի զույգի համար գոյություն ունի $L \subset D$ բեկյալ, այնպիսին, որ $x_0 = a$, $x_n = b$ (գոյություն ունի $L \subset D$ բեկյալ, որը միացնում է $a$ և $b$ կետերը):

Բաց և կապակցված բազմությունը կոչվում է *տիրույթ (կամ բաց տիրույթ):*

$a \in R^m$ կետը կոչվում է $D$ բազմության *եզրային կետ*, եթե $a$-ի յուրաքանչյուր շրջակայք պարունակում է թե' $D$ բազմությանը պատկանող կետ, և թե' $D$ բազմությանը չպատկանող կետ:

$D$ բազմության եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է $D$ *բազմության եզր* և նշանակվում է $\partial D$ սիմվոլով:

Եթե $D$-ն բաց տիրույթ է, ապա $D \cup \partial D$ բազմությունը կոչվում է փակ տիրույթ և նշանակվում է $\overline{D}$ սիմվոլով*:

$D \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է *ուռուցիկ*, եթե

$$a, b \in D \Rightarrow [a,b] \subset D :$$

Պարզագույն ուռուցիկ բազմության օրինակներ են հանդիսանում գունդը և զուգահեռանիստը**:

---

* Ապացուցել, որ այն փակ բազմություն է:

** Ապացուցել:

2. Բորելի լեմման:

**Թեորեմ** 3.2: *Եթե $E \subset R^m$ փակ և սահմանափակ բազմությունը ծածկված է բաց բազմությունների $\{\Delta_\alpha\}$ ընտանիքով, ապա այդ ընտանիքից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:*

► Պարզության համար ապացույցը ներկայացնենք $m=2$ դեպքում: Այս դեպքում $E$ սահմանափակ բազմությունը կարող ենք ընդգրկել $[a,b]\times[c,d] =: A$ ուղղանկյան մեջ:

Ենթադրենք հակառակը՝ $E$ բազմության համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ:

$A$ ուղղանկյունը $x=\dfrac{a+b}{2}$ և $y=\dfrac{c+d}{2}$ ուղիղներով տրոհենք չորս փակ ուղղանկյունների՝ $A^1$, $A^2$, $A^3$, $A^4$ և դիտարկենք $E \cap A^i$, $i=1,2,3,4$ բազմությունները: Այս բազմություններից գոնե մեկի համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ: Դրան ծածկող համապատասխան $A^i$ ուղղանկյունը նշանակենք $A_1=[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$: Այնուհետև նույնը կատարենք $A_1$-ի հետ: Այս դեպքում կստանանք $A_2=[a_2,b_2]\times[c_2,d_2]$ ուղղանկյունը, այնպիսին, որ $E \cap A_2$ բազմության համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ: Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք

$$A_k=[a_k,b_k]\times[c_k,d_k],\ k=1,2,...$$

ներդրված ուղղանկյունները, այնպիսիք, որ յուրաքանչյուր $E \cap A_k$ բազմության համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ: Ընդ որում, թե' $[a_k,b_k]$, $k=1,2,...$ հատվածները, և թե' $[c_k,d_k]$, $k=1,2,...$ հատվածները ներդրված են և

$$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}\to 0,\ d_k-c_k=\frac{d-c}{2^k}\to 0:$$

Ներդրված հատվածների լեմմայի համաձայն, գոյություն ունեն $a_0$ և $c_0$ հաստատուններ, այնպիսիք, որ

$$\begin{matrix} a_k \to a_0 \\ b_k \to a_0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} c_k \to c_0 \\ d_k \to c_0 \end{matrix} :$$

Քանի որ $a_0 \in [a_k, b_k]$, $c_0 \in [c_k, d_k]$, $k = 1,2,...$, ապա $(a_0, c_0)$ կետը պատկանում է բոլոր $A_k$ ուղղանկյուններին: Եվ քանի որ յուրաքանչյուր $A_k$ ուղղանկյուն պարունակում է $E$-ի անվերջ թվով կետեր (հակառակ դեպքում $E \cap A_k$-ի համար գոյություն կունենար վերջավոր ենթածածկույթ), ապա $(a_0, c_0)$ կետը $E$-ի կուտակման կետ է*, հետևաբար, $(a_0, c_0) \in E$ (քանի որ $E$-ն փակ է):

Քանի որ $E$ բազմության բոլոր կետերը ծածկված են $\{\Delta_\alpha\}$ բազմություններով, ապա գոյություն ունի $\alpha_0$ թիվ, այնպիսին, որ $(a_0, c_0) \subset \Delta_{\alpha_0}$: Սակայն $\Delta_{\alpha_0}$-ն բաց է, հետևաբար, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$(a_0 - \delta, a_0 + \delta) \times (c_0 - \delta, c_0 + \delta) \subset \Delta_{\alpha_0} :$$

Մյուս կողմից, գոյություն ունի $k_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$k > k_0 \Rightarrow [a_k, b_k] \subset (a_0 - \delta, a_0 + \delta) \text{ և } [c_k, d_k] \subset (c_0 - \delta, c_0 + \delta),$$

հետևաբար,

$$k > k_0 \Rightarrow A_k \subset \Delta_{\alpha_0} :$$

Այսպիսով, $E \cap A_k$ բազմությունը ծածկվեց մեկ հատ $\Delta_\alpha$-ով, ինչը և հակասություն է: ■

**Սահմանում**: $K \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է *կոմպակտ*, եթե նրա յուրաքանչյուր բաց ծածկույթ պարունակում է վերջավոր ենթածածկույթ:

Բորելի լեմմայի համաձայն, յուրաքանչյուր փակ և սահմանափակ բազմություն կոմպակտ է: Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

**Թեորեմ 3.3**: *Եթե $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է, ապա այն փակ է և սահմանափակ:*

---

* $(a_0, c_0)$ կետի ցանկացած $(a_0 - \eta, a_0 + \eta) \times (c_0 - \eta, c_0 + \eta)$ շրջակայք պարունակում է $A_k$-ն, երբ $k > k_0(\eta)$ (տե՛ս հաջորդ դատողությունները):

► Նախ ապացուցենք սահմանափակությունը: Ենթադրենք հակառակը՝ $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է, բայց սահմանափակ չէ: Այդ դեպքում $\{B(0,n)\}$, $n=1,2,...$ բաց գնդերի ընտանիքը ծածկում է $K$-ն, բայց գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ, ինչը հակասություն է:

$K$ կոմպակտ բազմության փակությունն ապացուցելու համար կրկին կատարենք հակասող ենթադրություն. գոյություն ունի $K$-ի կուտակման կետ՝ $a$, որը չի պատկանում $K$-ին: Այդ դեպքում

$$\left[\overline{B}\left(a,\frac{1}{n}\right)\right]^C = \left\{x \in R^k : |x-a| > \frac{1}{n}\right\}, \quad n=1,2,...$$

բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի $K$-ն, բայց չի պարունակի վերջավոր ենթածածկույթ: Նորից եկանք հակասության: ■

<u>3. Անընդհատ ֆունկցիաներ:</u> $f : E \to R^k$ ($E \subset R^m$) ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $x_0 \in E$ կետում, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ x \in E \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : \qquad (3.1)$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $x_0$-ն $E$ բազմության կուտակման կետ է, (3.1) պայմանը նշանակում է՝

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) : \qquad (3.1')$$

Հետևյալ պնդումը բխում է ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից:

**Թեորեմ 3.4:** *Որպեսզի $f$ ֆունկցիան լինի անընդհատ $x_0 \in E$ կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $x_n \in E$, $x_n \to x_0$ հաջորդականության համար $f(x_n) \to f(x_0)$:*

Այն դեպքում, երբ $x_0 \in E$ կետը $E$ բազմության կուտակման կետ չէ (մեկուսացված կետ է), (3.1) պայմանը բավարարվում է՝ անկախ $f$ ֆունկցիայից, այսինքն՝ մեկուսացված կետում բոլոր ֆունկցիաները անընդհատ են:

Եթե $x$ և $x_0$ կետերը գրենք կոորդինատների միջոցով, ապա (3.1') պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\left.\begin{array}{l} \left|x^i - x_0^i\right| < \delta \\ 1 \le i \le m \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x^1,\dots,x^m) - f(x_0^1,\dots,x_0^m)\right| < \varepsilon : \qquad (3.1'')$$

Նկատենք, որ եթե $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 \in E$ կետում, ապա $\varphi(t) := f(x_0^1,\dots x_0^{i-1}, t, x_0^{i+1}\dots,x_0^m)$ ֆունկցիան, որը մեկ փոփոխականի ֆունկցիա է, անընդհատ է $x_0^i$ կետում: Այլ կերպ ասած, եթե մի քանի փոփոխականի ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այն անընդհատ է նաև ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի:

$f$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $E$ բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է $E$ բազմության բոլոր կետերում: $E$ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիաների դասը կնշանակենք $C(E)$ :

**Թեորեմ 3.5:** Եթե $f, g \in C(E)$, ապա $f+g$, $fg$, $f/g$ $(g \neq 0)$ ֆունկցիաները ևս $C(E)$ դասից են:*

Ապացույցը բխում է վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ թվաբանական գործողությունների վերաբերյալ թեորեմից:

*Վեկտորարժեք ֆունկցիայի անընդհատությունը* սահմանվում է նույն կերպ, այն է. $f: E \to R^k$ $(E \subset R^m)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $x_0 \in E$ կետում, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} \left|x - x_0\right| < \delta \\ x \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon :$$

**Թեորեմ 3.6:** *Որպեսզի $f: E \to R^k$ $(E \subset R^m)$ վեկտորարժեք ֆունկցիան լինի անընդհատ $x_0 \in E$ կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա*

---

* Այս թեորեմը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ $f$ և $g$ ֆունկցիաները անընդհատ են ոչ թե ամբողջ $E$ -ի վրա, այլ միայն $x_0 \in E$ կետում:

*կոորդինատային ֆունկցիաները՝* $f^i : E \to R$ $\left(f = (f^1,...,f^k)\right)$, *լինեն անընդհատ* $x_0$ *կետում:*

Այս թեորեմը բխում է վեկտորարժեք ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թեորեմից (թեորեմ 2.4):

$E$ բազմության վրա անընդհատ վեկտորարժեք ֆունկցիաների բազմությունը կնշանակենք $C(E,R^k)$:

**Թեորեմ 3.7:** *Եթե* $f, g \in C(E,R^k)$, *ապա* $f + g$, $\alpha f \in C(E,R^k)$ *(*$\alpha \in R$ *):*

Այս թեորեմը բխում է նախորդ թեորեմից և թվային ֆունկցիաների վերաբերյալ համապատասխան թեորեմից:

**Սահմանում:** $\varphi \in C\left([\alpha,\beta], R^m\right)$ *ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ կոր (կամ ուղղակի՝ կոր)* $R^m$*-ում, իսկ նրա արժեքների բազմությունը՝* $\gamma := \varphi\left([\alpha,\beta]\right)$*-ն, կոչվում է այդ կորի կրիչ:*

Հաճախ կոր են համարում հենց $\gamma$-ն՝ $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան համարելով $\gamma$ *կորի պարամետրացում:*

Կորի պարամետրացումը կարելի է ներկայացնել նաև $\varphi$ ֆունկցիայի կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = \varphi^1(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^m = \varphi^m(t) \end{array}\right\}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

որտեղ $\varphi^i \in C[\alpha,\beta]$, $1 \le i \le m$:

Հարթ կորերի համար $(m = 2)$ ընդունված տերմինները պահպանվում են նաև ընդհանուր դեպքում:

<u>**4. Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը:**</u>

**Թեորեմ 3.8:** Դիցուք $T \subset R^k$, $X \subset R^m$: Եթե

ա) $\varphi : T \to X$ ֆունկցիան անընդհատ է $t_0 \in T$ կետում,

բ) $f : X \to R^n$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 = \varphi(t_0)$ կետում, ապա $h(t) := f\left(\varphi(t)\right) : T \to R^n$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է $t_0$ կետում:

► Ապացուցվում է, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում. բ) պայմանից ունենք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\eta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \eta \\ x \in X \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : \qquad (բ)$$

Այնուհետև, ա) պայմանից ունենք, որ գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in T \end{array}\right\} \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \eta :$$

(ա)

Համադրելով (ա)-ն և (բ)-ն, կստանանք.

$$\left.\begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in T \end{array}\right\} \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon :$$

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in T \end{array}\right\} \Rightarrow |h(t) - h(t_0)| < \varepsilon : \blacksquare$$

Եթե $\varphi$ ֆունկցիան և $t$ վեկտորը ներկայացնենք կոորդինատների միջոցով՝ $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, $t = (t^1, \ldots, t^k)$, ապա թեորեմ 3.9-ը կընդունի հետևյալ տեսքը.

*եթե $\varphi^1(t^1, \ldots, t^h), \ldots, \varphi^m(t^1, \ldots, t^h)$ թվային ֆունկցիաներն անընդհատ են $t_0 = (t_0^1, \ldots, t_0^k)$ կետում, իսկ $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$ կետում, ընդ որում, $x_0^i = \varphi^i(t_0^1, \ldots, t_0^k)$, $1 \le i \le m$, ապա $f\left(\varphi^1(t^1, \ldots, t^h), \ldots, \varphi^m(t^1, \ldots, t^h)\right)$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է $t_0 = (t_0^1, \ldots, t_0^k)$ կետում:*

<u>5. Անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներ:</u>

1) $R^m$ տարածությունում ($m$ փոփոխականի) բազմանդամ է կոչվում հետևյալ տեսքի վերջավոր գումարը.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \sum C_{\nu_1 \ldots \nu_m} x_1^{\nu_1} \cdots x_m^{\nu_m} ,$$

որտեղ $C_{\nu_1 \dots \nu_m} \in R$, իսկ $\nu_1,\dots,\nu_m$ թվերը ոչ բացասական ամբողջ թվեր են:

$P$ բազմանդամն անընդհատ է ամբողջ $R^m$ տարածության վրա: Իրոք, քանի որ $x_1^{\nu_1},\dots,x_m^{\nu_m}$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը կարելի է դիտարկել որպես $m$ փոփոխականի ֆունկցիա, որն անընդհատ է $R^m$-ում, ուստի նրանց արտադրյալը նույնպես կլինի անընդհատ $R^m$-ում:

2) $P$ և $Q$ բազմանդամների հարաբերությունը՝ $\dfrac{P}{Q}$, կոչվում է ռացիոնալ ֆունկցիա: Ռացիոնալ ֆունկցիան անընդհատ է $R^m$ տարածության բոլոր այն կետերում, որոնցում հայտարարը զրո չէ:

3) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ֆունկցիան հարթության $(0,0)$ կետից տարբեր բոլոր կետերում անընդհատ է: $(0,0)$ կետում ֆունկցիան խզվում է[*], որովհետև այդ կետում այն սահման չունի: Իրոք, $y=kx$ ուղղի վրա

$$f(x,y)=\frac{k}{1+k^2}\underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\to}\frac{k}{1+k^2},$$

որը կախված է $k$-ից:

4) Եթե $a,b\in R^m$, ապա $\varphi(t)=a+t(b-a):R\to R^m$ ֆունկցիան անընդհատ է $R$-ում, որովհետև նրա կոորդինատային ֆունկցիաները գծային ֆունկցիաներ են:

## §4. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Այս պարագրաֆում դիտարկվող ֆունկցիաները թվային են:

### 1. Բոլցանո - Կոշիի թեորեմները:

**Թեորեմ 4.1:** *Դիցուք $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $D\subset R^m$ բաց (կամ փակ) տիրույթում: Եթե $a\in D$ և $b\in D$ կետերում $f$-ն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի $c\in D$ կետ, այնպիսին, որ $f(c)=0$:*

[*] Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար ընդունված տերմինները պահպանվում են նաև շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում:

► Նախ թեորեմն ապացուցենք այն դեպքում, երբ $D$ տիրույթը բաց է: Այդ դեպքում գոյություն ունի $L = x_0 x_1 ... x_n$ բեկյալ, այնպիսին, որ $x_0 = a$, $x_n = b$ և $L \subset D$:

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $f(a) < 0$, $f(b) > 0$: Թող, որ $i$-ն լինի այնպիսին, որ $f(x_i) < 0$, $f(x_{i+1}) > 0$:

Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F(t) = f\big(x_i + t(x_{i+1} - x_i)\big): [0,1] \to R,$$

որն անընդհատ է $[0,1]$ հատվածում, ընդ որում, $F(0) = f(x_i) < 0$, $F(1) = f(x_{i+1}) > 0$: Հետևաբար, մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի վերաբերյալ Բոլցանո - Կոշիի առաջին թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի $\theta \in [0,1]$ թիվ, այնպիսին, որ $F(\theta) = 0$: Այսինքն՝

$$f\big(x_i + \theta(x_{i+1} - x_i)\big) = 0:$$

Մնում է վերցնել

$$c = x_i + \theta(x_{i+1} - x_i) = (1-\theta)x_i + \theta x_{i+1}$$

կետը, որը պատկանում է $[x_i, x_{i+1}] \subset D$ հատվածին:

Փակ տիրույթի դեպքը բերվում է բաց տիրույթի դեպքին հետևյալ դատողությունների միջոցով.

եթե $a$-ն եզրային կետ է և $f(a) < 0$, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{matrix} |x-a| < \delta \\ x \in D \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) < 0: \tag{4.1}$$

Հետևաբար, գոյություն ունի $a_1 \in D$ ներքին կետ, այնպիսին, որ $f(a_1) < 0$: Նման ձևով (հարկ եղած դեպքում) $b$-ն նույնպես կարող ենք փոխարինել ներքին կետով: ■

**Թեորեմ 4.2:** *Բաց (կամ փակ) տիրույթում անընդհատ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմությունը միջակայք է:*

Ապացուցվում է նույն կերպ, ինչ որ մեկ փոփոխականի դեպքում:

<u>2. Վայերշտրասի թեորեմները:</u>

**Թեորեմ 4.3:** *Եթե $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $K \subset R^m$ փակ սահմանափակ[*] բազմության վրա, ապա այն սահմանափակ է:*

► Պետք է ապացուցենք, որ գոյություն ունեն $m, M \in R$ թվեր, այնպիսիք, որ

$$m \le f(x) \le M\ ,\ \ x \in K\ :$$

Ապացուցենք միայն վերևից սահմանափակությունը ($M$ -ի գոյությունը): Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $n$ բնական թվի համար գոյություն ունի $x_n \in K$ կետ, այնպիսին, որ

$$f(x_n) > n\ : \tag{4.2}$$

$K$ բազմության սահմանափակ լինելուց հետևում է, որ $x_n$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Ուստի, Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, այն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $x_{n_k} \to x_0$: Քանի որ $K$-ն նաև փակ է, ապա $x_0 \in K$ :

Ֆունկցիայի անընդհատության Հայնեի սահմանման համաձայն՝

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)\,,$$

որը հակասում է (4.2) պայմանին: ■

**Թեորեմ 4.4:** *Փակ սահմանափակ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:*

Ապացույցը ճիշտ նույնն է, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում:

$E \subset R^m$ բազմության վրա սահմանափակ *ֆունկցիայի տատանումը* սահմանվում է նույն կերպ, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում՝

$$\omega_E(f) := \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E} f(x) = \sup_{x,y\in E}\left[f(x) - f(y)\right]:$$

---

[*] Կոմպակտ:

Թեորեմ 4.4-ի համաձայն, կոմպակտ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիայի տատանումը հավասար է ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությանը:

<u>3. Հավասարաչափ անընդհատություն:</u> Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը սահմանվում է նույն կերպ, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Այն է՝ $f:E\to R$, $E\subset R^m$ ֆունկցիան կոչվում է հավասարաչափ անընդհատ $E$ բազմության վրա, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի մի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{aligned}&|x'-x''|<\delta\\&x',x''\in E\end{aligned}\right\}\Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon : \tag{4.3}$$

**Թեորեմ 4.5 (Կանտոր):** *Կոմպակտ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:*

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $K\subset R^m$ կոմպակտ բազմության վրա, բայց հավասարաչափ անընդհատ չէ: Դա նշանակում է, որ մի որևէ $\varepsilon_0>0$ թվի համար խախտվում է (4.3)-ը: Այսինքն՝ ինչպիսի $\delta>0$ թիվ էլ վերցնենք, գոյություն ունեն $x'_\delta, x''_\delta\in K$ կետեր, այնպիսիք, որ

$$|x'_\delta-x''_\delta|<\delta\,,\quad |f(x'_\delta)-f(x''_\delta)|\ge\varepsilon_0 :$$

Վերցնենք $\delta=\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,...$ և համապատասխան կետերը նշանակենք $x'_n$, $x''_n$ : Կունենանք՝

$$|x'_n-x''_n|<\frac{1}{n}\,,\quad |f(x'_n)-f(x''_n)|\ge\varepsilon_0\,,\quad n=1,2,...: \tag{4.4}$$

Քանի որ $K$ կոմպակտ բազմությունը սահմանափակ է, ապա սահմանափակ է նաև $x'_n\in K$ հաջորդականությունը: Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, այն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $x'_{n_k}\to x_0$ : Քանի որ $K$ -ն փակ է, ապա $x_0\in K$ :

Դժվար չէ նկատել, որ $x''_{n_k}$ հաջորդականությունը ձգտում է նույն $x_0$ սահմանին: Անընդհատության Հայնեի սահմանման համաձայն՝

$$f(x'_{n_k}) \to f(x_0), \quad f(x''_{n_k}) \to f(x_0), \quad k \to \infty,$$

որը հակասում է (4.4)-ին: ■

**Սահմանում:** $E \subset R^n$ *բազմության տրամագիծ է կոչվում*

$$\sup_{x',x'' \in E} |x' - x''|$$

*մեծությունը: Այն նշանակվում է* $diamE$ *կամ* $\delta(E)$ *սիմվոլներով:*

Ձևակերպենք Կանտորի թեորեմի դասական հետևանքը՝ *եթե* $f$ *ֆունկցիան անընդհատ է* $K \subset R^m$ *կոմպակտ բազմության վրա, ապա յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի* $\delta > 0$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{array}{l} diamE < \delta \\ E \subset K \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_E(f) < \varepsilon,$$

*որտեղ* $\omega_E(f)$ *-ը* $f$ *ֆունկցիայի տատանումն է* $E$ *բազմության վրա:*

Այժմ *ապացուցենք Կանտորի թեորեմը Բորելի լեմմայի միջոցով*[*]:

► Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $t \in K$ կետի համար գոյություն ունի $\delta_t > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x - t| < \delta_t \\ x \in K \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Հետևաբար,

$$x', x'' \in B(t, \delta_t) \cap K \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon: \tag{4.5}$$

Դիտարկենք $\left\{ B\left(t, \frac{\delta_t}{2}\right) \right\}$, $t \in K$ բաց գնդերի ընտանիքը, որը ծածկում է $K$-ն: Քանի որ $K$-ն կոմպակտ է, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝

---

[*] Ապացույցը կատարվում է նույն դատողություններով, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում:

$$B\left(t_1, \frac{\delta_{t_1}}{2}\right), \dots, B\left(t_n, \frac{\delta_{t_n}}{2}\right):$$

Նշանակենք $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{t_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{t_n}}{2}\right\}$ և ցույց տանք, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in K \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

Իրոք, դիցուք՝ $x' \in B\left(t_i, \frac{\delta_{t_i}}{2}\right)$: Այդ դեպքում, $\delta$-ի ընտրության շնորհիվ, $x'' \in B(t_i, \delta_{t_i})$:

Այսպիսով՝ $x', x'' \in B(t_i, \delta_{t_i}) \cap K$ և, (4.5)-ի համաձայն, կստանանք՝

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon : \blacksquare$$

## §5. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

<u>1. Անընդհատությունն արտապատկերումների լեզվով:</u> Դիցուք $X \subset R^m$ և $f : X \to R^k$, այսինքն՝ $f$ արտապատկերումը որոշված է $X$ բազմության վրա և արժեքներ է ընդունում $R^k$ տարածությունից: Յուրաքանչյուր $A \subset X$ ենթաբազմության համար $f(A)$ սիմվոլով նշանակենք այն $f(x)$ կետերի բազմությունը, որոնց համար բավարարվում է $x \in A$ պայմանը՝

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} :$$

$f(A)$-ն կոչվում է $A$ *բազմության պատկեր:*

Այնուհետև, կամայական $U \subset R^k$ բազմության համար $f^{-1}(U)$ սիմվոլով նշանակենք այն բոլոր $x \in X$ կետերի բազմությունը, որոնք բավարարում են $f(x) \in U$ պայմանին՝

$$f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}:$$

$f^{-1}(U)$ -ն կոչվում է $U$ բազմության նախապատկեր:

Հատուկ նշենք, որ այս սահմանման մեջ $f$ արտապատկերման հակադարձելիությունը չի պահանջվում:

Այժմ ենթադրենք, որ $f : R^m \to R^k$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 \in R^m$ կետում: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon): \tag{5.1}$$

(5.1) պայմանը կարելի է գրել ինչպես

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \tag{5.2}$$

տեսքով, այնպես էլ նախապատկերի միջոցով՝

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)): \tag{5.2'}$$

**Թեորեմ** 5.1: *Որպեսզի* $f \in C(R^m, R^k)$*, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր* $U \subset R^k$ *բաց բազմության նախապատկերը՝* $f^{-1}(U)$ *-ն, լինի բաց բազմություն:*

► *Անհրաժեշտություն:* Նշանակենք $V = f^{-1}(U)$ և ապացուցենք, որ $V$ -ն բաց է (այսինքն՝ $V$ -ի յուրաքանչյուր կետ ներքին կետ է):

Դիցուք $x_0 \in V$, որը նշանակում է՝ $f(x_0) \in U$: Քանի որ $U$ -ն բաց է, ապա գոյություն ունի $f(x_0)$ կետի $B(f(x_0), \varepsilon)$ շրջակայք, այնպիսին, որ

$$B(f(x_0), \varepsilon) \subset U:$$

(5.2')-ի համաձայն՝ գոյություն ունի $B(x_0, \delta)$ գունդ, այնպիսին, որ

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(U) = V:$$

Այսպիսով, $x_0$ -ն $V$ -ի ներքին կետ է, հետևաբար՝ $V$ -ն բաց է:

*Բավարարություն:* Վերցնենք կամայական $x_0 \in R^m$ կետ և ապացուցենք $f$ -ի անընդհատությունն այդ կետում: Այդ նպատակով վերցնենք

$\varepsilon > 0$ թիվը և որպես $U \subset R^k$ բաց բազմություն ընտրենք $U = B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$ բաց գունդը: Ըստ թեորեմի պայմանի, $V = f^{-1}\big(B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\big)$ բազմությունը բաց է: Հետևաբար, գոյություն ունի $x_0 \in V$ կետի $B(x_0, \delta)$ շրջակայք, այնպիսին, որ

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}\big(B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\big):$$

Այժմ, (5.2')-ի համաձայն, $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0$ կետում: ■

Այն դեպքում, երբ $f$ ֆունկցիան որոշված է ոչ թե ամբողջ $R^m$ տարածությունում, այլ նրա $X$ ենթաբազմության վրա, այս թեորեմի նմանակը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

**Թեորեմ 5.2:** *Որպեսզի $f \in C(X, R^k)$, $X \subset R^m$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $U \subset R^k$ բաց բազմության համար գոյություն ունենա $V \subset R^m$ բաց բազմություն, այնպիսին, որ*

$$f^{-1}(U) = V \cap X :$$

► *Անհրաժեշտություն:* $f$-ն անընդհատ է $x_0 \in X$ կետում, նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի մի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\big(B(x_0, \delta) \cap X\big) \subset f^{-1}\big(B\big(f(x_0), \varepsilon\big)\big): \tag{5.3}$$

Քանի որ $U$-ն բաց է, ապա յուրաքանչյուր $x \in f^{-1}(U)$ կետի համար գոյություն ունի $\varepsilon_x > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B\big(f(x), \varepsilon_x\big) \subset U$:

(5.3)-ի համաձայն, $\varepsilon_x > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_x > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\big(B(x, \delta_x) \cap X\big) \subset f^{-1}\big(B\big(f(x), \varepsilon_x\big)\big) \subset f^{-1}(U):$$

Նշանակենք՝

$$V = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B(x, \delta_x):$$

Այդ դեպքում՝

$$V \cap X = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} \big(B(x, \delta_x) \cap X\big) = f^{-1}(U):$$

*Բավարարությունն* ապացուցվում է այնպես, ինչպես նախորդ թեորեմում: ■

Ընթերցողին առաջարկվում է այս թեորեմը ձևակերպել փակ բազմությունների տերմիններով և այդտեղից ստանալ հետևյալ արդյունքը. *եթե $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ բազմություն է և $f \in C(K, R^k)$ ֆունկցիան հակադարձելի է, ապա $f^{-1}$-ը նույնպես անընդհատ է (օգտվեք հաջորդ թեորեմից):*

<u>**2. Կոմպակտ բազմության անընդհատ պատկերը:**</u>

**Թեորեմ 5.3:** *Կոմպակտ բազմության անընդհատ պատկերը կոմպակտ բազմություն է:*

► Դիցուք $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և $f \in C(K, R^k)$ : Պետք է ապացուցենք, որ $f(K)$ բազմությունը ևս կոմպակտ է:

Դիցուք բաց բազմությունների $\{U_\alpha\}$ ընտանիքը ծածկում է $f(K)$-ն: Նախորդ թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $U_\alpha$ բաց բազմության համար գոյություն ունի $V_\alpha \subset R^m$ բաց բազմություն, այնպիսին, որ

$$f^{-1}(U_\alpha) = V_\alpha \cap K :$$

Այդ դեպքում $\{V_\alpha\}$ բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի $K$ կոմպակտ բազմությունը, հետևաբար, գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝

$$V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n} :$$

Մնում է նկատել, որ համապատասխան $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ բազմությունների ընտանիքը կծածկի $f(K)$-ն: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Դժվար չէ նկատել, որ Վայերշտրասի թեորեմները հետևում են այս թեորեմից: Իրոք, եթե վերցնենք $k = 1$, այդ դեպքում $f(K)$-ն կհանդիսանա թվային առանցքի կոմպակտ ենթաբազմություն, այսինքն՝ փակ և սահմանափակ բազմություն: Իսկ այդպիսի բազմությունն ունի մեծագույն և փոքրագույն տարրեր:

<u>**3. Կապակցվածություն:**</u>* Դիցուք $D \subset R^n$-ը բաց բազմություն է: Յուրաքանչյուր $x_0 \in D$ կետի համար $C(x_0)$-ով նշանակենք այն բոլոր $x \in D$ կետերի բազմությունը, որոնք հնարավոր է $x_0$-ին միացնել բեկյալով,

---

* Ընթերցողին օգտակար կլինի ինքնուրույն ստուգել այս կետի սկզբնամասում բերված պնդումների ճշմարտացիությունը:

որն ամբողջությամբ պատկանում է $D$-ին: $C(x_0)$-ն $x_0$ կետը պարունակող $D$ բազմության բաց և կապակցված ենթաբազմություն է: Ավելին՝ այն այդ հատկությամբ օժտված ամենամեծ ենթաբազմությունն է: $C(x_0)$-ն կոչվում է $D$ բաց բազմության *կապակցվածության կոմպոնենտ*:

Նկատենք, որ տարբեր կետերի համապատասխան կոմպոնենտները կամ համընկնում են կամ չեն հատվում: Հետևաբար, կոմպոնենտների քանակը վերջավոր է կամ հաշվելի:

Եթե $D$ բազմությունը կապակցված չէ, ապա այն ունի առնվազն երկու կոմպոնենտ: Այդ դեպքում կոմպոնենտներից որևէ մեկը նշանակենք $U_1$, իսկ մնացած կոմպոնենտների միավորումը՝ $D \setminus U_1 =: U_2$:

$U_1$-ը և $U_2$-ը ոչ դատարկ, բաց բազմություններ են և

$$\text{ա) } U_1 \cap U_2 = \varnothing, \text{ բ) } U_1 \cup U_2 = D : \tag{5.4}$$

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. *եթե գոյություն ունեն $U_1$, $U_2$ ոչ դատարկ, բաց բազմություններ, որոնք բավարարում են (5.4) պայմաններին, ապա $D$-ն կապակցված չէ:*

Ավելին, *եթե $x_i \in U_i$, $i = 1,2$, ապա գոյություն չունի $\gamma : [\alpha, \beta] \to R^n$ անընդհատ կոր այնպես, որ $\gamma(\alpha) = x_1$, $\gamma(\beta) = x_2$ և $\gamma([\alpha, \beta]) \subset D$:*

Իրոք, եթե գոյություն ունենա այդպիսի $\gamma$, ապա, նշանակելով

$$t_0 := \sup\{t \in [\alpha, \beta] : \gamma(t) \in U_1\} = \sup \gamma^{-1}(U_1),$$

և օգտվելով թեորեմ 5.2-ից, կստանանք, որ $\gamma(t_0)$ կետը չի պատկանում ոչ $U_1$-ին, և ոչ էլ $U_2$-ին: Այսինքն՝ $\gamma(t_0) \notin D$, ինչը հակասություն է:

Այժմ տանք կապակցվածության սահմանումը ընդհանուր դեպքում:

**Սահմանում 1:** *$E \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է չկապակցված, եթե գոյություն ունեն $U_1, U_2$ բաց բազմություններ, այնպիսիք, որ*

$$\text{ա) } U_1 \cap U_2 = \varnothing, \text{ բ) } U_1 \cap E \neq \varnothing,\ U_2 \cap E \neq \varnothing, \text{ գ) } E \subset U_1 \cup U_2 : \tag{5.5}$$

*Հակառակ դեպքում $E$ բազմությունը կոչվում է կապակցված:*

Այսինքն՝ $E$ բազմությունը կոչվում է կապակցված, եթե գոյություն չունեն $U_1$ և $U_2$ բաց բազմություններ, որոնք բավարարում են (5.5) պայմաններին:

Տանք կապակցվածության մեկ այլ սահմանում:

**Սահմանում 2:** $E_1, E_2 \subset R^n$ *ոչ դատարկ բազմությունները կոչվում են անջատելի, եթե* $E_1 \cap \overline{E}_2 = \overline{E}_1 \cap E_2 = \varnothing$ *:*

$E \subset R^n$ *բազմությունը կոչվում է կապակցված, եթե այն հնարավոր չէ ներկայացնել* $E_1$ *և* $E_2$ *ոչ դատարկ անջատելի բազմությունների միավորման տեսքով:*

Հետևաբար, $E$-ն կապակցված չէ, նշանակում է՝ գոյություն ունեն $E_1, E_2$ ոչ դատարկ բազմություններ, այնպիսիք, որ

$$\text{ա) } E = E_1 \cup E_2; \qquad \text{բ) } E_1 \cap \overline{E}_2 = \overline{E}_1 \cap E_2 = \varnothing: \tag{5.6}$$

*Ապացուցենք, որ (5.5)-ը և (5.6)-ը համարժեք են:*

(5.5)-ից (5.6)-ը բխեցնելու համար նշանակենք՝

$$U_1 \cap E = E_1, \; U_2 \cap E = E_2:$$

Այդ դեպքում (5.6)-ի ա) պայմանն ակնհայտորեն կբավարարվի: (5.6)-ի բ) պայմանն ապացուցելու համար ենթադրենք, որ $x_0 \in E_1 \subset U_1$: Քանի որ $U_1$-ը բաց է, ապա գոյություն ունի $B(x_0, \delta) \subset U_1$: Հետևաբար, $x_0 \notin \overline{E}_2$, այսինքն՝ $E_1 \cap \overline{E}_2 = \varnothing$:

Նույն ձևով կստուգվի նաև բ) պայմանի մյուս հավասարությունը:

Այժմ (5.6)-ից բխեցնենք (5.5)-ը: Նախ նկատենք, որ

$$\begin{array}{lll} \forall p \in E_1 & \exists \delta_p > 0 & B(p, \delta_p) \cap E_2 = \varnothing \\ \forall q \in E_2 & \exists \delta_q > 0 & B(q, \delta_q) \cap E_1 = \varnothing \end{array} : \tag{5.7}$$

Նշանակենք՝

$$U_1 = \bigcup_{p \in E_1} B\left(p, \frac{\delta_p}{2}\right), \; U_2 = \bigcup_{q \in E_2} B\left(q, \frac{\delta_q}{2}\right):$$

(5.5)-ի բ) և գ) պայմաններն ակնհայտորեն կբավարարվեն: Մնում է ապացուցել ա) պայմանը:

Ենթադրենք հակառակը՝ $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $p \in E_1$, $q \in E_2$ կետեր, այնպիսիք, որ

$$B\left(p, \frac{\delta_p}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\delta_q}{2}\right) \neq \varnothing :$$

Այժմ, եթե $x$-ը պատկանում է այդ հատույթին և $\delta_q \leq \delta_p$, ապա

$$|p-q| \leq |p-x| + |x-q| < \frac{\delta_p}{2} + \frac{\delta_q}{2} \leq \delta_p ,$$

ինչը նշանակում է, որ $q \in B(p, \delta_p)$: Ուստի $B(p, \delta_p) \cap E_2 \neq \varnothing$, որը հակասում է (5.7)-ին:

<u>4. Կապակցված բազմության անընդհատ պատկերը:</u>

**Թեորեմ 5.4:** *Կապակցված բազմության անընդհատ պատկերը կապակցված բազմություն է:*

► Դիցուք $E \subset R^m$ բազմությունը կապակցված է և $f \in C(E, R^k)$: Ցույց տանք, որ $f(E)$-ն նույնպես կապակցված է:

Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $U_1, U_2 \subset R^k$ բաց բազմություններ, այնպիսիք, որ

ա) $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, բ) $U_1 \cap f(E) \neq \varnothing$, $U_2 \cap f(E) \neq \varnothing$,

գ) $f(E) \subset U_1 \cup U_2$:

Նշանակենք $f^{-1}(U_i) = E_i$, $i = 1, 2$: Այդ դեպքում $E_1$ և $E_2$ բազմությունները դատարկ չեն և

ա) $E = E_1 \cup E_2$, բ) $E_1 \cap \overline{E}_2 = \overline{E}_1 \cap E_2 = \varnothing$:

Այսինքն՝ $E$-ն կապակցված չէ, ինչը հակասություն է: ■

**Հետևանք:** *Եթե $E \subset R^m$ բազմությունը կապակցված է և $f \in C(E)$, ապա $f(E)$-ն միջակայք է:*

Այս հետևանքն ընդհանրացնում է Բոլցանո - Կոշիի թեորեմները:

► Թեորեմ 5.4-ի համաձայն, $Y = f(E)$ բազմությունը կապակցված է: Մեզ մնում է ապացուցել, որ $R$-ում կապակցված $Y$ բազմությունը միջակայք է:

Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $y_1, y_2 \in Y$ թվեր և $z \in (y_1, y_2)$ թիվ, այնպիսիք, որ $z \notin Y$: Նշանակելով $U_1 = (-\infty, z)$, $U_2 = (z, +\infty)$՝ կստանանք, որ $U_1$ և $U_2$ բաց բազմությունները բավարարում են (5.5) պայմաններին, այսինքն՝ $Y$-ը կապակցված չէ: Դա հակասություն է: ■

# VIII ԳԼՈՒԽ

# ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

## §1. ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

**1. Մասնակի ածանցյալներ:** Դիցուք $u = f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $D \subset R^2$ բաց տիրույթում և $M_0 = (x_0, y_0) \in D$:

Նշանակենք $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, որտեղ $\Delta x = x - x_0$ աճը* վերցվում է այնքան փոքր, որ $M = (x_0 + \Delta x, y_0)$ կետը դուրս չգա $D$ տիրույթից: $\Delta_x u$ -ն կոչվում է $u = f(x,y)$ ֆունկցիայի մասնակի աճ՝ ըստ $x$ փոփոխականի:

**Սահմանում:** *Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

*սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ), ապա այն կոչվում է* $u = f(x,y)$ *ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ՝ ըստ* $x$ *-ի,* $M_0 = (x_0, y_0)$ *կետում, և նշանակվում է* $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$, $u'_x(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_x(M_0)$ *սիմվոլներից որևէ մեկով:*

Նման ձևով սահմանվում է նաև ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն ըստ $y$ -ի:

**Օրինակներ:**

1) $u = x^y$, $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$:

2) $u = arctg\frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$:

---

* Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում ընդունված տերմինները օգտագործվում են նաև այստեղ:

3) Եթե $f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{երբ } xy=0\\ 1, & \text{երբ } xy\neq 0\end{cases}$, ապա $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$:

Ընդհանուր դեպքում ենթադրենք, որ $u=f(x^1,...,x^m)$ ֆունկցիան որոշված է $D\subset R^m$ բաց տիրույթում և $x_0=(x_0^1,...,x_0^m)\in D$: Նշանակենք՝

$$\Delta_{x^i}u=f(x_0^1,...,x_0^{i-1},x_0^i+h,x_0^{i+1},...,x_0^m)-f(x_0^1,...,x_0^m),$$

որը կոչվում է $u$ ֆունկցիայի *մասնակի աճ*՝ըստ $x^i$ փոփոխականի:

**Սահմանում:** *Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_{x^i}u}{h}$$

*սահմանը, ապա այն կոչվում է $u$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ $x_0$ կետում՝ ըստ $x^i$-ի, և նշանակվում է* $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}(x_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$, $u'_{x^i}(x_0)$, $f'_{x^i}(x_0)$ *սիմվոլներից որևէ մեկով:*

__**2. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը:**__ Նախ դիտարկենք $u=f(x,y)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքը:

Նշանակենք՝ $\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$: Այն կոչվում է *ֆունկցիայի լրիվ աճ*՝ $(x_0,y_0)$ կետում (նշանակվում է նաև՝ $\Delta f(x_0,y_0)$ ):

**Թեորեմ 1.1:** *Եթե $(x_0,y_0)$ կետի մի որևէ շրջակայքում գոյություն ունեն $f'_x(x,y)$ և $f'_y(x,y)$ վերջավոր մասնակի ածանցյալները և դրանք անընդհատ են $(x_0,y_0)$ կետում, ապա ֆունկցիայի լրիվ աճի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.*

$$\Delta u=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y, \tag{1.1}$$

*որտեղ $\alpha_1$ և $\alpha_2$ ֆունկցիաները կախված են $\Delta x$, $\Delta y$ աճերից և նրանց հետ մեկտեղ ձգտում են զրոյի՝ $\alpha_i\to 0$, երբ $\Delta x,\Delta y\to 0$, $i=1,2$ :*

► Ապացուցելու համար $\Delta u$ լրիվ աճը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned}\Delta u = &\left[ f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) \right] + \\ &+\left[ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \right]:\end{aligned} \tag{1.2}$$

Այստեղ առաջին գումարելին իրենից ներկայացնում է $f$ ֆունկցիայի մասնակի աճ՝ ըստ $x$-ի ($(x_0, y_0+\Delta y)$ կետում), իսկ երկրորդը՝ ըստ $y$-ի: Այսինքն՝ դրանք մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների աճեր են: Դրանցից յուրաքանչյուրի համար կիրառելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$\Delta u = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\,;\ 0<\theta_i<1,\ i=1{,}2$$

հավասարությունը: Այժմ, նշանակելով

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0, y_0) := \alpha_1 \ ,$$

$$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0, y_0) := \alpha_2 \,,$$

կստանանք (1.1)-ը: Իրոք, մասնակի ածանցյալների անընդհատության շնորհիվ՝ $\alpha_i \to 0$, երբ $\Delta x, \Delta y \to 0$, $i=1{,}2$: ■

Ընդհանուր դեպքում այս թեորեմը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

**Թեորեմ 1.2:*** *Եթե $u = f(x^1,...,x^m)$ ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն $x_0$ կետի շրջակայքում և անընդհատ են $x_0$ կետում, ապա ֆունկցիայի լրիվ աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x_0^1+h^1,...,x_0^m+h^m) - f(x_1^0,...,x_m^0) = \\ &= f'_{x^1}(x_0)h^1 + \cdots + f'_{x^m}(x_0)h^m + \alpha_1 h^1 + \cdots + \alpha_m h^m \,,\end{aligned} \tag{1.3}$$

*որտեղ $\alpha_i \to 0$, երբ $h = (h^1,...,h^m) \to 0$ $(0 = (0,0,...,0))$:*

Ապացուցվում է նախորդի պես, միայն թե այս դեպքում (1.2)-ի փոխարեն $\Delta u$-ն կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

---

* Օգտվում ենք հետևյալ նշանակումներից՝ $x = (x^1,...,x^m)$, $x_0 = (x_0^1,...,x_0^m)$, $\Delta x^i = x^i - x_0^i = h^i$ ; $\Delta u = f(x) - f(x_0)$ :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{m}\Big[f(x_0^1,...,x_0^{i-1},x_0^i+h^i,x_0^{i+1}+h^{i+1},...,x_0^m+h^m) -$$
$$- f(x_0^1,...,x_0^i,x_0^{i+1}+h^{i+1},...,x_0^m+h^m)\Big]:$$

**Հետևանք:** *Եթե բավարարվում են թեորեմ 1.2-ի պայմանները, ապա $f$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0$ կետում:*

► Իրոք, ըստ (1.3)-ի՝

$$f(x)-f(x_0)=f'_{x^1}(x_0)(x^1-x_0^1)+\cdots+f'_{x^m}(x_0)(x^m-x_0^m)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x^i-x_0^i)\to 0 \quad (x\to x_0),$$

քանի որ կոորդինատային զուգամիտության համաձայն՝

$$(x\to x_0)\Rightarrow(x^i\to x_0^i,\ i=1,...,m): \blacksquare$$

Ֆունկցիայի աճի բանաձևն ավելի կոմպակտ տեսքով գրելու նպատակով նշանակենք՝

$$\rho=\left|x-x_0\right|=\sqrt{(x^1-x_0^1)^2+\cdots+(x^m-x_0^m)^2}:$$

Այդ դեպքում՝ *

$$\alpha_1h^1+\cdots+\alpha_mh^m=\rho\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{x^i-x_0^i}{\rho}=\rho\cdot\varepsilon(x)=o(\rho),\ \text{երբ}\ \rho\to 0,$$

որտեղ

$$\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{x^i-x_0^i}{\rho}\to 0,\ \text{երբ}\ \rho\to 0 \quad \left(\left|\frac{x^i-x_0^i}{\rho}\right|\le 1\right):$$

Հետևաբար, ֆունկցիայի աճի բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\Delta u=f(x^1,....,x^m)-f(x_0^1,...,x_0^m)=f'_{x^1}(x_0)(x^1-x_0^1)+\cdots+$$
$$+f'_{x^m}(x_0)(x^m-x_0^m)+o(\rho)\ \ (\rho\to 0), \tag{1.3'}$$

* Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը՝

$$o(\rho)=\rho\cdot\varepsilon(\rho)=\frac{\varepsilon(\rho)}{\rho}\cdot\rho^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon(\rho)(x^i-x_0^i)}{\rho}\cdot(x^i-x_0^i):=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x^i-x_0^i):$$

կամ, որ նույնն է՝

$$f(x_0^1+h^1,....,x_0^m+h^m)-f(x_0^1,...,x_0^m)=f'_{x^1}(x_0)h^1+\cdots+ \\ +f'_{x^m}(x_0)h^m+o(\rho)\quad(\rho\to 0): \tag{1.3''}$$

Այժմ բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ ճնակերպած թեորեմների մեջ մասնակի ածանցյալների անընդհատության պահանջն ավելորդ չէ: Դիտարկենք

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\quad f(0,0)=0$$

ֆունկցիան, որն անընդհատ է ամբողջ հարթության վրա ((0,0) կետում անընդհատությունը հետևում է $\left|f(x,y)\right|\le\frac{1}{2}|x|$ անհավասարությունից): Բացի դրանից, ֆունկցիան ունի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ հարթության բոլոր կետերում: Իրոք, (0,0) կետում մասնակի աճերը 0 են, ուստի այդ կետում 0 են նաև մասնակի ածանցյալները: Մնացած կետերում վերջավոր մասնակի ածանցյալների գոյությունը հետևում է կոտորակի ածանցյալի վերաբերյալ թեորեմից*:

Այժմ համոզվենք, որ այս ֆունկցիայի համար (0,0) կետում ֆունկցիայի աճի բանաձևը ճիշտ չէ: Իսկապես, հակառակ դեպքում կունենանք՝

$$\Delta f(0,0)=\frac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\ ,\ \varepsilon\to 0\ ,$$

որտեղից էլ, վերցնելով $\Delta y=\Delta x>0$, կստանանք՝

$$\frac{\Delta x}{2}=\varepsilon\sqrt{2}\Delta x\,,\ \varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,,$$

ինչը հակասություն է:

<u>3. Դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:</u> Դիցուք $z=f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $D\subset R^2$ տիրույթում (բաց) և $M_0=(x_0,y_0)\in D$:

**Սահմանում:** *$f$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի $M_0$ կետում, եթե գոյություն ունեն $A,B\in R$ թվեր, այնպիսիք, որ*

---

* Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների վերաբերյալ ածանցյալի տեսությունը կիրառելի է մասնակի ածանցյալների դեպքում:

$$\begin{aligned}\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \left(\rho \to 0\right),\end{aligned} \tag{1.4}$$

*որտեղ* $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ *:*

Ֆունկցիայի աճի բանաձևը թույլ է տալիս ստանալ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայման: Ֆունկցիայի լրիվ աճի վերաբերյալ թեորեմը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝

*եթե $f$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են $M_0$ կետում**, *ապա $f$ ֆունկցիան այդ կետում դիֆերենցելի է:*

Սակայն հակառակ պնդումը ճիշտ չէ: Որպես օրինակ դիտարկենք $z(x,y) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $z(0,0) = 0$ ֆունկցիան, որը $(0,0)$ կետում դիֆերենցելի է, բայց ըստ $x$ -ի ածանցյալն այդ կետում անընդհատ չէ:

Մյուս կողմից, դժվար չէ ապացուցել, որ եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0$ կետում, ապա այն $M_0$ կետում ունի մասնակի ածանցյալներ և

$$A = f'_x(M_0)\,, \quad B = f'_y(M_0):$$

Իրոք, (1.4) բանաձևի մեջ վերցնենք $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ և կստանանք՝

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \to A \quad (\Delta x \to 0):$$

Նման ձևով կապացուցվի նաև մյուս հավասարությունը:

(1.4) կամ (1.1) բանաձևի մեջ մասնակցող

$$A\Delta x + B\Delta y = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y$$

արտահայտությունը կոչվում է *ֆունկցիայի աճի գծային մաս կամ գլխավոր մաս*:

**Սահմանում:** *Դիֆերենցելի ֆունկցիայի աճի գծային մասը կոչվում է այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակվում է $df$ սիմվոլով՝*

$$df(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y:$$

---

* Ենթադրվում է, որ $f$ ֆունկցիան $M_0$-ի շրջակայքում ունի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ:

Մասնավորաբար, վերցնելով $f(x,y)=x$, կստանանք $dx=\Delta x$, ու նման ձևով՝ $dy=\Delta y$: Հետևաբար, ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կարելի է ներկայացնել նաև

$$df(M_0)=f'_x(M_0)dx+f'_y(M_0)dy$$

տեսքով:

Ընդհանուր դեպքում $u=f(x^1,...,x^m)$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆե-րենցելի $x_0=(x_0^1,...,x_0^m)$ կետում, եթե $f$ ֆունկցիայի լրիվ աճը $x_0$ կետում կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned}\Delta u &:= f(x_0^1+\Delta x^1,...,x_0^m+\Delta x^m)-f(x_0^1,...,x_0^m)=\\ &=a_1\Delta x^1+\cdots a_m\Delta x^m+o(\rho),\end{aligned} \tag{1.4'}$$

երբ $\rho:=\sqrt{(\Delta x^1)^2+\cdots+(\Delta x^m)^2}\to 0$:

Այդ դեպքում

$$a_i=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0),$$

և

$$df(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)dx^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)dx^m:$$

Հաշվի առնելով թեորեմ 1.2-ը՝ ֆունկցիայի աճի բանաձևը մեզ տալիս է դիֆերենցելիության հետևյալ բավարար պայմանը.

**Թեորեմ** 1.3: *Եթե $u=f(x^1,...,x^m)$ ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն $x_0$ կետի շրջակայքում և անընդհատ են $x_0$ կետում, ապա $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետում դիֆերենցելի է:*

**4. Դիֆերենցիալի երկրաչափական իմաստը:** Ենթադրենք, որ $z=f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $D\subset R^2$ տիրույթում: Այդ դեպքում նրա գրաֆիկը մակերևույթ է, որը նշանակենք $S$ -ով:

Ենթադրենք նաև, որ $z=f(x,y)$ ֆունկցիան $M_0=(x_0,y_0)$ կետում դիֆերենցելի է՝

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho),\ \rho \to 0,\ \left(z_0 := f(x_0, y_0)\right) \quad (1.4'')$$

և դիտարկենք

$$Z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

հարթությունը, որն անցնում է $(x_0, y_0, z_0)$ կետով և որի փոփոխական կետի կոորդինատներն են՝ $(x, y, Z)$ :

Այդ դեպքում (1.4″) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$z - Z = o(\rho),\ \rho \to 0,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{|z - Z|}{\rho} \to 0 \quad (\rho \to 0) : \quad (1.5)$$

Որպեսզի հասկանանք այս պայմանի երկրաչափական իմաստը, բերենք *շոշափող հարթության* սահմանումը.

**Սահմանում:** $z = f(x, y)$ *հավասարմամբ որոշվող* $S$ *մակերևույթի* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *կետով անցնող* $\alpha$ *հարթությունը կոչվում է* $S$ *մակերևույթի շոշափող հարթություն* $P_0$ *կետում, եթե*

$$\frac{d}{r} \to 0 \quad \left(P \to P_0\right), \quad (1.6)$$

*որտեղ* $r$ *-ը մակերևույթի* $P = (x, y, z) \in S$ *փոփոխական կետի հեռավորությունն է* $P_0 \in S$ *կետից, իսկ* $d$ *-ն* $P$ *կետի հեռավորությունն է այդ հարթությունից:*

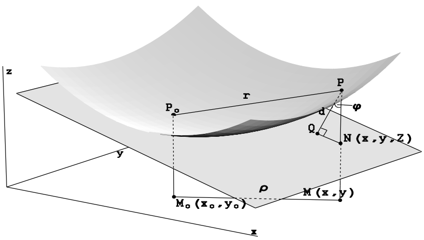
$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ,

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$PQ \perp \alpha \Rightarrow d = PQ$ ,

$P_0M_0, PM \perp (xy)$

$\Rightarrow PN = |z - Z|$ :



Քանի որ $\frac{d}{PN} = \cos\varphi$, որտեղ $\varphi$-ն կախված չէ $P$-ից ($\varphi$-ն $(xy)$ և $\alpha$ հարթությունների նորմալների կազմած անկյունն է), ապա (1.6) պայմանը համարժեք է

$$\frac{|z - Z|}{r} \to 0 \quad (M \to M_0) \tag{1.7}$$

պայմանին:

Մյուս կողմից, $\rho \le r$, հետևաբար, (1.5)-ից բխում է (1.7)-ը: Այսինքն՝ եթե $z = f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0 = (x_0, y_0)$ կետում դիֆերենցելի է, ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ կետում ունի շոշափող հարթություն, որի հավասարումն է՝

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

իսկ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը այդ հարթության ապլիկատի աճն է:

Այժմ ապացուցենք, որ եթե $\alpha$ հարթությունը շոշափում է $S$ մակերևույթը, ապա $f$-ը դիֆերենցելի է $M_0$ կետում, այսինքն՝ (1.7) $\Rightarrow$ (1.5):

Դրա համար պետք է ապացուցենք, որ $r / \rho$ հարաբերությունը սահմանափակ է: Քանի որ

$$\frac{r}{\rho} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z}{\rho}\right)^2} \le 1 + \frac{|\Delta z|}{\rho},$$

ապա բավական է ցույց տալ, որ $\frac{|\Delta z|}{\rho}$-ն սահմանափակ է:

Իրոք, (1.7)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|M - M_0| < \delta \Rightarrow |z - Z| < \varepsilon \cdot r:$$

Վերցնենք $\varepsilon = \frac{1}{2}$ և կունենանք՝

$$\left|M - M_0\right| < \delta \Rightarrow \frac{\left|z - Z\right|}{\rho} < \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\rho} \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left|\Delta z\right|}{\rho}\right):$$

Մյուս կողմից՝ $z - Z = z - z_0 - \left[A(x - x_0) + B(y - y_0)\right]$, հետևաբար

$$\frac{\left|\Delta z\right|}{\rho} - \frac{\left|A\Delta x + B\Delta y\right|}{\rho} \le \frac{\left|z - Z\right|}{\rho} \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left|\Delta z\right|}{\rho}\right):$$

Այստեղից կստանանք՝

$$\frac{1}{2}\frac{\left|\Delta z\right|}{\rho} \le \left|A\right|\frac{\left|\Delta x\right|}{\rho} + \left|B\right|\frac{\left|\Delta y\right|}{\rho} + \frac{1}{2} \le \left|A\right| + \left|B\right| + \frac{1}{2},$$

որտեղից էլ՝

$$\frac{\left|\Delta z\right|}{\rho} \le 2\left(\left|A\right| + \left|B\right|\right) + 1:$$

<u>5. Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը և մասնակի ածանցյալները:</u> Դիցուք տրված են $T \subset R^k$ և $X \subset R^m$ տիրույթները: Դիտարկենք $f : X \to R$ և $\varphi = (\varphi^1,...,\varphi^m) : T \to X$ ֆունկցիաների միջոցով կազմված բարդ ֆունկցիան՝

$$u\left(t^1,...,t^k\right) = f\left(\varphi^1(t^1,...,t^k),...,\varphi^m(t^1,...,t^k)\right):$$

**Թեորեմ 1.4:** *Եթե* $x^i = \varphi^i(t)$, $1 \le i \le m$ *ֆունկցիաները դիֆերենցելի են* $T$ *տիրույթի* $t_0 = (t_0^1,...,t_0^k)$ *կետում, իսկ* $f(x)$ *ֆունկցիան դիֆերենցելի է* $X$ *տիրույթի* $x_0 = \varphi(t_0)$ *կետում, ապա և բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է* $t_0$ *կետում և*

$$\frac{\partial u}{\partial t^j}(t_0) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0):$$

Այս բանաձևը երբեմն անվանում են *շղթայի կանոն*:

► Թեորեմն ապացուցելու համար նշանակենք՝

$$a_j = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0)$$

և ապացուցենք, որ $u$ բարդ ֆունկցիայի աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta u = a_1 \Delta t^1 + \cdots + a_k \Delta t^k + \rho\cdot\varepsilon,\quad \rho = \left| t - t_0 \right|,\quad \varepsilon \to 0 \quad \left(\rho \to 0\right): \tag{1.8}$$

$f$ և $x^i = \varphi^i(t^1,...,t^k)$ ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունից ունենք՝

$$\begin{aligned} & f(x^1,...,x^m) - f(x_0^1,...,x_0^m) = \\ & = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\Delta x^i + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x^i \end{aligned}\quad, \ \alpha_i \to 0 \ \left(x \to x_0\right), \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} & \Delta x^i = \varphi^i(t^1,...,t^k) - \varphi^i(t_0^1,...,t_0^k) = \\ & = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0)\Delta t^j + \rho\cdot\varepsilon_i \end{aligned}\quad, \ \varepsilon_i \to 0 \ \left(\rho \to 0\right): \tag{1.9′}$$

Այդ հավասարություններից առաջինի մեջ տեղադրենք $x^i = \varphi^i(t^1,...,t^k)$, իսկ $\Delta x^i$-ի փոխարեն՝ (1.9′)-ը: Կստանանք՝

$$\Delta u = f\left(\varphi^1(t^1,...,t^k),...,\varphi^m(t^1,...,t^k)\right) - f\left(\varphi^1(t_0^1,...,t_0^k),...,\varphi^m(t_0^1,...,t_0^k)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0)\Delta t^j + \rho\cdot\varepsilon_i\right] + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x^i =$$

$$= \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0)\right]\Delta t^j + \rho\cdot\sum_{i=1}^m\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\varepsilon_i + \alpha_i\frac{\Delta x^i}{\rho}\right] =$$

$$= a_1\Delta t^1 + \cdots + a_k \Delta t^k + \rho\cdot\varepsilon,$$

որտեղ կատարել ենք $\varepsilon = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\varepsilon_i + \alpha_i\frac{\Delta x^i}{\rho}\right]$ նշանակումը:

(1.8)-ը ապացուցելու համար մեզ մնում է ցույց տալ, որ

$$\varepsilon \to 0, \text{ երբ } \rho \to 0,$$

իսկ դրա համար, (1.9′)-ի շնորհիվ, բավական է ցույց տալ, որ

$$\alpha_i \frac{\Delta x^i}{\rho} \to 0 \quad \left(\rho \to 0\right),\ \ 1 \le i \le m:$$

Քանի որ $x^i = \varphi^i(t)$ դիֆերենցելի ֆունկցիաները նաև անընդհատ են ($t_0$ կետում), ապա

$$(\rho \to 0) \Leftrightarrow (t \to t_0) \Rightarrow (\Delta x^i \to 0) \Leftrightarrow (x \to x_0):$$

Այժմ, (1.9)-ի շնորհիվ՝ $\alpha_i \to 0$:

Մյուս կողմից, քանի որ $\left|\dfrac{\Delta t^j}{\rho}\right| \le 1$, ապա (1.9′)-ից հետևում է, որ $\dfrac{\Delta x^i}{\rho}$, $1 \le i \le m$ կոտորակները սահմանափակ են ($\rho = 0$ կետի շրջակայքում), ինչով և ավարտվում է թեորեմի ապացույցը: ■

Երբ $\varphi^i$ ֆունկցիաները կախված են մեկ փոփոխականից, այդ դեպքում $u$ բարդ ֆունկցիան ևս կախված կլինի մեկ փոփոխականից և $u = f\left(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^m(t)\right)$ բարդ ֆունկցիայի ածանցման բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$u'(t_0) = \frac{du}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \frac{d\varphi^i}{dt}(t_0):$$

Նկատենք, որ եթե թեորեմում նշված $f$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության պայմանը չբավարարվի, ապա այս բանաձևը կարող է կիրառելի չլինել:

Օրինակ՝

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \; f(0,0) = 0$$

ֆունկցիայի համար $x = t$, $y = t$ դեպքում $t_0 = 0$ կետում շղթայի կանոնը կիրառելի չէ:

<u>**6. Դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունը:**</u>

Եթե $u = f(x) = f(x^1, \ldots, x^m)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $X \subset R^m$ տիրույթում, ապա

$$du = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m: \tag{1.10}$$

Այժմ ենթադրենք, որ $x^1, \ldots, x^m$ փոփոխականները նույնպես դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են $T \subset R^k$ տիրույթում՝ $x^i(t) = \varphi^i(t^1, \ldots, t^k)$ և

$\left(x^1(t),...,x^m(t)\right)\in X,\ t\in T$: Այդ դեպքում $u=f\left(x^1(t),...,x^m(t)\right)$ բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $T$ տիրույթում և

$$du=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial t^j}dt^j\ :$$

Այստեղ տեղադրելով $u$ բարդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների արժեքները՝ կստանանք

$$du=\sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^j}\right]dt^j=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x^i}{\partial t^j}dt^j\right]=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

բանաձևը: Այլ կերպ ասած, $u$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի (1.10) տեսքը պահպանվում է նաև այն դեպքում, երբ $x^1,...,x^m$ փոփոխականներն իրենց հերթին ֆունկցիաներ են: Այս երևույթը կոչվում է դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտություն (անփոփոխություն):

Օգտվելով դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունից՝ ապացուցվում են դիֆերենցման կանոնները.

*Եթե*

$$x=\varphi^1(t^1,...,t^k)\,,\ \ y=\varphi^2(t^1,...,t^k)$$

*ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $T\subset R^k$ տիրույթում, ապա*

$$d(x\pm y)=dx\pm dy\,,\ \ d(xy)=ydx+xdy\,,\ \ d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}\ :$$

Իրոք, բավական է այդ բանաձևերն ապացուցել այն դեպքում, երբ $x$ -ը և $y$ -ը անկախ փոփոխականներ են, իսկ այդ դեպքում դրանք ակնհայտ են:

<u>7. Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը:</u>

**Թեորեմ** 1.5: *Դիցուք $f(x^1,...,x^m)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $D\subset R^m$ տիրույթում և $x_0,x\in R^m$ կետերը միացնող $[x_0,x]$ հատվածը պատկանում է $D$ տիրույթին՝*

$$(1-t)x_0+tx\in D\,,\ t\in[0,1]\,:$$

*Այդ դեպքում գոյություն ունի $\theta\in(0,1)$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\Delta f(x_0)=f'_{x^1}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^1+\cdots+f'_{x^m}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^m\ : \tag{1.11}$$

► Դիտարկենք

$$F(t)=f((1-t)x_0+tx)=f(x_0+t(x-x_0))=$$

$$=f(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\ldots,x_0^m+t(x^m-x_0^m))=f(x_0^1+t\Delta x^1,\ldots,x_0^m+t\Delta x^m)$$

մեկ փոփոխականի ֆունկցիան $t\in[0,1]$ հատվածում*, և կիրառենք Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$\Delta f(x_0)=F(1)-F(0)=F'(\theta),\ \theta\in\left(0,1\right):$$

Մյուս կողմից, շղթայի կանոնի համաձայն, ունենք՝

$$F'(\theta)=f'_{x^1}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^1+\cdots+f'_{x^m}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^m:$$

$F'(\theta)$-ի արժեքը տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ՝ կստանանք (1.11)-ը: ■

**Հետևանք**: *Եթե $f$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները $D$ տիրույթում զրո են, ապա $f$ ֆունկցիան այդ տիրույթում հաստատուն է:*

► Վերցնենք կամայական $a,b\in D$ կետեր և ապացուցենք, որ $f(a)=f(b)$: Դրա համար դիտարկենք** $x_i$, $0\le i\le n$ գագաթներով $L\subset D$ բեկյալն, այնպիսին, որ $a=x_0$, $b=x_n$:

Այնուհետև, $[x_i,x_{i+1}]$, $0\le i\le n-1$ հատվածների համար կիրառելով (1.11)-ը, կստանանք՝

$$f(x_{i+1})-f(x_i)=0,\ i=0,1,2,\ldots,n-1,\ \text{որտեղից էլ՝}\ f(b)=f(a):\ ■$$

<u>8. Ուղղությամբ ածանցյալ:</u>

**Թեորեմ 1.6**: *Եթե $f(x^1,\ldots,x^m)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0$ կետում և $\left|\nu\right|=1$ ($\nu=\left(\nu^1,\nu^2,\ldots,\nu^m\right)\in R^m$), ապա*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\nu)-f(x_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\cdot\nu^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)\cdot\nu^m: \qquad (1.12)$$

---

* Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության թեորեմի համաձայն, $F$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է:

** $D$-ն բաց կապակցված բազմություն է, այդ պատճառով այդպիսի բեկյալ գոյություն ունի:

Երբ ձախ կողմում գրված սահմանը գոյություն ունի, այդ դեպքում այն կոչվում է $f$ *ֆունկցիայի ածանցյալ ($x_0$ կետում) $v$ վեկտորի ուղղությամբ* և նշանակվում է $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ սիմվոլով:

Հաշվի առնելով այս սահմանումը, թեորեմը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝ *եթե $f$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0$ կետում, ապա այդ կետում $f$ ֆունկցիայի ածանցյալը կամայական $v$ վեկտորի ուղղությամբ գոյություն ունի և*

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)v^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)v^m : \qquad (1.12')$$

► Դիտարկենք

$$F(t)=f(x_0+tv)=f(x_0^1+tv^1,\ldots,x_0^m+tv^m)$$

ֆունկցիան, որտեղ $t$-ն վերցնում ենք այնքան փոքր, որ $x_0+tv$ կետը դուրս չգա $f$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթից:

Այդ դեպքում ունենք, որ

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=F'(0): \qquad (1.13)$$

Մյուս կողմից, շղթայի կանոնի համաձայն,

$$F'(0)=f'_{x^1}(x_0)v^1+\cdots+f'_{x^m}(x_0)v^m :$$

$F'(0)$-ի արժեքը տեղադրելով (1.13)-ի մեջ՝ կստանանք (1.12)-ը: ■

Մասնավոր դեպքում, երբ $m=3$, $\vec{v}$ միավոր վեկտորը* ներկայացվում է ուղղորդ կոսինուսների միջոցով՝

$$\vec{v}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma):$$

Այս դեպքում $u=f(x,y,z)$ ֆունկցիայի ածանցյալը $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ կետում $\vec{v}$ վեկտորի ուղղությամբ ((1.12')-ի փոխարեն) կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma :$$

---

* $R^3$-ում վեկտորը հաճախ գրվում է՝ գլխին սլաք դնելով:

Այս բանաձևի մեջ աջ կողմի գրվածը հանդիսանում է $\vec{v}$ և $\vec{g}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0),\frac{\partial f}{\partial y}(M_0),\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, հետևաբար այն կարելի է գրել նաև

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}=(\vec{g},\vec{v}) \tag{1.13'}$$

տեսքով: $\vec{g}$ վեկտորը կոչվում է $f$ ֆունկցիայի *գրադիենտ* $M_0$ կետում և նշանակվում է $grad\ f$ սիմվոլով:

Եթե $\vec{v}$ և $\vec{g}$ վեկտորների կազմած անկյունը նշանակենք $\varphi$ -ով, ապա

$$(\vec{g},\vec{v})=|\vec{g}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi=|\vec{g}|\cdot\cos\varphi :$$

Այդ դեպքում (1.13')-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}=|\vec{g}|\cdot\cos\varphi : \tag{1.13''}$$

Այստեղից երևում է, որ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$-ն կընդունի իր մեծագույն արժեքն այն դեպքում, երբ $\varphi=0$: *Այսինքն՝ գրադիենտը այն վեկտորն է, որի ուղղությամբ $f$ ֆունկցիայի ածանցյալն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, և այդ մեծագույն արժեքը հավասար է $|grad\ f|$ :*

<u>**9. Համասեռ ֆունկցիաներ:**</u> Դիցուք $u=f(x^1,...,x^m)$ ֆունկցիան որոշված է $D\subset R^m$ տիրույթում: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $x_0\in D$ կետի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $|t-1|<\delta$ պայմանին բավարարող $t$ թվերի համար տեղի ունի

$$tx_0\in D \tag{1.14}$$

պայմանը:

Իրոք, երբ $x_0=0$, (1.14)-ը ակնհայտ է, իսկ երբ $x_0\neq 0$, գոյություն ունի $\varepsilon>0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(x_0,\varepsilon)\subset D$: Քանի որ

$$x:=tx_0 \Rightarrow |x-x_0|=|x_0||t-1|,$$

ուստի որպես $\delta$ կարող ենք վերցնել $\frac{\varepsilon}{|x_0|}$ թիվը:

**Սահմանում:** $D \subset R^m$ *տիրույթում որոշված* $u = f(x)$ *ֆունկցիան կոչվում է* $p$ *աստիճանի համասեռ ֆունկցիա* $D$ *տիրույթում, եթե յուրաքանչյուր* $x \in D$ *և* $tx \in D$ *կետերի համար* $\left(t \in R^1\right)$ *բավարարվում է*

$$f(tx) = t^p f(x) \tag{1.15}$$

*հավասարությունը:*

**Թեորեմ 1.7:** *Եթե* $D$ *տիրույթում դիֆերենցելի* $u = f(x)$ *ֆունկցիան այդ տիրույթում* $p$ *աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է, ապա* $D$ *տիրույթում այն բավարարում է հետևյալ հավասարությանը՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}x^1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x^m}x^m = p \cdot u : \tag{1.16}$$

Այս հավասարությունը կոչվում է *Էյլերի բանաձև:*

► Վերցնենք կամայական $x \in D$ կետ և (1.16)-ը ապացուցենք այդ կետում: Օգտվելով շղթայի կանոնից՝ ածանցենք (ըստ $t$-ի) (1.15) հավասարության ձախ և աջ կողմերում գրված ֆունկցիաները.

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(tx)x^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(tx)x^m = pt^{p-1}f(x^1,...,x^m):$$

Այստեղ տեղադրելով $t = 1$՝ կստանանք (1.16)-ը: ■

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

**Թեորեմ 1.7':** $D$ *տիրույթում (1.16) հավասարությանը բավարարող* $u = f(x)$ *դիֆերենցելի ֆունկցիան* $p$ *աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է:*

► $t = 1$ կետի շրջակայքում հաշվենք $\varphi(t) := \dfrac{f(tx_0)}{t^p}$, $x_0 \in D$ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$\varphi'(t) = \frac{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x^1}(tx_0)x_0^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x^m}(tx_0)x_0^m\right]t - pf(tx_0)}{t^{p+1}} : \tag{1.17}$$

Էյլերի բանաձևի մեջ վերցնելով $x = tx_0$՝ կհամոզվենք, որ (1.17) կոտորակի համարիչը զրո է, հետևաբար, $\varphi'(t) = 0$ :

Որեմն $\varphi(t) = const = \varphi(1)$, այսինքն՝

$$\frac{f(tx_0)}{t^p} = f(x_0),$$

կամ, որ նույնն է՝

$$f(tx_0^1, \cdots tx_0^m) = t^p f(x_0^1, ..., x_0^m),\ x_0 \in D: \blacksquare$$

## §2. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

1. Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ: Դիցուք $u = f(x_1, ..., x_m)$ ֆունկցիան որոշված է $D \subset R^m$ տիրույթում և $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ մասնակի ածանցյալը գոյություն ունի $D$ տիրույթի բոլոր կետերում և վերջավոր է:

Այդ դեպքում $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_m)$ ֆունկցիան հանդիսանում է $D$ տիրույթում որոշված մի նոր ֆունկցիա: Եթե այդ նոր ֆունկցիան $x_0 \in D$ կետում ունի մասնակի ածանցյալ ըստ $x_j$-ի, ապա այդ մասնակի ածանցյալը կոչվում է $u$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ և նշանակվում է $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $u''_{x_i x_j}$, $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ կամ $f''_{x_i x_j}(x_0)$ սիմվոլներից որևէ մեկով:

Այն դեպքում, երբ $i = j$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}$ գրելու փոխարեն գրում ենք $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ (ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում), իսկ երբ $i \neq j$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները կոչվում են խառն ածանցյալներ:

Ինդուկտիվ կերպով սահմանվում են երկուսից բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{n-1}}}\right):$$

**Օրինակ՝** $u = arctg\frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} :$$

Ինչպես տեսնում ենք, $u''_{xy}$ և $u''_{yx}$ խառն ածանցյալները հավասար են: Առաջիկայում կապացուցենք, որ այս երևույթը պատահական չէ, իսկ հիմա բերենք *ֆունկցիայի օրինակ, որի խառն ածանցյալները հավասար չեն:*

Դիցուք՝ $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$: Ցույց տանք, որ

$$f''_{xy}(0,0) = -1, \quad f''_{yx}(0,0) = 1 :$$

Օգտվենք հետևյալ դիտողությունից. եթե $\varphi(0)=0$, ապա $\varphi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}$: Այս դիտողության համաձայն՝

$$f'_x(0,y) = -y, \quad f'_y(x,0) = x :$$

Գրված հավասարությունները ճիշտ են նաև $x=0$ և $y=0$ արժեքների դեպքում, որովհետև $f$ ֆունկցիան կոորդինատական առանցքների վրա ընդունում է 0 արժեքը: Ածանցելով այդ ֆունկցիաները՝ կստանանք պահանջվող հավասարությունը:

Այժմ սահմանենք բարձր կարգի դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:

**Սահմանում:** *$D$ տիրույթում դիֆերենցելի $u = f(x_1,...,x_m)$ ֆունկցիան կոչվում է երկու անգամ դիֆերենցելի $x_0 = (x_1^0,...,x_m^0) \in D$ կետում, եթե $\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_m}$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $x_0$ կետում:*

Ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայմանից հետևում է $u$ ֆունկցիայի երկու անգամ դիֆերենցելիության հետևյալ բավարար պայմանը.

*եթե $D$ տիրույթում դիֆերենցելի $u$ ֆունկցիայի բոլոր երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները անընդհատ են $x_0$ կետում, ապա $u$-ն այդ կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է:*

Եթե $u$-ն $x_0$ կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա $x_1,\dots,x_m$ անկախ փոփոխականների $dx_1,\dots,dx_m$ դիֆերենցիալները հաստատագրելու դեպքում

$$du=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i$$

ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0$ կետում: Այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կոչվում է $u$ ֆունկցիայի *երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ* և նշանակվում է $d^2u$ (կամ՝ $d^2 f(x_0)$):

Օգտվելով դիֆերենցման կանոններից՝ կստանանք, որ

$$d^2u=d(du)=d\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right]dx_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}dx_j\right]dx_i=\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}dx_{i_1}dx_{i_2}\ :$$

Ինդուկտիվ կերպով սահմանվում են երկուսից բարձր կարգի դիֆերենցելիությունը և դիֆերենցիալը.

$D$ տիրույթում ($n-1$)-անգամ դիֆերենցելի $u$ ֆունկցիան կոչվում է *$n$-անգամ դիֆերենցելի* $x_0\in D$ կետում, եթե նրա բոլոր ($n-1$)-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները դիֆերենցելի են $x_0$ կետում: Այդ դեպքում $d^{n-1}u$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը (համարվում է, որ $dx_1,\dots,dx_m$ դիֆերենցիալները հաստատագրված են) կոչվում է $u$ ֆունկցիայի *$n$-րդ կարգի դիֆերենցիալ* և նշանակվում է $d^n u$ (կամ՝ $d^n f(x_0)$):

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կստանանք՝

$$d^n u=\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m}\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}dx_{i_1}\cdots dx_{i_n}\ :$$

## 2. Խառն ածանցյալների թեորեմները:

**Թեորեմ** 2.1: *Դիցուք* $u = f(x, y)$ *ֆունկցիան* $(x_0, y_0)$ *կետի մի ինչ-որ շրջակայքում ունի երկրորդ կարգի խառն ածանցյալներ՝* $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ *:*

*Եթե այդ խառն ածանցյալներն անընդհատ են* $(x_0, y_0)$ *կետում, ապա*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) : \qquad (2.1)$$

► Նշանակենք

$$W = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)}{\Delta x \Delta y},$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} :$$

Այդ դեպքում

$$W = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x}, \quad \varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)}{\Delta y} :$$

Կիրառելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք, որ

$$W = \varphi'(x_0 + \theta\Delta x) = \frac{f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0)}{\Delta y}, \ 0 < \theta < 1 :$$

Այժմ, կիրառելով Լագրանժի բանաձևն ըստ երկրորդ արգումենտի, կստանանք

$$W = f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta_1\Delta y), \ 0 < \theta_1 < 1 :$$

Քանի որ $f''_{xy}$ ֆունկցիան անընդհատ է $(x_0, y_0)$ կետում, ապա

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} W = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta_1\Delta y) = f''_{xy}(x_0, y_0) : \qquad (2.2)$$

Մյուս կողմից, $\varphi$ ֆունկցիայի փոխարեն ներմուծելով $\psi(y) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)}{\Delta x}$ օժանդակ ֆունկցիան և կատարելով նույն դատողությունները, կստանանք՝

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(x_0+\theta_2\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)=f''_{yx}(x_0, y_0)\,, \tag{2.3}$$

որտեղ $0<\theta_2<1\,, 0<\theta_3<1$: Սահմանի միակության թեորեմի համաձայն, (2.2)-ից և (2.3)-ից հետևում է (2.1)-ը: ■

**Թեորեմ 2.2:** *Դիցուք $(x_0, y_0)$ կետի շրջակայքում գոյություն ունեն $f'_x$, $f'_y$ և $f''_{xy}$ վերջավոր մասնակի ածանցյալները: Եթե $f''_{xy}$ ֆունկցիան $(x_0, y_0)$ կետում անընդհատ է, ապա այդ կետում գոյություն ունի նաև $f''_{yx}$ մասնակի ածանցյալը և $f''_{yx}(x_0, y_0)=f''_{xy}(x_0, y_0)$ :*

► Երբ $\Delta y\to 0$, ունենք՝

$$W:=\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)}{\Delta y}-\right.$$
$$\left.-\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}\right\}\to\frac{f'_y(x_0+\Delta x, y_0)-f'_y(x_0, y_0)}{\Delta x}\ :$$

Նման ձևով՝

$$W\to\frac{f'_x(x_0, y_0+\Delta y)-f'_x(x_0, y_0)}{\Delta y}\,,\ \text{երբ}\ \Delta x\to 0\ :$$

Մյուս կողմից, քանի որ $f''_{xy}$-ը անընդհատ է $(x_0, y_0)$ կետում, ապա ճիշտ է (2.2)-ը, այսինքն՝ գոյություն ունի

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} W=f''_{xy}(x_0, y_0)$$

կրկնակի սահմանը: Այսպիսով, թեորեմի եզրակացությունն անմիջապես հետևում է հաջորդական սահմանների վերաբերյալ թեորեմի լրացումից: ■

**Թեորեմ 2.3:** *Եթե $u=f(x, y)$ ֆունկցիան $(x_0, y_0)$ կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա $f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$ :*

► Վերցնելով $\Delta x=\Delta y=h$՝ կունենանք (օգտագործում ենք թեորեմ 2.1-ի նշանակումները և ապացույցը), որ

$$W=\frac{f'_x(x_0+\theta h,y_0+h)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)}{h},\ 0<\theta<1:$$

Այս արտահայտությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$W=\frac{1}{h}\Big\{\ \left[f'_x(x_0+\theta h,y_0+h)-f'_x(x_0,y_0)\right]-$$
$$-\left[f'_x(x_0+\theta h,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\right]\ \Big\}\ ,$$

և օգտվենք $f'_x$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից $(x_0,y_0)$ կետում՝

$$W=\frac{1}{h}\left\{f''_{x^2}(x_0,y_0)\theta h+f''_{xy}(x_0,y_0)h-f''_{x^2}(x_0,y_0)\theta h+\alpha h\right\},$$

որտեղ $\alpha\to 0$, երբ $h\to 0$: Այսպիսով՝

$$W=f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha:$$

Նման ձևով կստանանք

$$W=f''_{yx}(x_0,y_0)+\beta,$$

որտեղ $\beta\to 0$, երբ $h\to 0$:

Թեորեմի պնդումը հետևում է այս երկու հավասարություններից: ■

**Թեորեմ 2.4:** *Եթե $u=f(x_1,...,x_m)$ ֆունկցիան $n$ անգամ դիֆերենցելի է $D\subset R^m$ տիրույթում, ապա այդ ֆունկցիայի $n$-րդ կարգի խառն ածանցյալների արժեքները կախված չեն ածանցման հերթականությունից:*

► Նկատենք, որ բավական է ապացուցել հետևյալ հավասարությունը.

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}\cdots\partial x_{i_n}}=\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_n}},\ 1\le k\le n-1: \qquad (2.4)$$

Դիտարկենք $\dfrac{\partial^{k-1}u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}$ ֆունկցիան: Այն դիտարկենք որպես $x_{i_k}$ և $x_{i_{k+1}}$-ից կախված երկու փոփոխականի* ֆունկցիա, որն առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի կլինի: Հետևաբար, նախորդ թեորեմի համաձայն, կստանանք

* Մնացած փոփոխականները հաստատագրված են:

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}=\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}},$$

որտեղից էլ հետևում է (2.4)-ը: ■

**Հետևանք:** *Եթե $u=f(x_1,...,x_m)$ ֆունկցիան $n$ անգամ դիֆերենցելի է, ապա նրա ցանկացած $n$ -րդ կարգի մասնակի ածանցյալը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}},$$

*որտեղ $\alpha_1,...,\alpha_m$ թվերն ամբողջ են, $0\le\alpha_i\le n$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=n$:*

**3. <u>Նյուտոնի բազմանդամի բանաձևը:</u>** Ապացուցենք, որ ցանկացած $m$ և $n$ բնական թվերի համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=n\\0\le\alpha_i\le n}}\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}: \qquad (2.5)$$

► Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ $m$ -ի: $m=2$ դեպքում հավասարությունը ճշմարիտ է. այն Նյուտոնի երկանդամի հայտնի բանաձևն է՝

$$(x_1+x_2)^n=\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=n\\0\le\alpha_i\le n}}\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}:$$

Այժմ ենթադրենք, որ (2.5)-ը ճիշտ է $m$ -ը չգերազանցող բոլոր $n$ բնական թվերի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև ($m+1$)-ի համար: Ունենք՝

$$(x_1+\cdots+x_m+x_{m+1})^n=\left[(x_1+\cdots+x_m)+x_{m+1}\right]^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(x_1+\cdots+x_m)^k x_{m+1}^{n-k}:$$

Ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն, այստեղից կստանանք՝

$$(x_1+\cdots+x_m+x_{m+1})^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\sum_{\substack{0\le\alpha_i\le k\\\alpha_1+\cdots+\alpha_m=k}}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}x_{m+1}^{n-k}:$$

Նշանակելով $n-k=\alpha_{m+1}$՝ կստանանք

$$(x_1+\cdots+x_m+x_{m+1})^n=\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m+\alpha_{m+1}=n\\ 0\le\alpha_i\le n}}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!\alpha_{m+1}!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$$

հավասարությունը, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

**Հետևանք:**

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}=\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=n\\ 0\le\alpha_i\le n}}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\ :^{*}$$

Սա ապացուցելու համար բավական է նկատել

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$$

հավասարությունը, որն ապացուցվում է՝ կիրառելով ինդուկցիա ըստ $n$-ի:

Օգտվելով այս հետևանքից և թեորեմ 2.4-ի հետևանքից, բարձր կարգի դիֆերենցիալի բանաձևը՝

$$d^nu=\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m}\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}dx_{i_1}\cdots dx_{i_n}\ ,$$

կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$d^nu=\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=n\\ 0\le\alpha_i\le n}}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}dx_1^{\alpha_1}\cdots dx_m^{\alpha_m}\ : \qquad (2.6)$$

Հաշվի առնելով Նյուտոնի բազմանդամի բանաձևը, (2.6)-ը սիմվոլիկ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u\ :$$

---

[*] Այս հավասարությունը նշանակում է, որ եթե $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ թվերը ֆիքսենք այնպես, որ բավարարվեն $0\le\alpha_i\le n$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=n$ պայմանները, ապա ձախ կողմում գրված գումարելիների մեջ $x_1^{\alpha_1}\ldots x_m^{\alpha_m}$ գումարելին կկրկնվի $\dfrac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}$ անգամ:

<u>4. Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալները:</u> Դիցուք ունենք բարդ ֆունկցիա՝ $u = f(x_1,...,x_m)$, $x_i = \varphi_i(t_1,...,t_k)$, $1 \le i \le m$ :

Այդ դեպքում, դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտության շնորհիվ,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m$$

բանաձևը ճիշտ է նաև բարդ ֆունկցիայի համար, սակայն բարդ ֆունկցիայի դեպքում $dx_1,...,dx_m$ դիֆերենցիալները ֆունկցիաներ են ($\varphi_i$ ֆունկցիաների դիֆերենցիալներն են), որոնք կարող են և հաստատուն չլինել: Այդ պատճառով, դիֆերենցման կանոնների համաձայն,

$$d^2u = \left[d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right]dx_1 + .. + \left[d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\right]dx_m + \frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}d^2x_m =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}d^2x_m \ : \tag{2.7}$$

Տեսնում ենք, որ բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար ընդհանուր դեպքում դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտություն տեղի չունի:

Դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $\varphi_i$ ֆունկցիաները գծային են՝

$$x_i = \alpha_{i1}t_1 + \cdots + \alpha_{ik}t_k + \beta_i, \ \ 1 \le i \le m,$$

որտեղ $\alpha_{ij}$ և $\beta_i$ գործակիցները հաստատուններ են:

Այս դեպքում

$$dx_i = \alpha_{i1}dt_1 + \cdots + \alpha_{ik}dt_k, \ \ 1 \le i \le m :$$

Քանի որ $t_1,...,t_k$ անկախ փոփոխականներից կախված ֆունկցիաների դիֆերենցիալները հաշվելիս՝ $dt_1,...,dt_k$ դիֆերենցիալները համարվում են հաստատուններ, ապա դիտարկվող դեպքում $dx_i$ դիֆերենցիալները հաստատուններ են, հետևաբար, $d^2x_i = 0$, $1 \le i \le m$ :

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում (2.7)-ը վերածվում է

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 u$$

հավասարությանը: Այսինքն՝ երբ $x_i$ ֆունկցիաները գծային են, դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունը տեղի ունի նաև երկրորդ կարգի դիֆերենցիալների համար: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կհամոզվենք, որ եթե $\varphi_i$ ֆունկցիաները գծային են, ապա բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար նույնպես տեղի ունի դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտություն՝

$$d^n u(t_0) = \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=n \\ 0\le\alpha_i\le n}} \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}\frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}} dx_1^{\alpha_1}\cdots dx_m^{\alpha_m} ,$$

$$dx_i = \Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t_0),\ 1\le i\le m :$$

## §3. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

### 1. Մնացորդային անդամը Լագրանժի տեսքով:

**Թեորեմ 3.1:** *Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $(n+1)$ անգամ դիֆերենցելի է $D\subset R^m$ տիրույթում և $[x_0,x]\subset D$, ապա գոյություն ունի $\theta\in(0,1)$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x), \qquad (3.1)$$

*որտեղ* $\Delta x = x - x_0$, $x=(x_1,...,x_m)$, $x_0 = (x_1^0,...,x_m^0)$ *:*

► Ապացուցելու համար նախ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը գրենք դիֆերենցիալների միջոցով:

Եթե $F$ ֆունկցիան $[t_0,t]\subset R$ հատվածում ունի մինչև $(n+1)$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ*, ապա

$$F(t) = F(t_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{F^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1},$$

որտեղ $0<\theta<1$ :

Մյուս կողմից,

---

* Ինչը համարժեք է $n+1$ անգամ դիֆերենցելի լինելուն:

$$t - t_0 = \Delta t = dt \text{ և } F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = F^{(k)}(t_0)d^k t = d^k F(t_0),$$

հետևաբար,

$$F(t) = F(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k F(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(t_0 + \theta \Delta t), \ 0 < \theta < 1:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $t = 1$, $t_0 = 0$, կունենանք

$$F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta), \ 0 < \theta < 1: \qquad (3.2)$$

Այնուհետև դիտարկենք $F(t) = f(x_0 + t\Delta x)$, $t \in [0,1]$ մեկ փոփոխականի բարդ ֆունկցիան: Այստեղ՝ $F(0) = f(x_0)$, $F(1) = f(x)$:

Հաշվի առնելով բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության վերաբերյալ թեորեմը և դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունը, կստանանք

$$d^k F(t_0) = d^k f(x_0 + t_0 \Delta x)$$

հավասարությունը: Այստեղ տեղադրենք $t_0 = 0$, այնուհետև՝ $t_0 = \theta$: Կստանանք $d^k F(0) = d^k f(x_0)$, $1 \le k \le n$ և $d^{n+1} F(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)$ հավասարությունները: Այս արժեքները տեղադրելով (3.2)-ի մեջ՝ կստանանք (3.1)-ը: ■

2. <u>Մնացորդային անդամը Պեանոյի տեսքով:</u>

**Թեորեմ 3.2:** *Եթե $f$ ֆունկցիան $n$ անգամ դիֆերենցելի է $x_0$ կետում, ապա*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + o(\rho^n),$$

*որտեղ $\rho \to 0$, $\rho = |x - x_0|$:*

Եթե $d^k f(x_0)$ դիֆերենցիալի փոխարեն տեղադրենք իր արժեքը, ապա այդ բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x_1,\ldots,x_m) = f(x_1^0,\ldots,x_m^0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=k} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!} \cdot$$
$$\cdot \frac{\partial^k f(x_1^0,\ldots,x_m^0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\alpha_m} + o(\rho^n): \qquad (3.3)$$

► Ապացուցվում է նույն սխեմայով, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Նշանակենք

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=k \\ 0\le\alpha_i\le k}} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\alpha_m},$$

և ապացուցենք, որ

$$r_n(x) = o(\rho^n), \text{ երբ } \rho \to 0: \tag{3.4}$$

Այդ նպատակով ապացուցենք հետևյալ օժանդակ լեմման.

**Լեմմա 3.1:** *Եթե* $r$ *ֆունկցիան* $x_0$ *կետում* $n$ *անգամ դիֆերենցելի է և*

$$r(x_0) = dr(x_0) = \cdots = d^n r(x_0) = 0, \tag{3.5}$$

*(*$r$ *ֆունկցիան և նրա մինչև* $n$ *-րդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները* $x_0$ *կետում ընդունում են 0 արժեք), ապա*

$$r(x) = o(\rho^n):$$

► Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$ դեպքում $r$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից և (3.5)-ից ունենք՝

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + o(\rho) = o(\rho):$$

Այժմ ապացուցենք, որ

$$r(x_0) = dr(x_0) = \cdots = d^{n+1} r(x_0) = 0 \Rightarrow r(x) = o(\rho^{n+1}):$$

Նկատենք, որ

$$dr(x_0) = d^2 r(x_0) = \cdots = d^{n+1} r(x_0) = 0$$

պայմանից հետևում է, որ (3.5) պայմանը տեղի ունի $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}$, $1 \le i \le m$, ֆունկցիաների համար: Հետևաբար, ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = o(\rho^n), \text{ երբ } \rho \to 0,\ 1 \le i \le m,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{\frac{\partial r}{\partial x_i}(c)}{|c-x_0|^n} \to 0 \text{, երբ } c \to x_0 \text{, } 1 \le i \le m \text{ :} \tag{3.6}$$

Այնուհետև, վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն,

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x_i \text{ ,}$$

որտեղ $0 < \theta < 1$ , $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ :

Հետևաբար,

$$\frac{|r(x)|}{\rho^{n+1}} \le \sum_{i=1}^{m} \frac{\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0 + \theta\Delta x)\right|}{|\theta\Delta x|^n} \cdot \frac{|\theta\Delta x|^n |x_i - x_i^0|}{\rho^{n+1}} \to 0 \text{, երբ } \rho \to 0 \text{ :}$$

Իրոք, մի կողմից, նշանակելով $c = x_0 + \theta\Delta x$, կունենանք՝ $(\rho \to 0) \Rightarrow (c \to x_0)$ և, (3.6)-ի համաձայն՝

$$\frac{\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0 + \theta\Delta x)\right|}{|\theta\Delta x|^n} = \frac{\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}(c)\right|}{|c - x_0|^n} \to 0 \text{ ,}$$

իսկ մյուս կողմից՝ $\dfrac{|\theta\Delta x|^n |x_i - x_i^0|}{\rho^{n+1}} \le 1$ : Լեմման ապացուցվեց: ■

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մեզ մնում է ստուգել, որ $r_n(x)$ -ը բավարարում է (3.5) պայմանին կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{\partial^k r_n(x_0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} = 0 \text{ , } \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = k \text{ , } 0 \le \alpha_i \le k \text{ , } k = 1,2,\ldots,n \text{ :}$$

Իսկ դա հետևում է

$$\frac{\partial^k \left[ (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\alpha_m} \right]}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_m^{\beta_m}}(x_0) = \begin{cases} 0, & (\beta_1,\ldots,\beta_m) \ne (\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \\ \alpha_1! \cdots \alpha_m!, & (\beta_1,\ldots,\beta_m) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \end{cases}$$

հավասարություններից: ■

## §4. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

### 1. Էքստրեմումներ:

**Անհրաժեշտ պայմաններ:** Դիցուք $u = f(x_1,\ldots,x_m)$ ֆունկցիան որոշված է $D$ տիրույթում և $x_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0)$-ն $D$ տիրույթի ներքին կետ է:

**Սահմանում:** *$x_0$ կետը կոչվում է $f$ ֆունկցիայի մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի այդ կետի $\delta$ - շրջակայք՝ $B(x_0,\delta)$, այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $x \in B(x_0,\delta)$ կետի համար տեղի ունենա*

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \left(f(x) \le f(x_0)\right) \tag{4.1}$$

*անհավասարությունը:*

Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը միասին կոչվում են *էքստրեմումի կետեր*, իսկ ֆունկցիայի արժեքներն այդ կետերում կոչվում են *էքստրեմումներ*:

**Թեորեմ 4.1:** *Եթե $x_0$-ն $f$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է և այդ կետում գոյություն ունեն $f'_{x_1}(x_1^0,\ldots,x_m^0),\ldots,f'_{x_m}(x_1^0,\ldots,x_m^0)$ մասնակի ածանցյալները, ապա նրանք բոլորը հավասար են զրոյի՝*

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1^0,\ldots,x_m^0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{x_m}(x_1^0,\ldots,x_m^0) = 0 \end{cases} : \tag{4.2}$$

► Ապացուցենք (4.2) հավասարություններից, օրինակ, առաջինը: Դիտարկենք $g(t) = f(t, x_2^0,\ldots,x_m^0)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան $x_1^0$ կետի շրջակայքում: Քանի որ $x_1^0$-ն $g$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է և այդ կետում գոյություն ունի

$$g'(x_1^0) = f'_{x_1}(x_1^0,\ldots,x_m^0)$$

ածանցյալը, ապա այն հավասար է զրոյի: ■

(4.2) պայմանին բավարարող կետերը կոչվում են *ստացիոնար կետեր*:

Դիֆերենցելի ֆունկցիաների դեպքում էքստրեմումի համար անհրաժեշտ (4.2) պայմանը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$df(x_1^0,\dots,x_m^0)=0: \tag{4.2'}$$

2. Բավարար պայմաններ (երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքը):

Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0=(x_0,y_0)$ ստացիոնար կետի շրջակայքում և երկու անգամ դիֆերենցելի է $M_0$ կետում: Այդ դեպքում, (4.2')-ի համաձայն, $n=2$ դեպքում նրա Թեյլորի բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}d^2 f(x_0,y_0)+\varepsilon\rho^2,$$

որտեղ, $\varepsilon\to 0$, երբ $\rho\to 0$:

Տեղադրելով

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,\ \ dx=\Delta x,\ dy=\Delta y,$$

և նշանակելով

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ \ a_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \ a_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2`$$

ֆունկցիայի աճի համար կստանանք հետևյալ ներկայացումը.

$$\Delta f=\frac{1}{2}\left(a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2\right)+\varepsilon\rho^2: \tag{4.3}$$

Այնուհետև, $\Delta x$ և $\Delta y$ աճերը արտահայտելով $(\rho,\varphi)$ բևեռային կոորդինատների միջոցով՝

$$\Delta x=\rho\cos\varphi,\ \ \Delta y=\rho\sin\varphi,^*$$

կստանանք

$$\Delta f=\frac{\rho^2}{2}\left(a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+2\varepsilon\right) \tag{4.4}$$

բանաձևը: Ելնելով ֆունկցիայի աճի այս ներկայացումից, ապացուցենք՝

---

[*] $\varphi$ -ն $\overrightarrow{M_0M}$ վեկտորի կազմած անկյունն է $OX$ առանցքի հետ՝ $M=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$:

**Թեորեմ 4.2:** *ա) Եթե* $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$*, ապա* $(x_0,y_0)$ *ստացիոնար կետը* $f$ *ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, ընդ որում,* $a_{11}>0$ *դեպքում այն մինիմումի կետ է, իսկ* $a_{11}<0$ *դեպքում՝ մաքսիմումի:*

*բ) Եթե* $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$*, ապա* $(x_0,y_0)$ *ստացիոնար կետը* $f$ *ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:*

► ա) պնդումն ապացուցելու համար նկատենք, որ այդ դեպքում $a_{11}a_{22}>0$, հետևաբար, $a_{11}\neq 0$, այնպես որ (4.4) արտահայտությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta f=\frac{\rho^2}{2a_{11}}\left[\left(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi\right)^2+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)\sin^2\varphi+2\varepsilon a_{11}\right]: \quad (4.5)$$

Քանի որ $\left(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi\right)^2$ և $\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)\sin^2\varphi$ ոչ բացասական ֆունկցիաներն անընդհատ են $[0,2\pi]$ հատվածում և միաժամանակ 0 չեն դառնում, ապա

$$m:=\min_{[0,2\pi]}\left[\left(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi\right)^2+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)\sin^2\varphi\right]>0:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\varepsilon\to 0$, երբ $\rho\to 0$, ապա գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $\rho<\delta\Rightarrow\left|2\varepsilon\right|<m$: Հետևաբար, երբ $\rho<\delta$, $\Delta f$-ի նշանը համընկնում է $a_{11}$-ի նշանի հետ: Այսինքն՝ եթե $a_{11}>0$, ապա $\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$, հետևաբար, առկա է մինիմում: Իսկ եթե $a_{11}<0$, ապա $\Delta f<0$, հետևաբար, առկա է մաքսիմում:

Թեորեմի բ) պնդումն ապացուցելու համար նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ $a_{11}\neq 0$: Այդ դեպքում կարող ենք օգտվել ֆունկցիայի աճի (4.5) ներկայացումից: Հեշտ է նկատել, որ այս դեպքում գոյություն ունեն $(x_0,y_0)$ կետից ելնող երկու ճառագայթներ, որոնց վրա $\Delta f$-ն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ (բավականաչափ փոքր $\rho$-ի դեպքում):

Իրոք, եթե վերցնենք $\varphi_1=0$, ապա (4.5)-ի միջակ փակագծերի մեջ գրվածը հավասար է՝ $a_{11}^2+\varepsilon(\rho)$, որը դրական է, երբ $\rho$-ն բավականաչափ փոքր է: Իսկ եթե $\varphi_2$-ը ընտրենք այնպես, որ $a_{11}\cos\varphi_2+a_{12}\sin\varphi_2=0$, ապա (4.5)-ի միջակ փակագծերի մեջ գրվածը հավասար է՝ $\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)\sin^2\varphi_2+\varepsilon(\rho)$, որը բացասական է, երբ $\rho$-ն բավականաչափ փոքր է:

Մնում է բ) պնդումն ապացուցել այն դեպքում, երբ $a_{11}=0$: Այս դեպքում օգտվենք (4.5) ներկայացումից.

$$\Delta f=\frac{\rho^2}{2}\left[\left(2a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi\right)\sin\varphi+2\varepsilon\right],$$

ընդ որում, $a_{12}\neq 0$: Հետևաբար, եթե վերցնենք մոդուլով բավականաչափ փոքր հակադիր անկյուններ՝ $\varphi_2=-\varphi_1$, այնպես, որ բավարարվի $\left|a_{22}\sin\varphi_1\right|<\left|2a_{12}\cos\varphi_1\right|$ անհավասարությունը, ապա համապատասխան ճառագայթների վրա $\Delta f$-ը կընդունի տարբեր նշանի արժեքներ (երբ $\rho$-ն բավականաչափ փոքր է): բ) կետը ևս ապացուցված է: ■

<u>**3. Բավարար պայմաններ, ընդհանուր դեպքը:**</u> Դիցուք $f(x_1,\ldots,x_m)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0=(x_1^0,\ldots,x_m^0)$ ստացիոնար կետի շրջակայքում և երկու անգամ դիֆերենցելի է $x_0$ կետում: Այս դեպքում Թեյլորի բանաձևից կստանանք՝

$$\Delta f=f(x_1,\ldots,x_m)-f(x_1^0,\ldots,x_m^0)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik}\Delta x_i\Delta x_k\right)+\varepsilon\rho^2,$$

որտեղ $a_{ik}=f''_{x_ix_k}(x_1^0,\ldots,x_m^0)$, $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^m\Delta x_i^2}$ և $\varepsilon\to 0$, երբ $\rho\to 0$ :

Նշանակելով $\xi_i=\dfrac{\Delta x_i}{\rho}$՝ ֆունկցիայի աճի համար կստանանք

$$\Delta f=\frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik}\xi_i\xi_k+2\varepsilon\right)\tag{4.4'}$$

ներկայացումը, որտեղ $\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2=1$: Հետևաբար, $\Delta f$-ի ուսումնասիրությունը հանգում է $\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2=1$ միավոր սֆերայի վրա որոշված

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k \tag{4.5'}$$

քառակուսային ձևի* ուսումնասիրությանը:

Դիցուք (4.5') քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, այսինքն` այն ընդունում է դրական արժեքներ, երբ $(\xi_1,...,\xi_m)\neq(0,...,0)$:

Քանի որ միավոր սֆերան փակ և սահմանափակ բազմություն է, իսկ (4.5') քառակուսային ձևն անընդհատ ֆունկցիա է, ապա Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, (4.5') քառակուսային ձևը միավոր սֆերայի վրա կընդունի իր փոքրագույն արժեքը, որը դրական է: Հետևաբար, (4.4')-ից հետևում է, որ եթե $\rho$-ն բավականաչափ փոքր է, ապա $\Delta f>0$, այսինքն` $x_0$ կետը $f$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Մյուս կողմից, Սիլվեստրի թեորեմի համաձայն, որպեսզի (4.5') քառակուսային ձևը լինի դրական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{vmatrix}>0:$$

Նման ձևով կհամոզվենք, որ եթե (4.5') քառակուսային ձևը բացասական որոշյալ է, ապա $x_0$ կետը $f$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է: Եվ եթե (4.5') քառակուսային ձևը անորոշ է (այսինքն` այն ընդունում է թե' դրական, և թե' բացասական արժեքներ), ապա $x_0$-ն էքստրեմումի կետ չէ:

Քանի որ դրական որոշյալ քառակուսային ձևի բոլոր գործակիցների նշանները փոխելիս` ստացվում է բացասական որոշյալ ձև, և հակառակը,

---

* §2, կետ 2-ի համաձայն` $a_{ik}=a_{ki}$:

ապա (4.5$'$) քառակուսային ձևի բացասական որոշյալ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կլինի հետևյալը.

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0 :$$

# IX ԳԼՈՒԽ

# ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

## §1. ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ ԳՈՒՄԱՐԸ ԵՎ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

<u>1. Հիմնական գաղափարները:</u> Դիցուք $a_n$-ը կամայական թվային հաջորդականություն է: Դիտարկենք հետևյալ սիմվոլը`

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots : \qquad (1.1)$$

Այդ սիմվոլը կոչվում է *շարք*, իսկ $a_n$-երը` այդ շարքի անդամներ: Օգտվելով գումարի նշանից` (1.1) սիմվոլը հաճախ գրում են նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1`)$$

տեսքով:

Մեր առաջիկա նպատակը (1.1) սիմվոլին իմաստ վերագրելն է, այսինքն` սահմանել (1.1) շարքի գումար (սահմանել անվերջ թվով գումարելիների գումար): Այդ նպատակով նշանակենք`

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n = 1,2,..., \qquad (1.2)$$

որը կոչվում է (1.1) շարքի $n$-րդ մասնակի գումար:

**Սահմանում:** *Եթե գոյություն ունի հետևյալ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը`*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

*ապա այն կոչվում է (1.1) շարքի գումար և գրվում է`*

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n :$$

*Եթե $A$ սահմանը վերջավոր է, ապա (1.1) շարքը կոչվում է զուգամետ: Իսկ եթե այդ սահմանն անվերջ է, կամ գոյություն չունի, ապա (1.1) շարքը կոչվում է տարամետ:*

Այլ կերպ ասած` (1.1) շարքը կոչվում է զուգամետ (տարամետ), եթե զուգամետ է (տարամետ է) նրա մասնակի գումարների հաջորդականությունը:

**Օրինակներ:**

1) Շարքի պարզագույն օրինակ է հանդիսանում երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարը՝

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots : \qquad (1.3)$$

Նրա մասնակի գումարն է՝

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} :$$

Եթե $|q| < 1$ (այսինքն՝ պրոգրեսիան անվերջ նվազող է), ապա $S_n$-ը ունի վերջավոր սահման՝

$$S = \frac{a}{1 - q},$$

այսինքն՝ (1.3) շարքը զուգամետ է և $S$-ը նրա գումարն է:

Երբ $|q| \geq 1$, ապա (1.3) շարքը տարամետ է, ընդ որում, եթե $q \geq 1$ (և $a > 0$), ապա շարքի գումարը $+\infty$-ն է, իսկ եթե $q \leq -1$, $S_n$-ը սահման չունի, այսինքն՝ շարքը գումար չունի:

Օրինակ, երբ $a = 1$ և $q = -1$, կստանանք

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

շարքը, որի մասնակի գումարների հաջորդականությունն է՝

$$1, 0, 1, 0, \ldots :$$

2) Դիտարկենք $\alpha$ իրական թվի տասնորդական վերլուծությունը՝

$$\alpha = C, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots,$$

այսինքն՝

$$C, c_1 c_2 \ldots c_n \leq \alpha \leq C, c_1 c_2 \ldots c_n + \frac{1}{10^n}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

հետևաբար,

$$C_n = C, c_1 c_2 \ldots c_n \to \alpha :$$

Մյուս կողմից, $C_n$-ը

$$C + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots$$

շարքի մասնակի գումարն է: Հետևաբար, այդ շարքը զուգամետ է և նրա գումարը $\alpha$-ն է՝

$$\alpha = C + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots :$$

3) Ապացուցենք, որ $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \infty$ :

Իրոք, եթե $A_n$-ով նշանակենք այդ շարքի $n$-րդ մասնակի գումարը, ապա

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(1+k) - \ln k\right] = \ln(n+1) \to \infty :$$

4) Ցույց տանք, որ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1,-2,\dots)$:

Իսկապես՝

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{\alpha+k+1}\right] = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+n+1} \to \frac{1}{\alpha+1} :$$

5) Համոզվենք, որ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$ :

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty :$$

6) Ցույց տանք, որ $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$, կամ կարճ՝ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ :

Այս դեպքում ունենք՝

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \to e \text{ (տես՝ գլուխ 2, §2, կետ 3):}$$

<u>2. Զուգամետ շարքերի պարզագույն հատկությունները:</u> Եթե (1.1) շարքից դեն նետենք առաջին $m$ անդամները, ապա կստանանք մի նոր շարք՝

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \; m = 1,2,\dots, \tag{1.4}$$

որը կոչվում է (1.1) շարքի *մնացորդ կամ՝ պոչ*:

**Հատկություն 1:** *Եթե (1.1) շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ են նաև նրա բոլոր մնացորդ շարքերը, ընդ որում, եթե $\gamma_m$ -ով նշանակենք (1.4) շարքի գումարը, ապա տեղի ունի*

$$A = A_m + \gamma_m \tag{1.5}$$

*հավասարությունը:*

► $m$ -ը ֆիքսենք և $A'_k$ -ով նշանակենք (1.4) շարքի $k$ -րդ մասնակի գումարը: Այդ դեպքում

$$A'_k = A_{m+k} - A_m : \tag{1.6}$$

Այս հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $k \to \infty$ ($m$ -ը ֆիքսված է), կստանանք

$$A'_k \to A - A_m :$$

Հետևաբար, (1.4) շարքը զուգամետ է և նրա գումարը $A - A_m$ -ն է, ինչը համարժեք է (1.5) -ին: ■

Դժվար չէ նկատել, որ ֆիքսած $m$ -ի դեպքում (1.4) մնացորդ շարքի զուգամիտությունից բխում է (1.1) շարքի զուգամիտությունը: Այդ բանում համոզվելու համար (1.6) հավասարությունը գրենք

$$A_n = A_m + A'_{n-m}$$

տեսքով, որտեղ $m$ -ը ֆիքսված է: Այստեղ $n$ -ը ձգտեցնելով անվերջության՝ կստանանք այն, ինչ պահանջվում էր:

Ապացուցված հատկությունը նկարագրական լեզվով կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. *շարքից վերջավոր թվով անդամներ դեն նետելը կամ ավելացնելը չի ազդում շարքի վարքի վրա:*

**Հատկություն 2:** *Զուգամետ շարքի մնացորդը ձգտում է զրոյի:*

Այս պնդումը բխում է (1.5) հավասարությունից:

**Հատկություն 3:** *Զուգամետ շարքի ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի՝*

$$a_n \to 0 : \tag{1.7}$$

► Իրոք, $a_n = A_n - A_{n-1} \to A - A = 0$ : ■

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ (1.7) պայմանը (1.1) շարքի զուգամիտության համար *անհրաժեշտ է, բայց բավարար չէ:*

**Հատկություն 4:** *Եթե (1.1) շարքը զուգամետ է և $c$ -ն հաստատուն է, ապա $\sum ca_n$ շարքը նույնպես զուգամետ է և*

$$\sum ca_n = cA:$$

► Իրոք, այս նոր շարքի $n$-րդ մասնակի գումարը նշանակելով $\overline{A}_n$, կստանանք

$$\overline{A}_n = cA_n \to cA: \blacksquare$$

**Հատկություն 5:** *Եթե $\sum a_n$ և $\sum b_n$ շարքերը զուգամետ են և*

$$\sum a_n = A, \quad \sum b_n = B,$$

*ապա զուգամետ կլինի նաև $\sum (a_n + b_n)$ շարքը և*

$$\sum (a_n + b_n) = A + B:$$

► Իրոք, նշանակելով այդ շարքերի $n$-րդ մասնակի գումարները $A_n$, $B_n$ և $C_n$, կստանանք

$$C_n = A_n + B_n \to A + B: \blacksquare$$

<u>3. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:</u>

**Թեորեմ 1.1:** *Որպեսզի (1.1) շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $N(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ $n > N(\varepsilon)$ դեպքում բավարարվեն*

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} \right| < \varepsilon, \quad m = 1,2,... \qquad (1.8)$$

*անհավասարությունները:*

► (1.1) շարքի զուգամիտությունը, ըստ սահմանման, նշանակում է, որ նրա մասնակի գումարների $A_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է, իսկ, մյուս կողմից, քանի որ

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m},$$

ապա (1.8) -ը $A_n$ հաջորդականության ֆունդամենտալության պայմանն է: Մնում է օգտվել Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից $A_n$ հաջորդականության համար: ■

**Օրինակ:** Ապացուցենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ շարքը, որը կոչվում է *հարմոնիկ շարք*, տարամետ է:

Ունենք՝

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}:$$

Հետևաբար, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ թվի համար խախտվում է Կոշիի (1.8) պայմանը, ուստի $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ շարքը տարամետ է:

## § 2. ԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐ

1. Դրական շարքի զուգամիտության պայմանը: Դիցուք՝ $a_n\geq 0$, $n=1,2,\ldots$: Այդ դեպքում

$$\sum a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{2.1}$$

շարքը կանվանենք *դրական շարք*:

Դրական շարքի մասնակի գումարների $A_n$ հաջորդականությունը աճող է (լայն իմաստով), հետևաբար այն միշտ ունի սահման՝ $A_n\uparrow A$: Այդ $A$ սահմանը կլինի վերջավոր, երբ $A_n$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, հակառակ դեպքում՝ $A=+\infty$ :

Ձևակերպենք այս պնդումը շարքերի լեզվով.

**Լեմմա 2.1:** *Դրական շարքը միշտ ունի գումար՝ վերջավոր կամ անվերջ: Այդ գումարը վերջավոր է (շարքը զուգամետ է) այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա մասնակի գումարների հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, հակառակ դեպքում շարքի գումարը $+\infty$ է:*

Այժմ, ելնելով (2.1) շարքից, կազմենք մի նոր շարք՝*

* (2.2) շարքի $k$ -րդ անդամը $b_k:=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$ թիվն է:

$$\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}\right) + \left(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}\right) + \\ + \cdots + \left(a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}\right) + \cdots \ , \tag{2.2}$$

որտեղ $n_k$-ն բնական թվերի խիստ աճող հաջորդականություն է $(n_0 = 1)$: Այս շարքը կոչվում է (2.1) շարքի *խմբավորված շարք*: Եթե այս շարքի $k$ -րդ մասնակի գումարը նշանակենք $\widetilde{A}_k$ , ապա

$$\widetilde{A}_k = A_{n_k} \ ,$$

այսինքն՝ (2.2) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հանդիսանում է (2.1) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության ենթահաջորդականություն:

Մյուս կողմից, $A_n$ աճող հաջորդականության զուգամիտությունը համարժեք է նրա $A_{n_k}$ ենթահաջորդականության զուգամիտությանը: Հետևաբար, (2.1) և (2.2) շարքերը զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ:

**Օրինակներ:** 1) Դիտարկենք հարմոնիկ շարքը՝

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots :$$

Նրանից կազմենք խմբավորված շարք՝

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \\ + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right) + \cdots =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k \ ,$$

որտեղ

$$b_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} :$$

Նշանակելով հարմոնիկ շարքի $n$-րդ մասնակի գումարը $H_n$-ով՝ կստանանք

$$H_{2^{k+1}} > k \cdot \frac{1}{2}$$

անհավասարությունը: Հետևաբար, հարմոնիկ շարքի գումարը $+\infty$ է:

2) Այժմ դիտարկենք *ընդհանուր հարմոնիկ շարքը*՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

որտեղ $s$ -ը կամայական դրական թիվ է:

Ցույց տանք, որ $s>1$ *դեպքում ընդհանուր հարմոնիկ շարքը զուգամետ է:* Դիտարկենք հետևյալ խմբավորած շարքը՝

$$1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^k)^s}+\frac{1}{(2^k+1)^s}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^s}\right)+\cdots=:\sum_{k=0}^{\infty}b_k:$$

Վերևից գնահատենք այս շարքի ընդհանուր անդամը.

$$b_k=\frac{1}{(2^k)^s}+\frac{1}{(2^k+1)^s}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^s}<2^k\cdot\frac{1}{(2^k)^s}=\frac{1}{2^{k\sigma}},$$

որտեղ $\sigma=s-1>0$: Հետևաբար,

$$\sum_{k=0}^{n}b_k<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k\sigma}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^\sigma}},$$

ինչը նշանակում է, որ խմբավորված շարքը ու նրա հետ մեկտեղ՝ նաև ընդհանուր հարմոնիկ շարքը, զուգամետ է:

**2. Բաղդատման հայտանիշները:** Դիցուք

$$\sum a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \ (1) \quad \text{և} \quad \sum b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \ (2)$$

շարքերը դրական են:

**Թեորեմ 2.1 (Բաղդատման I հայտանիշը):** *Եթե* $a_n\le b_n$, $n=1,2,\ldots$, *ապա (2) շարքի զուգամիտությունից բխում է (1) շարքի զուգամիտությունը:*

► Իրոք, տրված պայմանից հետևում է, որ $A_n\le B_n$, $n=1,2,\ldots$, որտեղ $A_n$-ը և $B_n$-ը այդ շարքերի մասնակի գումարներն են: Հաշվի առնելով լեմմա 2.1-ը՝ թեորեմի պնդումը բխում է այդ անհավասարությունից: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմի պնդումը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ $a_n\le b_n$ անհավասարությունը տեղի ունի՝ սկսած որոշ համարից: Բանը նրանում է, որ շարքի սկզբից վերջավոր թվով անդամներ դեն նետելը չի ազդում շարքի վարքի վրա:

**Թեորեմ 2.2 (Բաղդատման II հայտանիշը):** *Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K\,,\ 0\le K\le\infty$$

*սահմանը, ապա*

*ա)* $0\le K<\infty$ *դեպքում (2) շարքի զուգամիտությունից բխում է (1) շարքի զուգամիտությունը;*

*բ)* $0<K\le\infty$ *դեպքում (1) շարքի զուգամիտությունից բխում է (2) շարքի զուգամիտությունը:*

► ա) Զուգամետ հաջորդականությունների առաջին հատկության համաձայն՝

$$\frac{a_n}{b_n}<K+1\,,\ \text{երբ}\ n>n_0\,,$$

այսինքն՝

$$a_n<(K+1)b_n:$$

Այժմ կկիրառենք զուգամետ շարքերի 4-րդ հատկությունը և նախորդ հայտանիշը:

բ) Վերցնենք մի $p$ թիվ, այնպիսին, որ $0<p<K$: Այդ դեպքում, սկսած որոշ համարից տեղի կունենան $p<a_n/b_n$ անհավասարությունները կամ, որ նույնն է՝ $pb_n<a_n$: Մնում է կրկին կիրառել նախորդ հայտանիշը և զուգամետ շարքերի 4-րդ հատկությունը: ■

**Թեորեմ 2.3 (Բաղդատման III հայտանիշը):** *Եթե տեղի ունեն*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\,,\ n=1,2,... \tag{2.3}$$

*անհավասարությունները, ապա (2) շարքի զուգամիտությունից բխում է (1) շարքի զուգամիտությունը:*

► Ունենք, որ

$$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1}\,,\ \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2}\,,\ ...,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}:$$

Բազմապատկելով այդ անհավասարությունները՝ կստանանք $\dfrac{a_n}{a_1} \le \dfrac{b_n}{b_1}$ անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad n = 1,2,...:$$

Այնուհետև կիրառենք զուգամետ շարքերի 4-րդ հատկությունը և բաղդատման առաջին հայտանիշը: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմը մնում է ուժի մեջ նաև այն դեպքում, երբ (2.3) անհավասարությունը բավարարվում է՝ սկսած որոշ համարից:

**Օրինակներ:** 1) Հարմոնիկ շարքերի հետ համեմատությունը հնարավորություն է տալիս անմիջական եզրակացություն անել բազմաթիվ շարքերի վարքի վերաբերյալ: Ըստ թեորեմ 2.1-ի՝

ա) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty$, երբ $s < 1$, քանի որ $\dfrac{1}{n^s} \ge \dfrac{1}{n}$:

բ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \infty$, քանի որ $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \dfrac{1}{n+1}$:

գ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \infty$, քանի որ $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$:

դ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} = \infty$, քանի որ $(\ln n)^p < n$, երբ $n > n_0$:

ե) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$, քանի որ $\dfrac{n!}{n^n} < \dfrac{2}{n^2}$, երբ $n > 3$:

զ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \infty$, քանի որ $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\ln \ln n}} < \dfrac{1}{n^2}$, երբ $n > n_0$:

է) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} < \infty$, քանի որ $\dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\ln \ln \ln n}} < \dfrac{1}{n^2}$, երբ $n > n_0$:

ը) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \infty$, քանի որ $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \dfrac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \dfrac{1}{e^{\ln n}} = \dfrac{1}{n}$:

Ըստ թեորեմ 2.2-ի՝

ա) $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(a+bn)^s}$ շարքը ($b>0$) զուգամետ է, երբ $s>1$ և տարամետ է, երբ $s\le 1$: Իրոք.

$$\frac{1}{(a+bn)^s}:\frac{1}{n^s}\to\frac{1}{b^s}:$$

բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=\infty$, քանի որ $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}:\frac{1}{n}\to 1$:

գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}=\infty$ ($0<x<\pi$), քանի որ $\sin\frac{x}{n}:\frac{1}{n}\to x$:

դ) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=\infty$ ($x>0$), քանի որ $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right):\frac{1}{n}\to x$:

ե) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)<\infty$, քանի որ $\left(1-\cos\frac{x}{n}\right):\frac{1}{n^2}\to\frac{x^2}{2}$:

**3. Էյլերի բանաձևը:** Նշանակենք՝

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}:$$

Ապացուցենք հետևյալ բանաձևը՝

$$H_n=\ln n+C+\gamma_n, \tag{2.4}$$

որտեղ $\gamma_n\to 0$, $0<C<\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1$:

Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն՝

$$\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{n+\theta},\quad 0<\theta<1:$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}: \tag{2.5}$$

Այժմ դիտարկենք

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right) \tag{2.6}$$

շարքը: (2.5)-ի համաձայն`

$$0<\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}:$$

Հետևաբար, (2.6) շարքը դրական է և զուգամետ: Եթե նրա գումարը նշանակենք $C$ -ով, ապա կստանանք`

$$H_n-\ln(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)\to C,$$

ինչը համարժեք է (2.4)-ին:

Ընթերցողին առաջարկում ենք հաշվել $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ գումարը` օգտվելով Էյլերի (2.4) բանաձևից:

<u>**4. Կոշիի թեորեմը մոնոտոն շարքերի վերաբերյալ:**</u>

**Թեորեմ 2.4:** *Եթե $a_n$ հաջորդականությունը մոնոտոն նվազելով ձգտում է 0-ի, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ և $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$ շարքերը զուգամիտում են միաժամանակ:*

► Իրոք, մենք գիտենք, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքի զուգամիտությունը համարժեք է

$$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\cdots+$$
$$+(a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})+\cdots$$

խմբավորված շարքի զուգամիտությանը:

Մյուս կողմից, օգտվելով $a_n$ հաջորդականության մոնոտոնությունից, կստանանք

$$2^k\cdot a_{2^{k+1}}\le a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}-1}\le 2^k\cdot a_{2^k}$$

գնահատականները:

Մնում է օգտվել բաղդատման առաջին հայտանիշից: ■

**Օրինակներ:**

ա) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ շարքը տարամետ է, քանի որ

$$2^k\cdot a_{2^k}=2^k\cdot\frac{1}{2^k\ \ln 2^k}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{k}:$$

բ) $s>1$ դեպքում $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^s}$ շարքը զուգամետ է, քանի որ

$$2^k\cdot a_{2^k}=2^k\cdot\frac{1}{2^k(\ln 2^k)^s}=\frac{1}{(\ln 2)^s}\cdot\frac{1}{k^s}:$$

գ) Դիտարկենք $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^s}$ շարքը: Ունենք, որ*

$$2^k\cdot a_{2^k}=2^k\cdot\frac{1}{2^k\ln 2^k\cdot(\ln\ln 2^k)^s}\sim\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{k(\ln k)^s}:$$

Հետևաբար, հաշվի առնելով նախորդ երկու օրինակները, բաղդատման երկրորդ հայտանիշից հետևում է, որ շարքը զուգամետ է, երբ $s>1$, և տարամետ՝ երբ $s\le 1$:

<u>5. Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշները:</u>

**Թեորեմ 2.5 (Կոշիի հայտանիշը):** *Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը դրական է և $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=:K$ : Այդ դեպքում՝*

*ա) եթե $K<1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը զուգամետ է,*

*բ) եթե $K>1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը տարամետ է:*

---

* $x_n\sim y_n$ սիմվոլը նշանակում է, որ $x_n=\alpha_n y_n$, որտեղ $\alpha_n\to 1$: Այն դեպքում, երբ $y_n\neq 0$, նշված պայմանը համարժեք է $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$ առնչությանը:

► ա) Վերցնենք $K<q<1$ պայմանին բավարարող որևէ $q$ թիվ: Այդ դեպքում գոյություն ունի $n_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ $n>n_0$ դեպքում տեղի ունենա $\sqrt[n]{a_n}<q$ անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝

$$a_n<q^n,\ n>n_0:$$

Մնում է օգտվել բաղդատման առաջին հայտանիշից:

բ) Դիցուք $\sqrt[n_k]{a_{n_k}}$ ենթահաջորդականությունը ձգտում է $K$-ի և $K>1$: Այդ դեպքում ի վերջո բավարարվում է $\sqrt[n_k]{a_{n_k}}>1$ անհավասարությունը, ինչը համարժեք է

$$a_{n_k}>1$$

անհավասարությանը, երբ $k>k_0$: Այսպիսով, խախտվում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը՝ $a_n\to 0$: Հետևաբար, շարքը տարամետ է: ■

**Օրինակներ:**

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ շարքը զուգամետ է, քանի որ

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{e}<1:$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$ ($x>0$) շարքը զուգամետ է, քանի որ $\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{n}\to 0<1$:

3) Դիտարկենք $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^s}$ շարքը, որտեղ $x>0$: Քանի որ

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^s}\to x,$$

ապա $0<x<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ $x>1$ դեպքում՝ տարամետ: Երբ $x=1$, ստանում ենք $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ հարմոնիկ շարքը, որի վարքն արդեն կախված է $s$-ի արժեքից. երբ $s>1$, այն զուգամետ է, երբ $s\le 1$՝ տարամետ է: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ երբ $K=1$, շարքը կարող է լինել թե' զուգամետ, թե' տարամետ:

**Թեորեմ 2.6 (Դալամբերի հայտանիշը):** *Եթե* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *դրական շարքի համար գոյություն ունի*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$$

*սահմանը, ապա*

*ա) $D<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է,*

*բ) $D>1$ դեպքում շարքը տարամետ է:*

► ա) Դիցուք՝ $D<q<1$: Այդ դեպքում, սկսած որոշ համարից՝ $n>n_0$, տեղի ունեն

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q=\frac{q^{n+1}}{q^n}$$

անհավասարությունները: Մնում է կիրառել բաղդատման երրորդ հայտանիշը:

բ) դեպքում, սկսած որոշ համարից՝ $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$: Դա նույնն է, որ $a_{n+1}>a_n$, այսինքն՝ խախտվում է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը՝ $a_n\to 0$: Հետևաբար, շարքը տարամետ է: ■

**Օրինակներ:** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ շարքը զուգամետ է ($x>0$), քանի որ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}\to 0:$$

2) Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^s}$ շարքը ($x>0$): Այս դեպքում

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=x\left(\frac{n}{n+1}\right)^s\to x:$$

Հետևաբար, երբ $0 < x < 1$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $x > 1$, շարքը տարամետ է: Եթե $x = 1$, ստանում ենք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ հարմոնիկ շարքը, որը զուգամետ է, երբ $s > 1$ և տարամետ է, երբ $s \le 1$: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ երբ $D = 1$, շարքը կարող է լինել թե' զուգամետ, և թե' տարամետ:

**Թեորեմ 2.6′ (Դալամբերի հայտանիշի ընդհանուր ձևակերպումը):**

*Դիցուք՝ $a_n \ge 0$ : Այդ դեպքում*

*ա) եթե $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է;*

*բ) եթե $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է:*

Ապացուցվում է նախորդ թեորեմի դատողություններով:

**Թեորեմ 2.7 (Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշների համեմատումը):**

*Յուրաքանչյուր $a_n$ դրական հաջորդականության համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} ,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} :$$

► Ապացուցենք, օրինակ, երկրորդը: Այդ նպատակով նշանակենք $D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ և ենթադրենք, որ $D < +\infty$ ($D = +\infty$ դեպքում անհավասարությունն ակնհայտ է):

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Այդ դեպքում գոյություն ունի $n_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon$, երբ $n \ge n_0$ կամ, որ նույնն է՝

$$a_{n+1} < (D+\varepsilon)a_n \text{, երբ } n \ge n_0 :$$

Կամայական $n > n_0$ թվի համար $(n - n_0)$ անգամ կիրառելով այս անհավասարությունը, կստանանք

$$a_n < (D+\varepsilon)a_{n-1} < (D+\varepsilon)^2 a_{n-2} < \cdots < (D+\varepsilon)^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$$

անհավասարությունները կամ, որ նույնն է՝

$$\sqrt[n]{a_n} < (D+\varepsilon)\cdot\sqrt[n]{a_{n_0} \cdot (D+\varepsilon)^{-n_0}} :$$

Հետևաբար՝

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} \le D+\varepsilon :$$

Մնում է հիշել, որ $\varepsilon$ -ը կամայական էր: ■

Այս թեորեմը ցույց է տալիս, որ *Դալամբերի հայտանիշը Կոշիի հայտանիշից ուժեղ չէ*[*]: *Հետևյալ օրինակով կարելի է համոզվել, որ Կոշիի հայտանիշն ավելի ուժեղ է.*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

շարքի համար ունենք՝

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 :$$

Այստեղ Կոշիի հայտանիշը ցույց է տալիս, որ շարքը զուգամետ է, իսկ Դալամբերի հայտանիշը պատասխան չի տալիս:

**<u>6. Ռաբեի հայտանիշը:</u>**

**Թեորեմ 2.8:** *Եթե* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *դրական շարքի համար գոյություն ունի*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = R$$

*սահմանը*[**]*, ապա*

*ա)* $R>1$ *դեպքում շարքը զուգամետ է,*

*բ)* $R<1$ *դեպքում շարքը տարամետ է:*

---

[*] Սակայն գործնականում ավելի հարմար է օգտվել Դալամբերի հայտանիշից:

[**] Կամ ՝ $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = R$ սահմանը:

► ա) Վերցնենք $s$ և $r$ թվերն, այնպիսիք, որ $1 < s < r < R$: Այդ դեպքում գոյություն ունի $n_1$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > r, \text{ երբ } n > n_1,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1-\frac{r}{n}, \text{ երբ } n > n_1: \qquad (2.7)$$

Մյուս կողմից՝

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} \to s < r:$$

Հետևաբար, գոյություն ունի $n_2$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} < r, \text{ երբ } n > n_2,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^s > 1-\frac{r}{n}, \text{ երբ } n > n_2: \qquad (2.8)$$

Վերցնելով $n > \max\{n_1, n_2\}$՝ (2.7) և (2.8) անհավասարություններից կստանանք

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^s = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}$$

գնահատականը: Այժմ մնում է կիրառել բաղդատման երրորդ հայտանիշը:

բ) Դիցուք՝

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1, \text{ երբ } n > n_0,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}, \ n > n_0:$$

Բաղդատման երրորդ հայտանիշի համաձայն, շարքը տարամետ է (համեմատում ենք $\sum \frac{1}{n-1}$ շարքի հետ): ■

**Օրինակներ:**

1) Դժվար չէ ստուգել, որ $\sum \frac{1}{n}$ և $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ երկու շարքերի համար էլ՝ $R = 1$, բայց նրանցից մեկը զուգամետ է, մյուսը՝ տարամետ:

2) Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ շարքը, երբ $x > 0$: Քանի որ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{x+n+1}$, ուստի

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{n+1}{x+n+1}\right) = n\frac{x}{x+n+1} \to x:$$

Երբ $x > 1$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $0 < x < 1$, շարքը տարամետ է: $x = 1$ դեպքում ստացվում է տարամետ հարմոնիկ շարքը:

3) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$ շարքը զուգամետ է, քանի որ $R = \frac{3}{2}$:

<u>**7. Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը:**</u>

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a, \infty)$ միջակայքում և ինտեգրելի է յուրաքանչյուր $[a, A]$ վերջավոր հատվածում: Դիտարկենք

$$\lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx \tag{2.9}$$

սահմանը: Եթե այդ սահմանը գոյություն ունի, ապա այն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ* և նշանակվում է

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{2.10}$$

սիմվոլով: Եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա (2.10) անիսկական ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, հակառակ դեպքում այն կոչվում է *տարամետ:* (2.10) անիսկական ինտեգրալը տարամետ է կոչվում նաև այն դեպքում, երբ (2.9) սահմանը գոյություն չունի:

**Օրինակներ:**

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = +\infty$, քանի որ $\int_1^A \frac{dx}{x} = \ln A \to +\infty$, երբ $A \to +\infty$ :

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ անիսկական ինտեգրալը $s > 1$ դեպքում զուգամետ է, իսկ $s \le 1$ դեպքում՝ տարամետ:

Այժմ ձևակերպենք դրական շարքերի զուգամիտության ինտեգրալային հայտանիշը:

**Թեորեմ 2.9:** *Դիցուք* $f(x)$ *ֆունկցիան նվազող է* $[1,\infty)$ *միջակայքում և* $f(n) = a_n$, $n = 1,2,\ldots$*: Այդ դեպքում*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n$$

*շարքը և*

$$\int_1^\infty f(x)dx \tag{2.10'}$$

*անիսկական ինտեգրալը զուգամիտում են միաժամանակ*[*]*:*

► Ունենք՝

$$a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le a_k\,,\ k = 1,2,\ldots,n\,: \tag{2.11}$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կստանանք

---

[*] Բովանդակալից է այն դեպքը, երբ $a_n \downarrow 0$ :

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (2.12)$$

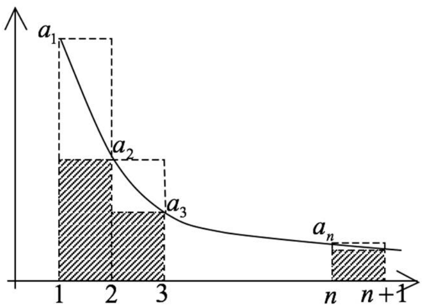
գնահատականները: Մյուս կողմից,

$$F(A) = \int_1^A f(x)dx$$

ֆունկցիան աճող է ( $f(x) > 0$ ), հետևաբար, այն կունենա վերջավոր սահման ((2.10$'$) անիսկական ինտեգրալը կլինի զուգամետ) այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$F(n+1) = \int_1^{n+1} f(x)dx$$

հաջորդականությունը սահմանափակ է: Իսկ (2.12) անհավա-սարու-թյունները ցույց են տալիս, որ այդ հաջորդականության սահմանափակ լինելը համարժեք է $\sum a_n$ շարքի զուգամիտությանը: ■




Ինտեգրալային հայտանիշն ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանում. դիտարկենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և որպես անիսկական ինտեգրալի արժեք պատկերացնենք $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված կորագիծ սեղանի (աջից անսահմանափակ) մակերեսը: Այդ դեպքում ստվերագծված ուղղանկյունների մակերեսների գումարը կներկայացնի $a_2 + a_3 + \cdots$ շարքի գումարը, իսկ $a_1 + a_2 + \cdots$ շարքի գումարը կներկայացնի մեծ ուղղանկյունների մակերեսների գումարը (որը նախորդից տարբերվում է $a_1$ -ով):

**Լրացումներ:**

**ա)** Օգտագործելով (2.11) անհավասարությունները՝ *կարող ենք գնահատել զուգամետ շարքի պոչը*:

Իրոք, (2.11) անհավասարությունը գրելով $k = n, n+1, ..., n+m$ արժեքների համար, և գումարելով ստացված անհավասարությունները, կստանանք՝

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m+1} \le \int_n^{n+m+1} f(x)dx \le a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m} :$$

Այստեղ $m$-ը ձգտեցնելով անվերջության՝ կստանանք

$$\gamma_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx \le \gamma_{n-1}$$

գնահատականները, որտեղ $\gamma_n$-ը շարքի պոչն է՝ $\gamma_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots :$

Այսպիսով՝

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le \gamma_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx : \tag{2.13}$$

Որպես օրինակ, գնահատենք $\sum \frac{1}{n^s}$ ($s > 1$) հարմոնիկ շարքի պոչը: Ունենք՝

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_n^{\infty} = \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} :$$

Հետևաբար, (2.13)-ի համաձայն, կստանանք՝

$$\frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \le \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} :$$

**բ) Էյլերի բանաձևի ընդհանրացումը:** Դիցուք բավարարված են ինտեգրալային հայտանիշի պայմանները և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ($a_n \downarrow 0$): Դիտարկենք հետևյալ շարքը

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k - \int_k^{k+1} f(x)dx \right] : \tag{2.14}$$

(2.11)-ի համաձայն՝

$$0 \le a_k - \int_k^{k+1} f(x)dx \le a_k - a_{k+1}:$$

Քանի որ $a_n \downarrow 0$, ուստի (2.14) շարքը զուգամետ է և, այդ շարքի գումարը նշանակելով $C$, կունենանք՝

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\left[a_k - \int_k^{k+1} f(x)dx\right] \to C:$$

Այսպիսով՝

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \int_1^{n+1} f(x)dx + C + \gamma_n, \text{ որտեղ } \gamma_n \to 0, \tag{2.15}$$

ընդ որում, $C \le a_1$:

(2.15) – ում վերցնելով $f(x) = \dfrac{1}{x}$՝ հանգում ենք Էյլերի (2.4) բանաձևին:

<u>**8. Աբելի թեորեմը մոնոտոն շարքերի վերաբերյալ:**</u>

**Թեորեմ 2.10:** *Եթե $a_k$ հաջորդականությունը նվազելով ձգտում է զրոյի և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, ապա*

$$na_n \to 0:$$

► Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $m$ բնական թիվ այնպիսին, որ

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ երբ } n > m:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $a_n$ հաջորդականությունը նվազող է, ապա

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n:$$

Հետևաբար,

$$na_n < \frac{n}{n-m} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ երբ } n > 2m: \blacksquare$$

**Հակաօրինակներ:**

1) $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ Աբելի թեորեմի հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ: Այսինքն՝ չնայած, որ $a_k \downarrow 0$ և $na_n \to 0$, բայց շարքը տարամետ է:

2) Դիտարկենք հետևյալ շարքը.

$$1+0+0+\frac{1}{2^2}+0+\cdots+0+\frac{1}{3^2}+0+\cdots,$$

որի անդամները որոշվում են

$$a_n=\begin{cases}1/k^2, & \text{երբ } n=k^2,\\ 0, & \text{երբ } n\neq k^2\end{cases}$$

բանաձևով: Այս դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty\,,$$

բայց $na_n$-ը չի ձգտում 0-ի:

<u>9. Աբել - Դինիի թեորեմները:</u>

**Թեորեմ** 2.11: *Դիցուք $d_n$-ը դրական թվերի հաջորդականություն է և $D_n=d_1+d_2+\cdots+d_n$: Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} d_n=\infty$, ապա*

*ա)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n}=\infty\,,$

*բ)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}<\infty$, *յուրաքանչյուր $\sigma>0$ թվի համար:*

► ա) Ֆիքսած $m$-ի դեպքում ունենք՝

$$\frac{d_{m+1}}{D_{m+1}}+\frac{d_{m+2}}{D_{m+2}}+\cdots+\frac{d_{m+n}}{D_{m+n}}\geq\frac{D_{m+n}-D_m}{D_{m+n}}=1-\frac{D_m}{D_{m+n}}>\frac{1}{2}\,,$$

որտեղ վերջին անհավասարությունը բավարարվում է բավականաչափ մեծ $n$-երի համար ($D_{m+n}\to\infty$): Հետևաբար, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, ա) շարքը տարամետ է:

բ) $f(x)=x^{-\sigma}$ ֆունկցիայի համար $[D_{n-1}, D_n]$ հատվածում կիրառելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{D_n^{\sigma}}=\sigma\frac{d_n}{c^{1+\sigma}}>\sigma\frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$$

գնահատականը, որտեղ $D_{n-1}<c<D_n$:

Քանի որ $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{D_n^{\sigma}}\right)<\infty$, ապա բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, բ) շարքը նույնպես զուգամետ է: ■

**Թեորեմ 2.12:** *Դիցուք $c_n$-ը դրական թվերի հաջորդականություն է և $\gamma_n=c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots$: Եթե $\sum c_n<\infty$, ապա*

*ա)* $\sum\frac{c_n}{\gamma_{n-1}}=\infty$,

*բ)* $\sum\frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}}<\infty$, *յուրաքանչյուր* $\sigma\in(0,1)$ *թվի համար:*

► ա) Ֆիքսած $m$-ի դեպքում ունենք՝

$$\frac{c_{m+1}}{\gamma_m}+\frac{c_{m+2}}{\gamma_{m+1}}+\cdots+\frac{c_{m+n}}{\gamma_{m+n-1}}\geq\frac{\gamma_m-\gamma_{m+n}}{\gamma_m}=1-\frac{\gamma_{m+n}}{\gamma_m}>\frac{1}{2},$$

երբ $n$-ը բավականաչափ մեծ է ($\gamma_{m+n}\to 0$): Հետևաբար, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, ա) շարքը տարամետ է:

բ) $f(x)=x^{\sigma}$ ֆունկցիայի համար $[\gamma_n, \gamma_{n-1}]$ հատվածում կիրառելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$\gamma_{n-1}^{\sigma}-\gamma_n^{\sigma}=\sigma\frac{c_n}{c^{1-\sigma}}>\sigma\frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}}$$

գնահատականը, որտեղ $\gamma_n<c<\gamma_{n-1}$:

Քանի որ $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\gamma_{n-1}^{\sigma}-\gamma_n^{\sigma}\right)<\infty$, ապա բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, բ) շարքը նույնպես զուգամետ է: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմ 2.12-ի բ) պնդման մեջ $\gamma_{n-1}$-ը չի կարելի փոխարինել $\gamma_n$-ով: Ընթերցողին առաջարկում ենք համոզվել դրանում, վերցնելով, օրինակ՝ $c_n = 1/n^{n^n}$ :

## §3. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇԱՐՔԵՐ

Եթե շարքի բացասական անդամների քանակը վերջավոր է, ապա, այդ անդամները դեն գցելով (ինչը չի ազդի շարքի վարքի վրա), կստանանք դրական շարք, որն արդեն ուսումնասիրել ենք: Իսկ եթե շարքի դրական անդամների քանակն է վերջավոր, ապա շարքի բոլոր անդամները բազմապատկելով (-1)-ով, հարցը կբերենք նախորդ դեպքին: Այսպիսով, մեզ մնում է ուսումնասիրել այնպիսի շարքերը, որոնցում թե' դրական, և թե' բացասական անդամների քանակն անվերջ է: Այդպիսի շարքերից պարզագույնները, այսպես կոչված, նշանափոխ շարքերն են:

<u>1. Նշանափոխ շարքեր:</u> Նշանափոխ են կոչվում հետևյալ տիպի շարքերը՝

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n + \cdots \quad (c_n > 0): \tag{3.1}$$

**Թեորեմ 3.1 (Լայբնից):** *Եթե $c_n$ հաջորդականությունը նվազելով ձգտում է 0 -ի՝ $c_n \downarrow 0$, ապա (3.1) շարքը զուգամետ է:*

► Զույգ կարգի մասնակի գումարների $C_{2m}$ հաջորդականությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m}):$$

Հետևաբար, $C_{2m}$ հաջորդականությունը աճող է:

Մյուս կողմից,

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} < c_1:$$

Մոնոտոն հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, $C_{2m}$ հաջորդականությունը զուգամետ է՝

$$C_{2m} \uparrow C: \tag{3.2}$$

Կենտ կարգի $C_{2m+1}$ մասնակի գումարի համար ունենք

$$C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1} \to C : \qquad (3.3)$$

Թեորեմի պնդումը բխում է (3.2) և (3.3) առնչություններից: ■

**Լրացում:** Կենտ կարգի $C_{2m+1}$ մասնակի գումարը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$C_{2m+1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m} - c_{2m+1}),$$

մենք համոզվում ենք, որ $C_{2m+1} \downarrow C$ : Այսպիսով,

$$0 < C_{2m} < C < C_{2m+1} < c_1 :$$

Այս գնահատականը հնարավորություն է տալիս գնահատել լայբնիցյան շարքի պոչը՝

$$\gamma_n = (-1)^n c_{n+1} + (-1)^{n+1} c_{n+2} + \cdots = (-1)^n (c_{n+1} - c_{n+2} + \cdots) \quad (c_n \downarrow 0):$$

Քանի որ $c_{n+1} - c_{n+2} + \cdots$ շարքն իր հերթին նշանափոխ շարք է, հետևաբար,

$$\operatorname{sgn} \gamma_n = (-1)^n, \quad |\gamma_n| < c_{n+1} :$$

**2. Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3.4)$$

շարքը կոչվում է *բացարձակ զուգամետ*, եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (3.5)$$

շարքը զուգամետ է:

**Թեորեմ 3.2 (Կոշի):** *Բացարձակ զուգամետ շարքը զուգամետ է:*

► Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ (3.5) շարքը զուգամետ է, ապա Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, գոյություն ունի $N(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \ldots :$$

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon, \quad n > N :$$

Այժմ, օգտվելով Կոշիի պայմանի բավարարությունից, կստանանք, որ (3.4) շարքը զուգամետ է: ■

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ կան շարքեր, որոնք զուգամետ են, բայց շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքը տարամետ է: Այդպիսի շարքերը կոչվում են *պայմանական զուգամետ* շարքեր:

Եթե շարքի բացասական (կամ դրական) անդամների քանակը վերջավոր է, ապա այդ շարքը և նրա անդամների մոդուլներից կազմած շարքը զուգամիտում են միաժամանակ: Այդ պատճառով պայմանական զուգամետ շարքի թե' դրական, և թե' բացասական անդամների քանակն անվերջ է:

Այժմ ենթադրենք, որ (3.4) շարքի թե' դրական, և թե' բացասական անդամների քանակն անվերջ է և (3.4) շարքի դրական անդամներից կազմենք նոր շարք՝

$$p_1 + p_2 + \cdots , \tag{3.6}$$

պահպանելով (3.4) շարքի մեջ այդ անդամների հանդիպման հերթականությունը: Բացասական անդամների մոդուլներից կազմենք մեկ այլ շարք՝

$$q_1 + q_2 + \cdots : \tag{3.7}$$

Եթե (3.4), (3.5), (3.6) և (3.7) շարքերի մասնակի գումարները նշանակենք համապատասխանաբար $A_n$, $A_n^*$, $P_n$ և $Q_n$, իսկ գումարները՝ $A$, $A^*$, $P$, $Q$, ապա կունենանք՝

$$A_n = P_k - Q_m , \quad A_n^* = P_k + Q_m : \tag{3.8}$$

Հետևաբար, երբ (3.4) շարքը բացարձակ զուգամետ է (այսինքն՝ (3.5) շարքը զուգամետ է՝ $A_n^* \to A^*$), ապա (3.6) և (3.7) դրական շարքերը զուգամետ են, որովհետև $P_k^*, Q_m^* \le A_n^* \le A^*$ : (3.8) հավասարություններում անցնելով սահմանի՝ կստանանք $A = P - Q$, $A^* = P + Q$ :

Իսկ երբ (3.4) շարքը պայմանական զուգամետ է ( $A_n \to A$ (վերջավոր), $A_n^* \to +\infty$ ), ապա (3.6) և (3.7) շարքերը երկուսն էլ տարամետ են: Իրոք, եթե նրանցից մեկը լինի զուգամետ՝ $P_k \to P$ (վերջավոր), ապա $Q_m = P_k - A_n$ հաջորդականությունը նույնպես կունենա վերջավոր սահման, հետևաբար, $A_n^* = P_k + Q_m$ հաջորդականությունը նույնպես կունենա վերջավոր սահման, ինչը հակասում է $A_n^* \to +\infty$ պայմանին:

**3. Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշները ընդհանուր դեպքում:**

Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ընդհանուր շարքը: Այս դեպքում Կոշիի հայտանիշը ձևակերպելու համար նշանակենք՝

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = K^* :$$

Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

*ա) Եթե* $K^* < 1$, *ապա* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *շարքը բացարձակ զուգամետ է:*

*բ) Եթե* $K^* > 1$, *ապա* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *շարքը տարամետ է:*

Այս պնդումները ապացուցելու համար ուղղակի կիրառում ենք Կոշիի հայտանիշը $\sum |a_n|$ շարքի համար: Մնում է նկատել, որ բ) դեպքում $|a_n| \not\to 0$, հետևաբար, $a_n \not\to 0$, հետևաբար, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է:

Դալամբերի հայտանիշը ձևակերպելու համար, ենթադրենք, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = D^*$$

սահմանը: Այդ դեպքում,

*ա) Եթե* $D^* < 1$*, ապա* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *շարքը բացարձակ զուգամետ է:*

*բ) եթե* $D^* > 1$*, ապա* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *շարքը տարամետ է:*

Այստեղ կրկին բ) դեպքում՝ $|a_n| \not\to 0$:

Ինչպես դրական շարքերի դեպքում, այնպես էլ ընդհանուր շարքերի դեպքում Դալամբերի հայտանիշը կարելի է ձևակերպել վերին և ստորին սահմանների լեզվով:

Այժմ դիտարկենք օրինակներ.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ :

Այս դեպքում $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \to |x|$, $D^* = |x|$, հետևաբար, շարքը բացարձակ զուգամետ է, երբ $|x| < 1$, տարամետ է, երբ $|x| > 1$: Եթե $|x| = 1$, ապա $x = 1$ կետում շարքը զուգամետ է, որպես լայբնիցյան շարք, իսկ $x = -1$ կետում շարքը տարամետ է, որպես հարմոնիկ շարք:

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, երբ $|x| < 1$, իսկ երբ $|x| = 1$, շարքը պայմանական զուգամետ է:

3) $\sum n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ շարքի համար $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{|x|}{e}$ , $D^* = \frac{|x|}{e}$ :

Եթե $|x| < e$, ապա շարքը բացարձակ զուգամետ է, եթե $|x| > e$, շարքը տարամետ է, իսկ $|x| = e$ դեպքում՝ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, հետևաբար՝ $a_n \not\to 0$, ուստի շարքը տարամետ է:

<u>**4. Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները:**</u> Այս կետը նվիրված է

$$\sum a_n b_n$$

տեսքի շարքերի ուսումնասիրությանը: Այդ հարցում կարևոր դեր է խաղում *Աբելի ձևափոխությունը*՝

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n^{(p)} (b_n - b_{n+1}) + A_q^{(p)} b_q , \tag{3.9}$$

որտեղ $A_n^{(p)} = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$, $p \le n \le q$ :

(3.9) հավասարությունն ապացուցելու համար ձախ կողմի գումարի մեջ տեղադրենք՝ $a_p = A_p^{(p)}$, $a_n = A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}$ , $p < n \le q$ : Կստացվի

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = A_p^{(p)} b_p + \left(A_{p+1}^{(p)} - A_p^{(p)}\right) b_{p+1} + \cdots + \left(A_q^{(p)} - A_{q-1}^{(p)}\right) b_q$$

հավասարությունը, որի աջ կողմում բացելով փակագծերը և վերախմբավորելով ստացվածը, կհանգենք (3.9) հավասարությանը:

**Թեորեմ 3.3 (Դիրիխլեի հայտանիշը):** *Եթե*

*ա)* $\sum a_n$ *շարքի մասնակի գումարների* $A_n$ *հաջորդականությունը սահմանափակ է,*

*բ)* $b_n \downarrow 0$ *,*

*ապա* $\sum a_n b_n$ *շարքը զուգամետ է:*

**Թեորեմ 3.4 (Աբելի հայտանիշը):** *Եթե*

*ա)* $\sum a_n$ *շարքը զուգամետ է,*

*բ)* $b_n$ *հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ,*

*ապա* $\sum a_n b_n$ *շարքը զուգամետ է:*

► *Դիրիխլեի հայտանիշի ապացույցը:* Դիցուք՝ $\left|A_n\right| \le M$ , այդ դեպքում $\left|A_n^{(p)}\right| \le 2M$ : Հետևաբար, (3.9)-ից կունենանք՝

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \le 2M b_p , \tag{3.10}$$

քանի որ $b_n - b_{n+1} \ge 0$, $(b_p - b_{p+1}) + (b_{p+1} - b_{p+2}) + \cdots + (b_{q-1} - b_q) + b_q = b_p$ :

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: $b_n \to 0$ պայմանի համաձայն, գոյություն ունի $p_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$p > p_0 \Rightarrow b_p < \varepsilon / 2M :$$

Ուստի, հաշվի առնելով (3.10)-ը, կստանանք՝

$$p > p_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} a_n b_n \right| < \varepsilon :$$

Մնում է կիրառել Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:

*Աբելի հայտանիշի ապացույցը:* Աբելի հայտանիշն ապացուցելու համար ենթադրենք՝ $b_n \downarrow b$ (հակառակ դեպքում $\sum a_n b_n$ շարքի բոլոր անդամները կբազմապատկենք (-1)-ով, ինչը չի ազդում շարքի վարքի վրա):

$\sum a_n b_n$ շարքի ընդհանուր անդամը ներկայացնենք

$$a_n b_n = a_n (b_n - b) + a_n b$$

տեսքով:

Քանի որ $\sum a_n (b_n - b)$ շարքը բավարարում է Դիրիխլեի հայտանիշի պայմաններին, ապա այն զուգամետ է: $\sum a_n b_n$ շարքի զուգամիտությունն ապացուցելու համար մնում է օգտվել զուգամետ շարքերի $4^0$ և $5^0$ հատկություններից: ■

*Դիրիխլեի հայտանիշից բխեցնենք Լայբնիցի թեորեմը:* Ունենք $\sum (-1)^{n-1} b_n$ շարքը, որտեղ $b_n \downarrow 0$: Ապացուցենք, որ այն զուգամետ է: Վերցնենք $a_n = (-1)^{n-1}$: Քանի որ $\sum a_n$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է , հետևաբար, կարող ենք կիրառել Դիրիխլեի հայտանիշը:

Ներկայացնենք Դիրիխլեի հայտանիշի մեկ այլ կիրառություն.

**Թեորեմ 3.5:** *Եթե* $b_n \downarrow 0$, *ապա* $\sum b_n \sin nx$ *և* $\sum b_n \cos nx$ *շարքերը զուգամետ են, եթե* $x \neq 2\pi k$ , $k \in Z$ *(դժվար չէ նկատել, որ առաջին շարքը զուգամետ է նաև այդ կետերում):*

► Որպեսզի կարողանանք կիրառել Դիրիխլեի հայտանիշը, պետք է ցույց տանք, որ $\sum \sin nx$ և $\sum \cos nx$ շարքերի մասնակի գումարների հաջորդականությունները սահմանափակ են: Սահմանափակվենք առաջինով.

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 2x\sin\frac{x}{2}+\cdots+2\sin nx\sin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x\right)+\left(\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right):$$

Հետևաբար,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le\frac{1}{|\sin x/2|},$$

ինչ և պետք էր ապացուցել: ■

## §4. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Շարքերի խմբավորումը: Դիտարկենք

$$\sum a_n \tag{4.1}$$

ընդհանուր շարքը և, նրանից ելնելով, կազմենք *խմբավորված շարք*՝

$$\begin{gathered}(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+\\+(a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k})+\cdots,\end{gathered} \tag{4.2}$$

որտեղ $n_k$-ն բնական թվերի խիստ աճող հաջորդականություն է $(n_0=1)$: Եթե (4.1) շարքի $n$-րդ մասնակի գումարը նշանակենք $A_n$-ով, իսկ (4.2) շարքի $k$-րդ մասնակի գումարը՝ $\widetilde{A}_k$, ապա

$$\widetilde{A}_k=A_{n_k},$$

այսինքն՝ (4.2) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հանդիսանում է (4.1) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության ենթահաջորդականություն: Հետևաբար, (4.1) շարքի զուգամիտությունից բխում է (4.2) շարքի զուգամիտությունը և նրանց գումարների հավասարությունը:

Հակառակը ճիշտ չէ, օրինակ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+\cdots$$

շարքը տարամետ է, իսկ խմբավորված

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

շարքը՝ զուգամետ:

**Թեորեմ 4.1:** *Եթե (4.2) խմբավորված շարքի մեջ միևնույն խմբի բոլոր անդամները նույն նշանի են (խմբից խումբ այդ նշանը կարող է փոխվել), ապա (4.2) շարքի զուգամիտությունից բխում է (4.1) շարքի զուգամիտությունը:*

► Դիցուք (4.2) շարքը զուգամիտում է $A$ թվին՝

$$A_{n_k} \to A:$$

Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $k_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$k \geq k_0 - 1 \Rightarrow A-\varepsilon < A_{n_k} < A+\varepsilon: \tag{4.3}$$

Մյուս կողմից, եթե $n_{k-1} < n \leq n_k$ և $k$-րդ խմբի անդամները դրական (բացասական) են, ապա

$$A_{n_{k-1}} < A_n \leq A_{n_k} \quad \left(A_{n_k} \leq A_n < A_{n_{k-1}}\right):$$

Հետևաբար, (4.3)-ից բխում է, որ եթե $n > n_{k_0}$, ապա

$$A-\varepsilon < A_n < A+\varepsilon,$$

այսինքն՝ $A_n \to A$: ■

<u>**2. Շարքերի տեղափոխությունները:**</u> Դիցուք $k_n$ հաջորդականությունը $N$ բնական թվերի բազմությունը փոխմիարժեք արտապատկերում է $N$-ի

վրա (այսինքն՝ $k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$ հաջորդականության մեջ յուրաքանչյուր բնական թիվ հանդիպում է մեկ և միայն մեկ անգամ): Նշանակենք՝

$$a'_n = a_{k_n} \quad (n = 1,2,...): \tag{4.4}$$

Այդ դեպքում

$$\sum a'_n \tag{4.5}$$

շարքը կոչվում է (4.1) *շարքի տեղափոխություն* (կամ տեղափոխված շարք):

**Թեորեմ 4.2 (Դիրիխլե):** *Եթե (4.1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա (4.5) շարքը նույնպես բացարձակ զուգամետ է և նրանց գումարները համընկնում են:*

► ա) Նախ ապացուցենք դրական շարքերի դեպքում (այս դեպքում բացարձակ զուգամիտությունը համընկնում է զուգամիտության հետ):

Այդ շարքերի մասնակի գումարները նշանակենք համապատասխանաբար $A_n$, $A'_n$-ով, իսկ գումարները՝ $A$, $A'$-ով:

Այդ դեպքում, (4.4)-ի համաձայն, կունենանք՝

$$A'_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_n} \le A_m \le A,$$

որտեղ $m = \max(k_1, k_2, \cdots, k_n)$: Հետևաբար, (4.5) շարքը զուգամետ է և $A' \le A$ (օգտվեցինք դրական շարքերի զուգամիտության պայմանից):

Քանի որ (4.1) շարքն էլ իր հերթին հանդիսանում է (4.5) շարքի տեղափոխություն, ապա ճիշտ է նաև հակառակ անհավասարությունը՝ $A \le A'$: Այսպիսով՝ $A = A'$:

բ) Այժմ թեորեմն ապացուցենք ընդհանուր դեպքում: Ըստ թեորեմի պայմանի, (4.1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն՝ զուգամետ է $\sum |a_n|$ դրական շարքը: Հետևաբար, զուգամետ կլինի նաև $\sum |a'_n|$ շարքը, որպես այդ շարքի տեղափոխություն, այսինքն՝ (4.5) շարքը բացարձակ զուգամետ է:

Որպեսզի ապացուցենք $A = A'$ հավասարությունը, օգտվենք նախորդ պարագրաֆի 2 կետի կառուցվածքից: Ունենք՝

$$A = P - Q, \quad A' = P' - Q',$$

որտեղ $P$-ն (4.1) շարքի դրական անդամներից կազմած շարքի գումարն է, $Q$-ն բացասական անդամների մոդուլներից կազմած շարքի գումարն է, իսկ

$P'$ -ը և $Q'$ -ը նույն գումարներն են տեղափոխված շարքի համար: Քանի որ $P = P'$, $Q = Q'$, ապա $A = A'$: ■

► **Երկրորդ ապացույց:** Նախ նկատենք, որ

$$\left|A - A_n'\right| \le \left|a_p\right| + \left|a_{p+1}\right| + \cdots =: \gamma_{p-1}^*,$$

որտեղ $p$-ն $A_n'$ գումարի մեջ չմտնող՝ (4.1) շարքի անդամների ինդեքսներից փոքրագույնն է:

Այժմ, երբ $n \to \infty$, կհետևի՝ $p \to \infty$, որտեղից էլ՝ $\gamma_{p-1}^* \to 0$: ■

**Թեորեմ 4.3 (Ռիմանի թեորեմը):** *Եթե (4.1) շարքը պայմանական զուգամետ է, ապա յուրաքանչյուր $\alpha$ թվի համար գոյություն ունի այդ շարքի տեղափոխություն, որի գումարը $\alpha$ -ն է ($\alpha$ -ն կարող է լինել նաև $+\infty$ կամ $-\infty$):*

► Պայմանական զուգամիտության դեպքում

$$p_1 + p_2 + \cdots, \; q_1 + q_2 + \cdots$$

երկու շարքերն էլ տարամետ են (§3, կետ 2):

Նախ քննարկենք վերջավոր $\alpha$-ի դեպքը: $k_1$-ով նշանակենք այն ամենափոքր ինդեքսը, որի համար՝

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > \alpha :$$

Այնուհետև $m_1$-ով նշանակենք այն ամենափոքր ինդեքսը, որի համար՝

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1}) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{m_1}) < \alpha :$$

Հաջորդ քայլում որպես $k_2$ և $m_2$ վերցնենք այն ամենափոքր ինդեքսները, որոնց համար՝

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1}) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{m_1}) +$$
$$+ (p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2}) > \alpha,$$
$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1}) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{m_1}) +$$
$$+ (p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}) - (q_{m_1+1} + \cdots + q_{m_2}) < \alpha :$$

Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք մի խմբավորված շարք.

$$(p_1+\cdots+p_{k_1})-(q_1+\cdots+q_{m_1})+\ldots+$$
$$+(p_{k_{i-1}+1}+\cdots+p_{k_i})-(q_{m_{i-1}+1}+\cdots+q_{m_i})+\cdots,$$

որը զուգամիտում է $\alpha$ գումարին, քանզի նրա մասնակի գումարների շեղումը $\alpha$-ից չի գերազանցում համապատասխանաբար $p_{k_i}$ կամ $q_{m_i}$ թվերը, որոնք ձգտում են 0-ի ((4.1) շարքի զուգամիտության շնորհիվ):

Շարքերի խմբավորման թեորեմի համաձայն,

$$p_1+\cdots+p_{k_1}-q_1-\cdots-q_{m_1}+\cdots+p_{k_{i-1}+1}+\cdots+p_{k_i}-$$
$$-q_{m_{i-1}+1}-\cdots-q_{m_i}+\cdots$$

շարքը, որը հանդիսանում է (4.1) շարքի տեղափոխություն, նույնպես կզուգամիտի $\alpha$ գումարին:

$\alpha=+\infty$ դեպքում թեորեմն ապացուցելու համար որպես (4.1) շարքի տեղափոխություն կվերցնենք

$$p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}-q_1+p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_2}-q_2+\cdots+p_{k_{i-1}+1}+\cdots+p_{k_i}-q_i+\cdots$$

շարքը, որտեղ $k_i$, $i=1,2,\ldots$ ինդեքսներն ընտրում ենք այնպես, որ

$$p_1+\cdots+p_{k_1}-q_1+p_2+\cdots+p_{k_2}-q_2+\cdots+p_{k_{i-1}+1}+\cdots+p_{k_i}>i$$

անհավասարությունները տեղի ունենան բոլոր $i=1,2,\ldots$ արժեքների համար:

Նման ապացույցն անցնում է նաև $\alpha=-\infty$ դեպքում: ■

**<u>3. Կրկնակի շարքերի թեորեմը</u>:** (4.1) շարքի անդամներից կազմենք անվերջ թվով շարքեր, այնպիսիք, որ (4.1)-ի յուրաքանչյուր անդամ մասնակցի կազմած շարքերից միայն մեկում և միայն մեկ անգամ: Դիցուք՝

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1k}+\cdots=:s_1$$
$$a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2k}+\cdots=:s_2$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mk}+\cdots=:s_m$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ :$$

Այս նոր շարքերը կոչվում են տրված շարքի *տրոհման շարքեր*:

**Թեորեմ 4.4:** *Եթե (4.1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա*
*ա) տողիման շարքերը բացարձակ զուգամետ են,*
*բ) նրանց գումարներից կազմած շարքը բացարձակ զուգամետ է,*
*գ)* $\sum_{m=1}^{\infty} s_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *:*

► ա) Նշանակենք՝

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots = A^* :$$

Այդ դեպքում $|a_{m1}| + |a_{m2}| + \cdots + |a_{mk}| \le A^*$, հետևաբար, տողիման $m$-րդ շարքը բացարձակ զուգամետ է $(m = 1, 2, \ldots)$ :

բ) Նշանակենք՝

$$s_{mk}^* = |a_{m1}| + |a_{m2}| + \cdots + |a_{mk}|, \; s_m^* = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| :$$

Այդ դեպքում $\sum_{m=1}^{n} s_{mk}^* \le A^*$ և, $k$-ն ձգտեցնելով անվերջության, կստանանք՝ $\sum_{m=1}^{n} s_m^* \le A^*$: Այստեղից բխում է, որ $\sum_{m=1}^{n} |s_m| \le A^*$, որովհետև $|s_m| \le s_m^*$ :

գ) Նշանակենք՝

$$s_{mk} = a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mk} :$$

Այդ դեպքում

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{m=1}^{n} s_{mk} \right| \le |a_p| + |a_{p+1}| + \cdots,$$

որտեղ $p$-ն այն ամենափոքր ինդեքսն է, որ $a_p$-ն ընդգրկված չէ $\sum_{m=1}^{n} s_{mk}$ գումարի մեջ: $k$-ն ձգտեցնելով անվերջության՝ կստանանք

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{m=1}^{n} s_m \right| \le |a_q| + |a_{q+1}| + \cdots$$

անհավասարությունը, որտեղ $q$-ն այն ամենափոքր ինդեքսն է, որ $a_q$-ն ընդգրկված չէ տրոհման առաջին $n$ շարքերի մեջ: Եթե $n \to \infty$, ապա $q \to \infty$, հետևաբար, գ)-ն բխում է ստացված անհավասարությունից: ■

**Դիտողություն:** Տրոհման շարքերի մի մասը (կամ բոլորը) կարելի է փոխարինել վերջավոր գումարներով: Հետևաբար, այս թեորեմից բխում է բացարձակ զուգամետ շարքերի տեղափոխելիության հատկությունը:

**4. Շարքերի Կոշիի արտադրյալը:**

**Թեորեմ 4.5 (Կոշի):** *Եթե*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \text{ և } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

*շարքերը բացարձակ զուգամետ են, ապա*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = AB, \tag{4.6}$$

*ընդ որում, (4.6) շարքը (որը կոչվում է տրված շարքերի Կոշիի արտադրյալ), նույնպես բացարձակ զուգամետ է:*

► Դիտարկենք

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 + \cdots \tag{4.7}$$

շարքը: Քանի որ

$$\left(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|\right)\left(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|\right) \le A^* B^*, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

որտեղ $A^* = \sum |a_n|$, $B^* = \sum |b_n|$, ապա (4.7) շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքի մասնակի գումարները չեն գերազանցի $A^* B^*$ թիվը: Ուստի (4.7) շարքը բացարձակ զուգամետ է և, հետևաբար, (4.6) շարքը նույնպես բացարձակ զուգամետ է:

Այժմ նկատենք, որ (4.7) շարքի գումարը մի կողմից հավասար է (իր խմբավորումից ստացված) (4.6) շարքի գումարին, մյուս կողմից, կրկնակի շարքերի թեորեմի համաձայն, այն հավասար է

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_k + \cdots,$$

որտեղ $s_k = a_k (b_0 + b_1 + \cdots)$, $k = 0, 1, \ldots$: Այստեղից էլ հետևում է (4.6) հավասարությունը: ■

**Լրացում:** Ելնելով (4.7) շարքից՝ (4.6) շարքի փոխարեն դիտարկենք

$$\sum s_n \tag{4.6'}$$

շարքը, որտեղ $s_n$-երը (4.7) շարքի անդամներից կազմված այնպիսի (վերջավոր կամ անվերջ) գումարներ են, որ (4.7)-ի յուրաքանչյուր անդամ (որպես գումարելի) ընդգրկվի $s_n$-երից մեկի և միայն մեկի մեջ: Այդ դեպքում

$$\sum s_n = A \cdot B:$$

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ այս եզրակացությունը կարելի է տարածել երկուսից ավելի թվով շարքերի վրա:

**Թեորեմ 4.6 (Մերտենս):** *Եթե տրված շարքերից մեկը բացարձակ զուգամետ է, իսկ մյուսը՝ պայմանական, ապա նրանց Կոշիի արտադրյալը զուգամետ է և տեղի ունի (4.6) հավասարությունը:*

► Ենթադրենք, թե այդ շարքերից առաջինն է բացարձակ զուգամետ՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = A^* < \infty: \tag{4.8}$$

Նշանակենք՝

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,,\; B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\,,\; C_n = \sum_{k=0}^{n} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0)\,,$$

$$\beta_n = B_n - B\,,\; M = \max_{n \ge 0} |\beta_n|:$$

Ցույց տանք, որ $C_n \to AB$: Ունենք՝

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots +$$
$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 =$$
$$= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B + \beta_0) =$$
$$= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \;:$$

Այժմ նշանակենք $\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0$ և ցույց տանք, որ $\gamma_n \to 0$:

Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$: Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, (4.8)-ից հետևում է, որ գոյություն ունի $m_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|a_{m_0+1}\right|+\cdots+\left|a_n\right|<\varepsilon \text{, երբ } n>m_0 :$$

Այնուհետև, $\beta_n \to 0$ պայմանից հետևում է, որ

$$\left|\beta_k\right|<\varepsilon \text{, երբ } k>k_0 :$$

Վերցնելով $n>m_0+k_0$ և հաշվի առնելով, որ $\left|\beta_k\right|\le M$ ՝ կունենանք

$$\left|\gamma_n\right|\le\left|a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_{m_0}\beta_{n-m_0}\right|+$$
$$+\left|a_{m_0+1}\beta_{n-m_0-1}+\cdots+a_n\beta_0\right|<\varepsilon A^*+M\varepsilon$$

գնահատականը: ■

**Կոշիի օրինակը:** Ցույց տանք, որ *Մերտենսի թեորեմում շարքերից մեկի բացարձակ զուգամիտության պայմանն էական է.* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ պայմանական զուգամետ շարքը ինքն իր հետ բազմապատկելով ըստ Կոշիի՝ կստանանք տարամետ շարք:

Իրոք, այս դեպքում արտադրյալ շարքի ընդհանուր անդամն է՝

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} :$$

Քանի որ $(k+1)(n-k+1)\le(n+1)^2$, ապա

$$\left|c_n\right|\ge\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2}}=1 :$$

Հետևաբար, $c_n$-ը չի ձգտում զրոյի, ուստի արտադրյալ շարքը տարամետ է:

## §5. ԹԵՅԼՈՐԻ ՇԱՐՔ

**<u>1. Աստիճանային շարքեր:</u>** *Աստիճանային շարք* են անվանում

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{5.1}$$

տեսքն ունեցող շարքերին, որտեղ $a_n$-ը կամայական թվային հաջորդականություն է: Նշանակենք՝

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\ ,\ R = \frac{1}{\alpha}\ :^{*} \tag{5.2}$$

**Թեորեմ 5.1:**

*ա) Եթե $|x| < R$ , ապա (5.1) շարքը բացարձակ զուգամետ է,*

*բ) եթե $|x| > R$ , ապա (5.1) շարքը տարամետ է:*

► Ապացույցն անմիջապես բխում է Կոշիի հայտանիշից: Իրոք, նշանակենք՝ $c_n = a_n x^n$ : Այդ դեպքում ունենք, որ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = |x|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|x|}{R}$$

ու մնում է կիրառել Կոշիի հայտանիշը: ■

$R$ թիվը կոչվում է (5.1) շարքի *զուգամիտության շառավիղ*, իսկ

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

բանաձևը կոչվում է *Կոշի – Հադամարի բանաձև:*

**Օրինակներ:**

ա) $\sum n^n x^n$ շարքը զուգամիտում է միայն $x = 0$ կետում $(R = 0)$ :

բ) $\sum \frac{x^n}{n!}$ շարքի համար՝ $R = \infty$ (այստեղ հարմար է օգտվել Դալամբերի հայտանիշից):

գ) $\sum x^n$ շարքի համար՝ $R = 1$; (-1,1) զուգամիտության միջակայքի $x = 1$ և $x = -1$ ծայրակետերում շարքը տարամետ է:

դ) $\sum \frac{x^n}{n}$ շարքի դեպքում՝ $R = 1$: $x = -1$ կետում շարքը պայմանական զուգամետ է, իսկ $x = 1$ կետում՝ տարամետ:

ե) $\sum \frac{x^n}{n^2}$, $R = 1$: Զուգամիտության միջակայքի $x = 1$ և $x = -1$ ծայրակետերում շարքը բացարձակ զուգամետ է:

---

[*] Պայմանավորվում ենք , որ $\alpha = 0$ դեպքում՝ $R = \infty$ , իսկ եթե $\alpha = \infty$ , ապա $R = 0$ :

Վերջում նշենք, որ $\sum a_n(x-x_0)^n$ տեսքի շարքերը նույնպես կոչվում են աստիճանային շարքեր, որոնց ուսումնասիրությունը $t=x-x_0$ նշանակման միջոցով բերվում է նախորդ դեպքին: Այս դեպքում շարքը կզուգամիտի $\left|x-x_0\right|<R$ միջակայքում (կարող են ավելանալ նաև միջակայքի ծայրակետերը): $a_n$ թվերը կոչվում են այդ աստիճանային շարքի գործակիցներ:

<u>**2. Թեյլորի շարք:**</u> Դիցուք $f$ ֆունկցիան $x_0$ կետի մի ինչ - որ շրջակայքում անվերջ դիֆերենցելի է (ունի բոլոր կարգի ածանցյալները): Այդ դեպքում

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

աստիճանային շարքը կոչվում է $f$ *ֆունկցիայի Թեյլորի շարք (*$x_0$ *կետի շրջակայքում),* ընդ որում, նրա

$$a_0=f(x_0),\ \ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ \ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \dots,\ \ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \dots$$

գործակիցները կոչվում են *Թեյլորի գործակիցներ*:

**Թեորեմ 5.2:** *Որպեսզի որևէ* $x$ *կետում* $f$ *ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը զուգամիտի* $f(x)$ *-ին՝*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (5.3')$$

*անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ* $x$ *կետում Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամը ձգտի զրոյի՝*

$$r_n(x)\to 0\quad (n\to\infty):$$

Այս պնդումն անմիջապես բխում է շարքի գումարի սահմանումից և Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամի սահմանումից՝

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=r_n(x),\ \ n=1,2,\dots:$$

Այսպիսով, Թեյլորի շարքի ուսումնասիրությունը հանգում է Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամի ուսումնասիրությանը:

Հաճախ $x_0$ կետի դերում հանդես է գալիս $x_0 = 0$ կետը: Այս դեպքում (5.3') վերլուծությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n , \tag{5.3}$$

իսկ մնացորդային անդամը՝

ա) Լագրանժի տեսքով.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 ,$$

բ) Կոշիի տեսքով.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 :$$

**a) Ցուցչային և հիմնական եռանկյունաչափական ֆունկցիաների վերլուծությունները:**

Նախ ապացուցենք հետևյալ ընդհանուր բնույթի թեորեմը.

**Թեորեմ 5.3:** *Դիցուք $f$ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է $[-h,h]$ հատվածում և*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le L , \quad x \in [-h,h], \quad n = 1,2,... :$$

*Այդ դեպքում $[-h,h]$ հատվածում (այսինքն՝ այդ հատվածի բոլոր կետերում) տեղի ունի (5.3) վերլուծությունը:*

► Ելնելով մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքից՝

$$\left| r_n(x) \right| \le L \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 , \text{ երբ } n \to \infty :$$

Մնում է օգտվել նախորդ թեորեմից: ■

$f(x) = e^x$, $\sin x$, $\cos x$ ֆունկցիաների համար թեորեմ 5.3-ը կարելի է կիրառել կամայական $[-h,h]$ հատվածում, որովհետև

$$f^{(n)}(x) = e^x , \ \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

ածանցյալների մոդուլները սահմանափակ են վերևից, համապատասխանաբար, $e^h, 1, 1$ թվերով: Արդյունքում կստանանք (տե'ս գլուխ 4, §6, կետ 5)`

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots :$$

Քանի որ այս վերլուծությունները տեղի ունեն կամայական $[-h, h]$ հատվածում, ապա նրանք ճիշտ են ամբողջ թվային առանցքի վրա:

**b)** $y = arctgx$ **ֆունկցիայի վերլուծությունը:**

Այս դեպքում ունենք`

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right):$$

Այստեղ նախորդ թեորեմը կիրառելի չէ: Այս ֆունկցիայի Թեյլորի շարքն է

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots ,$$

որը զուգամիտում է միայն [-1,1] միջակայքում (տե'ս §3, կետ 3): Հետևաբար, $r_n(x)$ -ը պետք է ուսումնասիրել միայն այդ միջակայքում:

Մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքից կստանանք`

$$|r_n(x)| \le \frac{1}{n+1}|x|^{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0 , \ x \in [-1,1] :$$

Հետևաբար, թեորեմ 5.2-ի համաձայն, այդ միջակայքում $arctgx$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը զուգամիտում է իրեն`

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots , \ \ x \in [-1,1] :$$

Այստեղ վերցնելով $x = 1$ ` կստանանք Լայբնիցի նշանավոր շարքը.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\cdots:$$

**c) Լոգարիթմական շարք:**

$f(x)=\ln(1+x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքն է`

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

որը զուգամիտում է միայն (-1,1] միջակայքում (§3, կետ 3): Հետևաբար, $r_n(x)$ -ը պետք է ուսումնասիրել միայն այդ միջակայքում:Նախ այն դիտարկենք Լագրանժի տեսքով: Քանի որ

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

ապա

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}:$$

Եթե $0\le x\le 1$, ապա

$$\left|r_n(x)\right|\le\frac{1}{n+1}\to 0\text{, երբ } n\to\infty: \tag{5.4}$$

Սակայն, երբ $x<0$, $r_n(x)$ -ի Լագրանժի տեսքը մեզ ոչինչ չի տալիս: Այս դեպքում դիտարկենք Կոշիի տեսքը`

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\cdot x^{n+1},$$

որտեղից կստանանք

$$\left|r_n(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

գնահատականը: Քանի որ $x>-1$ պայմանից հետևում է, որ $1+\theta x>1-\theta$, ապա վերջին արտադրիչը փոքր է մեկից: Հետևաբար, $-1<x<0$ դեպքում կունենանք`

$$\left|r_n(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\to 0\text{, երբ } n\to\infty\ : \tag{5.5}$$

Թեորեմ 5.2-ի համաձայն, (5.4)-ից և (5.5)-ից հետևում է, որ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \ , \quad x \in (-1,1]:$$

Այստեղ վերցնելով $x = 1$` կստանանք

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

հավասարությունը:

**d) Բինոմական շարք:**

Դիտարկենք $f(x) = (1+x)^m$ ֆունկցիան, որտեղ $m$-ը բնական թիվ չէ (երբ $m$-ը բնական թիվ է, ստացվում է Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը): Այդ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքն է`

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots :$$

Կիրառելով Դալամբերի հայտանիշը` կհամոզվենք, որ այդ շարքը (որը կոչվում է *բինոմական շարք*) բացարձակ զուգամետ է, երբ $|x| < 1$, իսկ երբ $|x| > 1$, այն տարամետ է: Այս նկատառումով $r_n(x)$ մնացորդային անդամը նախ ուսումնասիրենք (-1,1) միջակայքում: Այն կվերցնենք Կոշիի տեսքով: Քանի որ

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

ապա

$$r_n(x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} :$$

Վերջինս ներկայացնենք հետևյալ տեսքով`

$$r_n(x) = \left[\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-1-n+1)}{n!}x^n\right] mx(1+\theta x)^{m-1} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n :$$

Միջակ փակագծերի մեջ գրված արտահայտությունը ձգտում է 0-ի, երբ $n \to \infty$, որպես զուգամետ բինոմական շարքի ընդհանուր անդամ ($m$-ը փոխարինված է ($m-1$)-ով): Վերջին արտադրիչը մոդուլով փոքր է մեկից (ապացուցվում է այնպես, ինչպես **c)** դեպքում): Վերջապես, $mx(1+\theta x)^{m-1}$

արտադրիչի մոդուլն ընկած է $|mx|(1-|x|)^{m-1}$ և $|mx|(1+|x|)^{m-1}$ սահմանների միջև:

Այսպիսով, $r_n(x) \to 0$, երբ $x \in (-1,1)$: Հետևաբար, թեորեմ 5.2-ի համաձայն, $|x| < 1$ դեպքում ստանում ենք՝

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots : \quad (5.6)$$

Վերջում նշենք (ապացույցը՝ գլխի վերջում), որ $x=1$ կետում (5.6) հավասարությունը տեղի ունի $m > -1$ արժեքների դեպքում, իսկ $x=-1$ կետում՝ $m > 0$ արժեքների դեպքում:

Բինոմական վերլուծության մեջ վերցնելով $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$՝ կստանանք

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \ , \ |x| < 1 ,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \ , \ |x| \le 1 ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots , \ -1 < x \le 1$$

վերլուծությունները:

**e) Կոշիի օրինակը:**

Դիտարկենք

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, x \ne 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան: Նախ ապացուցենք, որ *այն անվերջ դիֆերենցելի է ամբողջ թվային առանցքի վրա և*

$$f^{(n)}(0) = 0, \ \ n = 1,2,\ldots : \quad (5.7)$$

Ապացույցի ընթացքում օգտվելու ենք հետևյալ հայտնի սահմանից (IV գլուխ, §5, կետ 2).

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{z^n}{e^z}=0\,,\quad n=1,2,...: \tag{5.8}$$

Եթե $x\neq 0$ , ապա $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$ , $f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-1/x^2}$ , ... :

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կհամոզվենք, որ

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\,,\ n=1,2,...,$$

որտեղ $P_n$-ը $3n$ աստիճանի բազմանդամ է:

Այժմ ապացուցենք (5.7)-ը: Նախ՝

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}=\lim_{|t|\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0\,,$$

որտեղ վերջին հավասարությունը բխում է (5.8) սահմանից: Այնուհետև, կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, կստանանք

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x^2}}=0\,,$$

որտեղ վերջին հավասարությունը նորից բխում է (5.8) սահմանից: Այսպիսով, առաջադրված պնդումն ապացուցված է: Այստեղից բխում է, որ $f$ ֆունկցիայի Թեյլորի գործակիցները 0 կետում 0 են, հետևաբար, նրա *Թեյլորի շարքը ամենուրեք զուգամիտում է (զրոյի), բայց ոչ՝ $f(x)$ ֆունկցիային (երբ $x\neq 0$ ):*

Այս օրինակը ցույց է տալիս մնացորդային անդամի հետազոտության անհրաժեշտությունը:

**3. <u>Ստիրլինգի բանաձևը:</u>** Ապացուցենք

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\,,\quad 0<\theta<1\,, \tag{5.9}$$

բանաձևը, որտեղ $\theta$ -ն կախված է միայն $n$ -ից:

Քանի որ ապացույցը բավականին երկար է, հարմար է այն տրոհել մի քանի քայլերի:

***I քայլ.*** Ապացուցենք

$$1<\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \tag{5.10}$$

անհավասարությունը, ինչը նույնն է, թե՝

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}: \tag{5.10'}$$

Ապացուցելու համար օգտվենք լոգարիթմական ֆունկցիայի Թեյլորի շարքից՝

$$\begin{cases}\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots\\[2mm] \ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots\end{cases}\Rightarrow\ \ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+2\frac{x^3}{3}+\cdots\ ,$$

հետևաբար,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right):$$

Այս բանաձևի մեջ տեղադրելով $x=\dfrac{1}{2n+1}$, $2x=\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1+x}{1-x}=1+\dfrac{1}{n}$՝ կստանանք

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4+\cdots\ :$$

հավասարությունը: Հետևաբար՝

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4+\cdots\right]:$$

Հաշվելով միջակ փակագծերի մեջ գրված անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը՝ կստանանք (5.10$'$)-ը:

***II քայլ.*** Ցույց տանք, որ գոյություն ունի $a$ հաստատուն, այնպիսին, որ

$$n! = an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1 : \tag{5.11}$$

Նշանակենք՝

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}} : \tag{5.12}$$

Այդ դեպքում

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+3/2}}{n^{n+1/2}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2} :$$

Օգտվելով (5.10) անհավասարությունից՝ կստանանք

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{1/12(n+1)}}$$

գնահատականները: Այստեղից կստանանք երկու անհավասարություն՝

$$\text{ա) } a_{n+1} < a_n, \qquad \text{բ) } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}} :$$

Առաջին անհավասարությունը ցույց է տալիս, որ $a_n$ դրական թվերի հաջորդականությունը նվազող է: Մոնոտոն հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, այն զուգամետ է՝

$$a_n \downarrow a : \tag{5.13}$$

Երկրորդ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} \uparrow a : \tag{5.14}$$

Հաշվի առնելով (5.13)-ը և (5.14)-ը՝ կստանանք

$$a < a_n < ae^{\frac{1}{12n}}$$

կրկնակի անհավասարությունը: Քանի որ $\varphi(x) = ae^{\frac{x}{12n}}$ ֆունկցիան (ֆիքսած $n$-ի դեպքում) [0,1] հատվածում անընդհատ է և խիստ աճող, իսկ

$a_n$-ը ընկած է հատվածի ծայրակետերում ֆունկցիայի ընդունած արժեք-ների միջև, ապա գոյություն ունի միջանկյալ $\theta$ կետ ($0<\theta<1$), այնպիսին, որ $a_n = ae^{\theta/12n}$: Տեղադրելով $a_n$-ի ստացված արժեքը (5.12)-ի մեջ՝ կստա-նանք (5.11)-ը:

***III քայլ.*** Վալիսի բանաձևի համաձայն՝

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}:$$

Հաշվի առնելով ֆակտորիալի (5.11) ներկայացումը՝ կստանանք

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}a^2 n^{2n+1}e^{-2n}}{a(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}}\cdot\frac{1}{n^{1/2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

հավասարությունը, որտեղից էլ, տեղադրելով $a=\sqrt{2\pi}$ արժեքը (5.11)-ի մեջ, կստանանք Ստիռլինգի (5.9) բանաձևը:

## § 6. ԱՆՎԵՐՋ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐ

<u>1. Հիմնական գաղափարները:</u> Դիցուք $p_n$-ը կամայական թվային հաջորդականություն է: Դիտարկենք

$$p_1\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_n\cdot\dots$$

սիմվոլը: Այն կոչվում է *անվերջ արտադրյալ* և հաճախ գրվում է արտադրյալի նշանի միջոցով՝

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n : \qquad (6.1)$$

$p_n$-ը կոչվում է այդ արտադրյալի *$n$-րդ անդամ կամ ընդհանուր անդամ*:

$$P_n = p_1\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_n \quad (n=1,2,...)$$

հաջորդականությունը կոչվում է (6.1) *անվերջ արտադրյալի մասնակի արտադրյալների հաջորդականություն*:

Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad (6.2)$$

սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ), ապա այն կոչվում է (6.1) *անվերջ արտադրյալի արժեք* և գրվում է՝

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n \cdot \cdots \equiv \prod_{n=1}^{\infty} p_n :$$

Եթե $P$-ն վերջավոր է և *զրոյից տարբեր*, ապա (6.1) անվերջ արտադրյալը կոչվում է *զուգամետ*, հակառակ դեպքում (երբ (6.2) սահմանը գոյություն չունի, անվերջ է, կամ՝ հավասար է զրոյի) (6.1) անվերջ արտադրյալը կոչվում է *տարամետ*։

**Օրինակներ:**

1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$ :

Իրոք,

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2} :$$

2) Վալիսի բանաձևը (գլուխ 5, § 8, կետ 3) կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot \cdots \cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot \cdots =\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{4k^2-1}\right):$$

Վալիսի բանաձևից ստացվում են նաև հետևյալ բանաձևերը՝

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right]=\frac{\pi}{4}, \qquad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=\frac{2}{\pi} :$$

**2. Պարզագույն թեորեմներ: Կապը շարքերի հետ:**

(6.1) անվերջ արտադրյալից դեն նետելով առաջին $m$ հատ անդամները՝ կստանանք *մնացորդ արտադրյալը (կամ պոչը)*.

$$p_{m+1}\cdot p_{m+2}\cdot \cdots \cdot p_{m+k}\cdot \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n : \tag{6.3}$$

**Հատկություն 1:** *Եթե (6.1) արտադրյալը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև (6.3) արտադրյալը (կամայական $m$-ի դեպքում): Հակառակը՝ եթե որևէ $m$-ի դեպքում զուգամետ է (6.3) արտադրյալը, ապա զուգամետ է նաև* *նախնական (6.1) արտադրյալը*[*]*: Ընդ որում, եթե նշանակենք՝* $\pi_m = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \dots \cdot p_{m+k} \cdot \dots$, *ապա տեղի ունի*

$$P = P_m \cdot \pi_m \tag{6.4}$$

*հավասարությունը:*

Այս պնդումն անմիջապես բխում է սահմանումից:

**Հատկություն 2:** *Եթե (6.1) արտադրյալը զուգամետ է, ապա* $\pi_m \to 1$ *:*

Այս հատկությունը բխում է (6.4) հավասարությունից:

**Հատկություն 3:** *Եթե (6.1) արտադրյալը զուգամետ է, ապա* $p_n \to 1$ *:*

► Իրոք,

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1 : \ \blacksquare$$

Այս հատկությունից հետևում է, որ զուգամետ արտադրյալի անդամները, սկսած որոշ համարից, դրական են: Այդ պատճառով, առաջին հատկության շնորհիվ, ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե առաջիկայում ենթադրենք, որ $p_n > 0$, $n = 1,2,\dots$:

**Հատկություն 4:** *Որպեսզի (6.1) արտադրյալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զուգամետ լինի*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n =: L \tag{6.5}$$

*շարքը, ընդ որում,* $P = e^L$ *:*

► Նշանակելով $L_n$ -ով (6.5) շարքի մասնակի գումարը՝ կունենանք

$$\text{ա) } L_n = \ln P_n \quad \text{և} \quad \text{բ) } P_n = e^{L_n}$$

հավասարությունները: Այժմ անհրաժեշտությունը բխում է ա) հավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ բ)-ից: ■

**Դիտողություն:** Եթե $L = -\infty$, ապա $P = 0$ (ճիշտ է նաև հակադարձը):

Հաճախ հարմար է անվերջ արտադրյալի ընդհանուր անդամը ներկայացնել

$$p_n = 1 + a_n$$

---

[*]Ենթադրվում է, որ $p_n \neq 0$, $n = 1,2,\dots$ :

տեսքով: Այդ դեպքում անվերջ արտադրյալը կներկայացվի

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+a_n\right) \tag{6.1'}$$

տեսքով, իսկ (6.5) շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+a_n\right): \tag{6.5'}$$

**Հատկություն 5:** *Դիցուք* $a_n > 0$, *երբ* $n > n_0$*: Որպեսզի (6.1') արտադրյալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զուգամիտի*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{6.6}$$

*շարքը:*

► Քանի որ (6.1') արտադրյալի (կամ (6.5') շարքի) զուգամիտության համար անհրաժեշտ է, որ $a_n \to 0$, ապա կենթադրենք, որ այդ պայմանը բավարարված է: Այդ դեպքում՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1:$$

Դրական շարքերի բաղդատման երկրորդ հայտանիշի համաձայն, (6.5') և (6.6) շարքերը զուգամիտում են միաժամանակ: Մնում է օգտվել 4-րդ հատկությունից: ■

Այս հատկությունը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ $a_n < 0$ $(n > n_0)$: Հետաքրքիր է նշել, որ այս դեպքում $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքի տարամիտությունից բխում է, որ $\sum\ln(1+a_n)=-\infty$, ինչից իր հերթին (4-րդ հատկության ապացուցման դիտողության շնորհիվ) բխում է, որ

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0:$$

**Օրինակներ:**

ա) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ արտադրյալը զուգամետ է, երբ $x>1$, և տարամետ է, երբ $x\le 1$:

բ) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right)=0$, երբ $0\le x\le 1$, իսկ երբ $x>1$, այդ արտադրյալը զուգամետ է (արժեքը մեծ է զրոյից):

<u>**3. Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն:**</u>

**Սահմանում:** *(6.1') արտադրյալը կոչվում է բացարձակ (պայմանական) զուգամետ, եթե բացարձակ (պայմանական) զուգամետ է (6.5') շարքը:*

**Թեորեմ 6.1:** *Որպեսզի (6.1') արտադրյալը լինի բացարձակ զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ բացարձակ զուգամետ լինի (6.6) շարքը:*

►Իրոք, քանի որ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}=1,$$

ապա (6.5') և (6.6) շարքերը բացարձակ զուգամետ են միաժամանակ, իսկ (6.5') շարքի բացարձակ զուգամիտությունը, ըստ սահմանման, (6.1') արտադրյալի բացարձակ զուգամիտությունն է: ■

Այժմ անդրադառնանք (6.1) արտադրյալի պայմանական զուգամիտությանը:

**Թեորեմ 6.2:** *Դիցուք (6.6) շարքը պայմանական զուգամետ է: Այդ դեպքում (6.1') արտադրյալը և $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ շարքը ունեն միևնույն վարքը (զուգամիտում են միաժամանակ):*

► Գրենք $\ln(1+x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը $n=2$ դեպքում՝ վերցնելով մնացորդային անդամը Պեանոյի տեսքով:

$$\ln(1+a_n)=a_n-\frac{1}{2}a_n^2+o(a_n^2),\ \text{երբ}\ n\to\infty: \tag{6.7}$$

Ոստի

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2}:$$

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշի համաձայն ($a_n-\ln(1+a_n)>0$), հաշվի առնելով (6.6) շարքի զուգամիտությունը, այստեղից կստանանք, որ

$$\sum a_n^2 \quad \text{և} \quad \sum \ln(1+a_n)$$

շարքերը զուգամիտում են միաժամանակ: ■

**Դիտողություն:** Երբ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը պայմանական զուգամետ է, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը՝ տարամետ, ապա

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0:$$

Իրոք, (6.7)-ի շնորհիվ՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)=-\infty$, և մնում է օգտվել 4-րդ հատկության դիտողությունից:

**Օրինակներ:**

1) Դիտարկենք $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right]$ անվերջ արտադրյալը: Երբ $x>1$, այն բացարձակ զուգամետ է: Եթե $\frac{1}{2}<x\le 1$, ապա արտադրյալը պայմանական զուգամետ է, իսկ երբ $0<x\le\frac{1}{2}$, արտադրյալը տարամիտում է զրոյի (արժեքը 0 է):

2) Այժմ բերենք մի *օրինակ, երբ (6.1$'$) արտադրյալը զուգամետ է, բայց (6.6) շարքը տարամետ է:*

Դիցուք՝ $\ln(1+a_n)=(-1)^n/\sqrt{n}$: Այդ դեպքում (6.5$'$) շարքը (հետևաբար, նաև (6.1$'$) արտադրյալը) կզուգամիտի: Իսկ (6.6) շարքը կտարամիտի, որովհետև, $e^x$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի մեջ վերցնելով $n=3$ (իսկ մնացորդային անդամը՝ Պեանոյի տեսքով), կստանանք՝

$$a_n=e^{(-1)^n/\sqrt{n}}-1=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2!\,n}+\frac{1}{3!}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3+o\left(\frac{1}{\left(\sqrt{n}\right)^3}\right),$$

այսինքն՝

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \alpha_n,$$

որտեղ

$$|\alpha_n| < \frac{1}{n^{3/2}}, \text{ երբ } n > n_0:$$

<u>**4. Էյլերի բանաձևը պարզ թվերի համար:**</u>

**Թեորեմ 6.3:** *Դիցուք պարզ թվերը համարակալված են աճման կարգով՝ $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots$: Եթե $x > 1$, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}:$$

► Յուրաքանչյուր $n$ բնական թիվ միակ ձևով վերլուծվում է պարզ արտադրիչների՝

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \cdots p_{i_m}^{\alpha_m}, \ \ i_1 < i_2 < \cdots < i_m: \qquad (6.8)$$

Երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևի համաձայն՝

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = 1 + \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{\left(p_k^2\right)^x} + \cdots + \frac{1}{\left(p_k^m\right)^x} + \cdots \ : \qquad (6.9)$$

Բազմապատկելով $N$ բնական թիվը չգերազանցող բոլոր պարզ թվերին համապատասխանող (6.9) տեսքի շարքերը՝ կստանանք

$$P_x^{(N)} := \prod_{p_k \le N} \frac{1}{1 - 1/p_k^x} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^x} \qquad (6.10)$$

հավասարությունը, որտեղ $\sum{}' \frac{1}{n^x}$ սիմվոլը այն $\frac{1}{n^x}$ տեսքի գումարելիների գումարն է, որոնց համար $n$-ի (6.8) տեսքի վերլուծության մեջ մասնակցում են միայն $p_k \le N$ թվերը: Այստեղից ստանում ենք՝

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^x} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}:$$

Քանի որ $\sum \dfrac{1}{n^x} < \infty$, ուստի $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x} \to 0$, երբ $N \to \infty$ : Հետևաբար,

$$P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \to 0, \text{ երբ } \ N \to \infty :$$

Էյլերի բանաձևն ապացուցված է: ■

**Լրացում:** $x = 1$ դեպքում (6.10) ներկայացումը մնում է ուժի մեջ, ուստի

$$P_1^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = H_N :$$

Քանի որ $H_N \to \infty$, երբ $N \to \infty$, ուստի $P_1^{(N)} \to \infty$ : Այսինքն՝

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k}} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)\cdots} = \infty$$

կամ, որ նույնն է՝ $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - 1/p_k\right) = 0$ :

Այսպիսով, *պարզ թվերի հակադարձներից կազմված շարքը տարամետ է՝*

$$\sum 1/p_k = \infty :$$

## § 7. ԿՈՒՄԵՐԻ, ԲԵՐՏՐԱՆԻ ԵՎ ԳԱՈՒՍԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

**1. Կումերի հայտանիշը:** Դիցուք՝ $a_n > 0$ : Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{7.1}$$

դրական շարքը և կամայական $b_n > 0$ հաջորդականության համար նշանակենք

$$K_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} :$$

**Թեորեմ 7.1:** [*] *(7.1) շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $b_n > 0$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ տեղի ունենա $\varliminf_{n\to\infty} K_n > 0$ պայմանը:*

*(7.1) շարքը տարամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $b_n > 0$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ տեղի ունենան*

$$\sum 1/b_n = \infty \;\text{ և }\; K_n \le 0 \tag{7.2}$$

*պայմանները:*

► Դիցուք՝ $0 < r < \varliminf_{n\to\infty} K_n$: Այդ դեպքում գոյություն ունի $n_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ $K_n > r$, երբ $n > n_0$: Հետևաբար,

$$b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1} > r a_{n+1} > 0, \text{ երբ } n > n_0: \tag{7.3}$$

Այսպիսով, $a_n b_n$ հաջորդականությունը նվազող է և դրական, ուստի

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1}) < \infty:$$

Բացի դրանից, (7.3)-ից հետևում է, որ $a_{n+1} < \dfrac{1}{r}(a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1})$, երբ $n > n_0$, ուստի, բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, $\sum a_n < \infty$:

Մյուս կողմից, եթե (7.1) շարքը զուգամետ է, նշանակենք՝ $b_n = \dfrac{\gamma_n}{a_n}$, որտեղ $\gamma_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$: Այդ դեպքում

$$K_n = \frac{\gamma_n}{a_{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 \to 1 > 0:$$

Այժմ քննարկենք տարամիտության դեպքը: Դիցուք բավարարվում են (7.2) պայմանները: Քանի որ $b_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \le 0$ պայմանը համարժեք է

$$\frac{1/b_{n+1}}{1/b_n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

[*] J.Tong, Amer. Math. Monthly, May, 1994, 450-452.

անհավասարությանը և $\sum 1/b_n = \infty$, ապա, բաղդատման երրորդ հայտանիշի համաձայն, $\sum a_n = \infty$ :

Մյուս կողմից, եթե $\sum a_n = \infty$, նշանակենք՝ $b_n = \dfrac{A_n}{a_n}$, որտեղ $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ : Այդ դեպքում Աբել-Դինիի առաջին թեորեմի համաձայն՝

$$\sum 1/b_n = \infty$$

և

$$K_n = \frac{A_n}{a_{n+1}} - \frac{A_{n+1}}{a_{n+1}} = -\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 \le 0 : \blacksquare$$

<u>**2. Բերտրանի հայտանիշը:**</u> Նշանակենք՝ $B_n = \ln n \left[ n\left( \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$ :

**Թեորեմ 7.2:** *ա) Եթե* $\varliminf_{n\to\infty} B_n > 1$*, ապա* $\sum a_n < \infty$ *:*

*բ) Եթե* $\varlimsup_{n\to\infty} B_n < 1$*, ապա* $\sum a_n = \infty$ *:*

► Նշանակենք՝ $b_n = n \ln n$ : Այդ դեպքում

$$K_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln n + (n+1)\ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= \ln n \left[ n\left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - (n+1)\ln\frac{n+1}{n} = B_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ուստի

$$\varlimsup_{n\to\infty} K_n = \varlimsup_{n\to\infty} B_n - 1 ; \ \varliminf_{n\to\infty} K_n = \varliminf_{n\to\infty} B_n - 1 :$$

Մնում է կիրառել Կումերի հայտանիշը: ■

<u>3.Գաուսի հայտանիշը:</u>

**Թեորեմ** 7.3: *Դիցուք* $a_n / a_{n+1}$ *հարաբերությունն ի վերջո ներկայացվում է*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^p},$$

*տեսքով, որտեղ* $\lambda, \mu \in R$, $p > 1$, *իսկ* $\theta_n$*-ը սահմանափակ հաջորդականություն է՝* $|\theta_n| \le M$ *: Այդ դեպքում*

*ա) եթե* $\lambda > 1$*, ապա* $\sum a_n$ *շարքը զուգամետ է,*

*եթե* $\lambda < 1$*, ապա* $\sum a_n = \infty$*,*

*բ) եթե* $\lambda = 1$ *և* $\mu > 1$*, ապա* $\sum a_n$ *շարքը զուգամետ է, իսկ եթե* $\lambda = 1$ *և* $\mu \le 1$*, ապա* $\sum a_n = \infty$ *:*

► ա)-ն անմիջապես բխում է Դալամբերի հայտանիշից:

բ) Դիցուք՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^p}:$$

Առանձնացնենք երկու դեպք՝ 1) $\mu \ne 1$ և 2) $\mu = 1$ :

1) $\mu \ne 1$ դեպքում կիրառենք Ռաբեի հայտանիշը. քանի որ

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n^{p-1}} \to \mu,$$

ապա $\mu > 1$ դեպքում՝ $\sum a_n < \infty$, իսկ $\mu < 1$ դեպքում՝ $\sum a_n = \infty$ :

2) $\mu = 1$ դեպքում կիրառենք Բերտրանի հայտանիշը. քանի որ

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^p},$$

$$B_n = \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \frac{\ln n}{n^{p-1}} \cdot \theta_n \to 0 < 1,$$

ապա $\sum a_n$ շարքը տարամետ է: ■

Որպես Գաուսի հայտանիշի կիրառություն՝ հետազոտենք *հիպերերկրաչափական (Գաուսի) շարքը.*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x):=$$

$$:=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n : \qquad (7.4)$$

Այդ շարքի ընդհանուր անդամը նշանակելով $a_n$-ով՝ կունենանք

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x=\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}x$$

ներկայացումը, հետևաբար,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x| :$$

Այժմ, ըստ Դալամբերի հայտանիշի, (7.4) շարքը $|x|<1$ դեպքում բացարձակ զուգամետ է, իսկ $|x|>1$ դեպքում՝ տարամետ:

Հիպերերկրաչափական շարքն աստիճանային շարք է, որի զուգամիտության շառավիղը հավասար է 1: Հետազոտենք շարքի զուգամիտությունը $x=1$ և $x=-1$ կետերում:

Ունենք՝

$$\frac{1}{1+\alpha/n}=1-\frac{\alpha/n}{1+\alpha/n}=1-\frac{\alpha}{n}\cdot\frac{1}{1+\alpha/n}=$$

$$=1-\frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha/n}{1+\alpha/n}\right)=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha/n}\cdot\frac{1}{n^2},$$

$$\frac{1}{1+\beta/n}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\beta/n}\cdot\frac{1}{n^2} :$$

Հետևաբար, $x=1$ կետում կունենանք՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+1/n)(1+\gamma/n)}{(1+\alpha/n)(1+\beta/n)}=\left(1+\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha/n}\cdot\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\beta/n}\cdot\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=1+\frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^2};\qquad |\theta_n|\le M:$$

Ըստ Գաուսի հայտանիշի, $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ շարքը $\gamma-\alpha-\beta>0$ դեպքում բացարձակ զուգամետ է, իսկ $\gamma-\alpha-\beta\le 0$ դեպքում՝ տարամետ (քանի որ $a_n/a_{n+1}\to 1$, ապա շարքի անդամները, սկսած որոշ համարից, ունեն նույն նշանը):

Հետազոտենք $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ -ը: Ունենք՝

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{(1+1/n)(1+\gamma/n)}{(1+\alpha/n)(1+\beta/n)}=1+\frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\ ,\ |\theta_n|\le M\,,$$

ուստի $\gamma-\alpha-\beta>0$ դեպքում (7.4) շարքը ($x=-1$ կետում) բացարձակ զուգամետ է:

$\gamma-\alpha-\beta<-1$ դեպքում՝ $\dfrac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}<0$, ուստի գոյություն ունի $n_0\in N$ թիվ, այնպիսին, որ $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}<1$, երբ $n>n_0$: Սա նշանակում է, որ $|a_n|$ հաջորդականությունն ի վերջո խիստ աճող է, հետևաբար՝ $a_n\not\to 0$, այսինքն՝ $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ -ը տարամետ է:

Մնում է հետազոտել $-1\le\gamma-\alpha-\beta\le 0$ դեպքը: Ունենք՝

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1-\frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2};\ |\lambda_n|\le L:$$

Երբ $\gamma-\alpha-\beta>-1$, ի վերջո տեղի կունենա $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$ անհավասարությունը, այսինքն՝ $|a_n|$ հաջորդականությունն ի վերջո կնվազի: Ցույց տանք, որ այն ձգտում է զրոյի: Իրոք, քանի որ

$$|a_k| = |a_1| \prod_{n=1}^{k-1} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |a_1| \prod_{n=1}^{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} - \frac{\lambda_n}{n^2} \right) \right],$$

ապա անվերջ արտադրյալների 5-րդ հատկության համաձայն՝ $|a_k| \to 0$: Հետևաբար, Լայբնիցի թեորեմի համաձայն, $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ նշանափոխ շարքը $-1 < \gamma - \alpha - \beta \le 0$ դեպքում զուգամետ է ( պայմանական):

Իսկ եթե $\gamma - \alpha - \beta = -1$, ապա

$$|a_k| = |a_1| \prod_{n=1}^{k-1} \left( 1 + \frac{\lambda_n}{n^2} \right) \not\to 0,$$

այսինքն՝ այս դեպքում (7.4) շարքը $-1$ կետում տարամետ է:

Վերջում հետազոտենք *բինոմական շարքը*՝

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad (7.5)$$

դիտարկելով այն որպես հիպերերկրաչափական շարք՝

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-m(-m+1)\cdots(-m+n-1)}{n!}(-x)^n : \quad (7.5')$$

Իսկապես, եթե (7.4) շարքի մեջ վերցնենք $\beta = \gamma$, $\alpha = -m$ և $x$-ը փոխարինենք ($-x$)-ով, կստանանք (7.5') շարքը: Այս դեպքում $\gamma - \alpha - \beta = m$, հետևաբար, (7.5') շարքը $x = -1$ ($-x = 1$) կետում զուգամետ է (բացարձակ), երբ $m > 0$, և տարամետ է, երբ $m < 0$: Իսկ $x = 1$ կետում (7.5') շարքը բացարձակ զուգամետ է, երբ $m > 0$, պայմանական զուգամետ է, երբ $-1 < m < 0$ և տարամետ է, երբ $m \le -1$:

## § 8. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ

1. Կոմպլեքս թվերի դաշտը: Իրական թվերի $(a,b)$ կարգավորված զույգը կոչվում է *կոմպլեքս թիվ:* Հետևաբար, $(a,b) = (c,d)$ կոմպլեքս թվերի հավասարությունը համարժեք է $a = c, b = d$ երկու հավասարություններին:

$z=(a,b)$ և $t=(c,d)$ կոմպլեքս թվերի գումարն ու արտադրյալը սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$z+t=(a+c,b+d);\ zt=(ac-bd,ad+bc):$$

Դժվար չէ ապացուցել, որ նշված գործողությունների նկատմամբ կոմպլեքս թվերի բազմությունը *դաշտ* է կազմում, այսինքն, բավարարվում են հետևյալ աքսիոմները՝

1. Կոմպլեքս թվերի բազմությունը գումարման գործողության նկատմամբ աբելյան խումբ է.
   $z+t=t+z,\quad z+(t+\zeta)=(z+t)+\zeta,\quad z+0=z,\quad z+(-z)=0$,
   զրոյական տարրի դերը կատարում է $(0,0)$-ն, իսկ $(a,b)$-ի հակադարձի դերը՝ $(-a,-b)$-ն:
2. Բազմապատկման գործողությունը տեղափոխական է, զուգորդական և գոյություն ունի միավոր՝ $(1,0)$:
3. $z(t+\zeta)=zt+z\zeta$ :
4. $(0,0)$-ից տարբեր յուրաքանչյուր տարր հակադարձելի է բազմապատկման գործողության նկատմամբ. $(a,b)$-ի հակադարձն է՝
   $$\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right):$$

Հեշտ է նկատել, որ $a\to(a,0)$ արտապատկերումը *իզոմորֆիզմ է*[*], որը գործում է իրական թվերի դաշտի և $(a,0)$ տեսքի կոմպլեքս թվերի ենթադաշտի միջև: Այսպիսով, կոմպլեքս թվերի դաշտը հանդիսանում է իրական թվերի դաշտի ընդլայնում: Այս փաստը մեզ թույլ է տալիս $a$ իրական թիվը նույնացնել $(a,0)$ կոմպլեքս թվի հետ:

Նշանակենք՝ $i=(0,1)$: Ակնհայտ է, որ $i^2=-1$: Հաշվի առնելով վերևում ձեռք բերած պայմանավորվածությունները՝ $z=(a,b)$ կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել նաև $z=a+bi$ տեսքով: Իրոք,

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)i=a+bi:$$

$a$ թիվը կոչվում է $z=a+bi$ *կոմպլեքս թվի իրական մաս* և նշանակվում է $\operatorname{Re} z$ սիմվոլով: $b$-ն կոչվում է $z=a+bi$ *կոմպլեքս թվի կեղծ մասի գործակից* և նշանակվում է՝ $\operatorname{Im} z$ :

[*] Իզոմորֆիզմ է կոչվում գործողությունները պահպանող փոխմիարժեք արտապատկերումը:

Երկրաչափորեն $(a,b)$ կոմպլեքս թիվը կպատկերենք որպես կոորդինատային հարթության կետ ($a$ աբսցիսով և $b$ օրդինատով), կամ որպես վեկտոր, որի սկզբնակետը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ ծայրակետը՝ $(a,b)$-ն (ապացուցել, որ վերջին դեպքում գումարման գործողության նկատմամբ առկա է իզոմորֆիզմ): Այդ վեկտորի երկարությունը կանվանենք $z$ *կոմպլեքս թվի մոդուլ* և կնշանակենք $|z|$ սիմվոլով, իսկ այդ վեկտորի, որպես շառավիղ վեկտորի, և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության կազմած $\varphi$ անկյունը կանվանենք $z$ *կոմպլեքս թվի արգումենտ* և կնշանակենք $\varphi = \arg z$ սիմվոլով ($z \neq 0$): Հետևաբար, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, իսկ $\arg z$-ը բազմարժեք ֆունկցիա է, որի արժեքները միմյանցից տարբերվում են $2\pi$-ի բազմապատիկներով:

$(-\pi, \pi]$ միջակայքին պատկանող արգումենտի արժեքը կոչվում է նրա *գլխավոր արժեք*:

Նման մեկնաբանությամբ հարթությունը կանվանենք *կոմպլեքս հարթություն*, իսկ կոմպլեքս թվերը՝ կետեր:

Այսպիսով, $z$ կետի դիրքը կոմպլեքս հարթության վրա որոշվում է ինչպես նրա $a,b$ դեկարտյան կոորդինատների միջոցով, այնպես և $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ բևեռային կոորդինատների միջոցով: Այդ կոորդինատները կապված են $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ բանաձևերով: Հաշվի առնելով այդ բանաձևերը, $z$ կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

տեսքով, որը կոչվում է կոմպլեքս թվի *եռանկյունաչափական ներկայացում*:

$a - bi$ կոմպլեքս թիվը կանվանենք $z = a + bi$ թվի *կոմպլեքս համալուծ* և կնշանակենք $\bar{z}$ սիմվոլով: Հեշտ է ստուգել հետևյալ հավասարությունները.

ա) $\overline{z+t} = \bar{z} + \bar{t}$, բ) $\overline{zt} = \bar{z}\,\bar{t}$, գ) $\overline{\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{\bar{t}}$,

դ) $\overline{\left(\frac{z}{t}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{t}}$, ե) $z\bar{z} = |z|^2$, զ) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$:

Մոդուլի համար ճիշտ են հետևյալ պնդումները.

1) $|z\,t|=|z||t|$ (ապացույց՝ $|zt|^2=z\cdot t\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}=|z|^2|t|^2$);

2) $\left|\frac{z}{t}\right|=\frac{|z|}{|t|}$ (ապացույց՝ $|z|=\left|t\frac{z}{t}\right|=|t|\cdot\left|\frac{z}{t}\right|$);

3) $|z+t|\le|z|+|t|$

(ապացույց՝ $|z+t|^2=(z+t)(\overline{z}+\overline{t})=|z|^2+2\operatorname{Re}z\overline{t}+|t|^2\le\left(|z|+|t|\right)^2$):

Վերջին անհավասարությունը կոչվում է եռանկյան անհավասարություն: Նրա երկրաչափական իմաստը կայանում է նրանում, որ եռանկյան մի կողմի երկարությունը չի գերազանցում մյուս երկու կողմերի երկարությունների գումարը:

Կոմպլեքս թվերի բազմությունը կնշանակենք $\mathbb{C}$-ով:

<u>2. Հաջորդականություններ և շարքեր:</u> $z$ և $t$ կոմպլեքս թվերի $d(z,t)$ հեռավորությունը սահմանվում է այսպես՝ $d(z,t)=|z-t|$ (որը համընկնում է հարթության մեջ սովորական հեռավորությանը):

$z_0$ կետի $\varepsilon$ - շրջակայք ասելով՝ հասկանում ենք $z_0$ կենտրոնով և $\varepsilon$ շառավղով $D(z_0,\varepsilon)$ բաց շրջանը. $D(z_0,\varepsilon)=\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|<\varepsilon\right\}$:

$z_0$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է $z_n$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականության սահման, եթե ցանկացած $\varepsilon>0$ թվին համապատասխան գոյություն ունի $N(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ $n>N(\varepsilon)$ պայմանից հետևի $|z_n-z_0|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ $z_0$ կետի ինչպիսի $D(z_0,\varepsilon)$ շրջակայք էլ վերցնենք, սկսած որոշ համարից $z_n$ կետերը ընկած կլինեն այդ շրջակայքում:

Հետևյալ թեորեմի միջոցով կոմպլեքս հաջորդականության սահմանի ուսումնասիրությունը բերվում է իրական հաջորդականության սահմանին.

**Թեորեմ** 8.1: *Որպեսզի $z_n=x_n+i\,y_n$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը զուգամիտի $z_0=x_0+i\,y_0$ կոմպլեքս թվին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$:*

Ապացույցն անմիջապես բխում է հետևյալ անհավասարություններից.

$$|a|,|b| \le |a+bi| \le |a|+|b| : \qquad (8.1)$$

Այս թեորեմի միջոցով իրական հաջորդականությունների հատկությունները (որոնցում չի մասնակցում իրական թվերի բազմության կարգավորվածությունը) կարելի է տարածել կոմպլեքս հաջորդականությունների վրա: Ներկայացնենք դրանցից մի քանիսը.

**Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմմա**: *Յուրաքանչյուր սահմանափակ հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն:*

**Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:** *Որպեսզի* $z_n$ *հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *թվին համապատասխան գոյություն ունենա* $N(\varepsilon)$ *բնական թիվ, այնպիսին, որ*

$$n, n' > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z_{n'}| < \varepsilon :$$

Անհրաժեշտությունն ակնհայտ է, իսկ բավարարությունն ապացուցելու համար կկիրառենք (8.1) անհավասարությունը և Կոշիի զուգամիտության սկզբունքն իրական հաջորդականությունների համար:

**Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը շարքերի համար:** *Որպեսզի* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *թվին համապատասխան գոյություն ունենա* $N(\varepsilon)$ *բնական թիվ, այնպիսին, որ*

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+m} z_k\right| < \varepsilon, \ m = 1, 2, \ldots :$$

**Սահմանում:** $\sum z_n$ *շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է* $\sum |z_n|$ *շարքը:*

Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից բխում է, որ բացարձակ զուգամետ շարքը զուգամետ է:

Շարքերի բացարձակ զուգամիտությունը ստուգելու համար կարելի է օգտագործել դրական շարքերի վերաբերյալ հայտանիշները: Հիշեցնենք դրանցից երկուսը.

**Դալամբերի հայտանիշը:** *Եթե* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=q$, *ապա* $q<1$ *դեպքում շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ* $q>1$ *դեպքում՝ տարամետ:*

Տարամիտությունը բխում է այն բանից, որ $q>1$ դեպքում խախտվում է $z_n\to 0$ (զուգամիտության անհրաժեշտ) պայմանը:

**Կոշիի հայտանիշը:** *Եթե* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=k$, *ապա* $k<1$ *դեպքում շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ* $k>1$ *դեպքում՝ տարամետ:*

Այժմ $\sum z_n$ շարքի անդամներից կազմենք անվերջ թվով շարքեր, այնպես, որ յուրաքանչյուր անդամ այդ շարքերում մասնակցի մեկ և միայն մեկ անգամ.

$$z_{11}+z_{12}+\cdots+z_{1k}+\cdots$$

$$z_{21}+z_{22}+\cdots+z_{2k}+\cdots$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$z_{m1}+z_{m2}+\cdots+z_{mk}+\cdots$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Այս նոր շարքերին կանվանենք տրված շարքի տրոհման շարքեր:

**Կրկնակի շարքերի թեորեմը:** *Եթե տրված շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա բացարձակ զուգամետ կլինեն նաև տրոհման շարքերը և, եթե նրանց գումարները նշանակենք համապատասխանաբար* $s_1, s_2, \ldots$*-ով, ապա բացարձակ զուգամետ կլինի նաև* $\sum s_n$ *շարքը և տեղի կունենա*

$$\sum s_n=\sum z_n$$

*հավասարությունը:*

*Դիտողություն:* Տրոհման շարքերի մի մասը կամ բոլորը կարելի է փոխարինել վերջավոր գումարներով: Հետևաբար, այդ թեորեմից բխում է բացարձակ զուգամետ շարքերի տեղափոխելիության հատկությունը:

**Շարքերի Կոշիի արտադրյալի մասին թեորեմը:** *Եթե* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = A$ *և* $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = B$ *շարքերը բացարձակ զուգամետ են, ապա բացարձակ զուգամետ կլինի նաև նրանց Կոշիի արտադրյալը՝* $\sum_{n=0}^{\infty} (z_0 t_n + z_1 t_{n-1} + \cdots + z_n t_0)$ *շարքը, և վերջինիս գումարը հավասար է նախորդների գումարների արտադրյալին՝* $AB$ *:*

<u>**3. Էքսպոնենցիալ և եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ:**</u> Նշանակենք՝

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C} :$$

Դալամբերի հայտանիշի համաձայն, այս շարքը բացարձակ զուգամետ է ամբողջ կոմպլեքս հարթության վրա: Ապացուցենք ցուցչային ֆունկցիայի հիմնական հատկությունը՝ $e^z \cdot e^t = e^{z+t}$ : Դրա համար օգտվենք շարքերի բազմապատկման թեորեմից: Ունենք՝

$$e^z \cdot e^t = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k t^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+t)^n}{n!} = e^{z+t} :$$

Նախավերջին հավասարությունը բխում է բինոմի բանաձևից: Այժմ նշանակենք՝

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots \;; \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots :$$

Կրկին Դալամբերի հայտանիշի համաձայն, այս շարքերը բացարձակ զուգամիտում են ամբողջ կոմպլեքս հարթության վրա:

Ապացուցենք *Էյլերի բանաձևը*՝ $e^{iz} = \cos z + i \sin z, z \in \mathbb{C}$ :

Ունենք, որ

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots =$$
$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + i\left( z - \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \cos z + i \sin z$$

(օգտվեցինք կրկնակի շարքերի թեորեմից):

Էյլերի բանաձևը թույլ է տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտել էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի միջոցով՝

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}:$$

Մասնավորաբար, Էյլերի բանաձևի մեջ վերցնելով $z = \varphi$ իրական թիվը, կստանանք՝ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ : Հետևաբար, կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական ներկայացումը կարելի է գրել նաև $z = re^{i\varphi}$ տեսքով, որին անվանում են *կոմպլեքս թվի բևեռային ներկայացում* ( $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ ):

Ցույց տանք, որ $e^z$ ֆունկցիան պարբերական է: Դրա համար լուծենք $e^z = 1$ հավասարումը: Նշանակենք՝ $z = x + iy$ : Ունենք, որ

$$1 = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow e^x = 1;\ e^{iy} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0;\ \cos y = 1 \Rightarrow x = 0;\ y = 2\pi k;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots :$$

Այժմ դիտարկենք $e^{z_1} = e^{z_2}$ հավասարությունը: Օգտվելով $e^{-z} = 1/e^z$ նույնությունից (որը բխում է հիմնական հատկությունից)՝ կստանանք $e^{z_1 - z_2} = 1$ հավասարությունը, որն էլ համարժեք է՝ $z_1 - z_2 = 2\pi k i$ :

Արված դատողություններից բխում է, որ $w = e^z$ ֆունկցիան $y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$ հորիզոնական շերտի տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ (միաթերթ է) և այդ շերտն արտապատկերում է $y_0 < \arg w < y_0 + 2\pi$ լրիվ անկյան վրա (այդ անկյունն իրենից ներկայացնում է ողջ կոմպլեքս հարթությունը՝ առանց $\arg w = y_0$

ճառագայթի): Իրոք, եթե $w = e^x \cdot e^{iy}$, $-\infty < x < \infty$, $y_0 < y < y_0 + 2\pi$, ապա $0 < |w| < \infty$, $y_0 < \arg w < y_0 + 2\pi$ :

<u>**4.Լոգարիթմ:**</u> Էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի հակադարձին կանվանենք լոգարիթմական ֆունկցիա և կնշանակենք $w = \log z$ (բազմարժեք է): Նշանակենք $w = u + iv$ և $u, v$ -ն արտահայտենք $z$ -ի միջոցով.

$$e^w = z \Rightarrow e^{u+iv} = z \Rightarrow e^u \cdot e^{iv} = re^{i\varphi} \ (z = re^{i\varphi}) \Rightarrow$$

$$e^u = r,\ e^{iv} = e^{i\varphi} \Rightarrow u = \ln r,\ v = \arg z :$$

Այսպիսով, ստանում ենք $\log z = \ln|z| + i \arg z$ : Հետևաբար, լոգարիթմական ֆունկցիայի բազմարժեքությունը պայմանավորված է $\arg z$ -ի բազմարժեքությամբ: Ընտրելով $\arg z$ -ի գլխավոր արժեքը՝ $-\pi < \arg z < \pi$, կստանանք *լոգարիթմի գլխավոր արժեքը*, որը կնշանակենք $\ln z$ :

Լոգարիթմական ֆունկցիայի գլխավոր արժեքը բացասական կիսաառանցքով ճեղքված կոմպլեքս հարթությունը փոխմիարժեք արտապատկերում է $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$ բաց շերտի վրա:

<u>**5.Աստիճան:**</u> Կոմպլեքս աստիճանը սահմանվում է $z^t = e^{t \log z}$ հավասարությամբ (բազմարժեք է): Երբ $t$ -ն համընկնում է $n$ բնական թվի հետ, $z^n$ -ի համար ունենում ենք երկու սահմանումներ: Դժվար չէ նկատել, որ նրանք իրար հետ համընկնում են: Իրոք, $\log z$ -ի կամայական ֆիքսված արժեքի համար ունենք

$$e^{n \log z} = e^{\log z} \cdot e^{\log z} \cdot \dots \cdot e^{\log z} = z^n :$$

$\sqrt[n]{z}$ -ը նույնպես կարելի է սահմանել երկու ձևով՝ մեկը, որպես աստիճան բարձրացնելու հակադարձը, մյուսը՝ $z^{1/n}$ : (Ապացուցել, որ արդյունքը նույնը կլինի):

Ունենք՝

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i \arg z)} = |z|^{1/n} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},\ k = 0, \pm 1, \dots,$$

որտեղ $\varphi$-ն $\arg z$-ի որևէ արժեք է: Երբ $k = 0,1,...,n-1$, կստանանք միմյանցից տարբեր արժեքներ, իսկ մնացած $k$-երի դեպքում այդ արժեքները կկրկնվեն: Այսպիսով, $\sqrt[n]{z}$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր $z \neq 0$ կետում ընդունում է $n$ հատ արժեքներ:

Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաները մտցվում են որպես սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների հարաբերություններ:

$\arccos z$ ֆունկցիան ստանալու համար լուծում ենք հետևյալ հավասարումը՝ $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = w$:

$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$, հետևաբար,

$$\arccos w = z = -i \log\left(w \pm \sqrt{w^2 - 1}\right):$$

Այս հավասարությունը կարող ենք գրել նաև

$$\arccos w = \pm i \log\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)$$

տեսքով, քանի որ $w + \sqrt{w^2 + 1}$ և $w - \sqrt{w^2 - 1}$ թվերը հակադարձ են:

Հակադարձ սինուսը կարելի ներմուծել

$$\arcsin w = \frac{\pi}{2} - \arccos w$$

հավասարության միջոցով:

# Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ու Թ Յ Ու Ն

**IX ԳԼՈՒԽ, ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ**

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

## առաջին մաս

**երկրորդ՝ լրամշակված հրատարակություն**

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից
որպես բուհական դասագիրք

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Մ. Մարտիրոսյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Հրայր» ՍՊԸ-ում:
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Ստորագրված է տպագրության՝ 20.02.2018:
Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլը՝ 21.25:
Տպաքանակը՝ 150:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am

**ՎԻԴՈԿ ԽԱՉԻԿԻ ՄՈՒՍՈՅԱՆ**

Վիդոկ Խաչիկի Մուսոյանը ծնվել է 1938-ի հոկտեմբերի 24-ին, Նոր Բայազետ (այժմ՝ Գավառ) քաղաքում: Նախնական կրթությունը ստացել է տեղի Հ. Սարուխանյանի անվան միջնակարգ դպրոցում: 1957-ին ընդունվել և 1962-ին ավարտել է Երևանի պետական համալսարանը՝ ստանալով մաթեմատիկոսի որակավորում: Նույն թվականին գործուղվել է ԽՍՀՄ ԳԱ Վ. Ա. Ստեկլովի անվան ինստիտուտի ասպիրանտուրա: 1966-ին պաշտպանելով թեկնածուական ատենախոսություն՝ վերադարձել է Երևան և աշխատանքի անցել ՀՀ ԳԱ մաթեմատիկայի ինստիտուտում:

1967-ին որպես ավագ դասախոս հրավիրվել է աշխատանքի Խ. Աբովյանի անվան հայկական մանկավարժական ինստիտուտ, իսկ 1968-ին աշխատանքի է անցել Երևանի պետական համալսարանում՝ որպես մաթեմատիկական անալիզի և ֆունկցիաների տեսության ամբիոնի դոցենտ:

Վ. Մուսոյանը 1977-ին ընտրվել է Երևանի պետական համալսարանի մեխանիկամաթեմատիկական, իսկ 1992-ին՝ մաթեմատիկայի ֆակուլտետի դեկան: 1988-ին պաշտպանել է դոկտորական ատենախոսություն և ստացել ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճան, իսկ 1991-ին՝ պրոֆեսորի գիտական կոչում: 1992-1997-ին մաթեմատիկական անալիզի ամբիոնի վարիչն էր: Նրա գիտական աշխատանքները նվիրված են կոմպլեքս անալիզի մի քանի հիմնախնդիրների:

Վախճանվել է 2009-ի օգոստոսի 18-ին:

Անվանի գիտնականը և մանկավարժը երկար տարիներ վարել է մաթեմատիկական անալիզի և ֆունկցիաների տեսության ընդհանուր և մասնագիտական շուրջ երկու տասնյակ դասընթացներ: Նրա դասախոսություններով կրթվել և ոգեշնչվել են բազմաթիվ երիտասարդներ, որոնք այսօր գիտնականներ, ուսուցիչներ կամ պարզապես հայրենասեր մարդիկ են:

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2018
publishing.ysu.am