ՌՈՒԲԻԿ ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ | ԳԱԳԻԿ ՏՈՆՈՅԱՆ
ՍՈՆԱ ՍԱՐԳՍՅԱՆ | ԱՆՈՒՇ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԳՈՐԾՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԵՏԿԱԶՈՏՄԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ Ռ. Ա., ՏՈՆՈՅԱՆ Գ. Պ.,
ՍԱՐԳՍՅԱՆ Ս. Հ., ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ Ա. Հ.

ԳՈՐԾՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2017

ՀՏԴ 519.85(07)
ԳՄԴ 22.18g7
Գ 828

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ տնտեսագիտության և կառավարման
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը

Ավետիսյան Ռ. Ա., Տոնոյան Գ. Պ., Սարգսյան Ս. Հ.,
Պետրոսյան Ա. Հ.

Գ 828 **«Գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդներ»:** Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ/ Ավետիսյան Ռ. Ա., Տոնոյան Գ. Պ., Սարգսյան Ս. Հ., Պետրոսյան Ա. Հ.: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2017, 136 էջ:

Ձեռնարկն ընդգրկում է ԵՊՀ տնտեսագիտության և կառավարման ֆակուլտետի «Գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդներ» դասընթացի ծրագրով նախատեսված հիմնական թեմաները՝ գծային ծրագրում, մատրիցային խաղեր, ոչ գծային ծրագրում և դինամիկ ծրագրում: Յուրաքանչյուր բաժնի սկզբում նախ տրվում է անհրաժեշտ տեսական նյութ, այնուհետև՝ դասընթացի խնդրագրքում առաջարկված տիպային խնդիրների լուծման մեթոդական ցուցումներ:

Ձեռնարկը նախատեսված է ինչպես տնտեսագետների, այնպես էլ հարակից մասնագիտությունների ծրագրով «Գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդներ» առարկան ուսումնասիրող ուսանողների և դասախոսների համար:

ՀՏԴ 519.85(07)
ԳՄԴ 22.18g7

ISBN 978-5-8084-2186-8

© ԵՊՀ հրատ., 2017
© Հեղ. խումբ, 2017

ԳԼՈՒԽ I
ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

ԲԱԺԻՆ 1
Գծային ծրագրման խնդրի լուծումը գծապատկերով

Եթե օպտիմացման խնդրի մաթեմատիկական մոդելում նպատակային ֆունկցիան և սահմանափակումների ֆունկցիաները գծային են, ապա այդպիսի խնդիրն անվանում են գծային ծրագրման խնդիր (ԳԾԽ):

Գծապատկերի միջոցով հիմնականում լուծվում են երկու փոփոխական պարունակող ԳԾԽ-ները, կամ այն ԳԾԽ-ները, որոնք բերվում են այդ տեսքի: ԳԾԽ-ի լուծումը գծապատկերի միջոցով բաղկացած է երկու փուլից (տե՛ս [1], էջ 22-29):

Փուլ 1: Թույլատրելի լուծումների բազմության ($X_թ$ տիրույթ) կառուցում:

Փուլ 2: Լավագույն լուծումների բազմության (X^*) ընտրում:

Բերենք ասվածը պարզաբանող օրինակ:

Օրինակ 1. Լուծել ԳԾԽ-ն գծապատկերի միջոցով:

$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ (նպատակային ֆունկցիա)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 & (1) \\ x_1 + 3x_2 \le 9 & (2) \\ x_1 + x_2 \ge 2 & (3) \end{cases}$$ ($X_թ$ տիրույթ)

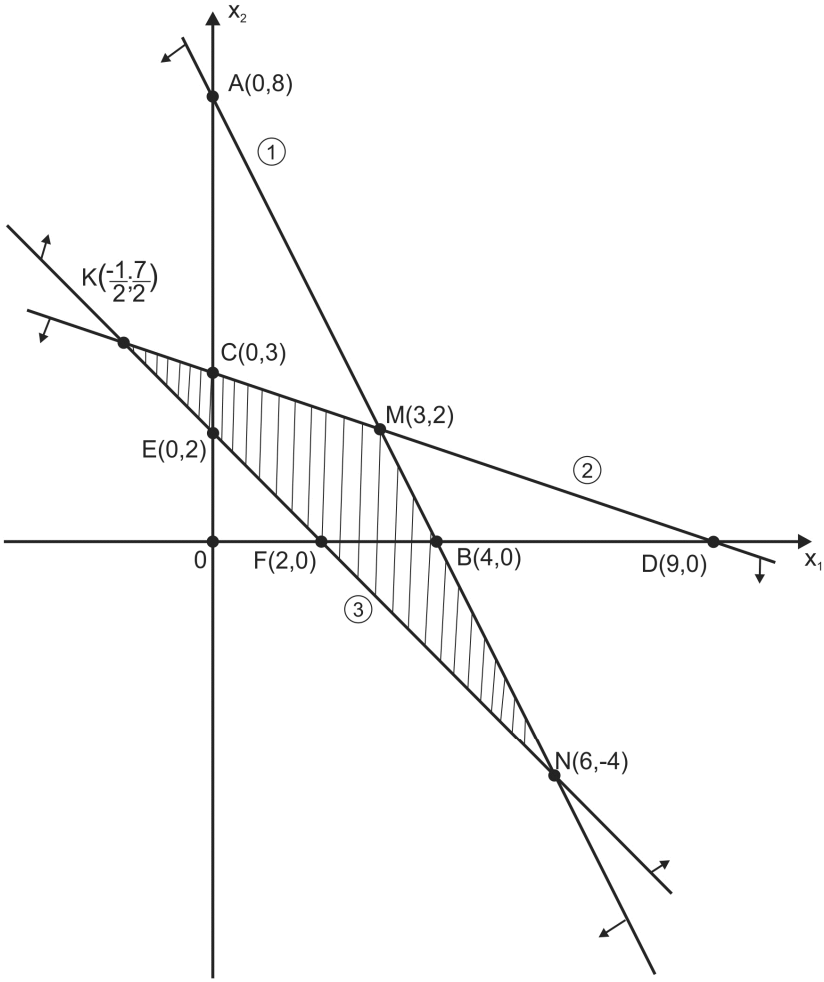
Փուլ 1: $X_թ$ տիրույթի կառուցում:

Հայտնի է, որ x_1Ox_2 ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում երկու փոփոխականով գծային անհավասարման թույլատրելի տիրույթը կիսահարթություն է: $2x_1 + x_2 \le 8$ (1) անհավասարմանը համապատասխան կիսահարթությունը x_1Ox_2 ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում պատկերելու համար նախ կառուցենք $2x_1 + x_2 = 8$ (1) ուղիղ գծի գրաֆիկը՝ գտնելով դրա վրա երկու կետեր՝

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow A(0;8) \in (1), \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4,0) \in (1):$$

Տանենք A և B կետերով ուղիղ, այնուհետև վերցնենք AB ուղղից դուրս որևէ կետ, օրինակ՝ $O(0,0)$ կետը, և նրա կոորդինատները և տեղադրենք (1) անհավասարման մեջ: Ստացվում է $0 \le 8$ ճիշտ անհավասարությունը, հետևաբար O կետը պարունակող կիսահարթության կետերն են բավարարում (1)-ին: Նույն կերպ կստանանք օրինակ 1-ի համակարգի բոլոր անհավասարումներին համապատասխանող կիսահարթությունները և դրանց հատումը կլինի գծ. 1-ում ստվերագծված $X_թ$ տիրույթը, որը MNK եռանկյունն է: Եռանկյան գագաթների կոորդինատները գտնելու համար անհրաժեշտ է համակարգի անհավասարումները դարձնել հավասարումներ և զույգ առ զույգ համակարգերով լուծել:

Դիտողություն: Եթե սահմանային գիծն անցնում է O կետով, ապա անհավասարմանը բավարարող կիսահարթությունը գտնելու համար պետք է դիտարկել գծի հավասարմանը չբավարարող կետ:



գծագիր 1

Փուլ 2: Լավագույն լուծումների բազմության (X*) ընտրում:

Այստեղ կնկարագրվի լավագույն լուծումների բազմություն ընտրելու այն եղանակը, երբ X_p բազմությունը սահմանափակ է

(երբ $X_{\text{թ}}$ բազմությունը սահմանափակ չէ, տե՛ս [1], էջ23-24): Հայտնի է, որ սահմանափակ տիրույթում նպատակային ֆունկցիան մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ ընդունում է տիրույթի գագաթներից գոնե մեկում: Հետևաբար բավական է հաշվել նպատակային ֆունկցիայի արժեքները MNK եռանկյան գագաթներում և ընտրել նրանցից մեծագույնը:

$$\begin{cases} z(M) = 14 & \max \\ z(K) = 13 \\ z(N) = -4 \end{cases}$$

Պատասխան՝ լավագույն լուծումն է $\boldsymbol{x}^* = (3,2)$ և $z^*_{\max}$ =14:

Նշենք, որ եթե անփոփոխ թողնելով $X_{\text{թ}}$ տիրույթը՝ փոխենք նպատակային ֆունկցիան՝ օրինակ վերցնելով՝ $z_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max$, ապա

$$\begin{cases} z_1(M) = 16 & \max \\ z_1(K) = 5 \\ z_1(N) = 16 & \max \end{cases}$$

կստանանք, որ z_1 նպատակային ֆունկցիան առավելագույն արժեք ընդունում է $X_{\text{թ}}$ տիրույթի M և N գագաթներում, հետևաբար խնդիրն ունի այլընտրանքային լուծումներ, և [M, N] հատվածի ցանկացած կետ կլինի լավագույն լուծում: Այս դեպքում պատասխանը կլինի՝

$$\boldsymbol{x}^* = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{x} = t \cdot M + (1-t) \cdot N,\ t \in [0,1] \right\},\ z_1^* = 16:$$

ԲԱԺԻՆ 2
ԳԾԽ-ի ներկայացման երեք տեսքերը

ԳԾԽ-ի ներկայացման երեք տեսքերն են (տե՛ս [1], էջ 38-40).

1.ա) Սովորական (ստանդարտ) տեսքի ԳԾ մաքսիմացման խնդրում բոլոր փոփոխականները ոչ բացասական են, իսկ մնացած բոլոր սահմանափակումները $\leq$ նշանով անհավասարումներ են:

1.բ) Սովորական (ստանդարտ) տեսքի ԳԾ մինիմացման խնդրում բոլոր փոփոխականները ոչ բացասական են, իսկ մնացած բոլոր սահմանափակումները $\geq$ նշանով անհավասարումներ են:

2. Կանոնական տեսքի ԳԾ մաքսիմացման և մինիմացման խնդիրներում բոլոր փոփոխականները ոչ բացասական են, իսկ մնացած բոլոր սահմանափակումները հավասարումներ են:

3. Ընդհանուր տեսքի ԳԾ մաքսիմացման և մինիմացման խնդիրներում փոփոխականները կարող են ընդունել կա՛մ ոչ բացասական, կա՛մ ոչ դրական, կա՛մ ցանկացած իրական արժեքներ: Մնացած սահմանափակումները կարող են լինել $\leq$ կամ $\geq$ նշանով անհավասարումներ, ինչպես նաև հավասարումներ:

Հայտնի է, որ ԳԾ խնդրի ներկայացման երեք տեսքերը համարժեք են այն իմաստով, որ որոշակի ձևափոխություններ կատարելով՝ այդ խնդիրները բերվում են մեկը մյուսին:

Օրինակ 1. $2x_1 + 3x_2 \leq 10$ (1) անհավասարումը ձևափոխել հավասարման:

Ներմուծենք $s_1 \geq 0$ նոր (լրացուցիչ) փոփոխական և $2x_1 + 3x_2 \leq 10$ անհավասարումը փոխարինենք $2x_1 + 3x_2 + s_1 = 10$

(2), $s_1 \geq 0$ պայմաններով: Եթե (x_1, x_2)-ը (1) անհավասարման լուծում է, ապա $\exists\, s_1 \geq 0$, որ (x_1, x_2, s_1)-ը (2) հավասարման լուծում է: Ճիշտ է նաև հակառակը. եթե (x_1, x_2, s_1)-ը (2) հավասարման $s_1 \geq 0$ պայմանով լուծում է, ապա (x_1, x_2)-ը (1)-ի լուծում է:

Օրինակ 2. $5x_1 - x_2 \geq 8$ անհավասարումը ձևափոխել հավասարման:

Ներմուծենք $s_2 \geq 0$ նոր (լրացուցիչ) փոփոխական և $5x_1 - x_2 \geq 8$ անհավասարումը փոխարինենք $5x_1 - x_2 - s_2 = 8$, $s_2 \geq 0$ պայմաններով:

Օրինակ 3. $7x_1 + x_2 = 14$ հավասարումը ձևափոխել $\leq$ նշանով անհավասարումների համակարգի:

$$7x_1 + x_2 = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 + x_2 \leq 14 \\ 7x_1 + x_2 \geq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 + x_2 \leq 14 \\ -7x_1 - x_2 \leq -14 \end{cases}:$$

Օրինակ 4. $x_1 \leq 0$ սահմանափակումը փոխարինել $\geq$ տեսքի սահմանափակումով:

Նշանակելով $x_1' = -x_1 \geq 0$՝ կստանանք $x_1' \geq 0$ պայմանը:

Օրինակ 5. $z = 4x_1 - 9x_2 \to \max$ պայմանը ձևափոխել մինիմացման խնդրի նպատակային ֆունկցիայի:

Ներմուծենք նոր $z_1 = -z = -4x_1 + 9x_2$ ֆունկցիա: Պարզ է, որ $\max(z) = -\min(z_1)$:

Օրինակ 6. $x_3 \sim$ սահմանափակում չունեցող փոփոխականը փոխարինել ոչ բացասական փոփոխականներով:

Ներմուծենք երկու նոր փոփոխականներ՝ $x_3^+ \geq 0$ և $x_3^- \geq 0$, այնպես, որ $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ (տե՛ս[1], էջ 51-54):

Օրինակ 7. Ընդհանուր տեսքի ԳԾԽ-ն բերել կանոնական տեսքի մաքսիմացման և սովորական տեսքի մինիմացման խնդիրների:

$$z = 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 18 \\ 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 20 \\ 6x_1 + 4x_2 - 9x_3 \leq 57 \\ x_1 \leq 0, x_2 \sim, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ներմուծենք $x_1' \geq 0$, $x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$ նոր փոփոխականներ, որտեղ $x_1' = -x_1 \geq 0$, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$:

Կանոնական տեսքի մաքսիմացման խնդիրը կլինի.

$$z = 7x_1' - 4x_2^+ + 4x_2^- + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1' + 3x_2^+ - 3x_2^- - x_3 - s_1 = 18 \\ -7x_1' - x_2^+ + x_2^- + 4x_3 = 20 \\ -6x_1' + 4x_2^+ - 4x_2^- - 9x_3 + s_2 = 57 \\ x_1' \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0: \end{cases}$$

Սովորական տեսքի մինիմացման խնդիրը կլինի.

$$z = -7x_1' + 4x_2^+ - 4x_2^- - 5x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_1' + 3x_2^+ - 3x_2^- - x_3 \geq 18 \\ 7x_1' + x_2^+ - x_2^- - 4x_3 \geq -20 \\ -7x_1' - x_2^+ + x_2^- + 4x_3 \geq 20 \\ 6x_1' - 4x_2^+ + 4x_2^- + 9x_3 \geq -57 \\ x_1' \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0: \end{cases}$$

ԲԱԺԻՆ 3
Արտադրության լավագույն կազմակերպման խնդիր

Այս բաժնի խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ է ուսումնասիրել [1], էջ 31-37-ում շարադրված նյութը:

Խնդիր 3.1: Ձեռնարկությունն արտադրում է 2 տեսակի ապրանք՝ A և B՝ յուրաքանչյուր ապրանքի համար օգտագործելով 2 տեսակի հումք՝ M1 և M2: Ներքոհիշյալ աղյուսակում բերված են խնդրի հիմնական տվյալները:

	Հումքի ծախսը (տոննա) 1 տ. ապրանքի համար		
Ապրանք / Հումք	**Ա**	**Բ**	Հումքի պաշարը (տոննա) 1 օրվա համար
$M1$	2	1	14
$M2$	1	1	10
Շահույթ (1000 դ.մ.) 1տոննա ապրանքի համար	4	3	

Անհրաժեշտ է որոշել՝ Ա և Բ տեսակի ապրանքներից օրական ինչ քանակությամբ արտադրել, որպեսզի ձեռնարկությունը ստանա առավելագույն շահույթ:

Վերը շարադրված խնդրի համար՝

ա) կազմել մաթեմատիկական մոդելը,

բ) լուծել խնդիրը գծապատկերի միջոցով,

գ) գտնել դեֆիցիտ հումքերի իրագործելիության միջակայքերը և 1 տոննայի գները (երկակի գին),

դ) գտնել նպատակային ֆունկցիայի գործակիցների արժեքների փոփոխման այն միջակայքերը, որոնց դեպքում խնդրի՝

1. լավագույն լուծումը չի փոխվում և միակն է,

2. նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը չի փոխվում, բայց խնդիրն ունի այլընտրանքային լուծումներ,

3. լավագույն լուծումը փոխվում է:

Այս պարզ խնդրի լուծման եղանակները հնարավորություն կընձեռեն հետագայում ավելի լավ պատկերացում կազմել շատ ավելի մեծ թվով փոփոխականներ և սահմանափակումներ պարունակող խնդիրների ընկալման և լուծման եղանակների մասին:

ա) **Կազմենք խնդրի մաթեմատիկական մոդելը**: Նշանակենք Ա տեսակի ապրանքի արտադրման օրական քանակը $x_1 \geq 0$ տոննա, Բ տեսակինը՝ $x_2 \geq 0$ տոննա: Այդ դեպքում մեկ օրվա շահույթը կլինի՝ $4x_1 + 3x_2$ (հազար դ.մ.), որը կլինի խնդրի նպատակային ֆունկցիան՝ $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$: M1 տեսակի հումքից օրական կծախսվի $2x_1 + x_2$ տոննա: Բնական է, որ հումքի օրական ծախսը չպետք է գերազանցի M1 հումքի պահեստում առկա պաշարը՝

$$2x_1 + x_2 \leq 14 \text{ (M1):}$$

Նույն կերպ՝ $x_1 + x_2 \leq 10$ (M2):

Այսպիսով՝ խնդրի մաթ. մոդելը կլինի՝ գտնել այնպիսի $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ վեկտոր, որ

$$z(\boldsymbol{x}) = 4x_1 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 & (1) \\ x_1 + x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} :$$

Ինչպես տեսնում ենք, ստացանք սովորական տեսքի ԳԾ մաքսիմացման խնդիր:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը ներկայացնենք մատրիցային տեսքով:

Նշանակենք $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = (4; 3)$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

A մատրիցն անվանում են արտադրական գործընթացների (տեխնոլոգիաների) մատրից, $\boldsymbol{b}$ վեկտորը՝ հումքերի պաշարների վեկտոր, $\boldsymbol{c}$ վեկտորը՝ շահույթների կամ գների վեկտոր, իսկ $\boldsymbol{x}$ վեկտորը՝ արտադրության նախագիծ (պլան):

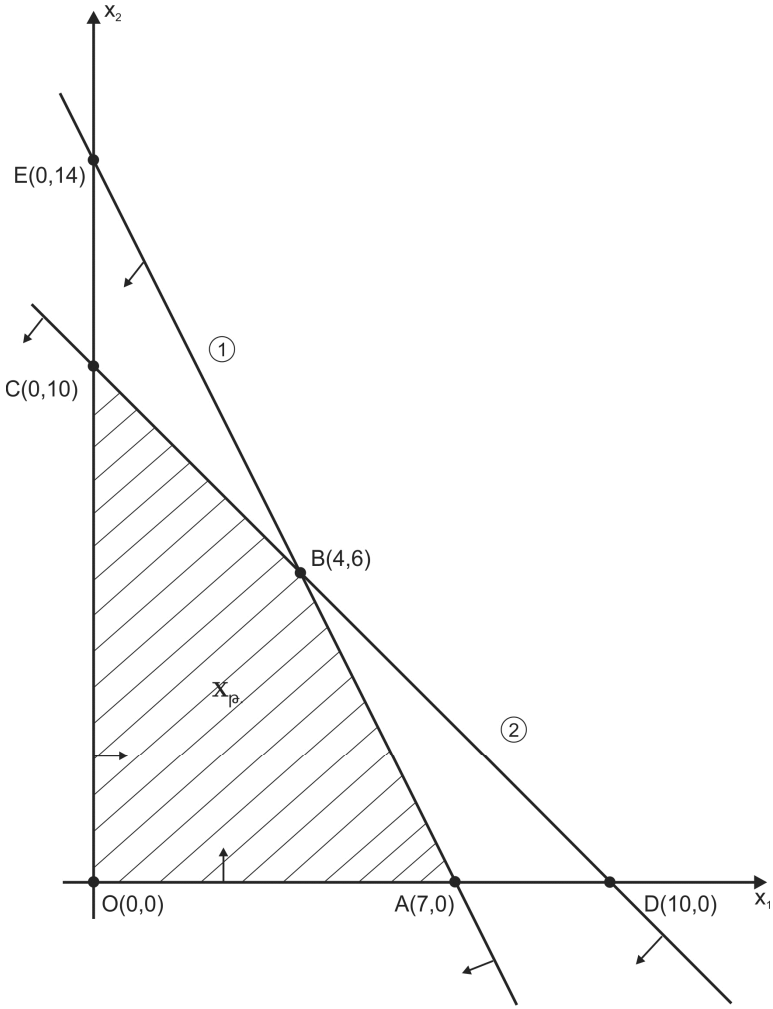
Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը մատրիցային տեսքով կլինի՝ գտնել այնպիսի $\boldsymbol{x} \in R^2$ վեկտոր, որ

$$z(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \to max$$

$$\begin{cases} A \cdot \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{cases} :$$

բ) **Լուծենք խնդիրը գծապատկերի միջոցով:**

x_1Ox_2 ուղղանկյուն կոորդինատային հարթությունում կառուցենք $X_թ$ տիրույթը, որը կլինի OABC ուռուցիկ քառանկյունը (գծ. 2):



գծագիր 2

Դժվար չէ գտնել նաև B գագաթի կոորդինատները և հաշվել z նպատակային ֆունկցիայի արժեքները թույլատրելի տիրույթի գագաթներում՝

$$\left[\begin{array}{l} z(O)=0 \\ z(\mathrm{A})=28 \\ z(\mathrm{B})=34 \qquad \max \\ z(\mathrm{C})=30 \end{array}\right.$$

Պատասխան՝ $x_1^*=4$, $x_2^*=6$, $z_{max}^*=34$:

Այսպիսով, եթե Ա տեսակի ապրանքից օրական արտադրվի 4 տոննա, իսկ Բ տեսակից՝ 6 տոննա, ապա կստացվի առավելագույն օրական շահույթը՝ 34 հազար դ.մ.:

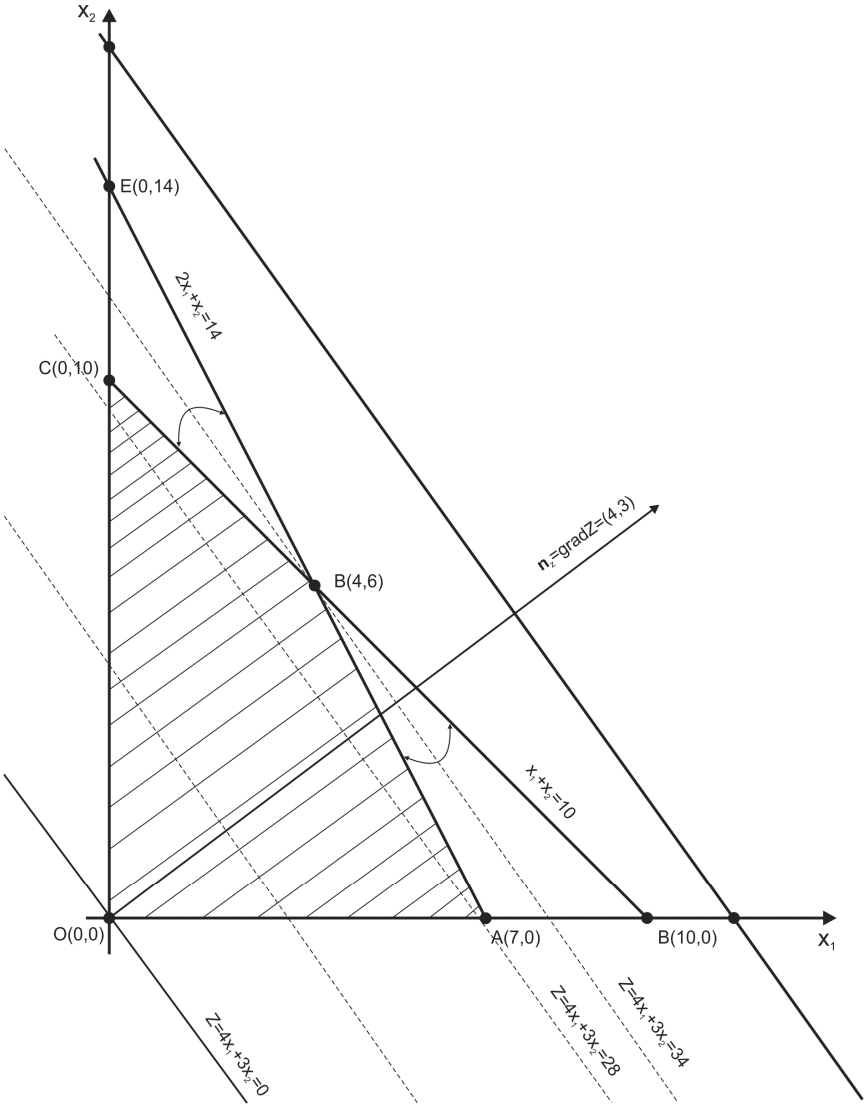
Դիտողություն: Լավագույն լուծման $B(4;6)$ կետի կոորդինատները տեղադրելով խնդրի (1) և (2) անհավասարումներում՝ կստանանք

$$\begin{array}{ll} \mathrm{M1} & \\ \mathrm{M2} & \end{array}\begin{cases} 14 \le 14 \\ 10 \le 10 \end{cases}$$

Այսինքն՝ M1 և M2 հումքերը ամբողջովին ծախսվել են, այդ դեպքում M1 և M2 հումքերը անվանում են դեֆիցիտ (հակառակ դեպքում՝ ոչ դեֆիցիտ կամ ավելցուկային):

գ) **Գտնենք հումքերի իրագործելիության միջակայքերը և 1 տոննայի գները (երկակի կամ շուկայական գին)** (տե՛ս [1], էջ 34):

Նորից դիտարկենք խնդրի թույլատրելի տիրույթի գծագիրը (գծ. 3):


x2
E(0,14)
2x1+x2=14
C(0,10)
n1=gradZ=(4,3)
B(4,6)
x1+x2=10
O(0,0)
A(7,0)
B(10,0)
x1
Z=4x1+3x2=0
Z=4x1+3x2=28
Z=4x1+3x2=34

գծագիր 3

Որոշենք, թե (1) անհավասարման աջ մասը (M1 հումքի քանակը) ինչ սահմաններում կարող է փոփոխվել, որպեսզի լավագույն լուծման կետը մնա առաջին և երկրորդ ուղիղների հատման կետը (այսինքն՝ M1 և M2 հումքերը միաժամանակ լինեն դեֆիցիտ, այլ կերպ ասած այդ հումքերն ամբողջությամբ սպառվում են արտադրական պրոցեսում): Գծագիր 3-ից երևում է, որ M1 հումքի քանակի փոփոխումից (ավելացնելուց կամ պակասեցնելուց) B կետը տեղաշարժվում է CD հատվածով՝ մնալով որպես լավագույն լուծման կետ, և M1 և M2 միաժամանակ դեֆիցիտ են: C(0;10) կետում M1 հումքի քանակն է՝ $2\cdot 0+10=10$ տոննա, իսկ $D(10;0)$ կետում M1 հումքի քանակն է՝ $2\cdot 10+0=20$ տոննա: Այսպիսով՝ M1 հումքի իրագործելության միջակայքը կլինի M1 $\in[10;20]$, որտեղ M1-ով նշանակված է M1 հումքի քանակը: Այսինքն, եթե ներկա պահին M1 հումքի քանակը 14 տ. է, այն կարող է նվազել 4 տ.-ով՝ մինչև 10 տ. և աճել 6 տ.-ով՝ մինչև 20տ., և միևնույն է, լավագույն լուծումը կլինի առաջին և երկրորդ ուղիղների հատման կետը:

M1 հումքի շուկայական (երկակի) գինը որոշելու համար, հաշվենք, թե այդ հումքի մեկ տոննայի փոփոխումից ինչքան կփոխվի (կավելանա կամ կպակասի) ձեռնարկության շահույթը:

$z(C)=30,\quad z(D)=40,\ \Delta z=40-30=10$ հազար դ.մ.,

$\Delta M_1=20-10=10$ տ.:

Այսինքն, երբ M1 հումքի քանակը փոփոխվում է 10 տոննայով, ապա ձեռնարկության շահույթը փոփոխվում է 10 հազար դ.մ.-ով: Հետևաբար M1 հումքի քանակի 1 տոննա փոփոխումից ձեռնարկության շահույթը կփոխվի՝ $y_1^*=\dfrac{\Delta z}{\Delta M_1}=\dfrac{10}{10}=1$ հազար դ.մ.-ով, որն էլ անվանում են M1 հումքի երկակի (շուկայական) գին:

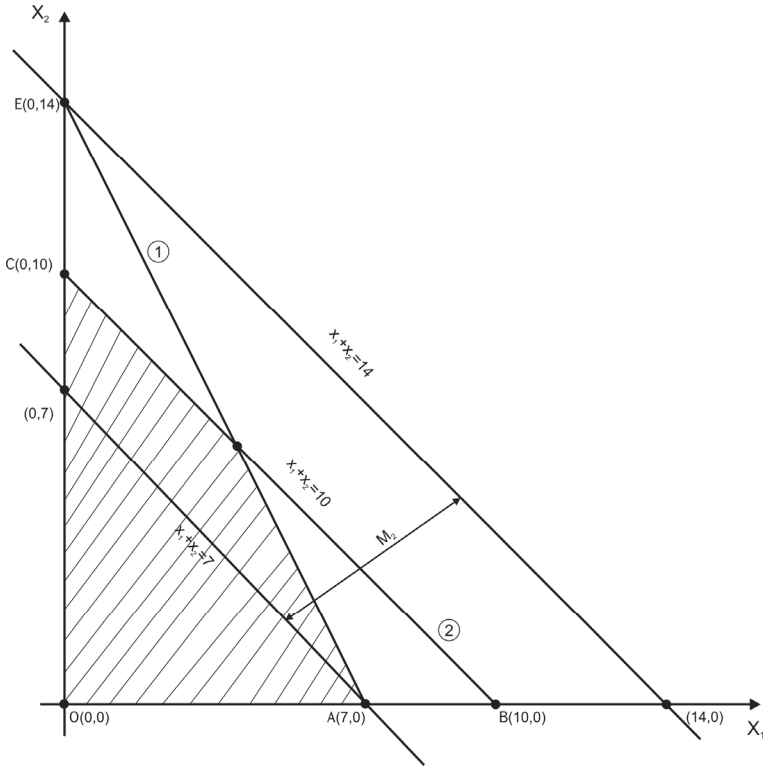
Դիտողություն: Եթե M1 հումքի 1 օրվա պաշարը 20 տոննայից ավելի լինի, ապա ինչպես երևում է գծագիր 3-ից, միևնույն է, լավագույն լուծման կետը կմնա $D(10;0)$ կետը և արդեն M1 հումքը դեֆիցիտ չի լինի (պահեստում կավելանա այդ հումքից): Սակայն եթե M1 հումքի 1 օրվա պաշարը 10 տոննայից պակասի, ապա գծագիր 3-ից երևում է, որ միևնույն է, այն կմնա դեֆիցիտ, լավագույն լուծման կետը արդեն կտեղաշարժվի CO հատվածով մինչև (0; 0) կետը, սակայն արդեն այդ դեպքում M2 հումքը դեֆիցիտ չի լինի: Այդ իսկ պատճառով M1 ռեսուրսի իրագործելիության միջակայքը համարվում է [10;20] միջակայքը, երբ M1 և M2 հումքերը միաժամանակ դեֆիցիտ են:

Նույն կերպ կգտնենք M2 հումքի իրագործելիության միջակայքը և շուկայական գինը (տե՛ս գծ.4): Այս դեպքում B կետը կտեղաշարժվի AE հատվածով: A կետում M2 հումքի քանակն է 7տ., իսկ E կետում՝ 14տ., հետևաբար՝

$M_2 \in [7;14], \quad \Delta M_2 = 14 - 7 = 7, \; z(A) = 28, \quad z(E) = 42,$

$\Delta z = 42 - 28 = 14$ հազար դ.մ.,

$\Rightarrow y_2^* = \dfrac{\Delta z}{\Delta M_2} = \dfrac{14}{7} = 2$ հազար դ.մ.:

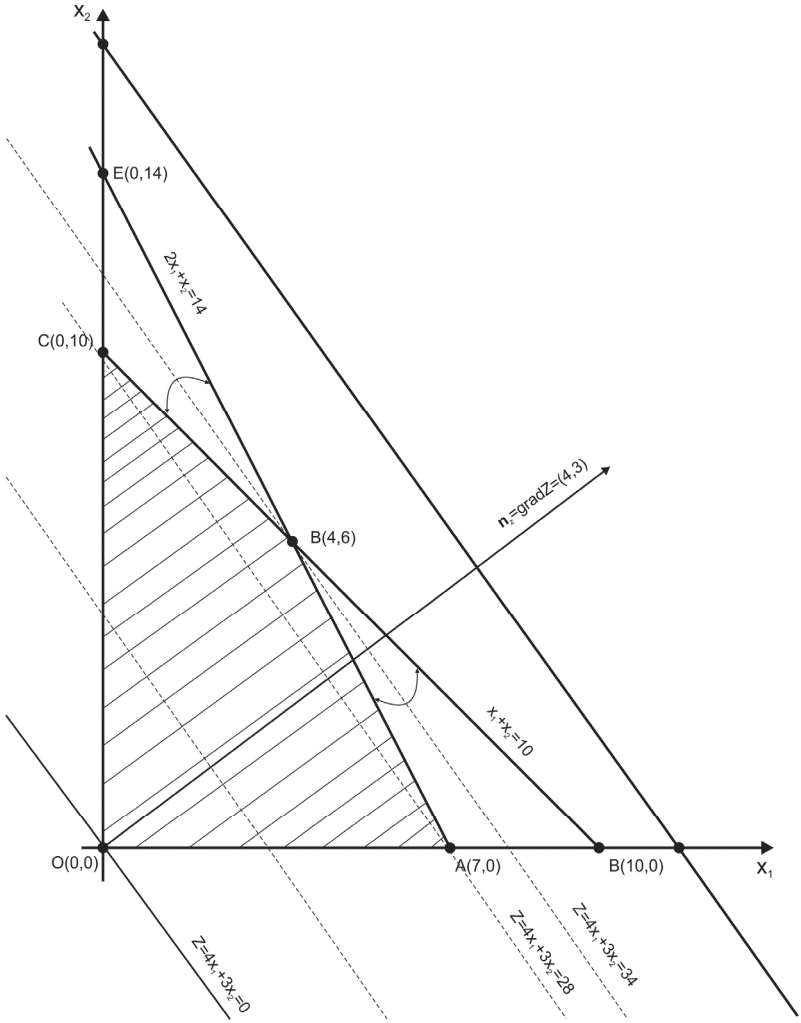


գծագիր 4

Դիտողություն: Այսպիսով, եթե ձեռնարկության ղեկավարությունը որոշի ավելացնել կամ պակասեցնել M1 հումքի օրական պաշարը արտադրությունում, ապա նոր խնդիր պետք չէ լուծել շահույթը հաշվարկելու կամ M1 ռեսուրսի շուկայական գինը որոշելու համար: M1 հումքի օրական պաշարի 1 տոննա փոփոխումից շահույթը կփոփոխվի (կավելանա կամ կպակասի) հազար դ.մ.-ով, հետևաբար նրա շուկայական (երկակի) գինը հենց դա է: Սակայն պետք է հիշել, որ ասվածը ճիշտ է, երբ $M_1 \in [10;20]$ իրագործելիության միջակայքին: Նույն մեկնաբանումը կարող ենք կատարել M2 հումքի օրական պաշարի և դրանից կախված

շահույթի փոփոխության, ինչպես նաև շուկայական գնի վերաբերյալ:

դ) Նորից դիտարկենք մեր խնդրի $X_թ$ տիրույթը (գծ. 5):



գծագիր 5

[1], էջ 23-25-ում նկարագրված է $X_{թ}$ տիրույթում z նպատակային ֆունկցիայի էքստրեմալ (մեծագույն կամ փոքրագույն) արժեքը որոշելու նաև այլ եղանակներ: Շարադրենք դրանցից մեկը: Դիտարկենք $4x_1 + 3x_2 = C$ ուղիղների ընտանիք (C -ն ցանկացած իրական թիվ է), որոնք կոչվում են նպատակային ֆունկցիայի մակարդակային գծեր: Գծագիր 5-ում այդ մակարդակային գծերը նկարված են կետագծերով $C = 0, 28, 34$ և այլ արժեքների համար: Նախ $X_{թ}$ տիրույթի որևէ կետով (օրինակ՝ $O(0;0)$ կետով) տանում ենք $4x_1 + 3x_2 = 0$ (α_0) ուղիղը: Հայտնի է, որ $n_z = grad\boldsymbol{z} = (4,3)$ վեկտորի ուղղությամբ նպատակային ֆունկցիան աճում է (հակառակ ուղղությամբ՝ նվազում): Տեղափոխենք (α_0) ուղիղն ինքն իրեն զուգահեռ n_z վեկտորի ուղղությամբ այնքան, քանի դեռ $X_{թ}$ տիրույթի հետ ընդհանուր կետ (կետեր) ունի: Մակարդակային գծի վերջին հնարավոր հատումից կորոշվի լավագույն լուծումների X^* բազմությունը: Գծագիր 5-ից երևում է, որ դա $B(4;6)$ կետն է:

Վերը ասվածը հաշվի առնելով՝ կատարենք (դ) կետի պահանջները: Լավագույն լուծումը՝ B(4,6) կետը, ստացվում է $2x_1 + x_2 = 14$ առաջին և $x_1 + x_2 = 10$ երկրորդ ուղիղների հատումից, և ինչպես տեսնում ենք, նպատակային ֆունկցիայի մակարդակային գիծը B կետով անցնելիս գտնվում է առաջին և երկրորդ ուղիղների կազմած անկյան մեջ: Դիտարկենք ընդհանուր տեսքով երկու փոփոխականի ԳԾԽ-ի նպատակային ֆունկցիան՝ $z_1 = c_1x_1 + c_2x_2$: Պարզ է, որ c_1 և c_2 կետերը գործակիցների փոփոխվելուց B կետը կմնա լավագույն լուծման կետ այնքան ժամանակ, քանի դեռ $c_1x_1 + c_2x_2$ մակարդակային գիծն ընկած է առաջին և երկրորդ ուղիղների կազմած անկյան միջև:

Հանրահաշվորեն դա կգրվի՝

$$\frac{1}{1} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1}, \text{ եթե } c_2 \neq 0,$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{1}{1}, \text{ եթե } c_1 \neq 0:$$

Այս միջակայքերն անվանում են $\frac{c_1}{c_2}, \left(\frac{c_2}{c_1}\right)$ հարաբերության օպտիմալության միջակայքեր:

Ընդ որում՝

1. լավագույն լուծումը չի փոխվի և միակն է, եթե $1 < \frac{c_1}{c_2} < 2, c_2 \neq 0$ կամ $\frac{1}{2} < \frac{c_2}{c_1} < 1, c_1 \neq 0$;

2. նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը չի փոփոխվում, բայց խնդիրն ունի այլընտրանքային լուծումներ, եթե

$\frac{c_2}{c_1} = 1$ կամ $\frac{c_1}{c_2} = 1$ ՝ դա BC հատվածն է,

$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{2}$ կամ $\frac{c_1}{c_2} = 2$ ՝ դա BA հատվածն է:

Նշենք, որ այդ դեպքում $c_1x_1 + c_2x_2$ մակարդակային գիծը B կետով անցնելիս մասնակիորեն համընկնում է BC կամ BA հատվածների հետ (համապատասխանաբար):

3. լավագույն լուծումը կփոխվի, եթե

$$\frac{c_1}{c_2} \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty), c_2 \neq 0$$

$$\frac{c_2}{c_1} \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty), c_1 \neq 0:$$

Առաջարկվում է ինքնուրույն քննարկել $c_1 = 0$ կամ $c_2 = 0$ դեպքերը:

Դիտողություն: Եթե օրինակ c_2 գործակիցը մնա հաստատուն՝ $z_1 = c_1x_1 + 3x_2$, ապա կստանանք c_1 գործակցի օպտիմալության միջակայքը՝ $c_1 \in [3;6]$, այսինքն, եթե Բ տեսակի ապրանքի 1տ.-ից ստացվող շահույթը մնա նույնը, իսկ Ա տեսակի ապրանքի 1տ.-ից ստացվող շահույթը փոփոխվի 3000-ից մինչև 6000 դ.մ.-ի սահմաններում, ապա խնդրի լավագույն լուծման կետը կմնա նույն $B(4;6)$ կետը, իսկ շահույթը կորոշվի հետևյալ կերպ՝

$z^*_{max} = 4c_1 + 18$ հազար դր. ($c_1 \in [3;6]$): Ընդ որում, եթե $c_1 = 3$ կամ $c_1 = 6$, ապա խնդիրն ունի այլընտրանքային լուծումներ՝ BC կամ BA հատվածները (համապատասխանաբար):

ԲԱԺԻՆ 4
Սիմպլեքս մեթոդ

Այս բաժնի խնդիրները լուծելու համար անհրաժեշտ է ուսումնասիրել [1], էջ 49-98-ում շարադրված նյութը: Նշենք միայն, որ այս բաժնում շատ կարևոր է թույլատրելի հենքային լուծում (**թ.հ.լ.**) գաղափարը: Ամեն մի **թ.հ.լ.**-ի համապատասխանում է $X_թ$ տիրույթի գագաթ: Սիմպլեքս ալգորիթմն ընտրում է $X_թ$ տիրույթի որևէ գագաթ (մեծ չափերի խնդիրների համար **թ.հ.լ.**-ների քանակը հասնում է միլիոնների) և այնուհետև արդյունավետ կերպով նույնատիպ քայլեր կատարելով՝ յուրաքանչյուր քայլում անցնում է նոր (հարևան) այնպիսի գագաթի, որում նպատակային ֆունկցիայի արժեքը մեծանում է (մաքսիմացման խնդրում): Քանի որ գագաթների քանակը վերջավոր է, ի վերջո կհասնենք

լավագույն լուծմանը (կամ ցույց կտրվի, որ լավագույն լուծում գոյություն չունի):

Օրինակ 1: Լուծել ԳԾԽ-ն՝ գտնելով նրա բոլոր **թ.հ.լ.**-ները (տե՛ս [1], էջ 79) և պարզել՝ խնդիրը վերածվող է, թե ոչ:

$$z = 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 20x_5 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 + 8x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 9 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$m = 2,\ n = 5 \Rightarrow$ անհրաժեշտ է դիտարկել $C_5^2 = 10$ դեպք:

1) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow \begin{cases} 8x_4 + 8x_5 = 8 \\ 9x_4 + 9x_5 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow$ լուծումը միակը չէ, հետևաբար այս դեպքում **թ.հ.լ.** չենք կարող գտնել:

2) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_1, x_2, x_4 \Rightarrow \begin{cases} -x_3 + 8x_5 = 8 \\ -3x_3 + 9x_5 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0,0,0,1)$ վերածվող **թ.հ.լ.**, $z(0,0,0,0,1) = -20$:

3) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_1, x_2, x_5 \Rightarrow \begin{cases} -x_3 + 8x_4 = 8 \\ -3x_3 + 9x_4 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0,0,1,0)$ վերածվող **թ.հ.լ.**, $z(0,0,0,1,0) = -1$:

4) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_1, x_3, x_4 \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 8x_5 = 8 \\ x_2 + 9x_5 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0,0,0,1)$ վերածվող **թ.հ.լ.**, ընդ որում՝ այստեղ հենքային փոփոխականներն են x_2, x_5-ը իսկ երկրորդ դեպքում՝ x_3, x_5-ը, $z(0,0,0,0,1) = -20$:

5) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_1, x_3, x_5 \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 8x_4 = 8 \\ x_2 + 9x_4 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0,0,1,0)$ վերածվող **թ.հ.լ.**, $z(0,0,0,1,0) = -1$:

6) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_1, x_4, x_5 \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,-2,3,0,0)$ $x_2 = -2 < 0$, ստացանք ոչ **թ.հ.լ.**, քանի որ $x_2 = -2 < 0$:

7) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_2, x_3, x_4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 8x_5 = 8 \\ 3x_1 + 9x_5 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0,0,0,1)$ վերածվող **թ.հ.լ.**, $z(0,0,0,0,1) = -20$:

8) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_2, x_3, x_5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 8x_4 = 8 \\ 3x_1 + 9x_4 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0,0,1,0)$ վերածվող **թ.հ.լ.**, $z(0,0,0,1,0) = -1$:

9) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_2, x_4, x_5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ 3x_1 - 3x_3 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow$ լուծում գոյություն չունի:

10) Ազատ փոփոխականներ՝ $x_3, x_4, x_5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow (2,3,0,0,0)$ **թ.հ.լ.**, $z(2,3,0,0,0) = 13$:

Պատ.՝ $z_{\max}(2,3,0,0,0) = 13$, $\boldsymbol{x}^*_{\max} = (2,3,0,0,0)$,

$z_{\min}(0,0,0,0,1) = -20$, $\boldsymbol{x}^*_{\min} = (0,0,0,0,1)$,

խնդիրը վերածվող է:

Օրինակ 2. Լուծենք նախորդ բաժնի խնդիր 3.1-ը սիմպլեքս մեթոդով: Նախ խնդրի մաթ. մոդելը գրենք կանոնական տեսքով, որովհետև սիմպլեքս ալգորիթմը նկարագրվում է միայն կանոնական տեսքի ԳԾԽ-ների համար: Ներմուծելով $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$ լրացուցիչ (մնացորդային) փոփոխականներ՝ խնդիրը բերենք կանոնական տեսքի՝

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 + 0s_2 = 14 \\ x_1 + x_2 + 0s_1 + s_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0: \end{cases} \tag{4.1}$$

Այս խնդրում հավասարումների քանակը՝ $m = 2$, անհայտների քանակը՝ $n = 4$: Նպատակային ֆունկցիան ներկայացնենք $z - 4x_1 - 3x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$ տեսքով և խնդիրը ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$\begin{cases} z - 4x_1 - 3x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + s_1 + 0s_2 = 14 \\ x_1 + x_2 + 0s_1 + s_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0: \end{cases} \tag{4.2}$$

Փնտրվում է այս համակարգի այնպիսի $(x_1^*, x_2^*, s_1^*, s_2^*)$ լուծում, որի դեպքում z-ը ստանում է մեծագույն արժեք:

Այժմ կատարենք սիմպլեքս ալգորիթմի քայլերը:

Քայլ 1: Գտնել սկզբնական թ.հ.լ.:

Գտնենք (4.1) համակարգի որևէ (սկզբնական) **թ.հ.լ.**՝ գործնական եղանակով (տե՛ս [1], էջ 79)՝ $m = 2, n = 4, n - m = 4 - 2 = 2$ ազատ փոփոխականներին տալով 0 արժեք և լուծելով ստացված համակարգը:

$x_1 = 0, x_2 = 0$ ազատ փոփոխականներ;

$s_1 = 14, s_2 = 10$ հենքային փոփոխականներ:

Քանի որ (4.1) համակարգի լուծումը միակն է, ինչպես նաև բոլոր փոփոխականները ոչ բացասական են, ապա ստացանք **թ.հ.լ.**՝ (0; 0; 14; 10): Այս լուծումը համապատասխանում է գծագիր 1-ի O(0,0) գագաթին, որում z նպատակային ֆունկցիայի արժեքը 0 է: Նշենք, որ եթե հնարավոր չէ գտնել **թ.հ.լ.** (փորձելով C_n^m դեպքեր), ապա $X_{թ.}$ տիրույթը դատարկ է, և ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը:

Քայլ 2: Կազմել սկզբնական սիմպլեքս աղյուսակ:

(4.2)-ից օգտվելով՝ կազմենք սկզբնական **թ.հ.լ.**-ին համապատասխանող սկզբնական սիմպլեքս աղյուսակ, որն ունի m+2=4 տող և n+3=7 սյունակ:

Աղյուսակ 1

հենքային փոփոխական-ներ	x_1	x_2	s_1	s_2	լու-ծում	θ	
Z	-4	-3	0	0	0		
s_1	2	1	1	0	14	$14/1$	
s_2	1	1	0	1	10	$10/1$	← min (*ուղղորդող տող*)

↑ *ուղղորդող սյունակ*

Այս աղյուսակի լուծում սյունակում գրված են z նպատակային ֆունկցիայի, ինչպես նաև s_1 և s_2 հենքային փոփոխականների արժեքները (ազատ փոփոխականների արժեքները միշտ 0 են):

Նշենք, որ ինչպես այս, այնպես էլ հաջորդ սիմպլեքս աղյուսակներում՝

ա) հենքային փոփոխականները կազմում են միավոր մատրից,

բ) հենքային փոփոխականների գործակիցները z-ի տողում 0 են:

Քայլ 3: Օպտիմալության հայտանիշ:

Օպտիմալության հայտանիշը հնարավորություն է տալիս ընտրելու այնպիսի ոչ հենքային (ազատ) փոփոխական, որի աճման դեպքում նպատակային ֆունկցիան աճում է (հիշենք, որ բոլոր ազատ փոփոխականներն ունեն զրոյական արժեք):

Ընտրենք z-ի տողում (բացի «լուծում» սյունակից) որևէ բացասական տարր, օրինակ՝ -3-ը: Եթե այդպիսին չկա, ապա ստացված է խնդրի լավագույն լուծումը, և ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը: Ընտրված բացասական տարրի սյունակը անվանենք ուղղորդող սյունակ և նշենք սլաքով (աղ. 1): Ուղղորդող սյունը ցույց է տալիս հաջորդ սիմպլեքս աղյուսակում հենք ներմուծվող փոփոխականը՝ x_2: Դժվար չէ նկատել, որ x_2 փոփոխականը հենք ներմուծելիս նրա ամեն մի միավորի աճին համապատասխանում է $z = 4x_1 + 3x_2$ նպատակային ֆունկցիայի 3 միավոր աճ: Գծագիր 1-ում x_2-ի սյունակը ընտրելը նշանակում է, որ $O(0;0)$ կետից գնում ենք x_2 փոփոխականի աճման ուղղությամբ դեպի $X_թ$ տիրույթի $C(0;10)$ գագաթ:

Քայլ 4: Թույլատրելիության հայտանիշ (θ):

Թույլատրելիության հայտանիշը նոր գագաթ ընտրելիս $X_թ$ տիրույթից դուրս չգալու հնարավորություն է տալիս:

Լուծում սյունակի տարրերը (բացի z-ի տողի տարրից) բաժանում ենք ուղղորդող սյունակի դրական տարրերի վրա և ընտրում փոքրագույնը: Աղյուսակ 1-ում այդ գործողությունները

նշված են վերջին սյունակում, իսկ ընտրված փոքրագույն տարրի տողը նշենք սլաքով և անվանենք ուղղորդող տող: Ուղղորդող տողը ցույց է տալիս հենքից արտաքսվող փոփոխականը՝ s_1:

Եթե ուղղորդող սյունակում դրական տարր չկա, ապա x_2 փոփոխականը թույլատրելի տիրույթում սահմանափակ չէ (կարող է ինչքան ասես աճել), հետևաբար՝ $z \to +\infty$, և ալգորիթմն ավարտում է իր աշխատանքը:

Եթե θ սյունակում փոքրագույն հարաբերությունը միակը չէ, ապա ընտրում ենք որևէ մեկը, սակայն նշենք, որ այս դեպքում հաջորդ սիմպլեքս աղյուսակում ստացվող լուծումը կլինի վերածվող (տե՛ս [1], էջ 94):

Դիտողություն: Եթե θ սյունակում փոքրագույն հարաբերություն չընտրեինք, այլ, օրինակ, ընտրեինք s_2 հենքային փոփոխականի տողը՝ որպես ուղղորդող տող, ապա հաջորդ սիմպլեքս աղյուսակում կստանայինք ոչ **թ.հ.լ.** (գծ. 1-ում՝ $E(0;14)$ գագաթը, որը $X_թ$ տիրույթից դուրս է): Համոզվել ինքնուրույն:

Քայլ 5: Գաուս-Ժորդանի մեթոդ:

Այս մեթոդի օգնությամբ ստացվում է հաջորդ սիմպլեքս աղյուսակը (հաջորդ **թ.հ.լ.**-ն, որին կհամապատասխանի գծ. 1-ի $C(0;10)$ գագաթը):

Ուղղորդող սյունակի և ուղղորդող տողի հատման տարրն անվանենք ուղղորդող տարր (աղ. 1-ում այն հատուկ նշված է): Գծում ենք նոր սիմպլեքս աղյուսակ (աղ. 2), որն ունի աղյուսակ 1-ի չափերը: Նոր աղյուսակում առաջին տողը նույնն է մնում, իսկ առաջին սյունակում կատարվում է միայն մեկ փոփոխություն. s_2 հենքային փոփոխականի տեղը զբաղեցնում է x_2-ը: Այնուհետև ուղղորդող տողի տարրերը բաժանում ենք ուղղորդող

տարրի վրա (ուղղորդող տարրի արժեքը կդառնա 1) և լրացնում նոր սիմպլեքս աղյուսակում իր տեղը: Գաուս-Ժորդանի մեթոդով ուղղորդող տողը բազմապատկում ենք այնպիսի թվերով և գումարում հին աղյուսակի մնացած բոլոր տողերին, որ ուղղորդող սյունակում առաջանան 0-ներ, և լրացնում ենք ստացված տողերը համապատասխանաբար նոր աղյուսակում: Նշենք, որ ասվածը չի վերաբերում նոր աղյուսակի վերջին θ սյունակին, այն միշտ ազատ է և լրացվում է միայն ընթացիկ քայլ 4-ում: Կոնկրետ մեր օրինակում աղյուսակ 1-ի (կամ 2-ի) չորրորդ տողը բազմապատկում ենք 3 և -1 թվերով, գումարում համապատասխանաբար երկրորդ և երրորդ տողերին ու լրացնում նոր աղյուսակ:

Աղյուսակ 2

հենքային փոփոխականներ	x_1	x_2	s_1	s_2	լուծում	θ	
z	-1	0	0	3	30		
s_1	**1**	0	1	-1	4	$^4/_1$	← min(*ուղղորդող տող*)
x_2	1	1	0	1	10	$^{10}/_1$	

↑ *ուղղորդող սյունակ*

Աղյուսակի լուծում սյունակը ցույց է տալիս, որ ստացել ենք նոր **թ.հ.լ.՝** (0;10;4;0) որին համապատասխանում է $X_{\text{թ}}$ տիրույթի $C(0;10)$ գագաթը: z նպատակային ֆունկցիայի արժեքը մեծացել է $3x_2 = 3 \cdot 10$ -ով՝ դառնալով 30:

Անցնենք քայլ 3-ին և կատարենք երրորդ իտերացիա, այսինքն՝ կատարենք ալգորիթմի 3, 4, 5 քայլերը արդեն աղյուսակ 2-ի համար: 5-րդ քայլում կստանանք աղյուսակ 3-ը:

Աղյուսակ 3

հենքային փոփոխականներ	x_1	x_2	s_1	s_2	լուծում	θ
z	0	0	1	2	34	
x_1	1	0	1	-1	4	
x_2	0	1	-1	2	6	

Աղյուսակի լուծում սյունակը ցույց է տալիս, որ ստացել ենք նոր **թ.հ.լ.**՝ (4;6;0;0) որին համապատասխանում է $X_{\text{թ}}$ տիրույթի $B(4;6)$ գագաթը:

Քանի որ z-ի տողում բացասական տարր չկա, ապա ստացված է խնդիր 3.1-ի լավագույն լուծումը՝ $x_1^* = 4, x_2^* = 6, z_{max}^* = 34$, որը համընկնում է բաժին 3-ում այդ խնդրի գծապատկերով լուծման պատասխանի հետ:

Նշենք, որ վերջին աղյուսակում z-ի տողում լրացուցիչ փոփոխականների (s_1 և s_2) գործակիցները համապատասխանաբար M_1 և M_2 հումքերի երկակի գներն են՝ $y_1^* = 1$, $y_2^* = 2$: Իսկ եթե վերջնական սիմպլեքս աղյուսակում z-ի տողում որևէ s_j ոչ հենքային փոփոխականի գործակիցը 0 է, ապա $y_j^* = 0$ (j-րդ հումքը դեֆիցիտ չէ):

ԲԱԺԻՆ 5
ԳԾԽ-ի երկակիության տեսություն

Յուրաքանչյուր ԳԾԽ-ի հետ սերտորեն կապված է մեկ այլ ԳԾ խնդիր, որն անվանում են սկզբնական (ուղիղ) խնդրի երկակի խնդիր: Պարզվում է, որ ուղիղ և երկակի խնդիրների զույգի միասին ուսումնասիրումը հնարավորություն է տալիս ավելի խոր և համապարփակ հետազոտություններ, արդյունավետ վերլուծություններ կատարելու և բավականին հետաքրքիր արդյունքներ ստանալու, քան այդ խնդիրներից յուրաքանչյուրի առանձին ուսումնասիրումը:

5.1. Երկակի խնդիր կազմելու կանոնները և տնտեսագիտական իմաստը

Դիտարկենք արտադրության լավագույն պլանավորման խնդիր 3.1-ը: Այն անվանենք ուղիղ խնդիր և գրենք այդ խնդրի մաթեմատիկական մոդելը.

Խնդիր 3.1. (ուղիղ խնդիր):

Գտնել այնպիսի $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ վեկտոր, որ

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{array}{ll} M1 & \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right. \\ M2 & \end{array} \quad \left|\begin{array}{l} y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \end{array}\right.$$

Ենթադրենք արտադրական որոշակի գործընթացից հետո ձեռնարկության պահեստում մնացել է հումքերի մեկ օրվա պա-

շար՝ $M1$ հումքից 14տ., իսկ $M2$-ից՝ 10տ.: Անհրաժեշտ է որոշել, թե ինչպես վարվել այդ հումքերի մնացորդների հետ: Օգտագործե՞լ հումքերը արտադրական գործընթացում, թե՞ վաճառել շուկայում, և ո՞ր դեպքում ձեռնարկությունը կշահի:

Առաջին դեպքում առաջանում է խնդիր 3.1-ը, որն արդեն լուծվել է գծապատկերով, ինչպես նաև սիմպլեքս մեթոդով և ստացվել $x_1^* = 4,\ x_2^* = 6, z_{\max}^* = 34$ պատասխանը:

Այժմ քննարկենք հումքերի մնացորդները վաճառելու դեպքը: Ենթադրենք որոշում ենք M1 հումքի 1տ. վաճառել $y_1 \geq 0$ գնով, իսկ M2-ի 1տ.՝ $y_2 \geq 0$ գնով: Բնական է պահանջել, որ Ա և Բ ապրանքների մեկ միավորի արտադրության համար օգտագործվող հումքերի վաճառքից ստացվող գումարը պակաս չլինի, քան այդ ապրանքների մեկ միավորի վաճառքից ստացվող շահույթն է (հակառակ դեպքում իմաստ չունի հումքերի մնացորդները վաճառել): Այդ պահանջները կգրվեն հետևյալ անհավասարումներով՝

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 4 \text{ (Ա ապրանքի մեկ միավորի համար)} \\ y_1 + y_2 \geq 3 \text{ (Բ ապրանքի մեկ միավորի համար):} \end{cases}$$

Շուկայում գնորդը կցանկանա $M1$ և $M2$ հումքերը գնել հնարավորինս էժան՝

$$f = 14y_1 + 10y_2 \to \min:$$

Այսպիսով՝ հումքերի մնացորդները վաճառելու դեպքում առաջացած խնդրի (երկակի խնդիր) մաթեմատիկական մոդելը կլինի՝

Խնդիր 5.1. (երկակի խնդիր)

Գտնել այնպիսի $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in R^2$ վեկտոր, որ

$$f(\mathbf{y}) = 14y_1 + 10y_2 \to \min$$

$$\begin{array}{l} \text{Ա} \\ \text{Բ} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Խնդիր 3.1-ը և խնդիր 5.1-ը կանվանենք ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգ և այսուհետ կարևոր չէ, թե որին կանվանենք ուղիղ խնդիր և որին՝ երկակի (տե՛ս [1], էջ 133-135):

Նկատենք, որ երկակի խնդրի մոդելի փոփոխականները, նպատակային ֆունկցիան և սահմանափակումները կազմվում են ուղիղ խնդրի մոդելի տեսքից հետևյալ կանոններով:

1. Ուղիղ խնդրի յուրաքանչյուր սահմանափակման համապատասխանում է երկակի խնդրի փոփոխական:
2. Ուղիղ խնդրի յուրաքանչյուր փոփոխականի համապատասխանում է երկակի խնդրի սահմանափակում:
3. Երկակի խնդրի յուրաքանչյուր սահմանափակման ձախ մասի գործակիցները այդ սահմանափակմանը համապատասխանող ուղիղ խնդրի փոփոխականի գործակիցներն են ուղիղ խնդրի սահմանափակումներում, իսկ աջ մասի գործակիցները նպատակային ֆունկցիայի գործակիցներն են (համապատասխանաբար):

Երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիայի գործակիցները ուղիղ խնդրի սահմանափակումների ձախ մասերի գործակիցներն են (համապատասխանաբար):

Այսպիսով՝ ցանկացած սովորական տեսքի մաքսիմացման ԳԾԽ-ի երկակի խնդիր կազմելու կանոններն են՝

Ուղիղ խնդիր	Երկակի խնդիր
Գտնել այնպիսի $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ վեկտոր, որ $z = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \to max,$ և բավարարվեն $\begin{cases} A \cdot \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$ պայմանները:	Գտնել այնպիսի $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m$ վեկտոր, որ $f = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} \to min,$ և բավարարվեն $\begin{cases} \boldsymbol{y} \cdot A \ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$ պայմանները:

Այժմ օրինակներով ցույց տանք, թե մաթեմատիկորեն ինչպես կազմել ցանկացած ընդհանուր տեսքի ԳԾԽ-ի երկակի խնդիրը՝ օգտագործելով սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի երկակի խնդիր կազմելու կանոնները:

Օրինակ 1. Ուղիղ խնդիր՝

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 \sim \\ y_2 \ge 0 \end{matrix}:$$

Երկակի խնդիր՝

$$f = 14y_1 + 10y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 3 \\ y_1 \sim, y_2 \ge 0 \end{cases}:$$

Օրինակ 2. Ուղիղ խնդիր՝

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 \ge 0 \\ y_2 \le 0 \end{matrix} :$$

Երկակի խնդիր՝

$$f = 14y_1 + 10y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0 \end{cases} :$$

Օրինակ 3. Ուղիղ խնդիր՝

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \sim, x_2 \le 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \end{matrix} :$$

Երկակի խնդիր՝

$$f = 14y_1 + 10y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 4 \\ y_1 + y_2 \le 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases} :$$

Օրինակ 4. Ուղիղ խնդիր՝

$$f = 14y_1 + 10y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 4 \\ y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 \le 0, y_2 \sim \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 \le 0 \\ x_2 \sim \end{matrix} :$$

Երկակի խնդիր՝

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \leq 0, x_2 \sim : \end{cases}$$

Այսպիսով, եթե սովորական տեսքի ուղիղ խնդրում փոխվում է որևէ i-րդ սահմանափակման նշան ($\geq, =$), ապա այն համապատասխանաբար անդրադառնում է երկակի խնդրում ներմուծվող i-րդ փոփոխականի նշանի վրա:

Իսկ եթե ուղիղ խնդրում փոխվում է որևէ j-րդ փոփոխականի նշան ($\leq 0, \sim$), ապա այն համապատասխանաբար անդրադառնում է երկակի խնդրի j-րդ սահմանափակման նշանի վրա (տե՛ս [1], էջ 133-135):

5.2. Երկակիության տեսության հիմնական անհավասարումը և առաջին թեորեմը

Դիցուք տրված է ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգ՝ Խ1 և Խ2:

Հիմնական անհավասարում: ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների ցանկացած զույգի բոլոր թույլատրելի լուծումների համար մաքսիմացման խնդրի նպատակային ֆունկցիայի արժեքը չի գերազանցում մինիմացման խնդրի նպատակային ֆունկցիայի արժեքին:

Հետևանք 1 (օպտիմալության բավարար պայման): Եթե որևէ $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) \in (X_p(Խ1), Y_p(Խ2))$ համար $z(\boldsymbol{x}^0) = f(\boldsymbol{y}^0)$, ապա

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^0 \in X^*(Խ1) \\ \boldsymbol{y}^0 \in Y^*(Խ2) \end{cases}.$$

Առաջին թեորեմ (հիմնական թեորեմ):

Սովորական տեսքի ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների ցանկացած զույգի համար ճշմարիտ է հետևյալ պնդումներից միայն և միայն մեկը:

1. Եթե խնդիրներից մեկն ունի լավագույն լուծում, ապա մյուսն էլ ունի լավագույն լուծում, և այդ խնդիրների նպատակային ֆունկցիաների լավագույն արժեքներն իրար հավասար են՝ $z^* = f^*$:

2. Եթե խնդիրներից մեկը լավագույն լուծում չունի այն պատճառով, որ նպատակային ֆունկցիան թույլատրելի տիրույթում սահմանափակ չէ, ապա մյուսի թույլատրելի տիրույթը դատարկ է:

3. Երկու խնդիրների թույլատրելի տիրույթներն էլ դատարկ են:

Հետևանք 2: Եթե սովորական տեսքի ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգի թույլատրելի տիրույթները դատարկ չեն, ապա երկուսն էլ ունեն լավագույն լուծումներ, և նպատակային ֆունկցիաների լավագույն արժեքները հավասար են:

Դիտողություն: Հնարավոր է, որ երկակի խնդիրներից մեկը ունենա անթիվ բազմությամբ լավագույն լուծումներ, իսկ մյուսը՝ միակ (բերել օրինակ):

Օրինակ 1: Դիտարկենք ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների արդեն հայտնի զույգը՝ Խ3.1-ը և Խ5.1-ը:

Հիմնական անհավասարումից $\Rightarrow \forall\, \mathbf{y}^0 \in Y_p$ (Խ 5.1) համար $f(\mathbf{y}^0) \geq z(\mathbf{x}^*) = 34$: Օրինակի համար՝ $\mathbf{y}^0 = (3,2) \in Y_p$ (Խ 5.1), $f(\mathbf{y}^0) = 52 > 34$:

Հիմնական թեորեմից $\Rightarrow$ քանի որ Խ 3.1-ը ունի լավագույն լուծում, և $z^*_{max} = 34$, ապա Խ 5.1-ն էլ ունի լավագույն լուծում, և

$f^*_{min} = 34$: Եթե Խ5.1-ը լուծենք գծապատկերով, կստանանք՝ $y^*_1 = 1, y^*_2 = 2$, $f^*_{min} = 34$: Ստացված արդյունքները համընկնում են երրորդ և չորրորդ բաժիններում կատարված հետազոտությունների արդյունքների հետ:

Օրինակ 2: Գտնել հետևյալ ԳԾԽ-ի նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը (եթե խնդիրն ունի լավագույն լուծում):

Խ 1.

$$z = 18x_1 + 44x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \Bigg| \quad \begin{matrix} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 : \end{matrix}$$

Կազմենք երկակի խնդիրը՝ ներմուծելով $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ փոփոխականներ.

Խ 2.

$$f = y_1 + 4y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \leq 18 \\ 4y_1 + y_2 \leq 44 \\ -4y_1 + 3y_2 \leq 3 \\ y_1 \geq 0\ y_2 \geq 0 : \end{cases}$$

Լուծելով Խ2-ը գծապատկերով (փորձեք ինքներդ)՝ կստանանք՝ $y^*_1 = 3, y^*_2 = 5, f^*_{\max} = 23$: Հիմնական թեորեմից $\Rightarrow$ Խ1-ն էլ ունի լավագույն լուծում և $z^*_{\min} = 23$:

Եթե որևէ կերպ գտնենք այնպիսի $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in X_{\text{թ}}$(Խ1), որ $z(\mathbf{x}') = 23$, ապա, ըստ հետևանք 1-ի, այն կլինի Խ1-ի լավագույն լուծում: Հետագա շարադրանքում կնկարագրենք $\mathbf{x}^*$ լավագույն լուծում գտնելու տարբեր եղանակներ:

Դիտարկենք $\mathbf{x}' = \left(\frac{19}{15}, 0, \frac{1}{15}\right) \in X_{\text{թ}}(\text{Խ}1), z(\mathbf{x}^*) = 23 = f^*_{\max}$, հետևաբար $\mathbf{x}'$-ը Խ1-ի լավագույն լուծում է:

Այսպիսով, եթե ԳԾԽ-ն ունի երկու սահմանափակում և երկուսից ավել փոփոխականներ, ապա նրա երկակի խնդիրը կունենա ընդամենը երկու փոփոխական, և այն հեշտորեն կարելի է լուծել գծապատկերով, իսկ այնուհետև այդ լուծումն օգտագործել սկզբնական խնդիրը հետազոտելու համար:

Դիտարկենք $\mathbf{x^0} = (1, 0, 0)$ և $\boldsymbol{y^0} = (1,3)$ վեկտորները:

$z(\mathbf{x}^0) = 18, f(\boldsymbol{y}^0) = 21$, ստացվեց $z(\mathbf{x^0}) < f(\boldsymbol{y^0})$, որը թվում է, թե հակասում է հիմնական անհավասարմանը:

Սակայն պետք է ուշադրություն դարձնել, որ $\mathbf{x}^0 \notin X_{\text{թ}}(\text{Խ}1)$:

Օրինակ 3. Օգտվելով երկակիության տեսությունից՝ պատասխանել՝ արդյոք ուղիղ և երկակի խնդիրներն ունեն լավագույն լուծումներ:

$$f = -5y_1 - 7y_2 + 23y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 10y_1 - y_2 + 4y_3 \le 16 \\ -7y_1 + 4y_2 - 9y_3 \ge -8 \\ 4y_1 + 6y_2 - 5y_3 \ge -12 \\ y_1\sim, y_2 \le 0, y_3 \ge 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 \le 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3\sim \end{array} \right. :$$

Ներմուծենք $x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\sim$ փոփոխականներ և կազմենք երկակի խնդիրը՝

$$z = 16x_1 - 8x_2 - 12x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -5 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \ge -7 \\ 4x_1 - 9x_2 - 5x_3 \le 23 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\sim \end{cases}$$

Փորձելով՝ տեսնում ենք, որ $\begin{cases} \boldsymbol{y}^0 = (0,-2,0) \in \mathrm{Y}_{\text{թ}} \\ \boldsymbol{x}^0 = (-\frac{1}{2},0,0) \in \mathrm{X}_{\text{թ}} \end{cases} \Rightarrow$ ըստ հետևանք 2-ի՝ ուղիղ և երկակի խնդիրներն ունեն լավագույն լուծումներ: Նրանցից որևէ մեկը կարելի է բերել կանոնական տեսքի և լուծել սիմպլեքս մեթոդով, որի վերջնական աղյուսակում կլինեն երկու խնդիրների լավագույն լուծումները (փորձեք ինքնուրույն):

5.3. Երկակիության II թեորեմը

Դիցուք տրված է ոչ բացասական փոփոխականներով ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգ՝ Խ1 և Խ2:

II թեորեմ (հավասարակշռության թեորեմ):

Դիցուք $\left(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*\right) \in \left(X_{\text{թ}}(\text{Խ}1), Y_{\text{թ}}(\text{Խ}2)\right)$: Որպեսզի $\left(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*\right) \in \left(X^*(\text{Խ}1), Y^*(\text{Խ}2)\right)$ անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{y}^* \cdot A - \boldsymbol{c}\right)_j \cdot x_j^* = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \\ \left(A \cdot \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\right)_i \cdot y_i^* = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$ պայմանները:

Այս թեորեմի տնտեսագիտական մեկնաբանումները տե՛ս [1], էջ 148-149:

Օրինակ 1: Դիտարկենք 5.1 բաժնի ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգը՝ Խ5.1 և Խ5.3: Գրենք II թեորեմի պայմանները՝

$$\begin{cases}(2x_1^* + x_2^* - 14)\cdot y_1^* = 0\\ (x_1^* + x_2^* - 10)\cdot y_2^* = 0\\ (2y_1^* + y_2^* - 4)\cdot x_1^* = 0\\ (y_1^* + y_2^* - 3)\cdot x_2^* = 0\end{cases}:$$

Գիտենք, որ Խ5.1-ի լավագույն լուծումն է՝ $x_1^* = 4, x_2^* = 6$: Տեղադրելով այն վերը նշված համակարգում՝ կստանանք՝ $y_1^* = 1, y_2^* = 2$, որը համընկնում է մինչ այժմ $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$-ը գտնելու այլ եղանակներով ստացված արդյունքների հետ:

Նշենք, որ եթե ունենայինք միայն Խ5.3-ի լուծումը՝ $y_1^* = 1, y_2^* = 2$, ապա նույն համակարգից հեշտորեն կստացվեր $x_1^* = 6, x_2^* = 4$ Խ 5.1-ի լավագույն լուծումը:

Այսինքն՝ հավասարակշռության թեորեմը հնարավորություն է տալիս ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգի համար ունենալով խնդիրներից որևէ մեկի լավագույն լուծումը գտնելու մյուսի լավագույն լուծումը:

Օրինակ 2. Լուծել հետևյալ խնդիրը՝ օգտվելով երկակի խնդրի գծապատկերով լուծման արդյունքից և II թեորեմից:

$$z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

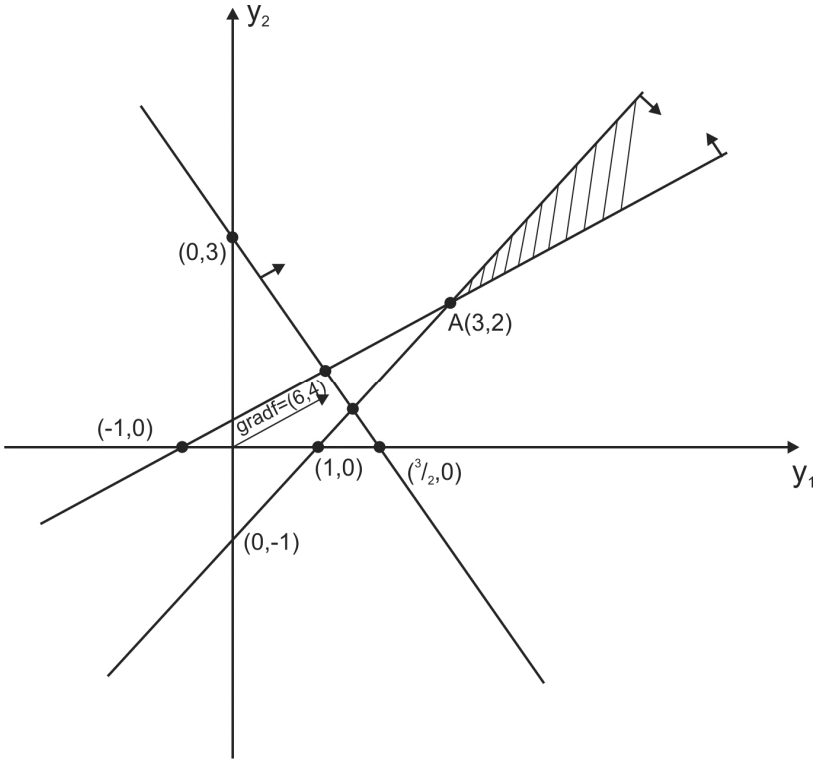
$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6\\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{array}\right| \begin{array}{l} y_1\sim\\ y_2\sim\end{array}:$$

Կազմենք երկակի խնդիրը՝ ներմուծելով $y_1\sim$, $y_2\sim$ փոփոխականներ:

$$f = 6y_1 + 4y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1 \sim, y_2 \sim : \end{cases}$$

Լուծենք այս խնդիրը գծապատկերով:



գծագիր 6

Քանի որ $gradf = (6; 4)$, և խնդիրը մինիմացման է, ապա լավագույն լուծումը $A(3; 2)$-ն է $\Longrightarrow y_1^* = 3, y_2^* = 2, f_{min}^* = 26$

Գրենք II թեորեմի պայմանները՝

$$\begin{cases} (2x_1^* - x_2^* + x_3^* - 6) \cdot y_1^* = 0 \\ (x_1^* + 2x_2^* - x_3^* - 4) \cdot y_2^* = 0 \\ (2y_1^* + y_2^* - 3) \cdot x_1^* = 0 \\ (-y_1^* + 2y_2^* - 1) \cdot x_2^* = 0 : \end{cases} \quad (*)$$

Տեղադրելով $y_1^* = 3,\ y_2^* = 2$՝ կստանանք՝ $x_1^* = 0, x_2^* = 10,\ x_3^* = 16, z_{\max}^* = 26$:

ԳԼՈՒԽ II
ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ

ԲԱԺԻՆ 1
Նախնական գաղափարներ

Դիտարկենք կոնֆլիկտային իրավիճակ, երբ մասնակիցները երկուսն են, և նրանց շահերը միմյանց հակադիր են: Կոնֆլիկտային իրավիճակը նկարագրելու և վերլուծելու համար կազմենք դրա ֆորմալ մոդելը, որը կանվանենք **խաղ,** իսկ մասնակիցներին՝ **խաղացողներ**: Խաղացողներից յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր վարվելակերպեր: Դիցուք առաջին խաղացողի վարվելակերպերն են $A_1, A_2, \dots, A_m$, իսկ երկրորդ խաղացողինը՝ $B_1, B_2, \dots, B_n$: Առաջին խաղացողը կարող է ընտրել որևէ A_i $(i = 1, .., m)$ վարվելակերպ, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ B_j $(j = 1, \dots, n)$ վարվելակերպ: (A_i, B_j) վարվելակերպերի ընտրության արդյունքում, համաձայն խաղի կանոնների, կստացվի որոշակի թվային արժեք (արդյունք)՝ a_{ij}, որը կանվանենք առաջին խաղացողի ստացած շահում, ընդ որում՝ երկրորդ խաղացողի շահումը կլինի -a_{ij}: Բոլոր (A_i, B_j) վարվելակերպերի ընտրությամբ կստացվի $A_{mxn} = (a_{ij})$ մատրիցը, որը կանվանենք առաջին խաղացողի **շահումների մատրից,** իսկ նկարագրված խաղը՝ A մատրիցով 0-ական գումարով **մատրիցային խաղ**:

$\underline{V} = \max\limits_{1\le i\le m} \min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}$ թիվը, որը ստացվում է՝ մատրիցի յուրաքանչյուր տողից ընտրելով փոքրագույն տարրը, այնուհետև ընտրված թվերից վերցնելով մեծագույնը, կոչվում է **խաղի ստորին արժեք:**

Խաղի ստորին արժեքն այն երաշխավորված շահումն է, որը կունենա առաջին խաղացողը երկրորդ խաղացողի կամայական վարվելակերպի ընտրության դեպքում:

$\overline{V} = \min\limits_{1\le j\le n} \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ թիվը, որը ստացվում է մատրիցի յուրաքանչյուր սյունակից ընտրելով մեծագույն տարրը, այնուհետև ընտրված թվերից վերցնելով փոքրագույնը, կոչվում է խաղի **վերին արժեք:**

Խաղի վերին արժեքն այն նվազագույն կորուստն է, որը կունենա երկրորդ խաղացողը առաջին խաղացողի կամայական վարվելակերպի ընտրության դեպքում:

Ենթադրվում է, որ երկու խաղացողներն էլ գնում են նվազագույն ռիսկի, այսինքն՝ խաղացողներից յուրաքանչյուրը, հաշվի առնելով, որ ինքը չի տեսնում մյուս խաղացողի ընտրությունը, ընտրում է իր համար վատագույն վարվելակերպերից լավագույնը: Այսպիսով՝ առաջին խաղացողը երկրորդ խաղացողի ցանկացած վարվելակերպի ընտրության դեպքում կապահովի $\underline{V}$ շահում, իսկ երկրորդ խաղացողը չի կարող կորցնել $\overline{V}$ թվից շատ:

Հայտնի է, որ $\underline{V} \le \overline{V}$ ցանկացած $A_{mxn} = (a_{ij})$ մատրիցի համար:

Եթե $\underline{V} = \overline{V} = a_{i_0 j_0}$, ապա կասենք, որ խաղը լուծվում է մաքուր վարվելակերպերով: Առաջին խաղացողը միշտ կընտրի A_{i_0}, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ B_{j_0} վարվելակերպը: Խաղի լուծումն է (i_0, j_0) զույգը, որն անվանում են **հավասարակշռության իրավիճակ** կամ **թամբակետ**, իսկ խաղի արժեքն է $a_{i_0 j_0}$-ն: Պարզ է, որ եթե մատրիցը բաղկացած է մեկ տողից (սյունակից), ապա տողի (սյունակի) ամենափոքր (ամենամեծ) տարրը կլինի խաղի արժեքը:

Սահմանում: Առաջին խաղացողի համար A_i վարվելակերպը գերակայող (նախընտրելի) է A_k վարվելակերպի նկատմամբ, եթե $a_{ij} \geq a_{kj}, j = 1, \dots, n$: Երկրորդ խաղացողի համար B_j վարվելակերպը գերակայող (նախընտրելի) է B_p վարվելակերպի նկատմամբ, եթե $a_{ij} \leq a_{ip}, i = 1, .., m$:

Բնական է, որ խաղացողը գերակայվող վարվելակերպերը չի ընտրի: Հետևաբար շահումների մատրիցը կարելի է պարզեցնել՝ հեռացնելով գերակայվող տողերը և սյունակները:

Օրինակ 1. A և B խաղացողները թղթի վրա գրում են 1, 2 և 3 թվերից որևէ մեկը (այնպես, որ մյուսը չտեսնի), այնուհետև այն ցույց են տալիս միմյանց: Եթե երկու թիվն էլ նույն զույգության են, ապա A-ն շահում է այդ թվերի գումարին հավասար դ.մ., հակառակ դեպքումB-ն է շահում այդ թվերի գումարին հավասար դ.մ.: Կազմել առաջին խաղացողի շահումների մատրիցը:

Նկարագրված խաղում առաջին խաղացողն ունի երեք վարվելակերպ՝ A_1(գրել 1), A_2(գրել 2) և A_3(գրել 3): Երկրորդ խաղացողն էլ ունի երեք վարվելակերպ՝ B_1(գրել 1), B_2(գրել 2) և B_3 (գրել 3): Ուստի խաղի շահումների մատրիցը կլինի՝

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Օրինակ 2.

Հետևյալ մատրիցի համար որոշել գերակայող (գերակայվող) վարվելակերպերը, հավասարակշռության իրավիճակի (թամբակետի) առկայությունը:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Լուծում: A_2 վարվելակերպը գերակայում է A_3 վարվելակերպին (երկրորդ տողի բոլոր տարրերը փոքր չեն երրորդ տողի համապատասխան տարրերից), հետևաբար առաջին խաղացողի համար A_3 վարվելակերպի ընտրությունը բացառվում է, և այն մատրիցից կհեռացնենք՝ ստանալով

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

B_2 վարվելակերպը գերակայում է B_1,B_3 և B_4 վարվելակերպերին և դրանք մատրիցից հեռացնելով՝ կստանանք $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ մատրիցը, որտեղ A_2 վարվելակերպը գերակայող է A_1 վարվելակերպի նկատմամբ: Պարզեցման արդյունքում մատրիցում կմնա $a_{22} = 5$

տարրը. $(i_0, j_0) = (2,2)$ զույգը կլինի հավասարակշիռ իրավիճակ կամ թամբակետ, իսկ խաղի արժեքն է $a_{22} = 5$:

Այսպիսով, եթե պարզեցման արդյունքում շահումների մատրիցում մնա միայն մեկ տարր, ապա մատրիցն ունի թամբակետ: Նշենք, որ հնարավոր է, որ մատրիցը չպարզեցվի, բայց ունենա թամբակետ:

Օրինակ 3. Գտնել $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 & 17 \\ 8 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ մատրիցային խաղի ստորին և վերին արժեքները:

$$\begin{array}{cccccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \min \\ A_1 & 7 & 10 & 4 & 1 & 1 \\ A_2 & 6 & 8 & 5 & 17 & \mathbf{5} \quad \max \\ A_3 & 8 & -3 & 2 & 11 & -3 \\ \max & 8 & 10 & \mathbf{5} & 17 & \\ & & & \min & & \end{array}$$

Մատրիցի յուրաքանչյուր տողից ընտրում ենք փոքրագույն արժեքը, այնուհետև ընտրված թվերից վերցնում ենք մեծագույնը: Կստանանք $\underline{V} = \max\limits_{1 \le i \le m} \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij} = 5$ թիվը՝ խաղի ստորին արժեքը:

Մատրիցի յուրաքանչյուր սյունից ընտրում ենք մեծագույն արժեքը, այնուհետև ընտրված թվերից վերցնելով փոքրագույնը՝ կստանանք $\overline{V} = \min\limits_{1 \le j \le n} \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij} = 5$ թիվը՝ խաղի վերին արժեքը:

Մեր օրինակում $\underline{V} = \overline{V}$ =5, այսինքն՝ ստորին և վերին արժեքները հավասար են, հետևաբար ըստ վերը նշված սահմանման՝ խաղը լուծվում է մաքուր վարվելակերպերով և ունի թամբակետ՝ $(i_0, j_0) = (2,3)$, իսկ խաղի արժեքն է՝ $a_{23} = 5$:

ԲԱԺԻՆ 2
Մատրիցային խաղի խառն ընդլայնումը

Եթե մատրիցային խաղը մաքուր վարվելակերպերով լուծում չունի, այսինքն՝ $\underline{V} < \overline{V}$, ապա դիտարկում ենք խաղի ընդլայնված տարբերակը: Այս դեպքում լուծել մատրիցային խաղը, նշանակում է, որոշել, թե առաջին և երկրորդ խաղացողները քանի անգամ (ինչ հաճախականությամբ) կընտրեն իրենց մաքուր վարվելակերպերից յուրաքանչյուրը խաղի բազմակի կրկնությունների դեպքում:

Դիցուք տրված է $A_{m\times n} = (a_{ij})$ մատրիցային խաղը:

Սահմանում: Կասենք, որ $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$ վեկտորը հանդիսանում է առաջին խաղացողի խառը վարվելակերպ, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

$$0 \le x_i \le 1 \ (\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m}),$$
$$x_1 + \dots + x_m = 1,$$

որտեղ x_i թիվը ցույց է տալիս, թե ինչ հավանականությամբ է առաջին խաղացողը ընտրում i -րդ վարվելակերպը:

Նույն ձևով կասենք, որ $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ վեկտորը հանդիսանում է երկրորդ խաղացողի խառը վարվելակերպ, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

$$0 \le y_j \le 1 \ (j = 1, \dots, n),$$

$$y_1 + \cdots + y_n = 1,$$

որտեղ y_j թիվը ցույց է տալիս, թե ինչ հավանականությամբ է երկրորդ խաղացողը ընտրում j-րդ վարվելակերպը: $X_թ$-ով և $Y_թ$-ով նշանակենք համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների վարվելակերպերի բազմությունները:

$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ ֆունկցիան կոչվում է առաջին խաղացողի շահումների ֆունկցիա և ցույց է տալիս առաջին խաղացողի միջին շահումը, եթե նա ընտրել է $\boldsymbol{x}$ խառը վարվելակերպը, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ $\boldsymbol{y}$ խառը վարվելակերպը:

Առաջին խաղացողի նպատակն է ընտրել $\boldsymbol{x^0}$ խառը վարվելակերպ այնպես, որ $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ շահումների ֆունկցիան ընդունի առավելագույն արժեք երկրորդ խաղացողի ցանկացած $\boldsymbol{y}$ վարվելակերպի համար: Իսկ երկրորդ խաղացողի նպատակը $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ շահումների ֆունկցիայի նվազագույն արժեքն ապահովող $\boldsymbol{y^0}$ խառը վարվելակերպի ընտրությունն է առաջին խաղացողի ցանկացած $\boldsymbol{x}$ վարվելակերպի համար:

Սահմանում: Կասենք, որ $(\boldsymbol{x^0}, \boldsymbol{y^0}) \in (X_թ, Y_թ)$ վեկտորների զույգը հանդիսանում է մատրիցային խաղի լավագույն լուծում կամ թամբակետ, եթե $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^0) \leq V(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) \leq V(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y})$, ցանկացած $\boldsymbol{x} \in X_թ$ և $\boldsymbol{y} \in Y_թ$ խառը վարվելակերպերի համար, իսկ $V^* = V(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$ թիվը խաղի արժեքն է:

Ճիշտ են հետևյալ պնդումները:

Պնդում 1: Եթե մատրիցային խաղն ունի լուծում, և որևէ խաղացողի i-րդ վարվելակերպը գերակայում է նրա k-րդին, ապա A մատրիցից հեռացնելով k-րդ տողը կամ սյունակը՝ կստանանք մի նոր խաղ, որի արժեքը նույնն է, ինչ որ սկզբնական խաղինը:

Օպտիմալության հայտանիշ: Որպեսի $(\boldsymbol{x^0}, \boldsymbol{y^0}) \in (\mathrm{X}_{\text{թ}}, \mathrm{Y}_{\text{թ}})$ վեկտորների զույգը լինի լավագույն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^0 \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_i^0 \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^0 \text{ , i} = 1, \dots, \text{m; } j = 1, \dots, n \text{ (1):}$$

Թեորեմ 1: Դիցուք A մատրիցով խաղում $\boldsymbol{x}^0 = ({x_1}^0, \dots, {x_m}^0)$, և $\boldsymbol{y}^0 = ({y_1}^0, \dots, {y_n}^0)$ վեկտորները համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների լավագույն ստրատեգիաներն են, իսկ V^*-ն՝ խաղի արժեքը: Այդ դեպքում եթե որևէ i-ի համար $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} {y_j}^0 < V^*$, ապա ${x_i}^0 = 0, \text{i} \in \{1,2, \dots, \text{m}\}$, եթե որևէ j-ի համար $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} {x_i}^0 > V^*$, ապա ${y_j}^0 = 0, j \in \{1,2, \dots, n\}$:

Դիտողություն 1: Օրինակներով կարելի է տեսնել, որ խաղացողներից մեկը կարող է ունենալ անթիվ բազմությամբ լավագույն ստրատեգիաներ, մինչդեռ տվյալ մատրիցային խաղի արժեքը **միակն է:**

Դիտողություն 2: Մատրիցային խաղը լուծելու համար պետք է գտնել այնպիսի $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\mathrm{X}_{\text{թ}}, \mathrm{Y}_{\text{թ}})$ վեկտորների զույգ և V^* թիվ, որոնք բավարարեն

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq V^*, (j = 1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq V^*, (\text{i} = 1, \dots, \text{m}) \end{cases}$$

անհավասարումների համակարգին: Սակայն այս եղանակը գործնականում չի կիրառվում, եթե A մատրիցի չափերը մեծ են:

Օրինակ 4. Տրված է

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 50 & 50 \\ 1 & 1 & 0.1 \\ 10 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$ մատրիցով խաղը:

Ստուգել, որ $\boldsymbol{x}^0$ =(1/6, 0, 5/6) և $\boldsymbol{y}^0$ =(49/54, 5/54, 0) վարվելակերպերը համապատասխանաբար լավագույն են առաջին և երկրորդ խաղացողների համար և գտնել խաղի արժեքը:

Լուծում: Տեղադրելով տրված $\boldsymbol{x^0}$-ն և $\boldsymbol{y^0}$-ն (1)-ում՝ կստանանք, որ այդ պայմանները ճիշտ են, և $V^* = \frac{55}{6}$:

ԲԱԺԻՆ 3
Մատրիցային խաղի լուծումը գծապատկերով $2xn$ կամ $mx2$ չափերի խաղերի համար

Եթե $A_{m\times n}$ =(a_{ij}) մատրիցային խաղում $m = 2$ կամ $n = 2$, կամ մատրիցը բերվում է այդ տեսքի պարզեցման արդյունքում, ապա խաղը կարելի է լուծել գծապատկերով: Դիտարկենք $2 \times n$ տեսքի հետևյալ խաղը՝

		y_1	y_2		y_n
		$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	…	$\boldsymbol{B_n}$
x_1	A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
$1-x_1$	A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}

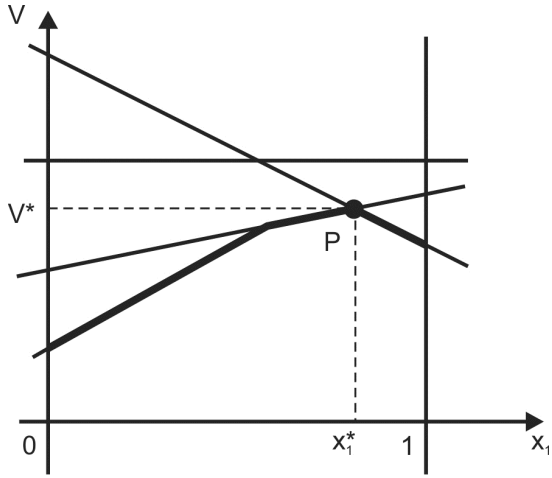
Առաջին խաղացողը ունի երկու վարվելակերպեր՝ A_1 և A_2: Երկրորդ խացաղողն ունի n վարվելակերպեր՝ $B_1, B_2, \dots, B_n$: Դիցուք խաղը չունի լուծում մաքուր ստրատեգիաներով: Առաջին

խաղացողի շահումների ֆունկցիաները ցանկացած $(x_1, 1-x_1)$ խառը վարվելակերպի $(x_1 \epsilon [0,1])$ և երկրորդ խաղացողի $B_1, B_2, \dots, B_n$ մաքուր վարվելակերպերի դեպքում բերված են ստորև:

II-ի մաքուր վարվելակերպ	I-ի սպասվող շահում
B_1	$(a_{11}-a_{21})x_1+a_{21}=V_1(x_1)$
B_2	$(a_{12}-a_{22})x_1+a_{22}=V_2(x_1)$
…	…
B_n	$(a_{1n}-a_{2n})x_1+a_{2n}=V_n(x_1)$

Այս մատրիցային խաղը կարելի է լուծել գրաֆիկորեն՝ $x_1 0V$ հարթությունում կառուցելով $V_1(x_1)$, $V_2(x_1)$,..., $V_n(x_1)$ գծային ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Խաղի արժեքը գտնելու համար նախ պետք է կառուցել $H(x_1)=\min\limits_{1\le j\le n}\left(a_{1j}x_1+a_{2j}(1-x_1)\right)$ $x_1\in[0;1]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը գծագիր 1-ի վրա նշված է հոծ բեկյալով և կոչվում է շահումների ֆունկցիաների ստորին պարուրիչ: Այնուհետև պետք է գտնել $H(x_1)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը՝ $H(x_1^*)=V^*$, որն էլ կլինի խաղի արժեքը: Այսպիսով՝ (x_1^*, x_2^*)-ը, որտեղ $x_2^*=1-x_1^*$ կլինի առաջին խաղացողի լավագույն ստրատեգիան, իսկ V^*-ը՝ խաղի արժեքը:



գծագիր 1

Թե այնուհետև ինչպես գտնել երկրորդ խաղացողի լավագույն ստրատեգիան, նկարագրված է ստորև բերված օրինակում:

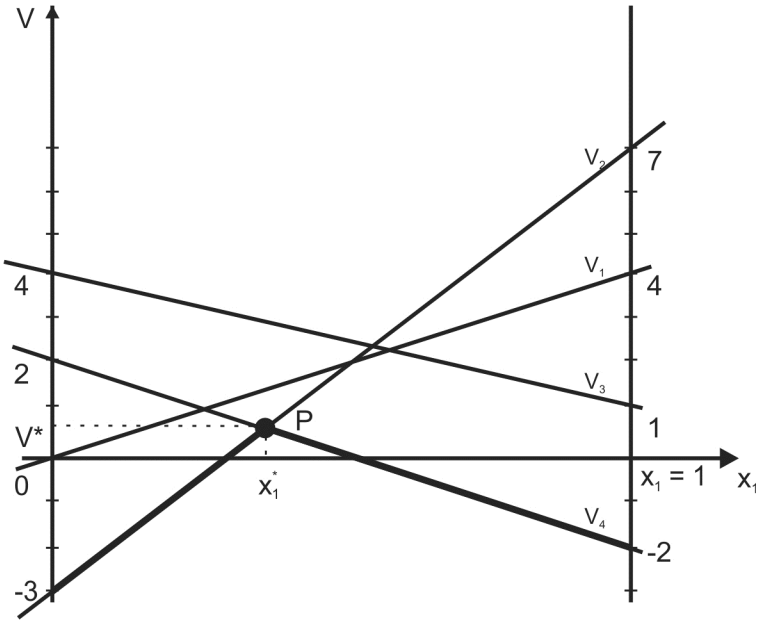
Օրինակ 5. Լուծել հետևյալ մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Լուծում: Քանի որ առաջին խաղացողն ունի երկու վարվելակերպ, նախ կգտնենք $\mathbf{x}^0$ –ն (առաջին խաղացողի լավագույն վարվելակերպը): Հաշվի առնելով վերը ասվածը՝ կստանանք՝

$$\begin{array}{ccc} B_1: 4x_1 = V_1 & & 4x_1 = V_1 \ (1) \\ B_2: x_1 - 3x_2 = V_2 & & 10x_1 - 3 = V_2 \ (2) \\ B_3: x_1 + 4x_2 = V_3 & => & -3x_1 + 4 = V_3 \ (3) \\ B_4: -2x_1 + 2x_2 = V_4 & & -4x_1 + 2 = V_4 \ (4) \\ x_1 + x_2 = 1 & & x_2 = 1 - x_1 \end{array}$$

Կառուցելով (1)-(4) ուղիղները x_1OV կոորդինատային համակարգում՝ կստանանք հետևյալ գծապատկերը:



գծագիր 2

$P(x_1^*, V^*)$ կետը (2) և (4) ուղիղների հատման կետն է:

Լուծելով $10x_1 - 3 = -4x_1 + 2$ հավասարումը և հաշվի առնելով $x_2 = 1 - x_1$ պայմանը՝ կստանանք $x_1^* = \frac{5}{14}, x_2^* = \frac{9}{14}, V^* = \frac{4}{7}$:

Քանի որ (x_1^*, V^*) կետը չի բավարարում (1) և (3) հավասարումներին, ապա $y_1^* = 0, y_3^* = 0$ (ըստ թեորեմ 1-ի), իսկ y_2^* և y_4^* արժեքները կգտնենք՝ լուծելով

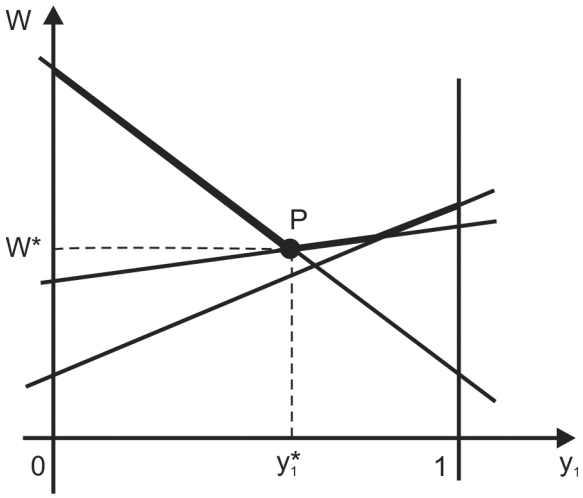
$$\begin{cases} 7y_2^* - 2y_4^* = V^* \\ -3y_2^* + 2y_4^* = V^* \\ y_2^* + y_4^* = 1 \end{cases}$$ հավասարումների համակարգը:

Պատ.՝ $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right), \boldsymbol{y}^* = \left(0, \frac{4}{14}, 0, \frac{10}{14}\right), V^* = \frac{4}{7}$

Դիտողություն: Եթե մատրիցային խաղում երկրորդ խաղացողն ունի երկու մաքուր վարվելակերպեր, իսկ առաջին խաղա-

ցողը՝ m վարվելակերպեր, ապա խաղի շահումների մատրիցը կունենենա հետևյալ տեսքը՝ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$:

Երկրորդ խաղացողի շահումները $(y_1, 1-y_1)$ խառը վարվելակերպերի և առաջին խաղացողի $A_1, A_2, \dots, A_n$ մաքուր վարվելակերպերի դեպքում համապատասխանաբար կլինեն $W_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}(1-y_1)$, i=1,...,m ֆունկցիաները: Խաղի արժեքը գտնելու համար նախ պետք է կառուցել $H(y_1) = \max\limits_{1 \le i \le m}(a_{i1}y_1 + a_{i2}(1-y_1))$, $y_1 \in [0;1]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, (գծ. 3-ի վրա այդ գրաֆիկը նշված բեկյալն է), այնուհետև գտնել $\min\limits_{y \in [o,1]} H(y_1)$ թիվը (գծ. 3-ի վրա դա $P(y_1^*, W^*)$ կետն է y_1OW կոորդինատային հարթության վրա:



գծագիր 3

ԲԱԺԻՆ 4
Մատրիցային խաղի բերումը գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգի: Մատրիցային խաղերի տեսության հիմնական թեորեմը

Ջ. ֆոն Նեյմանի կողմից առաջարկված է մեթոդ, որով ցանկացած մատրիցային խաղ բերվում է գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգի: Մինչև մեթոդի նկարագրությունը ձևակերպենք **մասշտաբի մասին լեմը:**

Դիցուք տրված է $A_{m\times n}=(a_{ij})$ մատրիցային խաղը: Դիտարկենք մի նոր մատրիցային խաղ՝ $A'_{m\times n}$, որի տարրերը ստացվում են՝ a_{ij} տարրերին գումարելով միևնույն հաստատուն c թիվը՝ $A'_{m\times n}=\left(a_{ij}+c\right)=(a'_{ij})$:

Լեմ: Եթե $\left(\boldsymbol{x^0},\boldsymbol{y^0}\right)$ վեկտորների զույգը լավագույն վարվելակերպ է՝ $A_{m\times n}=(a_{ij})$ մատրիցային խաղի համար, ապա այն լավագույն վարվելակերպ է (թամբակետ) նաև $A'_{m\times n}=(a'_{ij})$ մատրիցային խաղի համար, իսկ $V_{A'}=V_A+c$:

Օգտվելով մասշտաբի մասին լեմից՝ կարող ենք ուսումնասիրել միայն դրական տարրերով մատրիցներ:

Դիցուք տրված է $A_{m\times n}=(a_{ij})$ մատրիցային խաղը, որի բոլոր տարրերը դրական են (հակառակ դեպքում, օգտվելով մասշտաբի մասին լեմից, մատրիցի բոլոր տարրերը կմեծացնենք այնպիսի c հաստատունով, որ բոլոր տարրերը դառնան դրական): Խաղի արժեքի սահմանումից հետևում է, որ այն նույնպես կլինի դրական:

Նշանակենք $V(\boldsymbol{x})=\min_{1\le j\le n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i)$, որտեղ $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)\in X_p$: Առաջին խաղացողի նպատակն է ընտրել այն-

պիսի $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in X_{թ}$ վարվելակերպ, որ երկրորդ խաղացողի ցանկացած B_i $(i = 1,2, \dots, n)$ մաքուր վարվելակերպի դեպքում ապահովի առնվազն V շահում, և V-ն էլ հնարավորինս մեծ լինի: Այսինքն՝ ընտրել այնպիսի $\boldsymbol{x} \in X_{թ}$ լավագույն վարվելակերպ, որ $V^* = \max_{x \in X_p} V(\boldsymbol{x}) = \max\limits_{x \in X_p}(\min_{j=1,\dots,n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i\right))$:

Ճիշտ է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: Ցանկացած մատրիցայի խաղ ունի լուծում:

Առաջին խաղացողի խնդիրը կգրվի հետևյալ կերպ՝

Խնդիր1: $V \to max$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq V \ (j = 1, \dots, n) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, (i = 1, \dots, m): \end{cases}$$

Նշանակենք $W(\boldsymbol{y}) = \max_{1 \leq i \leq m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j)$,, որտեղ $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m) \in Y_{թ}$: Երկրորդ խաղացողի նպատակն է ընտրել այնպիսի $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m) \in Y_{թ}$ վարվելակերպ, որ առաջին խաղացողի ցանկացած $A_j (j = 1,2, \dots, m)$ մաքուր վարվելակերպի դեպքում կորցնի ոչ ավել, քան W -ն է և W-ն էլ հնարավորինս փոքր լինի: Այսինքն՝ ընտրել այնպիսի $\boldsymbol{y} \in Y_{թ}$ լավագույն վարվելակերպ, որ $W^* = \min_{y \in Y_p} W(y) = \min\limits_{y \in Y_p}(max_{i=1,\dots,m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j))$:

Երկրորդ խաղացողի խնդիրը կգրվի հետևյալ կերպ՝

Խնդիր 2: W→ min

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le W \ (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \ge 0, (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Բաժանենք (1) համակարգի բոլոր անհավասարումներն ու հավասարումը V-ի, իսկ (2) համակարգինը՝ W-ի (դա հնարավոր է, քանի որ ըստ ենթադրության՝ $V > 0, W > 0$, և անհավասարումների նշանները չեն փոխվի) և կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$\frac{x_i}{V} = p_i, (i = 1, \dots, m)$, և $\frac{y_j}{W} = q_j, (j = 1, \dots, n)$, ապա կստանանք

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1 \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{V} \to min \\ p_i \ge 0, (i = 1, \dots, m) \end{cases} \text{ և } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1 \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{W} \to max \\ q_j \ge 0, (j = 1, \dots, n): \end{cases}$$

Այսպիսով՝ առաջին և երկրորդ խաղացողների խնդիրները հետևյալն են՝

Խնդիր1: Գտնել $\boldsymbol{p} \in R^m$, որ

$$z = \sum_{i=1}^{m} p_i \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1 \\ p_i \ge 0, i = 1,2, \dots, m: \end{cases}$$

և

Խնդիր2: Գտնել $\in R^n$, որ

$$f = \sum_{j=1}^{n} q_j \to max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 1 \\ q_j \geq 0, j = 1, \dots, n: \end{cases}$$

Ստացված երկու խնդիրները գծային ծրագրման այնպիսի երկակի խնդիրներ են, որոնք միշտ ունեն լավագույն լուծում (տե՛ս [1], էջ 137-144):

Լուծելով ԳԾ խնդիրներից որևէ մեկը, օրինակ՝ սիմպլեքս մեթոդով՝ (տե՛ս [1], էջ 49-98), կստանանք p_i^0 $(i = 1, \dots, m), q_j^0$ $(j = 1, \dots, n)$ արժեքները: Ապա խաղի V^* արժեքը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$V^* = \left(\sum_{j=1}^{n} q_j^0\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i^0\right)^{-1}:$$

Մատրիցային խաղի լավագույն լուծումները կստանանք $x_i^0 = V p_i^0$ $(i = 1, \dots, m)$, $y_j^0 = V q_j^0$ $(j = 1, \dots, n)$ պայմաններից, իսկ խաղի արժեքը կլինի՝ $V - c$ (եթե A մատրիցի տարրերը մեծացվել էին c -ով):

Օրինակ 6. Հետևյալ մատրիցային խաղը բերել գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգի, այնուհետև խնդիրներից որևէ մեկը լուծել սիմպլեքս մեթոդով՝ վերջնական աղյուսակից ստանալով երկու խնդիրների լավագույն լուծումները և խաղի արժեքը:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array}$$

Նախ, պարզեցնելով մատրիցը և հեռացնելով գերակայվող վարվելակերպերը, կստանանք x_2^*=0, $y_4^* = 0$:

Օգտվելով մասշտաբի մասին լեմից ձևափոխենք A մատրիցը A'-ի (գումարենք մատրիցի բոլոր տարրերին 3):

$$A' = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_3 \\ \\ \end{array}$$

Առաջին և երկրորդ խաղացողների $\boldsymbol{x^0} = (x_1, 0, x_3)$ և $\mathbf{y^0} = (y_1{}^0, y_2{}^0, y_3{}^0, 0)$ խառը վարվելակերպերը և խաղի V-ն ու W-ն արժեքը պետք է բավարարեն հետևյալ պայմաններին՝

Խնդիր 1: $V \to max$ **Խնդիր 2:** $W \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_3 \geq V \\ 4x_1 + 6x_3 \geq V \\ 5x_1 + x_3 \geq V \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq W \\ 7y_1 + 6y_2 + y_3 \leq W \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} :$$

Բաժանենք (1) համակարգի բոլոր անհավասարումներն ու հավասարումները V-ի, իսկ (2)-ինը՝ W-ի վրա ($V > 0, W > 0$): Կատարելով $\frac{x_i}{V} = p_i, (i = 1,3)$, և $\frac{y_j}{W} = q_j, (j = 1,2,3)$ նշանակումները՝ կստանանք

Խնդիր 1: $z = p_1 + p_3 \to min$ **Խնդիր2:** $f = q_1 + q_2 + q_3 \to max$

$$\begin{cases} 2p_1 + 7p_3 \geq 1 \\ 4p_1 + 6p_3 \geq 1 \\ 5p_1 + p_3 \geq 1 \\ p_1 \geq 0, p_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} 2q_1 + 4q_2 + 5q_3 \leq 1 \\ 7q_1 + 6q_2 + q_3 \leq 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0 \end{cases}$$

ԳԾ երկակի խնդիրների զույգը:

Լուծելով օրինակ սովորական տեսքի ԳԾ մաքսիմացման խնդիրը սիմպլեքս եղանակով՝ վերջնական սիմպլեքս աղյուսա-

կում կստանանք ԳԾ երկակի խնդիրների $q_1^0 = \frac{4}{33}, q_2^0 = 0, q_3^0 = \frac{5}{33}$, $p_1^0 = \frac{2}{11}, p_3^0 = \frac{1}{11}$, $f^* = z^* = \frac{3}{11}$ լավագույն լուծումները: Հաշվի առնելով, որ $f^* = \frac{1}{V^*}$, կստանանք $V^* = \frac{11}{3}$: Քանի որ $x_i^0 = V^* \cdot p_i^0, y_j^0 = V^* \cdot q_j^0$, ապա մատրիցային խաղի $\mathbf{x^0}$ և $\mathbf{y^0}$ լավագույն խառը վարվելակերպերը կլինեն $\mathbf{x^0} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$ և $\mathbf{y^0} = (\frac{4}{9}, 0, \frac{5}{9}, 0)$: Քանի որ $V^0 = \frac{11}{3}$-ը A' մատրիցային խաղի արժեքն է, ապա A մատրիցայիին խաղի արժեքը կլինի $\frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}$:

ԳԼՈՒԽ III
ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ (ՈԳԾ)

ԲԱԺԻՆ 1
ՈԳԾ խնդիրների լուծումը գծապատկերով

ՈԳԾ խնդիրները որևէ ֆունկցիայի տեղային (լոկալ) կամ համապարփակ (գլոբալ) էքստրեմումներ գտնելու այն խնդիրներն են, որոնցում հետազոտվող ֆունկցիան կամ սահմանափակումների ֆունկցիաներից գոնե մեկը (եթե դրանք կան) ոչ գծային է:

Երկու փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում երբեմն հարմար է օգտվել այդ խնդիրների լուծման գրաֆիկական եղանակից: Նշենք, որ այս եղանակով խնդիրներ լուծելիս ստացվում են f ֆունկցիայի համապարփակ (գլոբալ) էքստրեմումները:

Դիցուք $z = f(x_1, x_2)$-ը $G \subseteq R^2$ տիրույթում որոշված ֆունկցիա է: f ֆունկցիայի մակարդակի գիծ կոչվում է G-ին պատկանող բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց վրա f-ը ընդունում է միևնույն հաստատուն արժեքը:

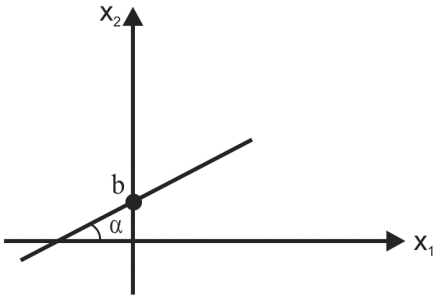
Օրինակ1: Որոշել $z = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in R^2$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը:

Լուծում: Պարզ է, որ ֆունկցիան, օրինակ, 5 արժեք կընդունի R^2 հարթության միայն $x_1^2 + x_2^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ շրջանագծի բոլոր կետերում, այսինքն՝ այդ շրջանագիծը z ֆունկցիայի մակարդակի

գիծն է: Այսպիսով՝ ցանկացած $c \geq 0$ թվի համար $x_1^2 + x_2^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2$ շրջանագիծը z-ի մակարդակի գիծ է (c=0 դեպքում այդ գիծը (0,0) կետն է), իսկ c<0 դեպքը չենք քննարկում, որովհետև z-ը բացասական արժեքներ չի ընդունում:

Ասվածը ամփոփելով՝ եզրակացնում ենք, որ $z = f(x_1, x_2)$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը կառուցելու համար անհրաժեշտ է բոլոր հնարավոր c թվերի համար x_1Ox_2 հարթության վրա կառուցել $f(x_1, x_2) = c$ կորերը: Հետագա օրինակները քննարկելու (ինչպես նաև խնդրագրքում նշված վարժությունների լուծման) համար նշենք որոշ բանաձևերով տրվող կորերի տեսքերը:

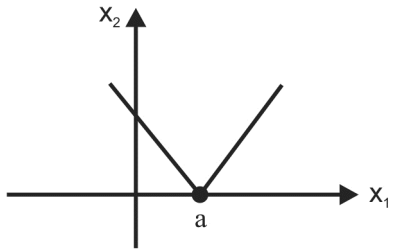
1.



$x_2 = kx_1 + b \quad (tg\,\alpha = k)$

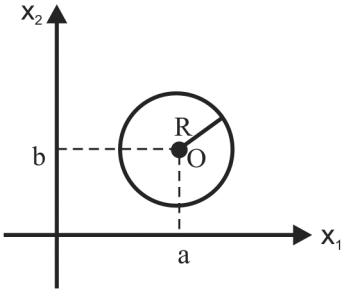
k անկյունային գործակցով ուղիղ գիծ

2.



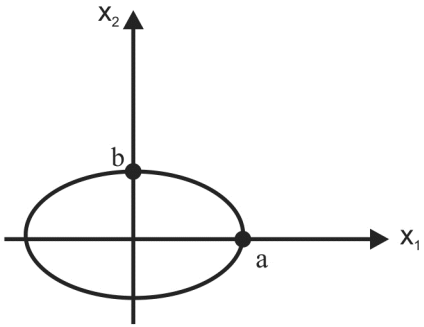
$x_2 = |x_1 - a|$

3.



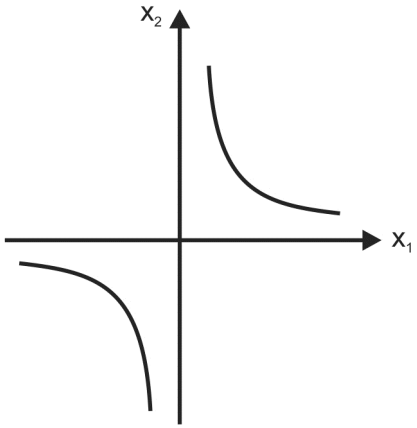
$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = R^2$,
O(a;b) կենտրոնով և R շառավղով շրջանագիծ

4.



$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$,
a և b կիսաառանցքներով էլիպս

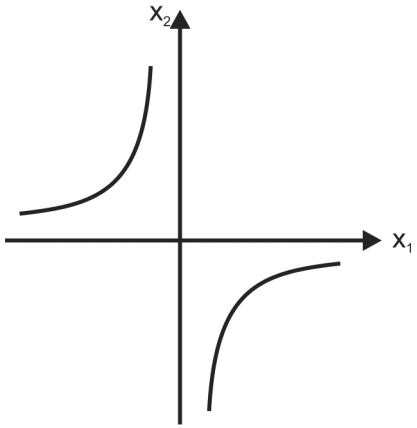
5. ա)



$$x_2 = \frac{k}{x_1}, \ (k > 0)$$

հիպերբոլ

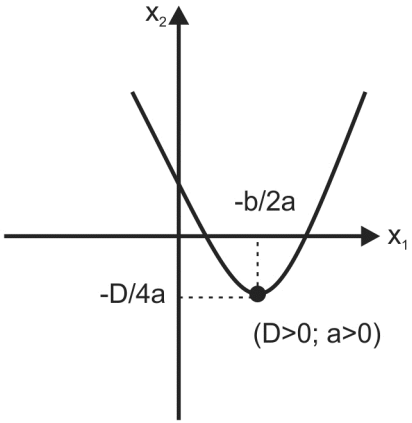
5. բ)



$$x_2 = \frac{k}{x_1}, \ (k < 0)$$

հիպերբոլ

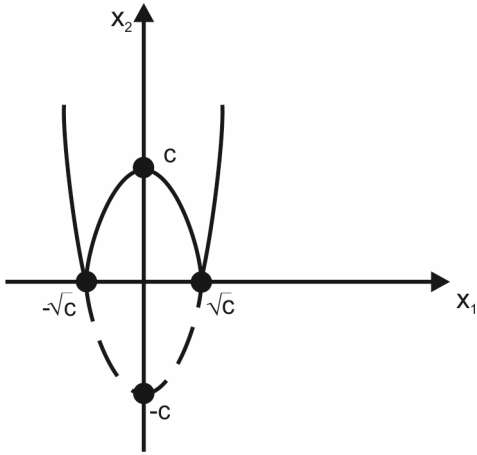
6.



$$x_2 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

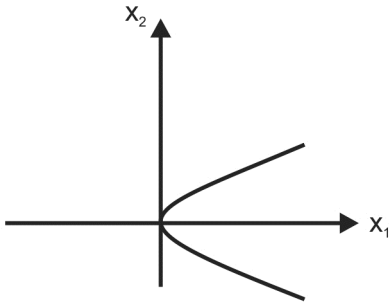
պարաբոլ

7.



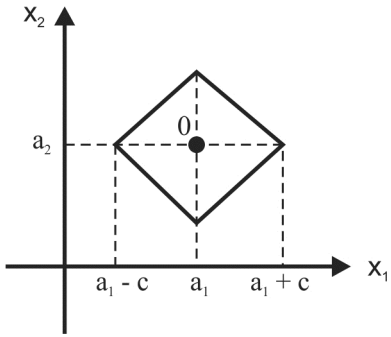
$$x_2 = \left|x_1^2 - c\right|, (c > 0)$$

8.



$$x_1 = x_2^2$$

9.



$|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = c$ $(c > 0)$, $O(a_1; a_2)$ կենտրոնով քառակուսի, որի անկյունագծերը զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին և հավասար 2c:

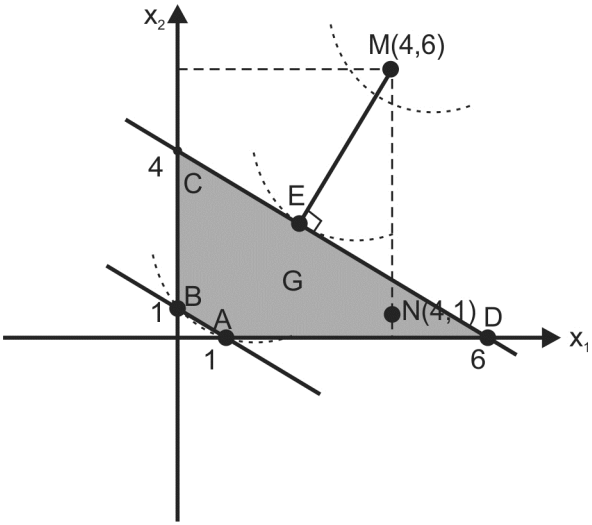
Դիցուք պահանջվում է գտնել $z = f(x_1, x_2)$ ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը $(x_1, x_2) \in G$ տիրույթում, որտեղ $G \subseteq R^2$ տիրույթը որոշվում է խնդրի սահմանափակումներով: Դա նշանակում է գտնել c-ի այն ամենամեծ (ամենափոքր) արժեքը, որի համար $f(x_1, x_2) = c$ մակարդակի գիծը G տիրույթի հետ ունի գոնե մեկ հատման կետ: Այլ կերպ ասած՝ անհրաժեշտ է

գտնել c-ի այն ամենամեծ արժեքը, որ $\forall c' > c$ $(\forall c' < c)$ դեպքում $f(x_1, x_2) = c'$ մակարդակի գիծը G տիրույթի հետ չի հատվում:

Օրինակ 2: Գտնել $z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները հետևյալ սահմանափակումների դեպքում.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Լուծում: Նախ կառուցենք խնդրի թույլատրելի տիրույթը, այսինքն՝ սահմանափակումներով տրվող բազմությունը. դա ABCD քառանկյունն է:



գծագիր 1

Հաշվի առնելով, որ z ֆունկցիայի մակարդակի գծերը $(x_1-4)^2+(x_2-6)^2=c$, $(c\geq 0)$ (4;6) կենտրոնով և $\sqrt{c}$ շառավղով շրջանագծեր են, պետք է գտնել այն ամենամեծ և ամենափոքր շառավիղները, որոնց համապատասխան շրջանագծերը հատում են ABCD քառանկյունը: Գծագրից պարզ է, որ փոքրագույն շառավիղը ME-ն է, որտեղ E-ն M կենտրոնով շրջանագծի և CD ուղղի շոշափման կետն է: E կետի կոորդինատները գտնենք լուծելով CD և ME ուղիղների հավասարումներից բաղկացած համակարգը:

CD-ի հավասարումն է՝ $x_2=-\frac{2}{3}x_1+4$: Քանի որ $ME\perp CD$, ապա ME-ի հավասարումը կլինի $x_2-6=\frac{3}{2}(x_1-4)$: Լուծելով $\begin{cases} x_2=-\frac{2}{3}x_1+4 \\ x_2=\frac{3}{2}x_1 \end{cases}$ համակարգը՝ ստանում ենք E կետի կոորդինատները՝ $E\left(\frac{24}{13};\frac{36}{13}\right)$, ուստի z-ի փոքրագույն արժեքը ստացվում է E կետում և հավասար է՝ $z(E)=\left(\frac{24}{13}-4\right)^2+\left(\frac{36}{13}-6\right)^2=\frac{196}{13}$:

E կետի կոորդինատները կարելի է գտնել նաև հետևյալ կերպ: Փնտրվում է Z նպատակային ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը $2x_1+3x_2=12$ գծի վրա:

$$z=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2\to\min$$
$$2x_1+3x_2=12$$

Արտաքսենք x_2 փոփոխականը նպատակային ֆունկցիայից.

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$$

$$z_1 = (x_1 - 4)^2 + (-\frac{2}{3}x_1 - 2)^2 \to \min$$

$$z_1' = 2(x_1 - 4) + \frac{4}{3}(\frac{2}{3}x_1 + 2) \Rightarrow$$

$$E: \begin{cases} x_1 = \dfrac{24}{13} \\ x_2 = \dfrac{36}{13} \end{cases}$$

Նորից օգտվելով գծագրից՝ տեսնում ենք, որ մեծագույն շառավիղը կամ MA-ն է կամ MD-ն: Տեղադրելով՝ ստանում ենք, որ z(A)=45, z(D)=40, ուստի A-ն գլոբալ մաքսիմումի կետ է:

Պատ.՝ $E_{\min}\left(\frac{24}{13}, \frac{36}{13}\right)$, $z_{\min} = \frac{196}{13}$,

$A_{\max}(1,0)$, $z_{\max} = 45$:

Օրինակ 3: Նախորդ խնդրի թույլատրելի տիրույթի համար գտնել $z_1 = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

Լուծում: Ինչպես տեսնում ենք գծագիր 1-ից, շրջանագծի կենտրոնը՝ $N(4,1)$ կետը գտնվում է տիրույթի ներսում: Ուստի z-ի փոքրագույն արժեքը կստացվի հենց այդ կետում՝ $z_1(4;1) = 0$: Իսկ մեծագույն արժեքը գտնելու համար պետք է ստուգել, թե $N(4,1)$ կետը ABCD քառանկյան ո՞ր գագաթից է ավելի հեռու: Երկու կետերի հեռավորության բանաձևով հաշվելով NA, NB, NC

և ND հատվածների երկարությունները՝ տեսնում ենք, որ դա C կետն է՝ $z_1(C)=25$:

Պատ.՝ $N_{\min}(4,1),\ z_{\min}=0,$

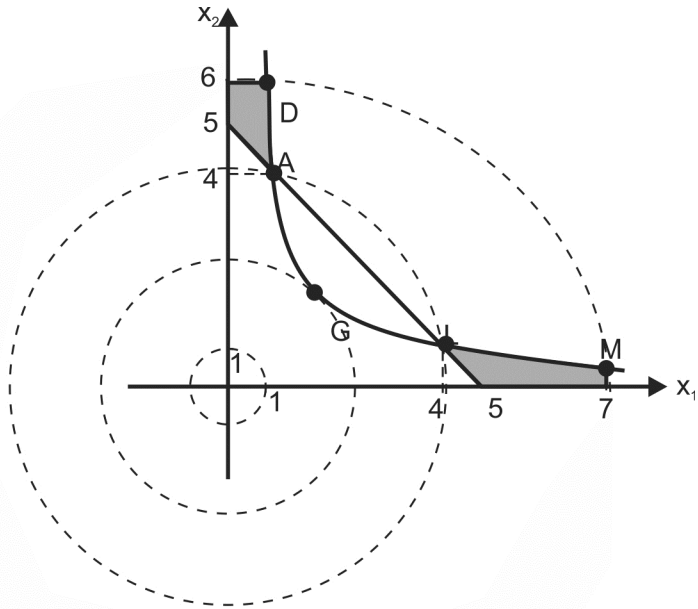
$C_{\max}(0,4),\ z_{\max}=25$:

Օրինակ 4: Գտնել $z=x_1^2+x_2^2$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները հետևյալ սահմանափակումների դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1x_2 \le 4 \\ x_1+x_2 \ge 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

Լուծում:

$\begin{cases} x_1x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$ բազմությունը նկարելու համար նկատենք, որ եթե $x_1>0$, ապա $x_2 \le \frac{4}{x_1}$ տիրույթը $x_2=\frac{4}{x_1}$ հիպերբոլից ներքև ընկած առաջին քառորդի տիրույթն է, իսկ $x_1=0$ և $x_2=0$ դեպքում ստացվում են կոորդինատային առանցքները:



գծագիր 2

Ստվերագծված մասը թույլատրելի տիրույթն է: Քանի որ z ֆունկցիայի մակարդակի գծերը (0,0) կենտրոնով շրջանագծեր են, ապա փոքրագույն շառավիղը, որի դեպքում այդ շրջանագիծը հատվում է թույլատրելի տիրույթի հետ, OA-ն կամ OL-ն է, այսինքն՝ z-ը իր փոքրագույն արժեքը ընդունում է 2 կետերում՝ A(1,4) և L(4,1), և այդ արժեքը հավասար է՝ $z(A) = z(L) = 4^2 + 1^2 = 17$: Իսկ թույլատրելի տիրույթի հետ հատվող շրջանագծերի շառավիղներից մեծագույնը կամ OD-ն է կամ OM-ը (հիպերբոլի գրաֆիկը ուռուցիկ է): D-ի կոորդինատներն են

$\left(\frac{2}{3};6\right)$, իսկ M-ի կոորդինատները՝ $\left(7;\frac{4}{7}\right)$, ապա $z(D)=\frac{328}{9}$, $z(M)=\frac{2417}{49}$, հետևաբար պատասխանը կլինի՝

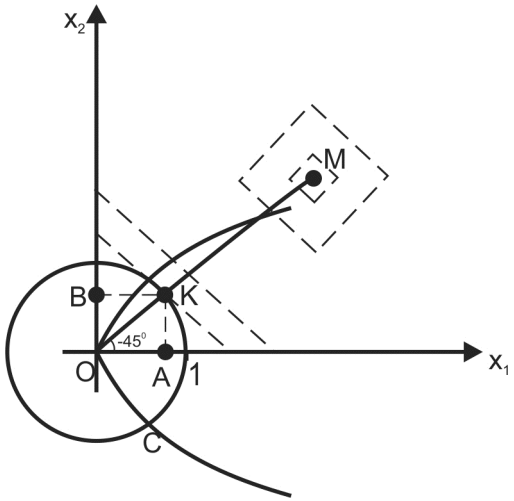
$$A_{\min}(1,4), L_{\min}(4,1),\ z_{\min}=17,$$

$$M_{\max}\left(7,\frac{4}{7}\right),\ z_{\max}=\frac{2417}{49}:$$

Օրինակ 5: Գտնել $f(x_1,x_2)=|x_1-2|+|x_2-2|$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները հետևյալ սահմանափակումների դեպքում՝

$$\begin{cases} x_1 \ge x_2^2 \\ x_1^2+x_2^2=1 \end{cases}:$$

Լուծում: Թույլատրելի տիրույթը O կենտրոնով և 1 շառավղով շրջանագծի այն աղեղն է, որն ընկած է $x_1=x_2{}^2$ պարաբոլի ներսում: Իսկ f-ի մակարդակի գծերը M(2; 2) կենտրոնով քառակուսիներ են: Պարզ է, որ պետք է դիտարկել այն մակարդակի գիծը, որի կողմերից մեկը շոշափում է վերը նշված աղեղը: Այդ գիծը կառուցելու համար միացնենք O և M կետերը: Դիցուք K-ն OM-ի և շրջանագծի հատման կետն է:



գծագիր 3

Գտնենք K կետի կոորդինատները՝ $OA = 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, քանի որ $\frac{\sqrt{2}}{2} > \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, ապա K կետը պատկանում է թույլատրելի տիրույթին, այսինքն՝ գտնվում է նշված աղեղի վրա: Որոնելի մակարդակի գիծը կլինի այն քառակուսու եզրագիծը, որի կողմերից մեկը K կետով անցնող և OK-ին ուղղահայաց հատվածն է: Այսպիսով՝ f ֆունկցիան իր փոքրագույն արժեքն ընդունում է $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ կետում, և այդ արժեքը հավասար է՝

$$f(K) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right| = 4 - \sqrt{2}:$$

Գծագրից պարզ է, որ f-ը մեծագույն արժեք կընդունի C կետում, որի կոորդինատները կարելի է գտնել՝ լուծելով $\begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_2 < 0 \end{cases}$ համակարգը:

Պատ.՝ $K_{\min}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f_{\min} = 4 - \sqrt{2}$,

$C_{\max}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f_{\max} = \frac{7 - \sqrt{2}}{2}$:

ԲԱԺԻՆ 2
Բացարձակ (ոչ պայմանական) և պայմանական էքստրեմումի խնդիրներ

R^n-ում որոշված $z = f(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիայի էքստրեմումները գտնելու խնդիրն ընդունված է անվանել բացարձակ կամ **ոչ պայմանական** էքստրեմումի խնդիր: Այս անվանման մեջ արտացոլվում է այն փաստը, որ $x_1,...,x_n$ փոփոխականների վրա ոչ մի լրացուցիչ սահմանափակում չի դրվում: Սակայն բազմաթիվ խնդիրներում այդ փոփոխականները պետք է բավարարեն լրացուցիչ սահմանափակումների, որոնք սովորաբար արտահայտվում են հավասարումների և անհավասարումների տեսքով: Նման խնդիրներն ընդունված է անվանել **պայմանական** էքստրեմումի խնդիրներ:

Նախ դիտարկենք **բացարձակ էքստրեմումի** խնդիրները, որոնց անվանում են նաև **ՈԳԾ դասական** խնդիրներ՝

$z = f(x_1,...,x_n) \to ext$, որտեղ z-ը որոշված է R^n-ում և ունի մինչև 2-րդ կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ ըստ բոլոր փոփոխականների: Մաթեմատիկական անալիզից հայտնի է (տե՛ս [13]), որ լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները հետևյալն են՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \qquad (1):$$

Կամ եթե նշանակենք $grad\ f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, ապա (1) համակարգը կարելի է գրել վեկտորական տեսքով՝ $grad\ f = 0$:

(1) համակարգի ցանկած լուծում կոչվում է z ֆունկցիայի **ստացիոնար կետ**: Եթե (1)-ը լուծում չունի, ապա էքստրեմումի կետեր չկան: Իսկ եթե $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետը այդ համակարգի լուծում է, ապա այն հավակնում է լոկալ էքստրեմումի կետ լինելու: Պարզելու համար, թե M_0 ստացիոնար կետը էքստրեմումի կետ է, թե ոչ, օգտվում են էքստրեմումի բավարար պայմանից, որը ձևակերպելու համար նախ բերենք քառակուսային ձևերի տեսությունից որոշ փաստեր (տե՛ս [10]):

$$\Phi(h_1, \cdots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \qquad (2)$$

արտահայտությունը, որտեղ a_{ij}-երը տրված թվերն են, ընդ որում՝ $a_{ij} = a_{ji}$, իսկ h_i-երը՝ փոփոխականներ, կոչվում է $h_1,\ldots,h_n$ փոփոխականներից կախված քառակուսային ձև:

$A = (a_{ij})$ սիմետրիկ մատրիցն անվանում են Φ քառակուսային ձևի մատրից: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր քառակուսային ձևի համապատասխանում է նրա a_{ij} գործակիցներից կազմված միակ սիմետրիկ մատրից, և հակառակը՝ յուրաքանչյուր սիմետրիկ մատրիցի համապատասխանում է միակ քառակուսային ձև:

Օրինակ՝ $\Phi(h_1,h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$ երկու փոփոխականի քառակուսային ձևին համապատասխանում է $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ մատրիցը:

Սահմանում:

ա) Φ քառակուսային ձևը կոչվում է **դրական որոշյալ**, եթե ցանկացած $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \neq 0$ վեկտորի համար

$$\Phi(\boldsymbol{h}) = \Phi(h_1, h_2, \cdots, h_n) > 0:$$

բ) Φ քառակուսային ձևը կոչվում է **բացասական որոշյալ**, եթե ցանկացած $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \neq 0$ վեկտորի համար

$$\Phi(\boldsymbol{h}) = \Phi(h_1, h_2, \cdots, h_n) < 0:$$

գ) Φ քառակուսային ձևը կոչվում է **նշանափոխ (անորոշ)**, եթե $\exists$ $\boldsymbol{h}'$ և $\boldsymbol{h}''$ վեկտորներ այնպես, որ $\Phi(\boldsymbol{h}') > 0$, $\Phi(\boldsymbol{h}'') < 0$:

Դիտողություն: Նշենք, որ կան քառակուսային ձևեր, որոնք նշված 3 տիպերից ոչ մեկի հետ չեն համընկնում: Օրինակ՝ $\Phi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2) = h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 \geq 0$ ($\Phi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2)$-ը կոչվում է դրական կիսաորոշյալ:

Հետևյալ հայտանիշով (Սիլվեստերի հայտանիշ) կարելի է պարզել, թե քառակուսային ձևը որ տիպի է: Դիցուք

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Φ քառակուսային ձևի մատրիցն է: Դիտարկենք A մատրիցի բոլոր **գլխավոր անկյունագծային մինորները՝** $\Delta_1 = a_{11}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}:$$

Թեորեմ: Որպեսզի Φ քառակուսային ձևը լինի դրական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$:

Որպեսզի Φ քառակուսային ձևը լինի բացասական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ մինորները լինեն նշանափոխ՝ սկսելով **«-»** նշանից՝

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$:

Այժմ կարող ենք ձևակերպել **էքստրեմեումի բավարար պայմանը:**

Դիտարկենք $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$d^2 f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} dx_1 dx_j,$$

որտեղ $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, ընդ որում՝ ածանցյալները հաշվված են M_0 ստացիոնար կետում:

Եթե նշանակենք $dx_i = h_l$, ապա 2-րդ դիֆերենցիալը M_0 կետում $d^2 f\big|_{M_0}$-ն՝ կհանդիսանա h_i փոփոխականների նկատմամբ քառակուսային ձև: Ընդունված է այս քառակուսային ձևի մատրիցը՝

$$A = (a_{ij)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

անվանել Հեսսի մատրից:

Ճիշտ է հետևյալ պնդումը (էքստրեմումի բավարար պայման).

1⁰. եթե $d^2 f\big|_{M_0}$-ն դրական որոշյալ է, ապա M_0 ստացիոնար կետը մինիմումի կետ է,

2⁰. եթե $d^2 f\big|_{M_0}$-ն բացասական որոշյալ է, ապա M_0-ն մաքսիմումի կետ է,

3⁰. եթե $d^2 f\big|_{M_0}$-ն նշանափոխ է, ապա M_0-ն էքստրեմումի կետ չէ:

Դիտողություն 1: Երկու փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում (մենք առավել հաճախ կքննարկենք այսպիսի օրինակներ) հաշվի առնելով նաև Սիլվեստերի հայտանիշը՝ էքստրեմումի բավարար պայմանը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

1) եթե $a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, ապա M_0-ն min-ի կետ է,
2) եթե $a_{11} < 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, ապա M_0-ն max-ի կետ է,
3) եթե $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, ապա M_0-ն էքստրեմումի կետ չէ,
4) եթե $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, ապա այս հայտանիշով հնարավոր չէ պարզել M_0-ի էքստրեմումի կետ լինելը կամ չլինելը, և պետք է կատարել լրացուցիչ հետազոտություն,
5) եթե $a_{11} = 0$, ապա պետք է կատարել լրացուցիչ հետազոտում, որն այս բաժնում չենք քննարկելու:

Դիտողություն 2: Էքստրեմումի անհրաժեշտ, ինչպես նաև բավարար պայմանները ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ f-ը որոշված է M_0 ստացիոնար կետի մի որևէ շրջակայքում:

Օրինակ 1: Գտնել $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}$ ֆունկցիայի էքստրեմումները:

Լուծում: Նախ գտնենք ստացիոնար կետերը՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - \dfrac{50}{x_1^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - \dfrac{20}{x_2^2} \end{cases}.$$

Լուծելով այս համակարգը տեղադրման եղանակով՝ ստանում ենք՝ $x_1 = 5, x_2 = 2$: Այսինքն՝ միակ ստացիոնար կետը $M_0(5,2)$-ն է:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{100}{x_1^3} \Rightarrow a_{11} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\right|_{M_0} = \frac{100}{5^3} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1 \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right|_{M_0} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{40}{x_2^3} \qquad a_{22} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}\right|_{M_0} = \frac{40}{2^3} = 5:$$

$a_{11} > 0, \quad a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}{}^2 = \frac{4}{5} \cdot 5 - 1^2 = 3 > 0$: Ուստի $M_0(5,2)$ կետը լոկալ մինիմումի կետ է:

Որոշ դեպքերում բոլորովին անհրաժեշտություն չկա ստուգելու էքստրեմումի բավարար պայմանը. ստացիոնար կետի էքստրեմումի կետ լինելը (կամ չլինելը) կարող է միանգամից պարզ լինել ֆունկցիայի տեսքից:

Օրինակ 2: Գտնել $f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 + 3x_2^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը.

նախ գտնենք ստացիոնար կետերը՝

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 8x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 8x_1 + 6x_2 = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0,$$

այսինքն՝ $M_0(0,0)$-ն միակ ստացիոնար կետն է:

Քանի որ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=8, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=6$, ապա Հեսսի մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝ $\mathrm{H}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, ուստի $a_{11}=0$ և էքստրեմումի բավարար պայմանից ոչինչ չի հետևում: Մինչդեռ ֆունկցիայի տեսքից երևում է, որ $(0,0)$ կետը էքստրեմումի կետ չէ, քանի որ $f(0,0)=0$ և $(0,0)$ կետի ցանկացած շրջակայքում վերցնելով (a,a) և $(-a,a)$ $(a \neq 0)$ կետերը՝ տեսնում ենք, որ $f(a,a)=8a^2+3a^2=11a^2>0$, իսկ՝ $f(-a,a)=-8a^2+3a^2=-5a^2<0$, այսինքն՝ $(0,0)$ կետը չի կարող լինել մաքսիմումի կամ մինիմումի կետ: Նույն արդյունքները կստացվեր հետազոտելով Հեսսի մատրիցը:

ԲԱԺԻՆ 3
Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակը

Այժմ դիտարկենք պայմանական էքստրեմումի խնդիրներ:

Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ սահմանափակումները տրված են հավասարումների տեսքով՝

$$f(x_1,...,x_n) \to ext$$
$$\begin{cases} g_1(x_1,...,x_n)=0 \\ g_2(x_1,...,x_n)=0 \\ ... \\ g_m(x_1,...,x_n)=0 \end{cases}:$$

Կենթադրենք, որ ինչպես f ֆունկցիան, այնպես էլ $g_1, g_2, ..., g_m$ ֆունկցիաները ունեն առաջին կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ՝ ըստ բոլոր փոփոխականների R^n-ում: Ավելին՝ f ֆունկցիայի համար կենթադրենք նաև նրա երկրորդ կարգի բոլոր մասնական ածանցյալների անընդհատությունը R^nում:

Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) =$$

$$= f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, ..., x_n) + ... + \lambda_m g_m(x_1, ..., x_n),$$

որտեղ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$-երը նոր փոփոխականներ են և կոչվում են Լագրանժի անորոշ գործակիցներ (դրանց որոշման տիրույթը R-ն է): $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$-ն անվանում են տրված խնդրի **Լագրանժի ֆունկցիա**:

$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ ֆունկցիայի համար գրենք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (3):$$

Մաթեմատիկական անալիզից հայտնի է, որ եթե $m+n$ անհայտով $m+n$ հավասարումների (3) համակարգը լուծում չունի, ապա f ֆունկցիան էքստրեմումի կետեր չունի:

Իսկ եթե $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0,\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)$-ն (3) համակարգի լուծում է, ապա պարզելու համար, թե M_0-ին համապատասխան $N_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ կետը f ֆունկցիայի համար պայմանական էքստրեմումի կետ է, թե ոչ, դիտարկում ենք հետևյալ օժանդակ գծային համասեռ հավասարումների համակարգը՝ $h_1,\dots,h_n$ փոփոխականների նկատմամբ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}h_1+\dots+\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}h_n=0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}h_1+\dots+\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}h_n=0 \end{cases} \qquad (4),$$

որտեղ բոլոր մասնական ածանցյալները հաշվված են N_0 կետում, այսինքն՝ դրանք հաստատուն թվեր են:

Կենթադրենք, որ $grad\, g_1=\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1},\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2},\dots\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\right),\dots,$ $grad\, g_m=\left(\dfrac{\partial g_m}{\partial x_1},\dfrac{\partial g_m}{\partial x_2},\dots\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}\right)$ վեկտորները գծորեն անկախ են: (Այս պայմանի առկայությամբ խնդիրներն անվանում են չվերասերվող, և մենք դիտարկելու ենք միայն այդ տիպի խնդիրներ): Դա կնշանակի, որ (4) համակարգի գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը m է: Ուստի (4) համակարգից m անհայտները կարելի է արտահայտել մնացած $n-m$ անհայտներով (օրինակ՝ $h_1,\dots,h_m$-ը կարելի է արտահայտել $h_{m+1},\dots,h_n$-ով, եթե գծորեն

անկախ են (4) համակարգի գործակիցներից կազմված մատրիցի առաջին m սյուները):

Դիտարկենք L ֆունկցիայի 2-րդ դիֆերենցիալը՝ ըստ $x_1,\ldots,x_n$ փոփոխականների՝

$$d_2L\big|_{M_0} = \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \ , \ (h_i = dx_i):$$

Այստեղ բոլոր մասնական ածանցյալները հաշված են M_0 կետում: Վերջին արտահայտության մեջ $(h_1,\ldots,h_m)$ փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով (4) համակարգից գտնված նրանց արժեքները՝ կստանանք $n-m$ փոփոխականից կախված քառակուսային ձև:

Եթե այդ քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, ապա N_0 կետը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է, եթե բացասական որոշյալ է, ապա լոկալ մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե նշանափոխ է, ապա էքստրեմումի կետ չէ:

Պայմանական էքստրեմումի կետի նկարագրված բավարար պայմանը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ (տե՛ս [9] և [12]).

Դիտարկենք հետևյալ բլոկային տիպի մատրիցը՝

$$H^B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & P \\ \hline P^T & Q \end{array}\right)_{(m+n)x(m+n)}$$

որտեղ $P=\begin{pmatrix} grad\ g_1 \\ \cdots \\ grad\ g_m \end{pmatrix}_{m\times n}$, P^T-ն P-ի տրանսպոնացվածն է, իսկ $Q=\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times m}$, և բոլոր ածանցյալները հաշվված են M_0 կետում:

H^B-ն կոչվում է **Հեսսի մատրիցի երիզող մատրից:**

Նկատենք, որ $grad g_1,\cdots,grad\ g_m$ վեկտորների գծորեն անկախ լինելու պայմանից հետևում է, որ H^B մատրիցայի ռանգը $n+m$ է:

Այդ դեպքում՝

1. $N_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ կետը **մաքսիմումի** կետ է, եթե H^B մատրիցի $2m+1$-րդ կարգի գլխավոր անկյունագծային մինորից սկսած՝ բոլոր հաջորդ անկյունագծային մինորները կազմում են **նշանափոխ** թվերի շարք, որում առաջին անդամի նշանը $(-1)^{m+1}$ է:

2. $N_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ կետը **մինիմումի** կետ է, եթե H^B մատրիցի $2m+1$-րդ կարգի գլխավոր անկյունագծային մինորից սկսած՝ բոլոր հաջորդ անկյունագծային մինորները ունեն $(-1)^m$ նշանը:

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3\to ext$$

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2=0 \\ g_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-2=0 \end{cases}.$$

Լուծում: Լանգրանժի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) + \lambda_2(x_1^2 + x_3^2 - 2):$$

Գտնենք ստացիոնար կետերը՝ լուծելով հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + x_3 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = x_2 + 2\lambda_2 x_3 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1^2 + x_3^2 - 2 = 0 \end{cases} :$$

Այս համակարգի վերջին երկու հավասարումները իրարից հանելով՝ ստանում ենք՝ $x_2^2 - x_3^2 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm\ x_3$:

Քննարկենք $x_2 = x_3$ դեպքը. տեղադրելով այդ արժեքը 3-րդ հավասարման մեջ՝ կստանանք $x_3(1 + 2\lambda_2) = 0$; $x_3 = 0$ դեպքը հնարավոր չէ, որովհետև կստացվի $x_2 = 0$, իսկ 2-րդ հավասարումից՝ $x_1 = 0$: Իսկ $(0,0,0)$ կետը չի բավարարում 4-րդ հավասարմանը: Այսպիսով՝ $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$, և ստանում ենք՝ հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 + x_1(2\lambda_1 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = x_1(2\lambda_1 - 1): \\ x_1 + x_2(2\lambda_1 - 1) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

տեղադրելով հաջորդի մեջ և հաշվի առնելով, որ $x_1 \neq 0$, ստանում ենք $2 - 4\lambda_1^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

Քննարկենք $\lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ դեպքը՝ $x_2 = -x_1(\sqrt{2} - 1)$, և սա տեղադրենք համակարգի վերջին հավասարման մեջ՝

$x_1^2 + x_1^2(3 - 2\sqrt{2}) = 2$, այստեղից՝ $x_1 = \pm\dfrac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2}$:

$x_1 = \dfrac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2}$ դեպքում

$\Rightarrow x_1 = -(\sqrt{2} - 1)\dfrac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2} = -\dfrac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2}$:

Այսպիսով՝ ստացիոնար կետերից մեկը հետևյալն է՝

$$x_1 = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2};\ x_2 = -\frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2};\ x_3 = -\frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2};\ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}:$$

Այժմ դիտարկենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ դիֆերենցիալը՝ ըստ x_1, x_2, x_3 փոփոխականների

$$d^2L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}h_ih_j,$$

որտեղ

$$a_{11}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2\lambda_1+2\lambda_2,\quad a_{12}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}=1,\quad a_{13}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_3}=0$$

$$a_{22}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2\lambda_1,\qquad a_{23}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_3}=1,\quad a_{33}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2}=2\lambda_2:$$

(Այստեղ λ_1 և λ_2-ի փոխարեն պետք է տեղադրել նրանց արժեքները, դա կանենք վերջում): Ուստի՝

$$d^2L=(2\lambda_1+2\lambda_2)h_1^2+2h_1h_2+2\lambda_2h_2^2+2h_2h_3+2\lambda_2h_3^2$$

Կազմենք օժանդակ համակարգը՝ հաշվի առնելով, որ

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}=2x_1,\quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}=2x_2,\quad \frac{\partial g_1}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial g_2}{\partial x_1}=2x_1,\quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial g_2}{\partial x_3}=2x_3:$$

(Այստեղ նույնպես x_1,x_2,x_3-ը ստացիոնար կետի կոորդինատներն են).

$$\begin{cases}2x_1h_1+2x_2h_2+0h_3=0\\ 2x_1h_1+0h_2+2x_3h_3=0\end{cases}$$

Այստեղից՝ $h_2=-\frac{x_1}{x_2}h_1,\quad h_3=--\frac{x_1}{x_3}h_1$:

Հետևաբար (հաշվի առնելով, որ $x_2=x_3$)՝

$$d^2L=2\left(\lambda_1+\lambda_2-\frac{x_1}{x_2}+\left(\lambda_1+\lambda_2+1\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2\right)h_1^2:$$

Այս արտահայտության մեջ տեղադրելով x_1,x_2,λ_1 և λ_2-ի արժեքները՝ տեսնում ենք, որ $h_1{}^2$-ու գործակիցը դրական թիվ է,

այսինքն՝ d^2L-ը՝ որպես մեկ՝ h_1 փոփոխականից կախված քառակուսային ձև՝ դրական որոշյալ է $\Rightarrow N_0\left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2},\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)$ կետը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է: Նույն կերպ հետազոտվում են մնացած ստացիոնար կետերը:

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f(x_1,x_2)=3x_1+4x_2+5\to ext$$

$$g_1(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2-2=0:$$

Լուծում: $L(x_1,x_2,\lambda_1)=3x_1+4x_2+5+\lambda_1(x_1^2+2x_1x_2-2)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=3+2\lambda x_1+2\lambda x_2=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=4+2\lambda x_1=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1^2+2x_1x_2-2=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$x_1=-\frac{2}{\lambda}$$

$$x_2=\frac{1}{2\lambda}$$

$$\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2\lambda}\frac{2}{\lambda}\right)-2=0\Rightarrow\lambda=\pm1:$$

Այսպիսով՝ ստացվում է Լագրանժի ֆունկցիայի երկու ստացիոնար կետ՝

$$M_0\left(x_1=-2;\,x_2=\frac{1}{2};\,\lambda=1\right),\ M_1\left(x_1=2;\,x_2=-\frac{1}{2};\,\lambda=-1\right):$$

Հետազոտենք M_0 կետը՝

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=0$$

$$d^2 L = 2\lambda h_1^2 + 4\lambda h_1 h_2 + 0 h_2^2 :$$

Քանի որ M_0 կետի համար $\lambda = 1$, ապա $d^2 L\Big|_{M_0} = 2h_1^2 + 4h_1 h_2$ (1):

Կազմենք օժանդակ համակարգը (որը բաղկացած է մեկ հավասարումից, քանի որ ունենք մեկ սահմանափակում):

$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2$, $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_1$, և քանի որ M_0 կետի համար $x_1 = -2; x_2 = \frac{1}{2}$, ապա $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2(-2) + 2\frac{1}{2} = 3$; $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2(-2) = -4$, և օժանդակ հավասարումն է՝

$-3h_1 - 4h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -\frac{4}{3}h_2$, տեղադրենք (1)-ի մեջ՝

$d^2 L(M_0) = \left(-\frac{4}{3}h_2\right)^2 - 4\frac{4}{3}h_2 h_2 = -\frac{32}{3}h_2^2 < 0$, $\Rightarrow N_0\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ կետը լոկալ *max* կետ է:

Նույն արդյունքը կստանանք՝ օգտագործելով Հեսսի երիզող մատրիցը:

Այստեղ $n = 2, m = 1, grad\ g_1 = (-3; -4)$; $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$H^B = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -3 & -4 \\ \hline -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$, $2m+1 = 2\cdot 1 + 1 = 3 \Rightarrow$ միակ անկյունագծա-

յին մինորը H^B մատրիցայի դետերմինանտն է, որը, հաշվելով, ստանում ենք՝

$$det\, H^B = 0 + 24 + 24 - (32) = 16 > 0 \text{ և } (-1)^{1+1} = 1:$$

Ուստի $N_0\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ կետը max-ի կետ է:

Նույն կերպ հետազոտվում է M_1 կետը:

Օրինակ 3: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to ext$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \end{cases}:$$

Լուծում: Նախ նկատենք, որ այս խնդիրը արտաքսման եղանակով (այսինքն՝ սահմանափակումներից x_1-ը և x_2–ը x_3-ով արտահայտելով և տեղադրելով f-ի մեջ) բերվում է շատ պարզ խնդրի՝ x_3 փոփոխականի նկատմամբ քառակուսի եռանդամի հետազոտման: Այնուհանդերձ վերը շարադրված մեթոդները յուրացնելու համար խնդիրը լուծենք նկարագրված ալգորիթմով:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) +$$
$$+\lambda_2(5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}(\lambda_1 + 5\lambda_2) \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2) \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(3\lambda_1 + 5\lambda_2) \end{aligned}$$

Տեղադրելով այս արժեքները վերջին 2 հավասարումների մեջ և լուծելով ստացված համակարգը՝ ստանում ենք միակ ստացիոնար կետ՝

$$x_1 = \frac{37}{46}, x_2 = \frac{8}{23}, x_3 = \frac{13}{46}, \ \lambda_1 = -\frac{2}{23}, \lambda_2 = -\frac{7}{2}:$$

Քանի որ

$$a_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, a_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, a_{13} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2, a_{23} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial_3} = 0, a_{33} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 2,$$

ապա՝

$$d_2 L = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2, \tag{4}$$

և այս դեպքում նույնիսկ օժանդակ համակարգ՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdot h_1 + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \cdot h_2 + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_3} \cdot h_3 = 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \cdot h_1 + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \cdot h_2 + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_3} \cdot h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 + h_2 + 3h_3 = 0 \\ 5h_1 + 2h_2 + h_3 = 0 \end{cases},$$

կարիք չկա լուծել, որովհետև (4)-ը դրական որոշյալ քառակուսային ձև է՝ անկախ որևէ տեղադրումներից: Այսպիսով՝ $N_0\left(\frac{37}{46};\frac{8}{23};\frac{13}{46}\right)$ կետը մինիմումի կետ է:

Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ **վերասերվող** խնդրի դեպքում (այսինքն, երբ $grad\, g_1,\ldots,grad\, g_m$ վեկտորները գծորեն կախված են) Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը կարող է բերել սխալ եզրակացության:

Օրինակ 4:

$$f(x_1,x_2)=x_1\to ext$$

$$g_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2=0$$

Ակնհայտ է, որ այս խնդրի միակ թույլատրելի կետը (0,0)-ն է, որը և հանդիսանում է $f(x_1,x_2)$-ի min-ի կետ: Մինչդեռ կազմելով Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1+\lambda\left(x_1^2+x_2^2\right)$$

և գրելով էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=1+2\lambda x_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=2\lambda x_2=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1^2+x_2^2=0 \quad \Rightarrow x_1=0,\, x_2=0,\end{cases}$$

որը չի բավարարում համակարգի առաջին հավասարմանը, այսինքն՝ ստացվում է, որ ստացիոնար կետ գոյություն չունի:

Այստեղ $grad\, g_1 = (2x_1; 2x_2)$, որը խնդրի թույլատրելի տիրույթում՝ (0; 0) կետում, դառնում է **0**=(0; 0) գծորեն կախված վեկտոր:

ԲԱԺԻՆ 4

Պայմանական էքստրիմումի խնդիրներ, որոնցում սահմանափակումները տրված են անհավասարումներով: Կուն-Թակերի պայմանները

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$f(x_1,...,x_n) \to \min$$

$$\begin{cases} g_1(x_1,...,x_n) \le 0 \\ g_2(x_1,...,x_n) \le 0 \\ ... \\ g_m(x_1,...,x_n) \le 0 \end{cases}$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ $f, g_1, \ldots, g_m$ ֆունկցիաները որոշված են և ունեն առաջին կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ՝ ըստ բոլոր փոփոխականների R^n-ում:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

ֆունկցիան կոչվում է տվյալ խնդրի **Լագրանժի ֆունկցիա**, իսկ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ փոփոխականները՝ անորոշ գործակիցներ: Այդ դեպքում էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները (որոնք և կոչվում

են Կուն-Թակերի պայմաններ) հետևյալն են. եթե $M_0\left(x_1^0,\dots x_n^0\right)$-ն քննարկվող խնդրի մինիմումի կետ է, ապա այդ կետում տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, & \left(j = 1,\dots,n\right) \\ \lambda_i \ge 0, & \left(i = 1,\dots,m\right): \\ \lambda_i \cdot g_i\left(x_1,\dots x_n\right) = 0 & \\ g_i\left(x_1,\dots x_n\right) \le 0 & \end{cases} \qquad (*)$$

Այս ընդհանուր պայմաններից ավելի մասնավոր տիպի խնդիրների համար ստացվում են հետևյալ տիպի պայմաններ՝

ա) $f\left(x_1,\dots,x_n\right) \to \min$

$x_1 \ge 0,\dots,x_n \ge 0$

խնդրի համար անհրաժեշտ պայմաններն են՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \ge 0, & \\ x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 0, & j = 1,\dots,n \\ x_j \ge 0 & \end{cases}$$

բ) $f\left(x_1,\dots,x_n\right) \to \min$

$$\begin{cases} g_1\left(x_1,\dots,x_n\right) \le 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ g_m\left(x_1,\dots,x_n\right) \le 0 \\ x_1 \ge 0,\dots,x_n \ge 0 \end{cases}$$

խնդրի համար մինիմումի անհրաժեշտ պայմաններն են՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \geq 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j} \cdot x_j = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \cdot x_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \\ x_j \geq 0 \\ \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_i \cdot g_i(x_1, \ldots x_n) = 0 \qquad\qquad (i = 1, \ldots, m) \\ g_i(x_1, \ldots x_n) \leq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Նշենք, որ $f(x_1, \ldots, x_n) \to \max$ խնդրի համար (**)-ի համապատասխանաբար առաջին և չորրորդ պայմանները գրվում են ≤ 0 տեսքով կամ այդ խնդիրը կարելի է փոխարինել $-f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$ խնդրով:

Որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում Կուն-Թակերի պայմանները նաև բավարար են, սակայն դրանք մենք չենք քննարկի:

Օրինակ 1: Ստուգել Կուն-Թակերի պայմանները տրված էքստրեմումի կետում:

$$z = -x_1^{\,2} - x_2^{\,2} \to \max \ \ (\text{կամ } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Լուծում: Դիցուք այս խնդիրը լուծվել է (օրինակ՝ գրաֆիկական եղանակով), և ստացվել է $x_1 = 0{,}8;\ x_2 = 0{,}4$ մաքսիմումի կետը, $z_{\max} = -0{,}8$:

Ցույց տանք, որ գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0$ ոչ բացասական թվեր, որ բավարարում են (**) պայմաններին:

Նշանակենք $g_1(x_1, x_2) = 2 - 2x_1 - x_2$, $g_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 - 8$, $g_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6$ և կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(2 - 2x_1 - x_2) +$$
$$+\lambda_2(2x_1 + 2x_2 - 8) + \lambda_3(x_1 + x_2 - 6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2 - 2x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_1 + 2x_2 - 8$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = x_1 + x_2 - 6$$

Կուն-Թակերի պայմանները ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} 1,6 - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 0 \\ 0,8 - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 0 \\ (1,6 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) \cdot 0,8 = 0 \\ (0,8 - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) \cdot 0,4 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \\ \lambda_1 \cdot (2 - 2 \cdot 0,8 - 0,4) = 0 \\ \lambda_2 (2 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,4 - 8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0,8 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

Այսպիսով Կուն-Թակերի պայմանները ճիշտ են, եթե վերցնենք

Պատասխան. $x_1 = 0{,}8; x_2 = 0{,}4$ **,** $\lambda_1 = 0,4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$:

Օրինակ 2: Օգտվելով Կուն-Թակերի պայմաններից, գտնել հետևյալ խնդրում էքստրեմումի հավակնող կետը՝

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x^2 \to \min$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - 5 \le 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\ g_3(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1 \le 0 \\ g_4(x_1, x_2, x_3) = 2 - x_2 \le 0 \\ g_5(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \le 0 \end{cases} :$$

Կարճության համար (*) պայմանները գրենք վեկտորական տեսքով՝

$$\begin{cases} \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \ge 0 \\ grad\ f + \lambda grad\ g = (2x_{1;} 2x_2; 2x_3) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \lambda_1 g_1 = \lambda_2 g_2 = \ldots = \lambda_5 g_5 = 0 \\ g_1 \le 0, \ldots, g_5 \le 0 \end{cases}$$

Պարզեցնելով այս պայմանները՝ ստանում ենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \\ 2x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \\ 2x_3 + \lambda_2 - \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 \left(2x_1 + x_2 - 5\right) = 0 \\ \lambda_2 \left(x_1 + x_3 - 2\right) = 0 \\ \lambda_3 \left(1 - x_1\right) = 0 \\ \lambda_4 \left(2 - x_2\right) = 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 0 \end{cases} :$$

Այստեղից ստանում ենք հետևյալ լուծումը՝

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0\,,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 4:$$

Կարելի է ցույց տալ, որ ստացված ստացիոնար կետը իրականում գլոբալ min-ի կետ է: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ Կուն-Թակերի պայմանները ավելի շատ տեսական կարևորություն են ներկայացնում, քան պրակտիկ կիրառություն:

ԲԱԺԻՆ 5
Ուռուցիկ ծրագրման խնդիրներ, թամբակետ

Այդպես կոչվում են այն ՈԳԾ խնդիրները, որոնցում նպատակային ֆունկցիան, ինչպես նաև սահմանափակումների ֆունկցիաները ուռուցիկ են:

Սահմանում: $S \in R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա որոշված $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե $\forall x, y \in S$ և $\forall \alpha,\ 0 \le \alpha \le 1$ թվի համար՝

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \le \alpha f\left(x\right) + \left(1-\alpha\right) f\left(y\right): \qquad (1)$$

Եթե (1)-ում հավասարության նշանը հնարավոր է միայն $a = 0$ և $a = 1$ դեպքում, ապա f -ը կոչվում է **խիստ ուռուցիկ**:

$f(x)$ -ը S բազմության վրա կոչվում է **գոգավոր** (խիստ գոգավոր), եթե - $f(x)$ -ը ուռուցիկ է (խիստ ուռուցիկ):

Դիցուք $f(x)$ -ը ունի մինչև 2-րդ կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ $S \in R^n$ ուռուցիկ տիրույթի բոլոր կետերում:

Այդ դեպքում, որպեսզի $f(x)$ -ը լինի ուռուցիկ ֆունկցիա S բազմության վա անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա երկրորդ դիֆերենցիալը՝

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \ge 0:$$

Այսինքն՝ S բազմության բոլոր կետերում լինի դրական կիսաորոշյալ քառակուսային ձև:

Օրինակ 1: Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը՝

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} + 3x_3^{\ 2} + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Լուծում:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 2x_1 + 2x_3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 2 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_3 + 2x_2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 6$$

$d^2 f$ -քառակուսային ձևին համապատասխանող մատրիցը ունի հետևյալ տեսքը՝ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, որի համար՝

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 96 - (24 + 16) > 0$$

$\Rightarrow f$ -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է ամբողջ R^3-ում:

Սահմանում 2:

Դիցուք տրված է $H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = H(x_1, \ldots x_x, y_1, \ldots, y_m)$ ֆունկցիան, որտեղ $\boldsymbol{x} \in A \subset R^n, \boldsymbol{y} \in B \subset R^m$: $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ վեկտորների զույգը կոչվում է $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ֆունկցիայի թամբակետ $A\ x\ B$ բազմության վրա, եթե $H\ (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) \leq H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \leq H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*)$, $\forall \boldsymbol{x} \in A$ և $\forall \boldsymbol{y} \in B$ վեկտորների համար:

Դիցուք ամեն մի ֆիքսված $\boldsymbol{y} \in B$ վեկտորի համար գոյություն ունի $min_{\boldsymbol{x} \in A} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Psi(\boldsymbol{y})$ և գոյություն ունի $max_{\boldsymbol{y} \in B}\ \Psi(\boldsymbol{y})$ թիվը:

Նույն կերպ դիցուք գոյություն ունեն $max_{\boldsymbol{y}\in B}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x})$ և $min_{\boldsymbol{x}\in A}\varphi(\boldsymbol{x})$-ը:

Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝ թամբակետի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Որպեսզի $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ֆունկցիան ունենա թամբակետ, $A\ x\ B$ բազմության վրա անհրաժեշտ է և բավարար.

$$\max_{y\in B}\min_{x\in A} H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{x\in A}\max_{y\in B} H(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (1)$$

Ընդ որում՝ այն $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ վեկտորների զույգը, որոնց համար $\Psi(\boldsymbol{y}^*) = \varphi(\boldsymbol{x}^*)$, կհանդիսանա թամբակետ:

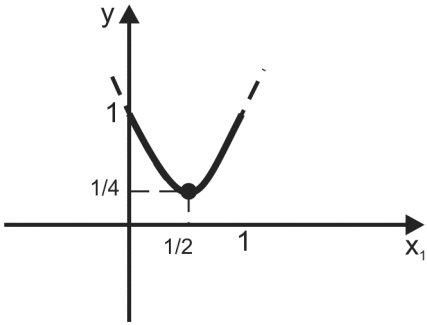
Օրինակ 1: Հաշվել $\max_{y}\min_{x} F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ և $\min_{x}\max_{y} F(\mathbf{x},\mathbf{y})$, եթե $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ և $F(x,y) = (x-y)^2$:

Լուծում: $\min_{0\le x\le 1} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{0\le x\le 1}(x-y)^2$

Ֆիքսենք $y \in [0;1]$ թիվը և գտնենք $(x-y)^2$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը $x \in [0;1]$ միջակայքում: Քանի որ $y \in [0,1]$, ապա այդ արժեքը կստացվի $x = y$ դեպքում և հավասար է 0: Ուստի $\max\min(x-y)^2 = 0$:

Պարզ է, որ

$$\max_{0\le y\le 1} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{0\le y\le 1}(x-y)^2 = \begin{cases} (1-x)^2, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x^2, & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} = \varphi(x)$$



$\Rightarrow \min\limits_{0\le x\le 1} \varphi(x) = \frac{1}{4}$:

Քանի որ $0 \neq \frac{1}{4}$, ապա լրացուցիչ կարող ենք նաև պնդել նաև, որ $F(x,y)$ -ը նշված բազմության վրա թամբակետ չունի:

Օրինակ 2: Օգտվելով թամբակետի սահմանումից՝ ցույց տալ, որ նշված ֆունկցիան տրված բազմության վրա թամբակետ չունի:

$$F(x,y) = x^2 y - x^2 + x, \text{ եթե } x \le 0, y \ge 1$$

Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն: Դիցուք (x_0, y_0)-ն թամբակետ է, այդ դեպքում պետք է տեղի ունենա $x_0^2 y - x_0^2 + x_0 \le x_0^2 y_0 - x_0^2 + x_0 \le x^2 y_0 - x^2 + x$

պայմանը ցանկացած $x \le 0, y \ge 1$ թվերի համար: Ձախ կողմի համար ունենք $x_0^2 y \le x_0^2 y_0$: Եթե $x_0 \neq 0$, ապա կստանանք $y \le y_0$, որը հնարավոր չէ, քանի որ $y \ge 1$ ցանկացած թիվ է, ուստի $x_0 = 0$ և (1)-ի աջ մասը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $0 \le x^2 y_0 - x^2 + x$, $\forall x \le 0$ դեպքում: Եթե $y_0 = 1$, ապա կստանանք $0 \le x$, որը հնարավոր չէ, օրինակ, $x = -1$ դեպքում: Երբ $y_0 > 1$, ապա $(y_0 - 1)x^2 + x$ քառակուսի եռանդամը ընդունում բացասա-

կան արժեք $x \in \left(-\frac{1}{y_0 - 1}; 0\right)$ միջակայքում: Ստացվեց հակասություն, ուստի թամբակետ գոյություն չունի:

Ուռուցիկ ծրագրման տեսության հիմնական թեորեմը

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) \to \min$$

$$\begin{cases} h_1(x_1, \dots, x_n) \le 0 \\ \dots \\ h_m(x_1, \dots, x_n) \le 0 \\ x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

որտեղ f, $h_1, \cdots, h_m$ ֆունկցիաները որոշված են R^n-ում:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{t=1}^{m} \lambda_t \cdot h_t(x),$$

որտեղ $\lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_m \ge 0$, կոչվում է (1) խնդրի Լագրանժի ֆունկցիա: Պարզվում է, որ (1) խնդրի լուծման և $L(x, \lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետի գոյության միջև սերտ կապ կա: Դրանում է հենց Կուն-Թակերի թեորեմի բովանդակությունը: Ձևակերպենք այն մաս-մաս. նախ բավարարության մասը՝

Թեորեմ 1: Դիցուք (x^*, λ^*)-ը Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ է $x \ge 0, \lambda \ge 0$ բազմության վրա: Այդ դեպքում x^*-ը (1) խնդրի լուծումն է:

Հատուկ նշենք, որ այստեղ f և $h_i(i = 1, \dots, m)$ ֆունկցիաների վրա ոչ մի սահմանափակում չի դրվում, մասնավորապես չի պահանջվում, որ դրանք լինեն ուռուցիկ ֆունկցիաներ:

Թեորեմի անհրաժեշտության մասը ձևակերպելու համար կատարենք լրացուցիչ ենթադրություններ:

ա) $f,\ h_1, \cdots, h_m$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են $x \geq 0$ բազմության վրա,

բ) (1) խնդրի թույլատրելի տիրույթը՝ $S = \{x \geq 0; h_i(x) \leq 0\}$, օժտված է ռեգուլյարության հատկությամբ, այն է՝ $\exists x^0 \in S$, այնպես որ $h_i(x^0) < 0, i = 1, \dots, m$:

Այդ ենթադրությունների դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝ Կուն-Թակերի թեորեմի անհրաժեշտության մասը:

Թեորեմ 2: Դիցուք x^*-ը (1) խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\lambda^* \geq 0$ վեկտոր, որ (x^*, λ^*) վեկտորների զույգը Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ է $x \geq 0, \lambda \geq 0$ բազմության վրա:

Նշենք, որ Կուն-Թակերի թեորեմը ավելի շատ տեսական կարևորություն ունի, քան գործնական:

Այնուհանդերձ, թեորեմի բովանդակությունը մեկնաբանելու համար քննարկենք մի խնդիր:

Օրինակ1: Իմանալով, որ x^*-ը տվյալ ՈՒԳԾ խնդրի լուծումն է, գտնել այնպիսի λ^*, որ (x^*, λ^*)-ը լինի տվյալ խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to min$$
$$h(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \leq -1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad x^* = (0; 1)$$

(այս լուծումը նախապես հեշտ է գտնել):

Լուծում. $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 - x_2 + 1)$

Պահանջվում է գտնել այնպիսի λ^* թիվ, որ ցանկացած $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ և $\lambda \geq 0$ թվերի համար տեղի ունենա

$L(x_1^*, x_2^*, \lambda) \leq L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \leq L(x_1, x_2, \lambda^*)$ պայմանը:

Հաշվի առնելով, որ $x_1^* = 0, x_2^* = 1$, ստանում ենք՝

$$0^2 + 1^2 + \lambda(0 - 1 + 1) \leq 0^2 + 1^2 + \lambda^*(0 - 1 + 1 \leq$$

$$\leq x_1^2 + x_2^2 + \lambda^*(x_1 - x_2 + 1:$$

Ձախ թևի անհավասարությունը ակնհայտ է $(1 \leq 1)$: Այսպիսով՝ պետք է գտնել այնպիսի $\lambda^* \geq 0$ թիվ, որ $\forall x_1, x_2 \geq 0$ դեպքում

$$1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \lambda^*(x_1 - x_2 + 1):$$

Հեշտ է տեսնել, որ կարելի է վերցնել $\lambda^* = 2$: Իրոք, այդ դեպքում աջ մասը դառնում է $(x_1 + 1)^2 - 1 + (x_2 - 1)^2 - 1 + 2$, որը ≥ 1:

ԲԱԺԻՆ 6

ՈԳԾ խնդիրների մոտավոր լուծման գրադիենտի մեթոդը

Դիտարկենք հետևյալ գլոբալ էքստրեմումի խնդիրը՝

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \to \max,$$

որտեղ $f(\mathbf{x})$-ը R^n-ում որոշված խիստ գոգավոր ֆունկցիա է և ունի առաջին կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ՝ ըստ բոլոր փոփոխականների:

Ուռուցիկ ֆունկցիաների հատկություններից հայտնի է, որ $f(\mathbf{x})$-ը ունի ճիշտ 1 գլոբալ մաքսիմումի կետ: Այդ կետի կոորդի-

նատները որոշվում են էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններից (տե՛ս [13])՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Սակայն գործնական խնդիրներում, երբ (*) համակարգի ճշգրիտ լուծում գտնելը հնարավոր չէ, փորձում են այդ համակարգը լուծել մոտավոր եղանակով:

Սահմանում: $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ վեկտորը (*)-ի մոտավոր լուծում է $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ, եթե (*)-ի ձախ մասում $\boldsymbol{x}$-ի փոխարեն տեղադրելով $\boldsymbol{x}^0$-ի կոորդինատները՝ ստանում ենք

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_j} \Big|_{\mathbf{x}^0} \right| < \varepsilon \ , \ j = 1, \cdots, n \qquad (1)$$

Նշենք, որ կան մոտավոր լուծման նաև այլ սահմանումներ:

Շարադրենք մոտավոր լուծում գտնելու գրադիենտի եղանակի ալգորիթմը: Դիցուք $\varepsilon > 0$ նախապես տրված թիվ է:

Քայլ1: $k := 0$, որևէ ձևով ընտրում ենք $\mathbf{x}^k \in R^n$ սկզբնական կետ:

Հաշվում ենք $gradf = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_j}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ վեկտորը:

Քայլ2: $\mathbf{x}^k \in R^n$ կետի կոորդինատները տեղադրելով (*)-ի ձախ մասերում՝ ստուգում ենք (1) պայմանները: Եթե դրանք տեղի ունեն, ապա խնդիրը լուծված է, և $\mathbf{x}^k$-ն հենց որոնելի մոտավոր լուծումն է:

Այսինքն, եթե $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}^k}\right| < \varepsilon$, $j = 1, \cdots, n$, ապա խնդիրը լուծվել է, անցնել քայլ 4:

Քայլ 3: Օգտվելով մաթ. անալիզից հայտնի այն փաստից, որ եթե $grad\ f(\mathbf{x}^k) \neq 0$, ապա այդ վեկտորը ցույց է տալիս $\mathbf{x}^k$ կետում ֆունկցիայի ամենաարագ աճի ուղղությունը, ընտրում ենք $\mathbf{x}^k$ կետից ելնող $\mathbf{x}^k + \alpha \cdot grad\ f(\mathbf{x}^k)$ ուղղությունը (ճառագայթը) $(\alpha \geq 0)$:

$f(\mathbf{x})$-ի արժեքները այդ ճառագայթի վրա, α փոփոխականից կախված $f_1(\alpha) = f\left(\mathbf{x}^k + \alpha \cdot grad\ f(\mathbf{x}^k)\right)$, $(\alpha \geq 0)$ ֆունկցիա է:

$f_1(\alpha)$-ն նույնպես գոգավոր ֆունկցիա է, հետևաբար ունի **ճիշտ մեկ գլոբալ** մաքսիմումի կետ: Ենթադրենք այդ կետը ստացվում է $\alpha = \alpha_1 > 0$ կետում՝ $\max\limits_{\alpha \geq 0} f_1(\alpha) = f_1(\alpha_1)$:

Վերցնում ենք $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_1 \cdot grad\ f(\mathbf{x}^k), k := k+1$ և անցնել քայլ 2-ին:

Քայլ 4: Պատասխան՝ $\mathbf{x}^k$ -ն խնդրի մոտավոր լուծումն է (մաքսիմումի կետը), f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն է $f(\mathbf{x}^k)$ -ն:

Դիտողություն 1: Նշենք, որ $f(\mathbf{x}) \to \min$ խնդրի դեպքում, որտեղ $f(\mathbf{x})$-ը խիստ ուռուցիկ ֆունկցիա է, պետք է միայն քայլ 3-ում դիտարկել $\alpha \leq 0$ կամ խնդիրը փոխարինել $-f(\mathbf{x}) \to \max$ խնդրով:

Դիտողություն 2: Կարելի է ցույց տալ, որ եթե $\mathbf{x}^k$ և $\mathbf{x}^{k+1}$ հաջորդական քայլերում ստացված կետեր են, ապա $grad\ f\left(\mathbf{x}^k\right) \cdot grad\ f\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) = 0$, այսինքն՝ այդ վեկտորները օրթոգոնալ են:

Օրինակ1: Գրադիենտի մեթոդով լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 + 8x_2 + 5 \to \min :$$

Լուծում:

Քայլ 1: $k := 0$, ընտրենք $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \left(1;2\right)$ հաշվենք ֆունկցիայի գրադիենտը.

$$gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \left(4x_1 - 16; 4x_2 + 8\right):$$

Քայլ 2: Հաշվենք $gradf$ -ի արժեքը $\mathbf{x}^k$ կետում.

$$gradf\left(\mathbf{x}^k\right) = \left(-12;16\right):$$

Քանի որ $\begin{cases} \left|-12\right| \geq 0,1 \\ \left|16\right| \geq 0,1 \end{cases}$, ապա պրոցեսը պետք է շարունակել:

Քայլ 3:

Դիտարկենք

$\left(1;2\right) + \alpha\left(-12;16\right) = \left(1 - 12\alpha; 2 + 16\alpha\right)$ ուղղությունը

$$f_1\left(\alpha\right) = 2\left(1 - 12\alpha\right)^2 + 2\left(2 + 16\alpha\right)^2 - 16\left(1 - 12\alpha\right) + 8\left(2 + 16\alpha\right) + 5$$

Գտնենք $f_1'\left(\alpha\right)$, $\alpha \leq 0$ պայմանով:

$$f_1'\left(\alpha\right) = 100\alpha + 25$$

$$100\alpha + 25 = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{4} < 0$$

Հաշվենք $\mathbf{x}^1$-ը տեղադրելով $\alpha = -\frac{1}{4}$-ը՝ $\mathbf{x}^1 = (4;-2)$, $k := k+1 = 2$, անցնենք քայլ 2:

Քայլ 2: $gradf(\mathbf{x}^1) = (0;0)$

Ստուգենք՝ $\begin{cases} |0| < 0,1 \\ |0| < 0,1 \end{cases}$, անցնենք քայլ 4:

Քայլ 4: Պատ.՝ $\mathbf{x}^1_{\min} = (4;-2)$

$$f_{\min} = -35:$$

Օրինակ 1-ը լուծենք ևս երկու այլ եղանակներով:

Առաջին եղանակ (ոչ պայմանական կամ բացարձակ էքստեմումի եղանակ):

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 + 8x_2 + 5 \to ext$$

Անհրաժեշտ պայման

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 16 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$M(4;-2)$-ը ստացիոնար կետ է:

Բավարար պայման

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H\big|_M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Delta_1 = 4 > 0 \\ \Delta_2 = 16 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \quad M(4;-2)\text{-ը մինիմումի կետ է:}$$

Պատ.՝ $\mathbf{x}^1_{\min} = (4;-2)$

$f_{\min}(M) = -35$:

Երկրորդ եղանակ:

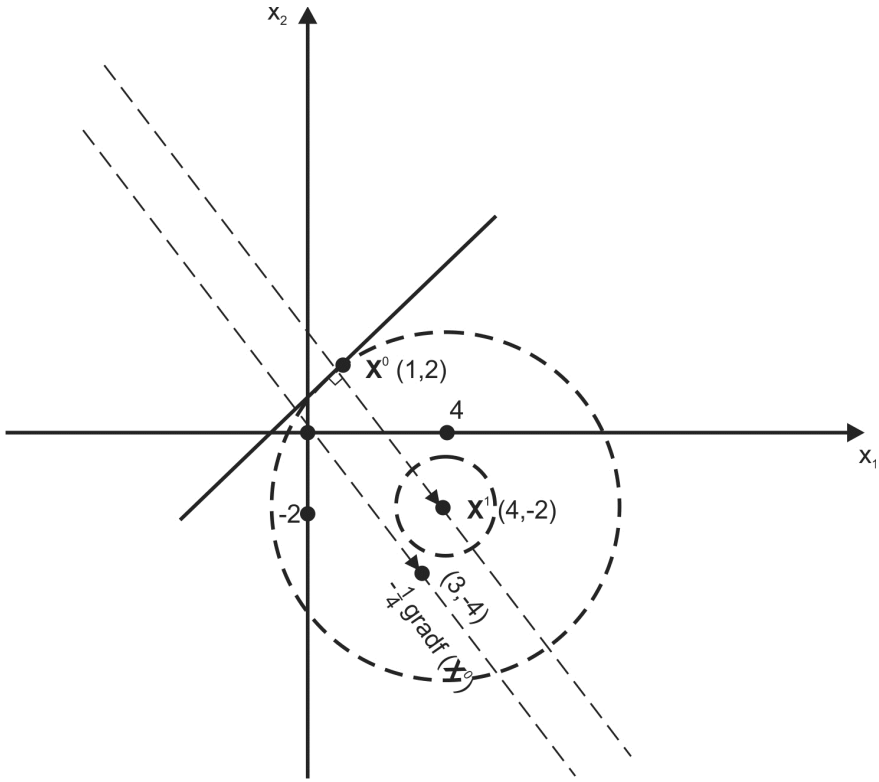
Առանձնացնենք լրիվ քառակուսի՝

$$f(x_1, x_2) = 2\left(x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 4x_2\right) + 5 =$$

$$= 2\left((x_1 - 4)^2 - 16 + (x_2 + 2)^2 - 4\right) + 5 =$$

$$= 2\left((x_1 - 4)^2 + (x_2 + 2)^2\right) - 35 \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^1_{\min} = (4;-2), \ f_{\min}(M) = -35:$$



գծագիր2 (գրադիենտի մեթոդ)

Այսպիսով՝ f ֆունկցիայի մակարդակի գծերը $M(4;-2)$ կենտրոնով շրջանագծեր են, որոնք անցնում են R^2 հարթության բոլոր կետերով, հետևաբար նաև նախորոք ընտրված $(1;2)$ կետով (տե՛ս գծ. 2): Քանի որ ցանկացած կետում f ֆունկցիայի գրադիենտը մակարդակի գծին ուղղահայաց վեկտոր է, և $\alpha = -\frac{1}{4}$, ապա $\mathbf{x}^0$ կետում $(x_1-4)^2+(x_2+2)^2=25$, $R=5$ շառավղով շրջանագծի շոշափողին ուղղահայաց $gradf(\mathbf{x}_1^0)=(-12;16)$ վեկտորի

հակառակ ուղղությամբ և այդ վեկտորի երկարության $\frac{1}{4}$ մասի չափով (հինգ միավոր երկարությամբ) մեկ քայլով $\mathbf{x}^0$ կետից կհասնենք խնդրի լավագույն լուծմանը՝ $\mathbf{x}^1(4;-2)$ կետին (շրջանագծի կենտրոնին):

Դիտողություն: Եթե f ֆունկցիայի մակարդակի գծերը շրջանագծեր կամ սֆերաներ չեն, ապա շատ դեպքերում պրոցեսը երկարում է, և հաշվարկները կատարվում են համակարգչի օգնությամբ:

ԳԼՈՒԽ IV
ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

ԲԱԺԻՆ 1
4.1 Նախնական գաղափարներ

Դինամիկ ծրագրումը (ԴԾ) ներկայացնում է մաթեմատիկական ծրագրման այնպիսի մեթոդ, երբ ուսումնասիրվող խնդիրը ենթադրում է բազմաքայլ լուծումների պրոցես կամ կարող է բերվել դրան: ԴԾ մեթոդով խնդրի լուծման համար ամբողջական խնդիրը տրոհվում և բերվում է պարզ խնդիրների հաջորդական լուծման: Բազմաթիվ տնտեսական գործընթացներ բնականոն ձևով տրոհվում են քայլերի կամ փուլերի (ժամանակի մեջ զարգացող պլանավորման կամ կառավարման խնդիրները), բայց լինում են դեպքեր, երբ խնդրի լուծման տրոհումը (փուլավորումը) ստեղծվում է արհեստականորեն: Այդպիսի մոտեցումը բնորոշ է այն խնդիրներին, որտեղ ժամանակի գործոնը բացակայում է: Եթե գծային և ոչ գծային ծրագրման խնդիրների համար գոյություն ունեն լուծման որոշակի մեթոդներ, ապա ԴԾ խնդիրների համար միօրինակ մոտեցումներ գոյություն չունեն: ԴԾ մեթոդով խնդրի լուծման համար կիրառվում է այլ մոտեցում. k չափանի խնդրի լուծումը տրոհվում է k փուլերի, որոնցից յուրաքանչյուրը իրենից ներկայացնում է մեկ փոփոխականի նկատմամբ ենթախնդիր: Այսպիսի մոտեցման հաշվման առավելությունը կայա-

նում է նրանում, որ k չափանի խնդրի լուծման փոխարեն լուծում ենք մեկ փոփոխականի ենթախնդիրներ՝ $Ի_1 \to Ի_2 \to \cdots \to Ի_k$, խնդրի լուծումը իրականացվում է փուլ առ փուլ՝ օգտագործելով անդրադարձ բանաձևեր:

ԴԾ եղանակով խնդիրների լուծումը սովորաբար կատարվում է գրաֆների և ցանցերի միջոցով:

Դիտարկենք $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ վերջավոր բազմությունը և $L \subseteq V \times V$ կարգավորված զույգերի բազմությունը:

Սահմանում: $G = (V, L)$ զույգը կանվանենք կողմնորոշված **գրաֆ**:

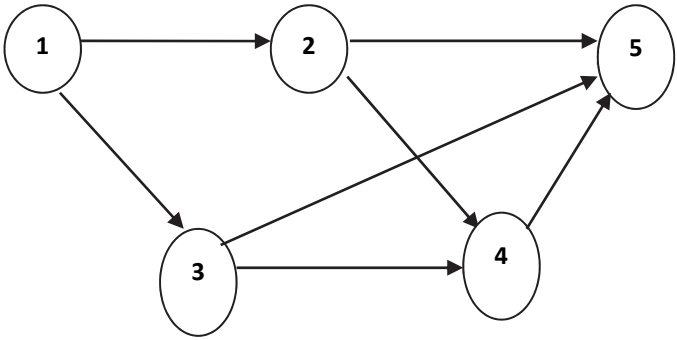
V բազմության տարրերը կանվանենք կողմնորոշված գրաֆի գագաթներ, իսկ L բազմության տարրերը՝ կողեր կամ աղեղներ:

Գրաֆը հարթության վրա պատկերվում է հետևյալ կերպ.

- գագաթները նշում ենք հարթության մեջ իրարից տարբեր կետերով կամ շրջանակներով,
- աղեղները՝ գագաթները իրար միացնող անընդհատ գծի տեսքով, որը չի անցնում որևէ այլ գագաթին համապատասխանող կետով, օրինակ՝ (v_i, v_j) աղեղը, v_i և v_j գագաթները միացնող անընդհատ գիծ է՝ սլաքը դրված դեպի v_j գագաթը:

Սահմանում: Գագաթների $(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k})$ հաջորդականությունը կոչվում է v_{i_1}-ից v_{i_k} **ուղի** և գրում ենք $v_{i_1} \to v_{i_2} \to \ldots \to v_{i_{k-1}} \to v_{i_k}$, եթե $(v_{i_s}, v_{i_{s+1}}) \in L, s = 1, ..., k-1,$ աղեղներն իրարից տարբեր են, որտեղ v_{i_1}-ը կոչվում է սկզբնական գագաթ, v_{i_k}-ն վերջնական գագաթ:

Օրինակով ներկայացնենք կողմնորոշված գրաֆը, որը կազմված է գագաթներից և աղեղներից (կողերից):



Նկար 1

Նկար 1-ում պատկերված կողմնորոշված գրաֆի համար.

գագաթների բազմությունն է՝ $V = \{1; 2; 3; 4; 5\}$,

աղեղների բազմությունն է՝

$$L = \{(1;2), (1;3), (2;4), (3;4), (2;5), (3;5)\},$$

ուղիներ են օրինակ՝ $1 \to 3 \to 5$-ը, $1 \to 2 \to 4 \to 5$-ը,

$1 \to 3 \to 4 \to 5$-ը և այլն:

Կողմնորոշված գրաֆի աղեղներին կարելի է վերագրել թվեր, որոնք ցույց են տալիս, օրինակ, բնակավայրերի միջև հեռավորությունը կամ ճանապարհի ծախսը, խողովակաշարի թողունակությունը, ներդրվող գումարից ստացվող շահույթը և այլն: **Ցանց** կոչվում է այն կողմնորոշված գրաֆը, որի աղեղներին վերագրված են ոչ բացասական արժեքներ, որոնց կանվանենք կշիռ կամ թողունակություն, առանձնացված են սկզբնական և վերջնական գագաթներ:

ԴԾ հիմնական հասկացություններն են՝ փուլ, վարվելակերպ (վարք), օպտիմացման սկզբունքներ, որոնք կմեկնաբանենք ցանցերի լեզվով:

Ցանցում կամայական վիճակը ներկայացվում է որպես գագաթ, այդ գագաթից դուրս եկող աղեղների բազմությունը նկարագրում են համապատասխան վիճակը բնութագրող վարվելակերպերի բազմությունը: Հասկանալի է, որ եթե մենք ունենք որոշակի նպատակ (համաձայն խնդրի պահանջի), ապա կամայական վիճակում (գագաթում) գտնվելիս և ընտրելով այդ վիճակի (գագաթի) համար լավագույն լուծումը (վարվելակերպը), օգտվելով դինամիկ ծրագրման օպտիմացման սկզբունքից՝ արդյունքում կարող ենք գտնել վերջնական լուծումը, որը կանվանենք լավագույն վարք (ուղի):

Այսինքն՝ ցանցում **լավագույն վարք (լավագույն ուղի)** ասելով՝ հասկանում ենք ցանցի սկզբնական գագաթից վերջնական գագաթը միացնող ամենակարճ կամ ամենաերկար ուղու որոշումը՝ կախված խնդրի պահանջից:

ԴԾ օպտիմացման սկզբունքները (տե՛ս [7], էջ 80-81)

1. Յուրաքանչյուր վիճակի համար գոյություն ունի սկզբնական վիճակից այդ վիճակին բերող լավագույն վարք:

2. Լավագույն վարքն օժտված է այն հատկությամբ, որ ինչպիսին էլ լինի s վիճակը, հաջորդ որոշումները պետք է լինեն լավագույն վարք s-ի համար:

3. Լավագույն ուղու ցանկացած ենթուղի լավագույնն է:

Բելմանի անդրադարձ հավասարումների ընդհանուր տեսքը

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

s_n՝ n-րդ փուլին պատկանող բոլոր վիճակների (գագաթների) բազմություն,

d_n՝ n-րդ փուլում ընտրված վարվելակերպ (աղեղ),

$B_n(s)$՝ թույլատրելի վարվելակերպերի բազմությունը s վիճակի համար,

$r_n = r_n(s_n, d_n)$՝ «եկամտի» ֆունկցիան, որն ստացվում է s_n վիճակում d_n որոշում կայացնելիս:

Նպատակային ֆունկցիայի արժեքը հավասար է առաջին փուլից մինչև վերջին փուլը ամեն մի փուլում «եկամտի» ֆունկցիաների գումարին:

Բելմանի անդրադարձ հավասարումը կլինի՝

$$f_n(s_n) = \underset{d_n \in B_n(s)}{ext} \{r_n(s_n, d_n) + f_{n-1}(s_{n-1})\},\ n = 1,2,\ldots,k\ ,$$

որտեղ $f_0 = 0$, և հաշվարկը կատարվում է $f_1, f_2, \ldots, f_k$ հաջորդականությամբ:

ԲԱԺԻՆ 2
4.2 Դինամիկ ծրագրման եղանակով խնդիրների լուծման օրինակներ

Օրինակ 1: Կարճագույն ուղի գտնելու խնդիրը: Տրված են n քաղաքներ և որոշ քաղաքների միջև կողմնորոշված աղեղներ, որոնց երկարությունները հայտնի են: Ձեռնարկության արտադրանքը արտադրման քաղաքից պետք է տեղափոխել սպառման քաղաք այնպես, որ անցած ճանապարհը լինի նվազագույնը:

Դիցուք ունենք $n = 11$ քաղաքներ, որոնց հեռավորությունների տվյալները ներկայացված են ստորև բերված աղյուսակում: Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

l_{ij} – ով՝ i և j բնակավայրերի միջև հեռավորությունը արտահայտված երկարության չափման միավորով, օրինակ՝ կիլոմետր, որտեղ արտադրման քաղաքը (1)-ն է, իսկ սպառման քաղաքը՝ (11)-ը, (i, j) – ով՝ i և j բնակավայրերը միացնող աղեղը:

Աղյուսակ 1

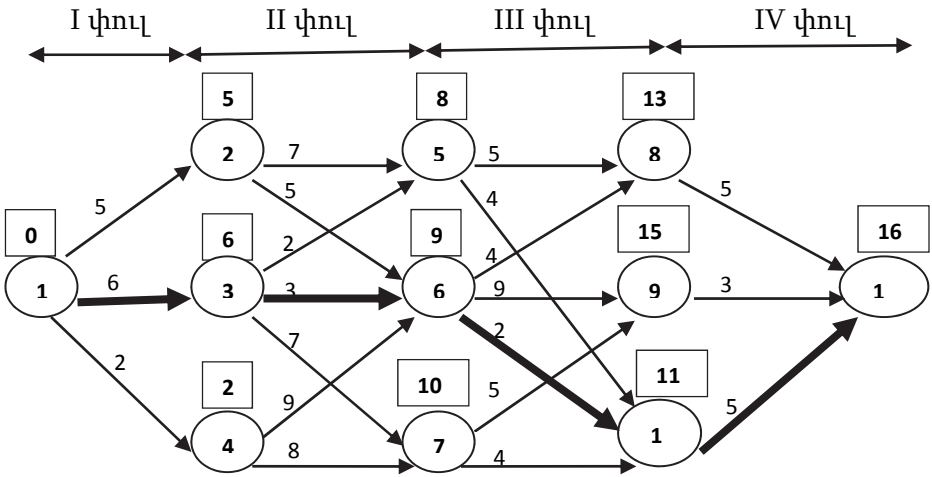
(i,j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(2,6)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(4,6)	(4,7)
l_{ij}	5	6	2	7	5	2	3	7	9	8

(i,j)	(5,8)	(5,10)	(6,8)	(6,9)	(6,10)	(7,9)	(7,10)	(8,11)	(9,11)	(10,11)
l_{ij}	5	4	4	9	2	5	4	5	3	5

Պահանջվում է գտնել (1)-ից (11)-ը տանող կարճագույն ուղին:

Կարճագույն ուղու խնդրի լուծման համար կառուցենք խնդրի պայմաններին համապատասխան ցանցը (աղյուսակում բերված տվյալներն են):

Այն պատկերված է նկար 1-ում, որտեղ համարակալված գագաթները բնակավայրերն են, իսկ աղեղները՝ բնակավայրերը միացնող ուղիները: (i, j) աղեղների վրա գրված են l_{ij} մեծությունները:



Նկար 2

Օրինակ՝ (1)-ից մինչև (3)-րդ բնակավայրը 6 կմ է, իսկ (3)-րդ բնակավայրից մինչև 6-րդ բնակավայրը՝ 3 կմ և այլն: Նկատենք, որ արտադրման քաղաքից սպառման քաղաք տանող բազմազան ուղիներ կան, և եթե մենք դիտարկենք բոլոր հնարավոր ուղիները և ընտրենք դրանցից կարճագույնը, կգտնենք լավագույն ուղին: Բայց, եթե բնակավայրերի և ուղիների քանակը շատ է, այսինքն՝ շատ է գագաթների և աղեղների քանակը, ապա նշված եղանակով կարճագույն ուղի գտնելը արդյունավետ չէ (բոլոր հնարավոր ուղիների քանակը շատ մեծ թիվ է): Կարճագույն ուղու խնդիրը լուծենք ԴԾ մեթոդով, որը հնարավորություն է տալիս բավականին քիչ քայլեր կատարելով ստանալու լավագույն լուծումը:

Պարզ է, որ արտադրման քաղաքից՝ (1) գագաթից, կարող ենք գնալ երեք ուղղություններով՝ դեպի 2-րդ, 3-րդ կամ 4-րդ բնակավայրերից որևէ մեկը: Այդ ընտրությունը անվանենք ամենա-

կարճ ուղու ընտրության սկզբնական փուլ: Հաջորդ փուլում, կախված նրանից, թե որ բնակավայրում ենք եղել սկզբնական, այսինքն՝ նախորդ փուլի ընտրության արդյունքում, կարող ենք շարժվել դեպի որևէ հարևան բնակավայր: Օրինակ, եթե նախորդ փուլում ընտրել ենք 2-րդ բնակավայրը, ապա կարող ենք շարժվել դեպի 5-րդ կամ 6-րդ բնակավայրերը, իսկ եթե ընտրել ենք 3-րդը՝ դեպի 5-րդ, 6-րդ և 7-րդ բնակավայրեր և այլն: Երբ գտնվում ենք որոշակի բնակավայրում համարենք, որ գտնվում ենք բնակավայրի համարին համապատասխանող վիճակում: Գտնվելով որոշակի վիճակում՝ որոշում ենք, թե դեպի որ բնակավայրը գնալ:

Ցանցի յուրաքանչյուր գագաթի համար որոշենք արտադրման վայրից այդ գագաթը տանող ամենակարճ ուղու երկարությունը:

Ինչպես նշել ենք, ըստ օպտիմալության սկզբունքի՝ լավագույն ուղու ցանկացած ենթաուղի լավագույնն է: Եվ խնդրի լուծման համար փուլ առ փուլ դիտարկելով գագաթները և տրված գագաթների համար որոշումներ կայացնելով՝ կգտնենք խնդրի լավագույն լուծումը:

f_j–ով նշանակենք սկզբնական գագաթից j-րդ գագաթը տանող կարճագույն ուղու երկարությունը $j = 1, 2, ..., n$: Անդրադարձ բանաձևն է՝ $f_j = \min\limits_{i \in B(j)} \{f_i + l_{ij}\}$, որտեղ $f_1 = 0$ և նվազագույն արժեքը դիտարկվում է ըստ բոլոր (i, j) թույլատրելի աղեղների՝ $i \in B(j)$ (տե՛ս 120 էջ):

Այսինքն՝ j-րդ գագաթ տանող կարճագույն ուղու մեծությունը որոշվում է՝ դիտարկելով նախորդ փուլի i-րդ գագաթի կար-

ճագույն ուղու մեծությանը գումարելով i-րդից j-րդ գագաթների միջև եղած հեռավորությունը՝ ըստ բոլոր (i, j) թույլատրելի աղեղների և վերցնելով փոքրագույն արժեքը:

Կատարենք հաշվարկներ ըստ փուլերի.

Փուլ 1. $f_1 = 0$:

Փուլ 2. $f_2 = f_1 + l_{12} = 0 + 5 = 5$, $f_3 = f_1 + l_{13} = 0 + 6 = 6$,

$f_4 = f_1 + l_{14} = 0 + 2 = 2$:

Փուլ 3. $f_5 = \min\{f_2 + l_{25}; f_3 + l_{35}\} = \min\{5 + 7; 6 + 2\} = 8$,

$f_6 = \min\{f_2 + l_{26}; f_3 + l_{36}; f_4 + l_{46}\} = \min\{5 + 5; 6 + 3; 2 + 9\} = 9$,

$f_7 = \min\{f_3 + l_{37}; f_4 + l_{47}\} = \min\{6 + 7; 2 + 8\} = 10$:

Փուլ 4. $f_8 = \min\{f_5 + l_{58}; f_6 + l_{68}\} = \min\{8 + 5; 9 + 4\} = 13$ (2 հատ),

$f_9 = \min\{f_6 + l_{69}; f_7 + l_{79}\} = \min\{9 + 9; 10 + 5\} = 15$,

$f_{10} = \min\{f_5 + l_{5\,10}; f_6 + l_{6\,10}; f_7 + l_{7\,10}\} = \min\{8 + 4; 9 + 2; 10 + 4\} = 11$,

Փուլ 5.

$f_{11} = \min\{f_8 + l_{8\,11}; f_9 + l_{9\,11}; f_{10} + l_{10\,11}\} =$

$= \min\{13 + 5; 15 + 3; 11 + 5\} = 16$:

Ստացված բոլոր վերջնական արդյունքները՝ f_j-երը, գրենք գագաթների շրջանակների վերին մասում:

Կատարած հաշվարկները ցույց են տալիս, որ կարճագույն ուղու երկարությունը 16 կմ է: Այժմ որոշենք թե որն է կարճագույն ուղին և գտնենք կարճագույն ուղու գագաթները: Դրա համար վարվում ենք հետևյալ կերպ: Սկսում ենք վերջին (11) գագաթից: Գտած 16 թվից հանում ենք նախորդ փուլի կից գագաթը միացնող աղեղի երկարությունը և տարբերությունը համեմատում շրջանակի վերևում գրված թվի հետ: Եթե այդ երկու թվերը համընկ-

նում են, ապա տվյալ գագաթը պատկանում է ամենակարճ ուղուն: Այդպես շարժվելով հակառակ ուղղությամբ՝ հասնելով սկզբնական (1) գագաթին գտնում ենք լավագույն ուղին: Դիտարկված խնդրի համար լավագույն ուղին է՝ $1 \to 3 \to 6 \to 10 \to 11$, իսկ լավագույն արժեքը 16:

Այսպիսով՝ սկզբնական արտադրման վայրից սպառման վայր տանող ամենակարճ ուղին գտնելու համար լուծվեց նմանատիպ խնդիրներ բոլոր փուլերի համար, և ստացվեց սկզբնական խնդրի լուծումը:

Դիտողություն: Հնարավոր է, որ կարճագույն ուղին միակը չլինի, այսինքն՝ խնդիրն ունենա այլընտրանքային լավագույն լուծումներ:

Օրինակ 2: Ներդրումների լավագույն բաշխման խնդիրը: Ձեռնարկության տնօրենների խորհուրդը ուսումնասիրում է ձեռնարկության n մասնաճյուղերում արտադրական սարքավորումների նորացման հարցը: Մասնաճյուղերի արտադրական սարքավորումների նորացման համար ձեռնարկությունը պատրաստ է ներդնել K մլն պ.դ.մ.: Ձեռնարկության յուրաքանչյուր մասնաճյուղը ներկայացնում է արտադրական սարքավորումների նորացման նախագծերի տարբերակները, որը բնութագրվում է ամբողջաթիվ x_i ներդրման արդյունքում ակնկալվող R_i $(i = 1, 2, ..., n)$ եկամուտով: Ձեռնարկության տնօրենների խորհուրդի նպատակն է K մլն պ.դ.մ. գումարը բաշխել մասնաճյուղերի միջև այնպես, որպեսզի ձեռնարկությունը ստանա առավելագույն եկամուտ:

Լուծենք ստորև բերված աղյուսակում ներդրումների խնդիրը $(n = 3, K = 5)$ դինամիկ ծրագրման եղանակով: Կազմենք խնդրի

մաթեմատիկական մոդելը, կառուցենք ցանցը, գրենք անդրադարձ հաշվարկման բանաձևերը և գտնենք լավագույն լուծումը: Գտնենք խնդրի լավագույն լուծումը նաև այն դեպքում, եթե օրինակ 3-րդ մասնաճյուղը հրաժարվի ներդրումներից:

Համապատասխան տվյալները ներկայացված են աղյուսակ 2-ում, որտեղ դիտարկված են նաև 0 ծախսի գումարով նախագծերը, որը հնարավորություն է տալիս ներդրման նախագծում չընդգրկելու ձեռնարկության մասնաճյուղերից որևէ մեկը: Եթե որևէ ներդրումային գումարի համար մասնաճյուղը չի ներկայացրել նախագիծ, ապա աղյուսակ 2-ում կամ չի նշվում կամ նշվում է գծիկով:

Աղյուսակ 2

$K = 5$	I մասն.	II մասն.	III մասն.
Ներդրում	$R_1(x_1)$	$R_2(x_2)$	$R_3(x_3)$
0	0	0	0
1	2	-	2
2	-	3	-
3	5	5	6
4	7	6	-

Ներդրումների լավագույն բաշխման խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կլինի՝ գտնել x_1, x_2, x_3 ամբողջաթիվ փոփոխականների (ներդրումների) այնպիսի արժեքներ, որ

$$R = R_1(x_1) + R_2(x_2) + R_3(x_3) \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad i = 1, 2, 3: \end{cases}$$

Առաջին և երկրորդ մասնաճյուղերի նախագծերը չորսն են, իսկ երրորդ մասնաճյուղինը՝ երեքը: Խնդիրը ուղղակիորեն կարելի է լուծել՝ ընտրելով բոլոր հնարավոր նախագծերը, որոնց քանակը 4x4x3=48 հատ է, բայց ոչ բոլոր տարբերակներն են, որ կբավարարեն ներդրումների բաշխման խնդրին, հնարավոր է ընտրենք այնպիսի ներդրումներ, որ ներդրման գումարը մեծ լինի 5 մլն պ.դ.մ.-ից, կամ՝ փոքր: Այսինքն՝ ներդրումների բաշխման խնդիրը հնարավոր է լուծել հատարկման (բոլոր հնարավոր տարբերակների դիտարկման) եղանակով՝ առանձնացնելով թույլատրելի տարբերակները և գտնելով նրանցից լավագույնը: Հատարկման եղանակը մեծ չափանի խնդիրները լուծելիս արդյունավետ չէ, իսկ դինամիկ ծրագրման մեթոդով լուծումը հնարավորություն է տալիս էապես քչացնելու քայլերի քանակը:

Խնդիրը կարելի է **բերել** ցանցում ամենաերկար ուղի գտնելու խնդրին:

Կառուցենք ցանցը հետևյալ կերպ:

1. Խնդիրը բաժանենք փուլերի, որտեղ փուլերի քանակը հավասար է մասնաճյուղերի քանակին:

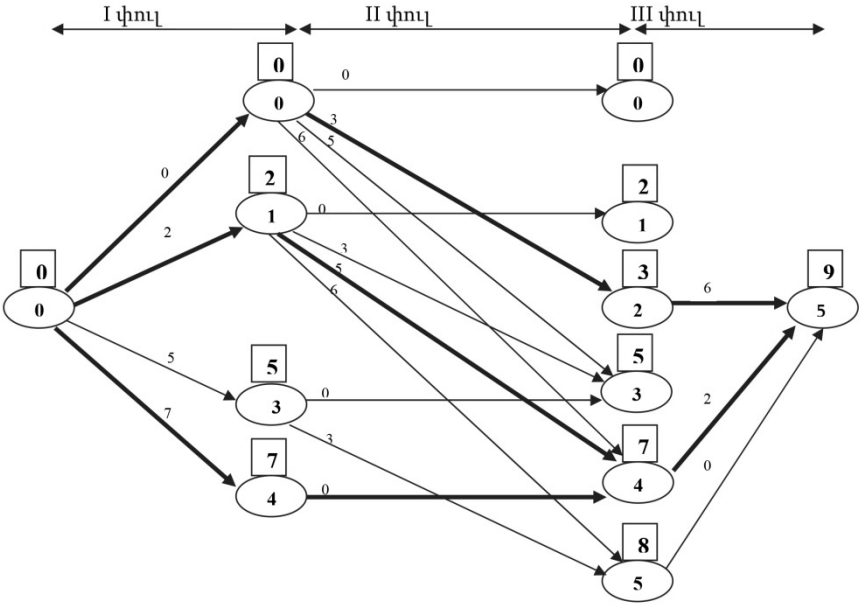
2. Յուրաքանչյուր փուլի գագաթների քանակը կախված է տվյալներից, և ամենաշատը K+1 հատ է, իսկ վերջին փուլում դիտարկվում է մեկ գագաթ: Հարմարության համար ներմուծենք 0-ական փուլ՝ 0 ներդրումով:

3. i-րդ փուլում խնդիրը լուծենք միայն առաջին i մասնաճյուղերի համար, որտեղ i-րդ փուլի k գագաթը ցույց է տալիս առաջին i մասնաճյուղերում ներդրվող գումարը:

4. i-րդ փուլի աղեղների երկարություններին վերագրենք թույլատրելի նախագծերի իրականացումից սպասվող R_i,

$i = 1, 2, 3,$ եկամուտների մեծությունները («եկամտի» ֆունկցիան):

Դիտարկվող օրինակում կա երեք փուլ, առաջին փուլում կդիտարկենք միայն առաջին մասնաճյուղը, երկրորդում՝ առաջին և երկրորդ մասնաճյուղերը, իսկ երրորդում՝ բոլոր երեք մասնաճյուղերը:



Նկար 3. ներդրումների բաշխման խնդրի ցանցը

Դիտարկենք 0-ական փուլի 0 գագաթը առաջին փուլի (1) գագաթին միացնող (0,1) աղեղը. դա նշանակում է, առաջին փուլում առաջին մասնաճյուղում կատարվել է 1 մլն պ.դ.մ. ներդրում, և եկամուտը՝ $R_1 = 2$, հետևաբար (0, 1) աղեղին կվերագրենք 2 արժեք: Իսկ (0, 2) աղեղին համապատասխանում է իրա-

վիճակ, երբ առաջին մասնաճյուղում կարող է ներդրվել 2 մլն պ.դ.մ., բայց առաջին մասնաճյուղը նման նախագծային տարբերակ չի ներկայացրել $\Rightarrow$ (0, 2) աղեղին կվերագրենք **նախորդ նախագծի** տարբերակի եկամտի արժեքը՝ 2, կամ կարող ենք այդ աղեղը չգծել: Առաջին փուլի գագաթները երկրորդ փուլի գագաթներին միացնող աղեղներից դիտարկենք (1,4)-ը: (1) գագաթից գնում ենք (4) գագաթը, դա նշանակում է, որ դիտարկում ենք այն դեպքը, երբ առաջին երկու մասնաճյուղերում ներդրվել է 4 մլն. պ.դ.մ. այն պայմանի դեպքում, որ առաջին մասնաճյուղում ներդրել ենք 1 մլն. պ.դ.մ., հետևաբար երկրորդ փուլում բաշխված ներդրումը կազմում է $4-1=3$ մլն պ.դ.մ., և երկրորդ մասնաճյուղի 3 մլն պ.դ.մ.-ին համապատասխանող եկամուտը՝ $R_2=5$ մլն պ.դ.մ. է $\Rightarrow$աղեղին կվերագրենք 5 արժեք:

Չի կարող լինել այնպիսի իրավիճակ, երբ առաջին և երկրորդ մասնաճյուղերում ներդրվող ընդհանուր գումարը փոքր լինի միայն առաջին մասնաճյուղում ներդրվող գումարից, այսինքն՝ (5, 0), (4, 2) և նմանատիպ այլ աղեղներ գոյություն չունեն:

Այժմ գտնենք 0-ական փուլի (0) գագաթից երրորդ փուլի (5) գագաթ տանող ամենաերկար ուղին՝ օգտվելով հետևյալ անդրադարձ բանաձևից.

$$f_i(k)=\max_{0\le x_i\le k}\{R_i(x_i)+f_{i-1}(k-x_i)\},\ i=1,2,3,$$

որտեղ $f_0(0)=0$, քանի որ 0-ական փուլը ելակետային է, $f_i(k)$, ($i=1,2,3$)՝ i-րդ փուլում k մլն. պ.դ.մ. ներդրումից ստացված եկամուտն է, $k=0,1,2,...,K$:

Հաշվարկները կատարենք ըստ փուլերի:

Փուլ 1: I փուլի բոլոր գագաթներ տանող ամենաերկար ուղու որոշում.

$$f_1(0)=0+0=0\,,\ f_1(1)=0+2=2\,,\ f_1(2)=0+2=2\,,$$

$$f_1(3)=0+5=5\,, f_1(4)=0+7=7\,,\ f_1(5)=0+7=7:$$

Ստացված թվերը տվյալ փուլի համապատասխան գագաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունն են, որոնք օգտագործվում են հաջորդ փուլի հաշվարկների համար:

Փուլ 2: Այս փուլում հաշվարկում ենք II փուլի բոլոր գագաթներ տանող ամենաերկար ուղիները:

$$f_2(0)=\max\{0+0\}=0\,,$$

$$f_2(1)=\max\{2+0\}=2\,,$$

$$f_2(2)=\max\{0+3\}=3\,,$$

$$f_2(3)=\max\{0+5,\,2+3,\,5+0\}=5\,,$$

$$f_2(4)=\max\{0+6,\,2+5,\,7+0\}=7\,,$$

$$f_2(5)=\max\{2+6,\,5+3\}=8:$$

Փուլ 3: II փուլի բոլոր գագաթներից III փուլի գագաթ տանող ամենաերկար ուղու որոշում՝

$$f_3(5)=\max\{3+6,\,7+2,\,8+0\}=9:$$

Ստացված բոլոր վերջնական արդյունքները՝

$f_i(k)$-երը, գրենք գագաթների շրջանակների վերին մասում:

Այսպիսով՝ լավագույն ներդրումների բաշխման դեպքում կստացվի առավելագույն եկամուտ՝ 9 մլն պ.դ.մ.:

Գտնելով ամենաերկար ուղին (ուղիները), ինչպես՝ օրինակ 1-ում, ստանում ենք, որ ուսումնասիրվող խնդիրն ունի երեք լավագույն լուծումներ (կա երեք ներդրումների բաշխման տարբերակներ):

Ներկայացնենք լավագույն բաշխման ներդրումային տարբերակները, լավագույն եկամուտը՝ ըստ մասնաճյուղերի և լավագույն ուղիները՝

Լավագույն եկամուտ	Լավագույն եկամուտն ըստ մասնաճյուղերի	Լավագույն ներդրումների բաշխումն ըստ մասնաճյուղերի	Լավագույն ուղի
$R^* = 9$	$R_1^* = 0,\ R_2^* = 3,\ R_3^* = 6$	(0, 2, 3)	$(0 \to 0 \to 2 \to 5)$
	$R_1^* = 2,\ R_2^* = 5,\ R_3^* = 2$	(1, 3, 1)	$(0 \to 1 \to 4 \to 5)$
	$R_1^* = 7,\ R_2^* = 0,\ R_3^* = 2$	(4, 0, 1)	$(0 \to 4 \to 4 \to 5)$

Եթե ներդրումների բաշխման խնդրում երրորդ մասնաճյուղը չի մասնակցում ներդրումային ծրագրին, ապա կարելի է օգտվելով արդեն լուծած խնդրից՝ դիտարկելով միայն երկրորդ փուլի վերջնական արդյունքը: Այս դեպքում լավագույն ներդրումը, ըստ ներդրումների բաշխման տարբերակները, լավագույն եկամուտը՝ ըստ մասնաճյուղերի, և լավագույն ուղիները կլինեն՝

Լավագույն եկամուտ	Լավագույն եկամուտն ըստ մասնաճյուղերի	Լավագույն ներդրումների բաշխումն ըստ մասնա-ճյուղերի	Լավագույն ուղի
$R^* = 8$	$R_1^* = 2, R_2^* = 6$	(1, 4)	$(0 \to 1 \to 5)$
	$R_1^* = 5, R_2^* = 3$	(3, 2)	$(0 \to 3 \to 5)$

Դիտողություն 1: Եթե պետք է դիտարկվեն նաև այն դեպքերը, երբ առաջին (կամ երկրորդ) մասնաճյուղը կարող է հրաժարվել ներդրումից, ապա այդ մասնաճյուղը կդիտարկենք երրորդ՝ վեր-ջին փուլում:

Դիտողություն 2: Երրորդ փուլում կարելի է դիտարկել նաև $1, 2, ..., K$ ներդրումային գումարների դեպքերը:

Դիտողություն 3: Խնդրում ներդրվող գումարը կարող է լինել ոչ բնական թիվ, այդ դեպքում ցույց է տրվում, որ խնդիրը կարելի է բերել բնական թվերով խնդրի:

Դիտողություն 4: Եթե դիտարկվող խնդրի բոլոր տվյալները մնան նույնը, միայն $K = 5$-ը փոխվի՝ դառնալով $K = 7\ (10)$, ապա առաջին փուլում կդիտարկվի 5(5) գագաթ, երկրորդ փուլում 7(9) գագաթ, իսկ երրորդ փուլում մեկ գագաթ 7(10) արժեքով (համարով):

Գրականության ցանկ

1. **Տոնոյան Գ. Պ.,** Գործոյթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդներ, դասախոսություններ, մաս 1, Երևան, 2011:
2. **Սարգսյան Ս. Հ., Տոնոյան Գ. Պ.,** Գործոյթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդներ, խնդրագիրք, Երևան, 2012:
3. **Տոնոյան Ռ. Ն.,** Գործոյթների հետազոտման մաթեմատիկական խնդիրներ, Երևան, 1999:
4. **Սահակյան Մ. Ա., Սարգսյան Հ. Լ., Սարգսյան Ս. Դ., Տոնոյան Ռ. Ն.,** Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, մաս 1, Երևան, 1997:
5. **Սահակյան Մ. Ա., Բեկնազարյան Ն. Ա., Հակոբյան Հ. Ց., Քերոբյան Խ. Վ.,** Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, մաս 2, Երևան, 2001:
6. **Սահակյան Մ. Ա.,** Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, մաս 3, խնդիրներ և վարժություններ, Երևան, 2001:
7. **Սարգսյան Հ. Լ., Առաքելյան Ա. Հ., Սահակյան Մ. Ա., Խառատյան Ա. Ա., Քոչինյան Ն. Ա., Տոնոյան Գ. Պ., Ղուկասյան Գ. Մ., Բունիաթյան Մ. Մ.,** Տնտեսական իրավիճակների մոդելավորում, Երևան, 2009:
8. **Թունիև Ա. Դ., Մովսիսյան Յու.,** Գծային հանրահաշվի և գծային ծրագրավորման մեթոդներ, Երևան, 2002:
9. **Васильев Ф. П.,** Численные методы решения экстремальных задач, Москва, 1980.
10. **Ефимов С. В.,** Квадратичные формы и матрицы, Москв, 1976.
11. **Калихман И. Л.,** Сборник задач по математическому программированию, Москва, 1975.
12. **Хемди А.Таха,** Введение в исследование операций, Москва, 2001.
13. **Фихтенгольц Г. М.,** Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Москва, 2006.
14. **Ху Т.,** Целочисленное программирование и потоки в сетях, Москва, 1974.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ I. ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ
ԲԱԺԻՆ 1
Գծային ծրագրման խնդրի լուծումը գծապատկերով 3
ԲԱԺԻՆ 2
ԳԾԽ-ի ներկայացման երեք տեսքերը 7
ԲԱԺԻՆ 3
Արտադրության լավագույն կազմակերպման խնդիր 10
ԲԱԺԻՆ 4
Սիմպլեքս մեթոդ 22
ԲԱԺԻՆ 5
ԳԾԽ-ի երկակիության տեսություն 31
5.1. Երկակի խնդիր կազմելու կանոնները և տնտեսագիտական իմաստը 31
5.2 Երկակիության տեսության հիմնական անհավասարումը և առաջին թեորեմը 36
5.3 Երկակիության II թեորեմը 40
ԳԼՈՒԽ II. ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ
ԲԱԺԻՆ 1
Նախնական գաղափարներ 44
ԲԱԺԻՆ 2
Մատրիցային խաղի խառն ընդլայնումը 49
ԲԱԺԻՆ 3
Մատրիցային խաղի լուծումը գծապատկերով $\mathbf{2xn}$ կամ $\boldsymbol{mx2}$ չափերի խաղերի համար 52
ԲԱԺԻՆ 4
Մատրիցային խաղի բերումը գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգի: Մատրիցային խաղերի տեսության հիմնական թեորեմը 57

ԳԼՈՒԽ III. ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ (ՈԳԾ)
ԲԱԺԻՆ 1
ՈԳԾ խնդիրների լուծումը գծապատկերով 63
ԲԱԺԻՆ 2
Բացարձակ (ոչ պայմանական) և պայմանական
էքստրեմումի խնդիրներ 76
ԲԱԺԻՆ 3
Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակը 83
ԲԱԺԻՆ 4
Պայմանական էքստրիմումի խնդիրներ, որոնցում
սահմանափակումները տրված են անհավասարումներով:
Կուն-Թակերի պայմանները..... 96
ԲԱԺԻՆ 5
Ուռուցիկ ծրագրման խնդիրներ, թամբակետ 101
ԲԱԺԻՆ 6
ՈԳԾ խնդիրների մոտավոր լուծման գրադիենտի մեթոդը 108
ԳԼՈՒԽ IV. ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐՈՒՄ
ԲԱԺԻՆ 1
4.1 Նախնական գաղափարներ..... 116
ԲԱԺԻՆ 2
4.2 Դինամիկ ծրագրման եղանակով խնդիրների
լուծման օրինակներ..... 120
Գրականության ցանկ..... 133

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ավետիսյան Ռուբիկ Ավետիսի, Տոնոյան Գագիկ Պետրոսի
Սարգսյան Սոնա Հայկի, Պետրոսյան Անուշ Համլետի

Գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդներ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Շապիկի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. խմբագրումը՝ Մ. Հովհաննիսյանի

Տպագրված է Time to Print օպերատիվ տպագրությունների սրահում:
ք. Երևան, Խանջյան 15/55

Ստորագրված է տպագրության՝ 25.04.2017:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլը՝ 8.5:
Տպաքանակը՝100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2017
publishing.ysu.am

ISBN 978-5-8084-2186-8

9 785808 421868