Վաղարշակ Օհանյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՎԱՂԱՐՇԱԿ ՕՀԱՆՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐՐՈՐԴ ՄԱՍ

ՇԱՐՔԵՐ: ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ, ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ, ԿՐԿՆԱԿԻ ԵՎ ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2021

ՀՏԴ 517(042.4)
ԳՄԴ 22.161ց7
Օ-452

Խմբագիրներ՝ ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ֆունկցիաների տեսության ամբիոնի վարիչ, ֆիզմաթ. գ.դ., պրոֆեսոր Հ. Մ. Հայրապետյան, ֆիզմաթ. գ.թ., դոցենտ Լ. Վ. Միքայելյան

Գրախոսներ՝ ԵՊՀ ընդհանուր մաթեմատիկայի ամբիոնի վարիչ, ֆիզմաթ. գ.դ., պրոֆեսոր Կ. Լ. Ավետիսյան
ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի մաթեմատիկայի ամբիոնի վարիչ, ֆիզմաթ. գ. դ., պրոֆեսոր Մ. Գ. Գրիգորյան

Օհանյան Վ. Հ.

Օ-452 Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ)/ Վ. Հ. Օհանյան: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2021, 208 էջ:

Ներկա ուսումնական ձեռնարկը հեղինակի «Մաթեմատիկական անալիզ» առաջին մաս (2007թ.) և «Մաթեմատիկական անալիզ» երկրորդ մաս (2013թ.) ձեռնարկների շարունակությունն է:

Նշված և ներկա ձեռնարկներում շարադրված նյութերով ավարտվում է առարկայի համար նախատեսված ծրագիրը:

Ուսումնական ձեռնարկում ամփոփ և մատչելի շարադրված է «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի դասախոսությունների մշակված տարբերակը, որը հեղինակը երկար տարիներ կարդացել է Երևանի պետական համալսարանի ֆիզիկայի և ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետներում: Տեսական նյութը յուրացնելու համար բերված են մի շարք ուսուցողական օրինակներ իրենց լուծումներով:

Նախատեսված է ԵՊՀ ռադիոֆիզիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետների ուսանողների համար: Կարող է օգտակար լինել նաև մյուս բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողներին:

ՀՏԴ 517(042.4)
ԳՄԴ 22.161ց7

ISBN 978-5-8084-2504-0

ԳԼՈՒԽ I
ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

1.1. Շարքի և նրա գումարի սահմանումները

Դիտարկենք թվային հաջորդականություն՝

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \qquad (1.1)$$

(1.1) հաջորդականության անդամներով կազմենք սիմվոլ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1, +a_2 + \ a_3 + \ \cdots + \ a_n + \cdots \qquad (1.2)$$

Սահմանում: (1.2) սիմվոլին անվանում են թվային շարք, կամ պարզապես շարք: a_n $(n = 1, 2, \dots)$ թվերը կոչվում են (1.2) շարքի անդամներ:

(1.2) շարքի անդամներով կազմենք հաջորդականություն՝

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = a_1, \\ A_2 = a_1 + a_2, \\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

(1.3) հաջորդականությունը կոչվում է (1.2) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականություն:

Սահմանում: (1.2) շարքը կոչվում է զուգամետ, եթե (1.3) հաջորդականությունը՝ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը, ունի վերջավոր սահման: Այդ սահմանը, որը կնշանակենք A-ով, կոչվում է (1.2) շարքի գումար: Այսպիսով, եթե (1.2)-ը զուգամետ է, կարող ենք ձևականորեն գրել.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A:$$

Այն դեպքում, երբ $\lim_{n\to\infty} A_n$-ը գոյություն չունի կամ անվերջ է, (1.2)-ը կոչվում է տարամետ:

Այսպիսով, տրված շարքը զուգամետ է, եթե զուգամետ է որոշակի հաջորդականություն: Հակառակը, ինչպիսին էլ լինի

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

հաջորդականությունը, նրա վերջավոր սահման ունենալու հարցը բերվում է

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots =$$
$$= x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$$
շարքի զուգամիտությանը:

Ուրիշ խոսքով, շարքի և նրա զուգամիտության ուսումնասիրությունը կարելի է դիտարկել որպես հաջորդականության զուգամիտության ուսումնասիրման նոր մեթոդ:

Օրինակներ.

Օրինակ 1. Դիտարկենք հետևյալ շարքը՝
$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad (a \neq 0) \tag{1.4}$$
Այս շարքի n-րդ մասնակի գումարը կլինի
$$A_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$
Դիցուք $q \neq 1$: Այս դեպքում
$$A_n = \frac{a - aq^n}{1-q}:$$
Եթե $|q| < 1$, ապա $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{a}{1-q}$, հետևաբար (1.4) շարքը զուգամետ է:

Եթե $q = 1$, ապա (1.4) շարքը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $a + a + a + \cdots + a + \cdots$, որը տարամետ է:

Եթե $q = -1$, ապա (1.4)-ը կընդունի
$$a - a + a - \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots \tag{1.5}$$
տեսքը, որի համար $A_1 = a$, $A_2 = a - a = 0$, $A_3 = a - a + a = a$, …, $A_{2n-1} = a$, $A_{2n} = 0$:

Քանի որ $a \neq 0$ (տե՛ս (1.4)), ապա $\{A_n\}$-ը սահման չունի, հետևաբար (1.5) շարքը տարամետ է:

Դիցուք $|q| > 1$: Այս դեպքում կունենանք՝
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a - aq^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} + \frac{aq^n}{q-1}\right) =$$
$$= \begin{cases} +\infty, \text{եթե } a > 0, q > 1, \\ -\infty, \text{եթե } a < 0, q > 1, \\ \nexists, \quad \text{եթե } \quad q < -1: \end{cases}$$
Այսպիսով, (1.4) շարքը զուգամետ է, երբ $|q| < 1$ և տարամետ, երբ $|q| \geq 1$:

Օրինակ 2. Դիտարկենք
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \tag{1.6}$$
շարքը: Ունենք՝

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ հատ}} \quad \Rightarrow$$

$$A_n > \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = +\infty,$$

հետևաբար (1.6) շարքը տարամետ է:

Օրինակ 3. Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1(1+2)} + \frac{1}{2(2+2)} + \frac{1}{3(3+2)} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} + \cdots \tag{1.7}$$

շարքը: Ունենք՝ $a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$:

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{3}{4},$$

հետևաբար (1.7) շարքը զուգամետ է:

1.2. Շարքի զուգամիտության Կոշիի սկզբունքը

Քանի որ շարքի զուգամիտության հարցը, ըստ սահմանման, համարժեք է այդ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության զուգամիտության հարցին, ապա կարող ենք ձևակերպել.

Թեորեմ 1 (Շարքի զուգամիտության Կոշիի սկզբունքը): Որպեսզի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ թիվ, այնպիսին, որ $\forall n > n_\varepsilon$ բնական թվի և ցանկացած m բնական թվի համար տեղի ունենա

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{1.8}$$

պայմանը:

Հետևանք: $m = 1$ դեպքում (1.8)-ը կընդունի

$$|a_{n+1}| < \varepsilon$$

տեսքը, որտեղից, կստացվի

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0,$$

$$\text{կամ} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0: \tag{1.9}$$

Այսինքն, եթե շարքը զուգամետ է, ապա նրա ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի:

Դիտողություն: (1.9)-ը անհրաժեշտ, բայց ոչ բավարար պայման է (տե՛ս օրինակ 1.6):

Օրինակ 4. Ելնելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ հետազոտել $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ շարքի զուգամիտությունը:

Վերցնենք $\varepsilon_0 = \ln\frac{5}{4}$ և $m = n$, կունենանք

$$\left|\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)\right| >$$

$$> n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) > n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}: \qquad (1.10)$$

Քանի որ $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$-ն մոնոտոն աճող է, ապա (1.10)-ից հետևում է, որ $n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) > \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} = \ln\frac{3}{2} > \ln\frac{5}{4} = \varepsilon_0$: (1.11)

(1.11) ցույց է տալիս, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ շարքը տարամետ է:

1.3. Զուգամետ շարքերի հատկությունները

Թեորեմ 2: Դիցուք c-ն հաստատուն թիվ է: Եթե $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է և նրա գումարը A է, ապա $\sum_{i=1}^{\infty} ca_n$ շարքը նույնպես զուգամետ է, իսկ նրա գումարը cA է:

Ապացուցում: Նշանակենք $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, ըստ պայմանի

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A:$$

$\sum_{i=1}^{\infty} ca_n$-ի առաջին n անդամների գումարը՝ A'_n-ը կլինի

$$A'_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n = cA_n \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} cA_n = c\cdot\lim_{n\to\infty} A_n = c\cdot A: \qquad (1.12)$$

(1.12)-ից հետևում է, որ թեորեմ 2-ը ապացուցված է:

Թեորեմ 3: Դիցուք $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են և նրանց գումարներն են համապատասխանաբար A-ն և B-ն: Այդ դեպքում $\sum_{i=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ շարքը, որը կոչվում է տրված շարքերի գումար, նույնպես զուգամետ է և նրա գումարը $A + B$-ն է:

Ապացուցում: Դիցուք $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$, $C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$:

Ունենք

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} C_n = C = A + B$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում: Դիցուք տրված է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1.13)$$

շարքը:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{m+n} + \cdots \qquad (1.14)$$

շարքը կոչվում է (1.13) շարքի մնացորդ m-րդ անդամից հետո:

Թեորեմ 4: Եթե (1.13) շարքը զուգամետ է, ապա նրա ցանկացած մնացորդ նույնպես զուգամետ է: Եթե (1.14)-ը զուգամետ է որևէ m-ի դեպքում, ապա զուգամետ է նաև (1.13) շարքը:

Ապացուցում: Դիցուք A_n-ը (1.13) շարքի n-րդ մասնակի գումարն է, իսկ A'_k-ն (1.14) շարքի k-րդ մասնակի գումարն է՝

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{m+k}:$$

Ըստ պայմանի՝ $\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} A_{m+k} = A,$

բայց

$$A_{m+k} = A_m + A'_k \quad \Rightarrow \quad A'_k = A_{m+k} - A_m: \qquad (1.15)$$

Հաշվի առնելով, որ A_m-ը հաստատուն է, (1.15)-ում անցնելով սահմանի, երբ $k \to \infty$, ապա կստանանք

$$\lim_{k\to\infty} A'_k = A - A_m = A': \qquad (1.6)$$

(1.16) ցույց է տալիս, որ (1.14)-ը զուգամետ է:

Դիցուք զուգամետ է (1.14)-ը, այդ դեպքում (1.15)-ից հետևում է, որ

$$A = A_m + A':$$

Վերջին հավասարությունը ցույց է տալիս, որ (1.13)-ը զուգամետ է: Թեորեմը ապացուցված է:

Այս թեորեմից հետևում է, որ եթե շարքի սկզբից դեն նետենք վերջավոր թվով անդամներ, կամ շարքի սկզբում ավելացնենք վերջավոր թվով անդամներ, ապա շարքի զուգամիտությունը չի խախտվի:

1.4. Դրական անդամներով շարքեր

Սահմանում: $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$-ը կոչվում է դրական շարք, եթե $a_n \geq 0$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$:

Դրական շարքի դեպքում ունենք՝

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n,$$

Այսինքն՝ $\{A_n\}$ հաջորդականությունը աճող է: Հետևաբար կարող ենք ձևակերպել.

Թեորեմ 5: Որպեսզի $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ դրական շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը լինի սահմանափակ:

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \tag{1.17}$$

Նշանակենք $A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$:

Ունենք

$$A_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} =$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{15}\right)}_{8} + \cdots +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1} + 1} + \frac{1}{2^{k-1} + 2} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1}\right)}_{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} >$$

$$> 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k-1} + \frac{1}{2^k} > \frac{k}{2}: \tag{1.18}$$

(1.18)-ից հետևում է, որ $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$:

Այսպիսով, (1.17) շարքը, որը կոչվում է <u>հարմոնիկ</u> շարք, տարամետ է:

Օրինակ 6. Այժմ դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots, \tag{1.9}$$

որտեղ s-ը կամայական իրական թիվ է: Ակնհայտ է, որ $s \le 1$ դեպքում (1.19)-ը տարամետ է:

Դիցուք $s > 1$, նշանակենք $s = 1 + \sigma$, $(\sigma > 0)$:

Ունենք՝

$$A_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{(2^k - 1)^s} + \frac{1}{(2^k)^s} =$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right)}_{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right)}_{4} + \cdots +$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{(2^{\mathrm{k}-1})^s}+\frac{1}{(2^{\mathrm{k}-1}+1)^{\mathrm{s}}}+\cdots+\frac{1}{(2^{\mathrm{k}}-1)^s}\right)}_{2^{\mathrm{k}-1}\text{ գումարելի}}+\frac{1}{(2^{\mathrm{k}})^s}<$$

$$<1+\left(\frac{1}{2^{\mathrm{s}}}+\frac{1}{2^{\mathrm{s}}}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}\right)+$$

$$+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{(2^{\mathrm{k}-1})^s}+\frac{1}{(2^{\mathrm{k}-1})^s}+\cdots+\frac{1}{(2^{\mathrm{k}-1})^s}\right)}_{2^{\mathrm{k}-1}\text{ գումարելի}}+\frac{1}{2^{\mathrm{ks}}}=$$

$$=1+\frac{1}{2^{\sigma}}+\frac{1}{2^{2\sigma}}+\cdots+\frac{1}{2^{(\mathrm{k}-1)\sigma}}+\frac{1}{2^{\mathrm{ks}}}<$$

$$<1+\frac{1}{2^{\sigma}}+\left(\frac{1}{2^{\sigma}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{\sigma}}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\sigma}}\right)^{\mathrm{k}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\sigma}}\right)^{\mathrm{k}+1}}{1-\frac{1}{2^{\sigma}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\sigma}}}: \qquad (1.20)$$

(1.20)-ը ցույց է տալիս, որ (1.19) դրական շարքի, որը կոչվում է ընդհանրացված հարմոնիկ շարք, մասնակի գումարների հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է: Հետևաբար (1.19) շարքը $s>1$ դեպքում զուգամետ է: Այսպիսով, (1.19) շարքը $s>1$ դեպքում զուգամետ է, իսկ $s\leq 1$ դեպքում՝ տարամետ:

Համեմատության (բաղդատման) հայտանիշները (թեորեմներ).

Թեորեմ 1: Դիցուք տրված են երկու դրական շարքեր՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (\text{ա})$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots: \qquad (\text{բ})$$

Եթե ինչ որ n_0 համարից սկսած տեղի ունեն $a_n\leq b_n$ $(n\geq n_0)$ անհավասարությունները, ապա (բ) շարքի զուգամիտությունից հետևում է՝ (ա) շարքի զուգամիտությունը, կամ որը նույն է, (ա) շարքի տարամիտությունից հետևում է (բ)-ի տարամիտությունը:

Ապացուցում: Քանի որ շարքի սկզբից վերջավոր թվով անդամներ դեն նետելիս նրա վարքը չի փոխվում, ապա կարող ենք ենթադրել, որ $a_n\leq b_n$, $(n=1,2,\dots)$:

Նշանակենք A_n-ով և B_n-ով (ա) և (բ) շարքերի n-րդ մասնակի գումարները: Ըստ թեորեմի պայմանի՝ կունենանք

$$A_n\leq B_n: \qquad (1.21)$$

Դիցուք (բ) շարքը զուգամետ է, այդ դեպքում $\exists K=\mathrm{const}$, այնպիսին է, որ

$$B_n\leq K:$$

Այս դեպքում, (1.21)-ի շնորհիվ, կունենանք նաև

$$A_n\leq K: \qquad (1.22)$$

(1.22)-ից հետևում է (ա) շարքի զուգամիտությունը:

Եթե (ա)-ն տարամետ է՝ $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$, ապա (1.21)-ից հետևում է, որ $\lim_{n\to\infty} B_n = +\infty$ հետևաբար (բ) շարքը նույնպես տարամետ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2: Դիցուք տրված են (ա) և (բ) շարքեր, ընդ որում, $b_n > 0$: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \tag{1.23}$$

ապա $0 < K < +\infty$ դեպքում (ա) և (բ) շարքերը ունեն նույն վարքը: Եթե $K = 0$, ապա (բ)-ի զուգամիտությունից հետևում է (ա)-ի զուգամիտությունը, իսկ $K = +\infty$ դեպքում (ա)-ի զուգամիտությունից հետևում է (բ)-ի զուգամիտությունը:

Ապացույց: Դիցուք տեղի ունի (1.23) հավասարությունը և $K \in (0, +\infty)$: Այդ դեպքում $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n > n_\varepsilon$ տեղի ունի

$$K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon: \tag{1.24}$$

(1.24)-ում վերցնենք $\varepsilon = \frac{K}{2}$, այդ դեպքում $\exists n_k \in \mathbb{N}: \forall n > n_k$ տեղի ունի

$$0 < \frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3K}{2}: \tag{1.25}$$

(1.25)-ից հետևում է, որ $\frac{K}{2} b_n < a_n < \frac{3K}{2} b_n$, որտեղից ըստ նախորդ թեորեմի (ա)-ն և (բ)-ն կա՛մ միաժամանակ զուգամետ են, կա՛մ միաժամանակ տարամետ:

Դիցուք $K = 0$, այս դեպքում, ինչ-որ համարից սկսած տեղի ունի $\frac{a_n}{b_n} < 1 \Rightarrow a_n < b_n$ և եթե (բ) շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև (ա) շարքը: Նման ձևով, եթե $K = +\infty$, ապա (ա)-ի զուգամիտությունից հետևում է (բ)-ի զուգամիտությունը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3: Եթե ինչ-որ համարից սկսած տեղի ունեն

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \tag{1.26}$$

անհավասարությունները, ապա (բ) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (ա) շարքի զուգամիտությունը, կամ, որը նույնն է, (ա) շարքի տարամիտությունից հետևում է (բ) շարքի տարամիտությունը:

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ (1.26)-ը տեղի ունի բոլոր բնական n-երի համար՝

$$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\qquad \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\qquad \dots,\qquad \frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}:$$

Այս անահավասարություններից կստանանք

$$\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1},\qquad \Rightarrow\qquad a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n,\ \ (n=1,2,\dots):$$

Եթե (բ) շաքրը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1}b_n$ շարքը: Հետևաբար, ըստ թեորեմ 1-ի, զուգամետ է նաև (ա) շարքը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակներ

Կիրառելով բաղդատման հայտանիշները՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n!}{n\sqrt{n}}$: Նշանակենք $a_n=\frac{\cos^2 n!}{n\sqrt{n}}$, ունենք $a_n<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$: Քանի որ $b_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ անդամներով շարքը զուգամետ է, ապա, ըստ թեորեմ 1-ի, զուգամետ է նաև տրված շարքը:

բ) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$, $a_n=n^2e^{-\sqrt{n}}$: Քանի որ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$, ապա x-ի մեծ արժեքների դեպքում $e^x>x^8\quad\Rightarrow\ a_n=\frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}<\frac{1}{n^2}$: Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ զուգամետ շարքը, ինչ-որ համարից սկսած $a_n<b_n=\frac{1}{n^2}$, հետևաբար տրված շարքը զուգամետ է:

գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$: Նշանակենք $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$ և դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ զուգամետ շարքը:

Հայտնի է, որ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}=1$, հետևաբար տրված շարքը զուգամետ է:

դ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$: Նշանակենք $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ և դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքը:

Ունենք $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$: Քանի որ հարմոնիկ շարքը տարամետ է, ապա տրված շարքը նույնպես տարամետ է:

ե) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$: Դիտարկենք $f(x)=x-\ln(1+x)$, $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ ֆունկցիան:

Ունենք՝ $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ (*):

(*)-ից հետևում է, որ $f(x)$-ը $(-1, 0)$ միջակայքում նվազում է, իսկ $(0, +\infty)$-ում աճում է: Հետևաբար $f(x) > f(0) \quad \Rightarrow \quad x > \ln(1+x)$: Օգտվելով վերջին անհավասարությունից՝ կունենանք

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

և

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}:$$

Այսպիսով, $0 < \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$:

Հետևաբար տրված շարքը զուգամետ է:

Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշները.

Թեորեմ 4 (Կոշիի հայտանիշ): Դիցուք տրված է շարք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0,\ (n = 1, 2, \dots,): \qquad (1.27)$$

Այդ դեպքում.

1) Եթե գոյություն ունեն այնպիսի $0 \leq q < 1$ և այնպիսի $n_0 \in \mathbb{N}$, որ $\forall n \geq n_0$-ի դեպքում տեղի ունեն

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

ապա (1.27) շարքը զուգամետ է:

2) Եթե գոյություն ունի այնպիսի $n_0 \in \mathbb{N}$, որ $\forall n \geq n_0$-ի դեպքում տեղի ունենա

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

ապա (1.27) շարքը տարամետ է:

Ապացույց: Եթե $n \geq n_0$ դեպքում տեղի ունի $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, $\Leftrightarrow$ $a_n \leq q^n$, ապա, ըստ բաղդատման հայտանիշի, (1.27) շարքը զուգամետ է: Իսկ եթե $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, ապա կխախտվի (1.19) պայմանը, այսինքն՝ (1.27)-ը այս դեպքում տարամետ է:

Թեորեմ 4-ը ապացուցված է:

Հետևանք: Դիցուք գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l:$$

Այս դեպքում, եթե $l < 1$, ապա (1.27)-ը զուգամետ է, իսկ $l > 1$ դեպքում՝ տարամետ: $l = 1$ դեպքում որոշակի բան պնդել չենք կարող:

Թեորեմ 5 (Դալամբերի հայտանիշ): Դիցուք տրված է դրական անդամներով շարք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0,\ (n = 1, 2, \dots,): \qquad (1.28)$$

Այս դեպքում.

1) Եթե գոյություն ունի այնպիսի q, $(0 < q < 1)$ և այնպիսի $n_0 \in \mathbb{N}$, որ $\forall n \geq n_0$-ի դեպքում տեղի ունենան

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

անհավասարությունները, ապա (1.28) շարքը զուգամետ է:

2) Եթե գոյություն ունի n_0, $\forall n \geq n_0$ դեպքում տեղի ունեն

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

անհավասարությունները, ապա (1.28)-ը տարամետ է:

Ապացուցում: Դիցուք $0 < q < 1$ և $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ տեղի ունի

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} \leq q \cdot a_n$$

Այդ դեպքում

$$a_{n_0+1} \leq q \cdot a_{n_0},$$
$$a_{n_0+2} \leq q \cdot a_{n_0+1} \leq q^2 \cdot a_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n_0+p} \leq q^p \cdot a_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Քանի որ $0 < q < 1$, ապա

$$a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 + \cdots + a_{n_0} q^k + \cdots$$

շարքը զուգամետ է, հետևաբար զուգամետ է նաև (1.28) շարքը:

Իսկ եթե $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, ապա

$$a_{n_0+1} \geq a_{n_0},$$
$$a_{n_0+2} \geq a_{n_0+1} \geq a_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

և խախտվում է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը, հետևաբար (1.28) շարքը տարամետ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Դիցուք գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p:$$

Այդ դեպքում, եթե $p < 1$, ապա (1.28) շարքը զուգամետ է, $p > 1$ դեպքում՝ տարամետ, $p = 1$ դեպքում (1.28) շարքի զուգամիտության համար որոշակի բան պնդել չենք կարող:

Իրոք, և՛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (ա),և՛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (բ) շարքերի համար $p = 1$, բայց (ա) շարքը զուգամետ է, իսկ (բ) շարքը՝ տարամետ:

Դրական շարքերի համար Կոշի-Մակլորենի ինտեգրալային հայտանիշը.

Թեորեմ 6 (Կոշի-Մակլորենի ինտեգրալային հայտանիշը): Դիցուք տրված է (1.28) դրական շարքը: Եթե գոյություն ունի այնպիսի ֆունկցիա, որ

1) $f(x)$-ը որոշված է $[1,+\infty)$ միջակայքում
2) $f(x) \geq 0$
3) $f(n) = a_n$
4) $f(x)$-ը անընդհատ է և մոնոտոն նվազող, ապա (1.28) շարքը և

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \tag{1.29}$$

անիսկական ինտեգրալը միաժամանակ կա՛մ զուգամետ են, կա՛մ տարամետ:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ $f(x)$-ը ինտեգրելի է կամայական վերջավոր հատվածում, հետևաբար (1.29)-ը անիսկական ինտեգրալը իմաստ ունի:

Համաձայն թեորեմի պայմանի, եթե $k \leq x \leq k+1$, ապա

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1),\ k = 1, 2, \ldots: \tag{1.30}$$

(1.30) անհավասարությունները ինտեգրելով $[k, k+1]$ միջակայքում, կստանանք՝

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1),\ k = 1, 2, \ldots: \tag{1.31}$$

Գումարելով (1.31) անհավասարությունները $k = 1$-ից մինչև $k = n$ կստանանք

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n+1} a_k:$$

Նշանակենք $\sum_{k=1}^{n} a_k = A_n$, կունենանք

$$A_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq A_{n+1} - a_1: \tag{1.32}$$

Դիցուք (1.28) շարքը զուգամետ է: Այդ դեպքում A_n-ը կձգտի A վերջավոր սահմանի, հետևաբար (1.32)-ի առաջին անհավասարությունից կստանանք $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq A$, որից կետևի (1.29) ինտեգրալի զուգամիտությունը:

Այժմ ենթադրենք (1.28) շարքը տարամետ է: Այդ դեպքում (1.32) առնչության երրորդ արտահայտությունը՝ $A_{n+1} - a_1$-ը, ձգտում է $+\infty$-ի, հետևաբար $\int_1^{n+1} f(x)dx$-ը, համաձայն (1.32)-ի, նույնպես կձգտի $+\infty$, այսինքն՝ (1.29) անիսկական ինտեգրալը տարամետ է:

Այսպիսով, (1.28) շարքի զուգամիտությունից հետևում է, որ (1.29) ինտեգրալի զուգամիտությունը, իսկ (1.28)-ի տարամիտությունից հետևում է (1.29)-ի տարամիտությունը:

Նման ձևով ցույց է տրվում, որ եթե (1.29) ինտեգրալը զուգամետ է, ապա (1.28) շարքը նույնպես զուգամետ է, իսկ եթե (1.29) ինտեգրալը տարամետ է, ապա (1.28) շարքը՝ տարամետ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակ 1. Նորից դիտարկենք (1.19) շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,\quad (s>0):$$

Որպես $f(x)$ վերցնենք $f(x)=\frac{1}{x^s}$, $x\geq 1$, $s>0$: Քանի որ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$ ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $s>1$ և տարամետ՝ երբ $s\leq 1$, ապա (1.19)-ը զուգամետ է, երբ $s>1$ և տարամետ՝ $s\leq 1$ դեպքում: Այս փաստն այլ մեթոդով ապացուցված էր դրական անդամներով շարքեր բաժնում (տե՛ս օրինակ 5 և օրինակ 6):

Օրինակ 2. Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}: \tag{1.33}$$

Կիրառենք Կոշի-Մակլորենի ինտեգրալային հայտանիշը, որպես $f(x)$ վերցնելով $\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, $(x\geq 1)$ ֆունկցիան:

Ունենք՝

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t}=+\infty:$$

Այսպիսով, (1.33) շարքը տարամետ է:

Այն դեպքերում, երբ վերը նշված պարզ հայտանիշները պատասխան չեն տալիս, հարկ է լինում օգտվել ավելի «նուրբ» հայտանիշներից: Ձևակերպենք նրանցից մի քանիսն առանց ապացույցների:

1. Թեորեմ (Ռաաբեի հայտանիշը): Եթե գոյություն ունի $r>1$ թիվ, այնպիսին, որ ինչ-որ n համարից սկսած տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq r,$$

ապա (1.29) շարքը զուգամետ է, իսկ եթե

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1,$$

ապա (1.29) շարքը տարամետ է:

2. Թեորեմ (Բերտրանի հայտանիշը): Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n > 0)$ շարքի համար $\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \cdot \ln n = q$, ապա $q > 1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ $q < 1$ դեպքում՝ տարամետ:

3. Թեորեմ (Գաուսի հայտանիշը): Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n > 0)$ շարքի համար

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

որտեղ λ և μ -ն հաստատուններ են, իսկ θ_n-ը սահմանափակ է՝ $|\theta_n| \leq L$: Այդ դեպքում շարքը զուգամետ է, եթե $\lambda > 1$ կամ եթե $\lambda = 1$, $\mu > 1$ և տարամետ՝ եթե $\lambda < 1$ կամ $\lambda = 1, \mu \leq 1$:

1.5. Կամայական թվային շարքերի զուգամիտությունը

Դիտարկենք թվային շարքեր, որոնց անդամները կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական: Դիցուք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1.34)$$

կամայական անդամներով թվային շարք է:

Ինչպես հայտնի է (1.29) շարքի զուգամիտությունը համարժեք է

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1.35)$$

հաջորդականության զուգամիտությանը, հետևաբար.

Թեորեմ: (1.34) շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա n_ε բնական թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $n > n_\varepsilon$ և m բնական թվերի համար տեղի ունենա

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (1.36)$$

անհավասարությունը:

Նշենք, որ (1.36) պայմանի ստուգումը սովորաբար հեշտ չի լինում, որի համար ուսումնասիրենք այն դեպքերը, երբ զուգամիտությունը հետազոտվում է այլ եղանակով:

1.6. Շարքի բացարձակ զուգամիտություն

Դիցուք տրված է (1.34) շարքը: Այդ շարքի անդամներով կազմենք նոր շարք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (1.34^*)$$

որի n-րդ մասնակի գումարը կլինի՝

$$A_n^* = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots):$$

Սահմանում: Եթե (1.34*) շարքը զուգամետ է, ապա ասում են, որ (1.34) շարքը բացարձակ զուգամետ է:

Թեորեմ: Եթե (1.34*) շարքը զուգամետ է, ապա (1.34)-ը նույնպես զուգամետ է:

Ապացուցում: Ունենք ակնհայտ անհավասարություն՝

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|: \quad (1.37)$$

Քանի որ (1.34*) շարքը զուգամետ է, ապա $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ այնպիսին, որ $\forall n > n_\varepsilon$ և $\forall m \in \mathbb{N}$ թվերի համար տեղի կունենա

$$|A_{n+m}^* - A_n^*| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon: \quad (1.38)$$

(1.37) և (1.38) անհավասարություններից հետևում է, որ

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon,$$

Այսինքն՝ (1.34) շարքը զուգամետ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտարկենք նշված թեորեմի մեկ ապացույց ևս:

Դիցուք (1.34) շարքում կան անթիվ բազմությամբ ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական անդամներ: (1.34) շարքի դրական անդամներով, չխախտելով նրանց հերթականությունը, կազմենք շարք՝

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots : \quad (\text{Բ})$$

Նման ձևով, բացասական անդամների բացարձակ արժեքներով, կազմենք շարք՝

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots : \quad (\text{Գ})$$

Եթե նշանակենք (1.34*) շարքի գումարը A^*, ապա $\forall k, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար կունենանք

$$B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k \leq A^*, \quad (1.39)$$

$$C_m = c_1 + c_2 + \cdots + c_m \leq A^*, \quad (1.40)$$

(1.39)-ը և (1.40) ցույց են տալիս, որ (բ) և (գ) շարքերը զուգամետ են՝

$$\lim_{k\to\infty} B_k = B, \qquad \text{և} \qquad \lim_{m\to\infty} C_m = C:$$

Եթե վերցնենք (1.34) շարքի n անդամներ, որտեղ n-ը բավականաչափ մեծ է, ապա նրանց մեջ կլինեն k հատ դրական և m հատ բացասական անդամներ, հետևաբար

$$A_n = B_k - C_m:$$

Քանի որ (1.34) շարքում և՛ դրական, և՛ բացասական անդամները անթիվ բազմությամբ են, ապա n-ը անվերջի ձգտելիս և k-ն և m-ը կձգտեն անվերջի: Վերջին հավասարությունում, անցնելով սահմանի, կստանանք

$$A = B - C: \tag{1.40*}$$

Այսինքն՝ (1.34) շարքը զուգամետ է:

Մենք ցույց կտանք, որ հակառակ պնդումը ճիշտ չէ: Այսինքն՝ շարքի զուգամիտությունից չի հետևում նրա բացարձակ զուգամիտությունը:

Սահմանում: Եթե թվային շարքը զուգամետ է, բայց բացարձակ զուգամետ չէ, ապա այն կոչվում է ***պայմանական զուգամետ*** (կամ ոչ բացարձակ զուգամետ):

1.7. Նշանափոխ շարքեր, Լայբնիցի թեորեմը

Նշանափոխ են կոչվում այն շարքերը, որոնց անդամները մեկընդմեջ փոխում են նշանը: Նշանափոխ շարքը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n + \cdots, \tag{1.41}$$

որտեղ $c_n > 0$ $(n = 1, 2, \dots)$:

Նշանափոխ շարքերի համար տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ (Լայբնիցի): Եթե (1.41) շարքի անդամների համար $c_{n+1} < c_n$, $(n = 1, 2, \dots)$ և $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, ապա (1.41)-ը զուգամետ է:

Ապացուցում: Դիտարկենք (1.41) շարքի

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m})$$

մասնակի գումարների հաջորդականությունը, այն մոնոտոն աճող է, քանի որ $c_{n+1} < c_n$-ից:

Մյուս կողմից

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}$$

ներկայացումից և $c_{n+1} < c_n$ պայմանից հետևում է, որ

$$C_{2m} < c_1:$$

Այսպիսով, $\{C_{2m}\}$ թվային հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է և վերևից սահմանափակ, հետևաբար ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} = C: \tag{1.42}$$

Այժմ դիտարկենք C_{2m+1} մասնակի գումարների հաջորդականությունը: Ունենք՝ $C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1}$:

(1.42)-ից և թեորեմի երկրորդ պայմանից հետևում է, որ

$$\lim_{n\to\infty} C_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} (C_{2m} + c_{2m+1}) = C: \tag{1.43}$$

Հետևաբար (1.41) շարքի գումարը C թիվն է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ (1.41) տեսքի շարքերին անվանում են լայբնիցյան տիպի շարքեր:

Օրինակ: Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \qquad (\text{ա})$$

շարքը:

Համաձայն Լայբնիցի թեորեմի՝ այս շարքը զուգամետ է:

(ա) շարքի անդամների բացարձակ արժեքներով կազմված շարքը կհանդիսանա հարմոնիկ շարքը, որը տարամետ է: Այսինքն՝ (ա) շարքը զուգամետ է, բայց ոչ բացարձակ:

1.8. Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները

Որոշ շարքերի զուգամիտությունն ուսումնասիրելիս վերը նշված հայտանիշները պատասխան չեն տալիս և հարկ է լինում դիմելու ավելի «նուրբ» հայտանիշների: Այդպիսի հայտանիշներից են Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները, որոնք մենք կձևակերպենք առանց ապացույցների[1]:

Դիցուք տրված են $\{a_n\}$ և $\{b_n\}$ թվային հաջորդականությունները: Այդ հաջորդականություններով կազմենք շարքեր՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (\text{ա})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots \qquad (\text{բ})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n+\cdots \qquad (\text{գ})$$

Աբելի հայտանիշը: Եթե (ա) շարքը զուգամետ է, իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ՝

$$|b_n|\le K, \qquad (n=1,2,3,\dots),$$

---

[1] Ապացույցը տե՛ս Г. М. Фихтенгольц, "Курс дифференциального и интегрального исчисления", том II.

ապա (գ) շարքը զուգամետ է:

Դիրիխլեի հայտանիշը: Եթե (ա) շարքի մասնակի գումարների $\{A_n\}$ հաջորդականությունը $(A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ սահմանափակ է՝

$$|A_n| \leq M, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը մոնոտոն հաջորդականություն է և ձգտում է զրոյի՝

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

ապա (գ) շարքը զուգամետ է:

Դիտողություն: Աբելի հայտանիշը հետևում է Դիրիխլեի հայտանիշից:

Իրոք, դիցուք տեղի ունեն Աբելի հայտանիշի երկու պայմաններն էլ, այդ դեպքում $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = b$: (գ) շարքը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) + \sum_{n=1}^{\infty} b a_n:$$

Աջ մասի առաջին շարքը զուգամետ է ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի, իսկ երկրորդը՝ ըստ Աբելի հայտանիշի առաջին պայմանի: Այսպիսով, (գ) շարքը զուգամետ է:

1.9. Զուգամետ շարքերի հատկությունները

I. Զուգորդական հատկությունը

Դիցուք տրված է զուգամետ շարք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{1.44}$$

որի մասնակի գումարների հաջորդականությունը $\{A_n\}$ է, իսկ գումարը՝ A է:

Ենթադրենք $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ բնական թվերի կամայական, խիստ աճող հաջորդականություն է: (1.44) շարքի անդամներով կազմենք հաջորդականություն՝

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}), (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}), \dots, (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}), \dots \tag{1.45}$$

Թեորեմ: (1.45) հաջորդականության անդամներով կազմված շարքը՝

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \dots +$$

$$+\left(a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k}\right)+\cdots \qquad (1.44^*)$$

զուգամետ է և նրա գումարը A է:

Ապացույց: Դիտարկենք (1.44*) շարքի մասնակի գումարների

$$A_1^*, A_2^*, \dots, A_k^*, \dots$$

հաջորդականությունը: Ակնհայտ է, որ $A_1^*=A_{n_1}$, $A_2^*=A_{n_2}$, …, $A_k^*=A_{n_k}$, …:

Քանի որ $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$, ապա $A_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} A$, հետևաբար $A_k^* \xrightarrow[k\to\infty]{} A$:

Թեորեմ ապացուցված է:

Դիտողություն 1: (1.44*) շարքի զուգամիտությունից, ընդհանրապես, չի հետևում (1.44) շարքի զուգամիտությունը: Օրինակ՝

$$(2-2)+(2-2)+(2-2)+\cdots=0+0+0+\cdots+0=0$$

շարքը զուգամետ է, իսկ

$$2-2+2-2+2-2+\cdots$$

շարքը տարամետ է:

Այսինքն, եթե զուգամետ շարքի անդամները փակագծերում գրված վերջավոր թվով գումարելիների գումարներն են, ապա փակագծերը դեն նետելիս ստացված շարքը կարող է զուգամետ չլինել:

Եթե փակագծերը դեն նետելիս ստացվում է (1.44) զուգամետ շարքը, իհարկե նրա գումարը հավասար կլինի (1.44*) շարքի գումարին:

Դիտողություն 2: Որոշ դեպքերում կարելի է պնդել, որ (1.44*)-ում փակագծերը բաց թողնելուց հետո ստացված (1.44) շարքը կլինի զուգամետ:

Այդպես կլինի, օրինակ, եթե (1.44*)-ի յուրաքանչյուր փակագծում եղած անդամները ունենան նույն նշանը:

Իրոք, այդ դեպքում երբ n-ը փոփոխվում է n_{k-1}-ից մինչև n_k, ապա A_n-ը կփոփոխվի մոնոտոն և կգտնվի $A_{n_{k-1}}=\tilde{A}_{k-1}$ և $A_{n_k}=\tilde{A}_k$ թվերի միջև:

Բայց, բավականաչափ մեծ k-երի դեպքում $\tilde{A}_{k-1}$-ը և $\tilde{A}_k$-ն քիչ են տարբերվում (1.44*) շարքի $\tilde{A}$ գումարից:

Հետևաբար, բավականաչափ մեծ n-երի համար A_n-ը նույնպես քիչ կտարբերվի $\tilde{A}$-ից՝ $A_n \to \tilde{A}$:

II. Բացարձակ զուգամետ շարքերի տեղափոխական հատկությունը

Դիցուք տրված է (1.44) զուգամետ շարքը, որի գումարը A է:

Այդ շարքի անդամներով կազմենք նոր շարք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k + \cdots, \qquad (1.44')$$

որտեղ a'_k-ը հանդիսանում է (1.44) շարքի որևէ անդամ և (1.44*) շարքում հանդիպում են (1.44)-ի բոլոր անդամները առանց կրկնվելու: Այս պայմանների դեպքում (1.44՛)-ը կոչվում է (1.44)-ի ***տեղափոխված շարք:***

Ծագում են հարցեր. (1.44՛) շարքը զուգամետ է թե՞ ոչ և եթե զուգամետ է նրա գումարը արդյո՞ք հավասար է A-ի:

Այս հարցերին պատասխան են տալիս թեորեմները:

Թեորեմ (Դիրիխլե): Եթե (1.44)-ը բացարձակ զուգամետ է, ապա նրա ցանկացած տեղափոխված շարք նույնպես զուգամետ է և ունի նույն գումարը ինչ գումար ունի (1.44) շարքը:

Ապացուցում: Դիտարկենք 2 դեպք.

ա) ենթադրենք (1.44) շարքի անդամները դրական են և նրա գումարը A է: Դիցուք A'_k-ն (1.44՛)-ի առաջին k հատ անդամների գումարն է

$$A'_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k,$$

որտեղ $a'_1 = a_{n_1}$, $a'_2 = a_{n_2}$, …, $a'_k = a_{n_k}$: Նշանակենք՝ $\max(n_1, n_2, \dots, n_k) = n'$:

Ակնհայտ է, որ $\forall k$-ի համար $A'_k \leq A_{n'} \leq A$, այսինքն՝ $\{A'_k\}$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, հետևաբար ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim_{k\to\infty} A'_k = A':$$

Ակնհայտ է, որ $A' \leq A$:

Քանի որ (1.44)-ը կարելի է դիտարկել որպես (1.44՛)-ի տեղափոխված շարք, ապա ըստ վերը ապացուցածի կունենանք $A \leq A'$:

Այսպիսով, $A = A'$ և թեորեմը դրական անդամներով շարքի համար ապացուցված է:

բ) Դիցուք (1.44)-ը ցանկացած բացարձակ զուգամետ շարք է:

Քանի որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (*)$$

զուգամետ է, ապա ըստ ա) դեպքի (*) շարքի ցանկացած տեղափոխված շարք զուգամետ է, հետևաբար բացարձակ զուգամետ է (1.44)-ի ցանկացած տեղափոխված շարք:

Մենք ցույց ենք տվել (տե՛ս (1.40*)), որ $A = B - C$: Որտեղ B-ն և C-ն համապատասխանաբար $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (բ) և $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ (գ) շարքերի գումարներն են:

(1.44) շարքում անդամների տեղափոխությունը կառաջացնի տեղափոխություն (բ) և (գ) շարքերում և չի ազդի (ըստ վերը ապացուցածի) նրանց գումարների վրա:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ (Ռիման): Եթե (1.44) շարքը բացարձակ զուգամետ չէ (պայմանական զուգամետ է), ապա շարքի անդամները կարելի է տեղափոխել այնպես, որ ստացված շարքի գումարը լինի հավասար նախապես տրված Q կամայական թվի (կամ $\pm\infty$-ի):

Ապացույց: Քանի որ (1.44) շարքը բացարձակ զուգամետ չէ, ապա (բ) և (գ) շարքերը (տե՛ս 1.6 բաժնում) տարամետ են:

Դիցուք Q -ն կամայական թիվ է:

Սկզբում վերցնենք (1.44) շարքի այնքան դրական անդամներ այն հաջորդականությամբ, որով նրանք հանդես են գալիս (1.44)-ում, որպեսզի նրանց գումարը մեծ լինի Q -ից՝

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k > Q:$$

Այնուհետև գումարենք այնքան բացասական անդամներ (այն հաջորդականությամբ որով նրանք հանդես են գալիս (1.44)-ում) որպեսզի ընդհանուր գումարը դառնա Q -ից փոքր՝

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \cdots - c_m < Q:$$

Դրանից հետո ստացված գումարին ավելացնենք դրական անդամներ (մնացած դրական անդամներից ըստ սկզբնական շարքում գրված հաջորդականության), որպեսզի լինի՝

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \cdots - c_m + b_{k_1+1} + \cdots + b_{k_2} > Q:$$

Այնուհետև գումարենք այնքան բացասական անդամներ (մնացած անդամներից), որպեսզի լինի՝

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \cdots - c_m + b_{k_1+1} + \cdots + b_{k_2} - c_{m_1+1} - c_{m_1+2} - \cdots - c_{m_2} < Q:$$

Այս պրոցեսը շարունակենք անվերջ:

Ամեն անգամ b_r և c_p անդամներ վերցնենք ոչ ավել քան անհրաժեշտ է նշված անհավասարությունների տեղի ունենալու համար: Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում նշված գումարների շեղումը Q-ից բացարձակ արժեքով փոքր կլինի գրված վերջին անդամից:

Վերջին փաստից հետևում է, որ

$$\left(b_1+b_2+\cdots+b_{k_1}\right)-(c_1+c_2+\cdots+c_m)+\left(b_{k_1+1}+\cdots+b_{k_2}\right)-$$
$$-\left(c_{m_1+1}-\cdots-c_{m_2}\right)+\cdots+$$
$$+\left(b_{k_{i-1}+1}+\cdots+b_{k_i}\right)-\left(c_{m_{i-1}+1}-\cdots-c_{m_i}\right)+\cdots \tag{1.45}$$

շարքը զուգամետ է և նրա գումարը Q է:

Համաձայն 1.9 բաժնի 2-րդ դիտողության, եթե (1.45) շարքում փակագծերը դեն նետենք, ապա ստացված շարքը (որը կհանդիսանա (1.44)-ի տեղափոխություն) կլինի զուգամետ և կունենա Q գումար:

Վերջավոր Q -ի դեպքում թեորեմը ապացուցված է:

Դիցուք $Q=+\infty$: Վերցնենք $+\infty$-ի ձգտող $\{Q_n\}$ աճող հաջորդականություն: Սկզբում ընտրենք շարքի այնքան դրական անդամներ, որ նրանց գումարը մեծ լինի Q_1-ից՝

$$b_1+b_2+\cdots+b_{r_1}>Q_1,$$

հետո ավելացնենք մեկ բացասական անդամ, այնուհետև գումարենք այնքան դրական անդամներ, որ տեղի ունենա

$$\left(b_1+b_2+\cdots+b_{r_1}\right)-c_1+\left(b_{r_1+1}+\cdots+b_{r_2}\right)-c_2>Q_2:$$

Շարունակելով այս պրոցեսը՝ կստանանք շարք, որի գումարը կլինի $+\infty$: Նման ձևով կդիտարկվի այն դեպքը, երբ $Q=-\infty$:

Թեորեմն ապացուցված է:

1.10. ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼ

Դիցուք տրված են երկու զուգամետ շարքեր՝

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{Ա}$$

և

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \tag{Բ}$$

a_n և b_n, $(n=1,2,\dots)$ թվերով կազմենք անվերջ մատրից՝

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_ib_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_ib_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_ib_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \dots & a_ib_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}: \tag{1.46}$$

Այս անվերջ մատրիցի տարրերը կարելի է բազմաթիվ եղանակներով գրել հաջորդականության տեսքով:

Օրինակ՝ արտադրյալներ կարելի է գրել ըստ «անկյունագծերի» կամ ըստ «քառակուսիների»՝

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Օգտվելով այս գրելաձևերից՝ կարող ենք կազմել հաջորդականություններ՝

$$a_1b_1;\, a_1b_2,\, a_2b_1;\, a_1b_3,\, a_2b_2,\, a_3b_1;\, \dots, \tag{1.47}$$

կամ

$$a_1b_1;\, a_1b_2,\, a_2b_2,\, a_2b_1;\, a_1b_3,\, a_2b_3,\, a_3b_3;\, a_3b_2,\, a_3b_1,\, \dots, \tag{1.48}$$

……………………………………………………………………:

Սահմանում: (1.47), (1.48), … հաջորդականություններով կազմված յուրաքանչյուր շարք կոչվում է (Ա) և (Բ) շարքերի արտադրյալ շարք:

Նկատենք, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1b_k + a_2b_{k-1} + a_3b_{k-2} + \dots + a_kb_1)$$

շարքը կոչվում է (Ա) և (Բ) շարքերի արտադրյալ շարք՝ ըստ Կոշիի:

Թեորեմ (Կոշի): Եթե (Ա) և (Բ) շարքերը բացարձակ զուգամետ են, ապա նրանց արտադրյալը, որի անդամները (1.46) մատրիցի տարրերն են վերցրած ցանկացած դասավորությամբ, նույնպես բացարձակ զուգամետ են և նրա գումարը $A \cdot B$ թիվն է:

Ապացուցում:

Ըստ ենթադրության՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \tag{Ա*}$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_n| + \dots \tag{Բ*}$$

շարքերը զուգամետ են: Նրանց գումարները նշանակենք համապատասխանաբար A^* և B^*:

(1.46)-ի տարրերը կամայական եղանակով գրենք հաջորդականության տեսքով և կազմենք շարք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{s_k} \cdot b_{i_k} = a_{s_1}b_{i_1} + a_{s_2}b_{i_2} + \cdots + a_{s_k}b_{i_k} + \cdots : \qquad (1.49)$$

Ապացուցենք, որ (1.49) շարքը բացարձակ զուգամետ է: Եթե նշանակենք s_1 , i_1, s_2 , i_2, …, s_k , i_k բնական թվերից ամենամեծը ν-ով, ապա կունենանք՝

$$\begin{aligned} &\left|a_{s_1}b_{i_1}\right| + \left|a_{s_2}b_{i_2}\right| + \cdots + \left|a_{s_k}b_{i_k}\right| \\ &\le (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_\nu|) \\ &\le A^* \cdot B^*, \end{aligned}$$

որտեղից հետևում է (1.49) շարքի բացարձակ զուգամիտությունը:

Օգտվելով այս փաստից՝ գտնենք (1.49) շարքի գումարը: Ակնհայտ է, որ բավական է գտնել այդ շարքի որևէ տեղափոխության գումար, որը կլինի նաև (1.49)-ի գումարը:

Այդ նպատակով օգտվենք (1.48) հաջորդականությունից և կազմենք շարք՝

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots : \qquad (1.50)$$

Եթե (Ա) շարքի մասնակի գումարները նշանակենք A_1, A_2, …, A_n, … իսկ (Բ) շարքինը՝ B_1, B_2, …, B_n, …, այդ դեպքում (1.50) շարքի մասնակի գումարները կլինեն՝

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots, A_nB_n, \ldots : \qquad (1.51)$$

(1.51) հաջորդականությունը ձգտում է AB սահմանին, ուրեմն (1.50) շարքի, հետևաբար նաև (1.49)-ի գումարը AB -ն է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Վարժություններ

1⁰. Հաշվել շարքի գումարը՝

$$ա)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)},\quad բ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{25n^2+5n-6},$$

$$գ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right),\quad դ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n},$$

$$ե)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}:$$

2⁰. Ելնելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը՝

$$ա)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\qquad բ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad գ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n},\qquad դ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}},$$

$$ե)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}:$$

3⁰. Կիրառելով բաղդատման, Կոշիի, Դալամբերի հայտանիշները՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

$$ա)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!},\qquad բ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n},\qquad գ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n},\qquad դ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n+3},$$

$$ե)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n},$$

$$զ)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n},\qquad է)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n(n-1)},\qquad ը)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt[4]{n^4+n-1}}:$$

4⁰. Կիրառելով Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

$$ա)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n},\qquad բ)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln(\ln n)^p)^q}:$$

5⁰. Կիրառելով Լայբնիցի հայտանիշը՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

$$ա)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1},\qquad բ)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{10^n}\right),$$

$$\text{գ)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n, \qquad \text{դ)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}:$$

6⁰. Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

$$\text{ա)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{10} n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}, \quad \text{բ)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right],$$

$$\text{գ)}\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}, \qquad \text{դ)}\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}, \qquad \text{ե)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right),$$

$$\text{զ)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}, \qquad \text{է)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}:$$

6⁰-ի պատասխանները. ա) զուգամետ է, ցուցում. Կիրառել Դիրիխլեի հայտանիշը, բ) բացարձակ զուգամետ է, երբ $p>1$, պայմանական զուգամետ է, երբ $\frac{1}{2}<p\le 1$, ցուցում. Օգտվել $\ln(1+x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևից: է) զուգամետ է, եթե $a\neq 0$:

ԳԼՈՒԽ II
ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ

2.1. Հավասարաչափ զուգամիտություն

Դիցուք տրված է $X=\{x\}$ թվային բազմություն: Ենթադրենք ցանկացած n բնական թվին համապատասխանության մեջ է դրված X-ի վրա որոշված ֆունկցիա՝ $f_n(x)$:

Այդ դեպքում կասենք, որ X բազմության վրա տրված է ֆունկցիոնալ հաջորդականություն՝

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots: \tag{2.1}$$

Սահմանում: (2.1) հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ $x_0 \in X$ կետում, եթե $\{f_n(x_0)\}$ թվային հաջորդականությունը զուգամետ է:

(2.1) հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ X բազմության վրա, եթե այն զուգամետ է X բազմության ցանկացած կետում:

Եթե $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ապա ասում են, որ (2.1) հաջորդականությունը զուգամիտում է $f(x)$ $(x \in X)$ ֆունկցիային: $f(x)$-ը կոչվում է $f_n(x)$ հաջորդականության սահմանային ֆունկցիա:

Օրինակներ

1) $f_n(x) = x^2 + x^n$, $X=[0,1]$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) =$
$$= \begin{cases} x^2, \text{երբ } 0 \le x < 1, \\ 2, \text{երբ } \quad x = 1: \end{cases}$$

2) $f_n(x) = x^3 + 2 - \frac{1}{2+nx}$, $X=[0,1]$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) =$
$$= \begin{cases} \dfrac{3}{2}, \quad \text{երբ} \quad x = 0, \\ x^3+2, \text{երբ} \quad 0 < x \le 1: \end{cases}$$

3) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $X=[0,1]$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$:

Սահմանում: Դիցուք տրված են (2.1) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը և $f(x)$ ֆունկցիան, որոնք որոշված են X բազմության վրա: Կասենք, որ տրված հաջորդականությունը X-ի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, եթե $\forall \varepsilon > 0$ համար $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ համար, այնպիսին, որ երբ $n > n_\varepsilon$ հետևում է, որ $\forall x \in X$-ի համար տեղի ունի

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

անհավասարությունը:

Եթե $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, ապա գրում են

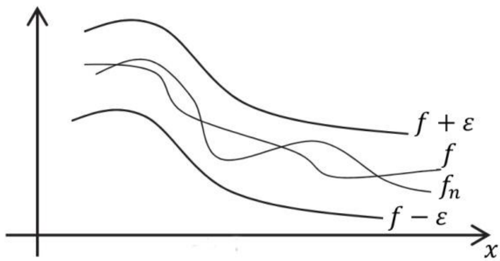
$$f_n(x) \rightrightarrows f(x),$$

նշենք, որ եթե (2.1) հաջորդականությունը X բազմության վրա զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, ապա դա նշանակում է, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի և $\forall x \in X$-ի համար գոյություն ունի $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ համար, որը ընդհանրապես կախված է ինչպես ε -ից, այնպես էլ x -ից, այնպիսին, որ բոլոր $n > n_0$ բնական թվերի համար տեղի ունի (2.2) անհավասարությունը:

Ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ ($\rightrightarrows$) զուգամիտության էությունն այն է, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար կարելի է ընտրել այնպիսի n_ε բնական թիվ, որը կախված է միայն ε-ից, և կախված չէ $x \in X$ կետի ընտրությունից և $n > n_\varepsilon$ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in X:$$

Այսինքն՝ $f_n(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները գտնվում են $f(x)$ ֆունկցիայի «ε-շերտում» (գծ. 1):



գծ. 1

Այսպիսով, հավասարաչափ զուգամիտության դեպքում ցանկացած $\varepsilon > 0$-ի և բավականաչափ մեծ n-երի ($n > n_0$) համար $f_n(x)$ ֆունկցիաները ամբողջ X բազմությունում միաժամանակ մոտենում են f-ին ε-ից փոքր սխալի ճշտությամբ: X-ի վրա $\{f_n(x)\}$-ի զուգամիտության և հավասարաչափ զուգամիտության պայմանները գրենք սիմվոլների տեսքերով՝

$$f_n(x) \underset{x\in X}{\longrightarrow} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \forall x \in X\ \exists n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall x \in X\ ,\ \forall n > n_\varepsilon\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon:$$

Այս գրառումներից մեկը մյուսից տարբերվում է $\forall x \in X$ և $\exists n_\varepsilon$ սիմվոլների տեղափոխությամբ:

Օրինակներ

1. Դիցուք $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $0 \leq x \leq 1$: (2.3)

Ունենք $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, հետևաբար

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2}$:

Քանի որ $0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$, ապա որպեսզի $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ անհավասարությունը տեղի ունենա միաժամանակ $[0,1]$ հատվածի բոլոր x-երի համար բավական է վերցնել $n > \frac{1}{2\varepsilon}$: Այսինքն՝ որպես n_ε վերցնել $\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$ բնական թիվը:

Այսպիսով, (2.3) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $X = [0,1]$ բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x) = 0$ ֆունկցիային:

2. Դիցուք $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $0 \leq x \leq 1$: (2.4)

Ունենք $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, հետևաբար

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2}$:

Ցանկացած հաստատագրված $x > 0$ թվի համար, այս դեպքում կունենանք $|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}$:

Որպեսզի տեղի ունենա $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ անհավասարությունը, բավական է տեղի ունենա

$$\frac{1}{nx} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon x}:$$

Այսպիսով, ցանկացած $x > 0$ դեպքում, եթե վերցնենք $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon \cdot x}\right] + 1$ ապա $\forall n > n_\varepsilon$-ի դեպքում տեղի կունենա

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon:$$

Մյուս կողմից, որքան էլ մեծ վերցնենք n-ը $[0,1]$-ում կգտնվի կետ՝ $x = \frac{1}{n}$, որում $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$:

Ստացվեց, որ n-ի մեծացման շնորհիվ, անհնար է $|f_n(x) - f(x)|$-ը $[0,1]$ միջակայքի բոլոր x-երի համար միաժամանակ դարձնել փոքր $\varepsilon = \frac{1}{2}$ թվից:

Այսպիսով, (2.3) հաջորդականությունը $X = [0,1]$ բազմության վրա ձգտում է $f(x) \equiv 0$ ֆունկցային հավասարաչափ, իսկ (2.4) հաջորդականությունը նույն բազմության վրա՝ $f(x) \equiv 0$ ֆունկցիային անհավասարաչափ (ոչ հավասարաչափ):

Թվային հաջորդականության զուգամիտության Կոշիի սկզբունքից և ֆունկցիոնալ հաջորդականության սահմանումից ստացվում է X-ի վրա որոշված $\{f_n(x)\}$ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության պայմանը.

Թեորեմ: Որպեսզի $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը 1) ունենա սահմանային ֆունկցիա և 2) այդ ֆունկցիային զուգամիտի հավասարաչափ՝ ըստ $x \in X$ -ի $\Leftrightarrow$, որ $\forall \varepsilon > 0$-ի համար գոյություն ունենա x-ից անկախ $n_\varepsilon \in N$ համար, որ $\forall n > n_\varepsilon$-ի համար տեղի ունենա

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

անհավասարությունը բոլոր $x \in X$ -երի համար միաժամանակ:

Առանց ապացուցման[2] ձևակերպենք ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության մի պայման ևս.

Թեորեմ: X բազմության վրա որոշված $f_n(x)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ ձգտում է նույն բազմության վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիային, այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0: \tag{2.5}$$

Այժմ դիտարկենք շարք, որի անդամները ինչ-որ X բազմության վրա որոշված ֆունկցիաներ են՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{2.6}$$

(2.6) շարքի անդամներով կազմենք հաջորդականություն՝

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \tag{2.7}$$

(2.6) ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է զուգամետ $x_0 \in X$ կետում, եթե $\{f_n(x_0)\}$ թվային հաջորդականությունը զուգամետ է:

(2.6) շարքը կոչվում է զուգամետ X բազմության վրա, եթե այն զուգամետ է X-ի յուրաքանչյուր կետում:

Սահմանում: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը, որի անդամները X-ի վրա որոշված ֆունկցիաներ են, կոչվում է հավասարաչափ զուգամետ այդ բազմության վրա, եթե նրա մասնակի գումարների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է X-ի վրա:

---

[2] Ապացույցը տե՛ս Кудрявцев Л. Д., "Курс математического анализа", том 2:

Համաձայն վերը նշված սահմանման, օգտվելով ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից, կարող ենք (2.6) շարքի համար ձևակերպել.

Թեորեմ (Կոշիի սկզբունքը շարքի հավասարաչափ զուգամիտության համար): Որպեսզի (2.6) շարքը X բազմության վրա լինի հավասարաչափ զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի $n_\varepsilon \in N$, որ $\forall n > n_\varepsilon$ և $\forall m \in N$ տեղի ունենա անհավասարություն՝

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \qquad (2.8)$$

Այստեղից, մասնավորապես, ստացվում է օգտակար հետևանք՝

Եթե բազմության վրա որոշված հավասարաչափ զուգամետ ֆունկցիոնալ շարքի բոլոր անդամները բազմապատկենք X-ի վրա որոշված միևնույն $v(x)$ սահմանափակ ֆունկցիայով՝

$$|v(x)| \leq M = \text{const},$$

ապա շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը կպահպանվի:

§1. Շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշները

Վայերշտրասի հայտանիշը: Եթե (2.6) ֆունկցիոնալ շարքի անդամները X բազմության վրա բավարարում են

$$|u_n(x)| \leq C_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \qquad (2.9)$$

անհավասարություններին, որտեղ C_n թվերը

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots \qquad (2.10)$$

զուգամետ շարքի անդամներ են, ապա (2.6) շարքը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Իրոք, (2.9)-ից հետևում է, որ

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| \leq C_{n+1} + C_{n+2} + \cdots + C_{n+m} \quad (2.11)$$

Քանի որ (2.10) շարքը զուգամետ է, ապա $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in N$: $\forall n > n_\varepsilon$ և $\forall m \in N$ այնպիսին, որ (2.11)-ի աջ մասը փոքր կլինի ε -ից: Հետևաբար ε-ից փոքր կլինի նաև (2.11)-ի ձախ մասը, ընդ որում, X-ի բոլոր x-երի համար: Հետևաբար հայտանիշի պնդումը ապացուցված է:

Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x) = a_1(x)\cdot b_1(x) + a_2(x)\cdot b_2(x) + \cdots + a_n(x)\cdot b_n(x) + \cdots \tag{2.12}$$

ֆունկցիոնալ շարքը, որտեղ $a_n(x)$-ը և $b_n(x)$-ը X բազմության վրա որոշված ֆունկցիաներ են:

Առանց ապացույցի ձևակերպենք հավասարաչափ զուգամիտության երկու հայտանիշներ ևս:

1. ***Աբելի հայտանիշը:*** Եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x) + \cdots \tag{2.12*}$$

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X բազմության վրա, իսկ $a_n(x)$ ֆունկցիաները ցանկացած x-ի համար կազմում են մոնոտոն հաջորդականություն և $\exists K = \text{const}$, այնպիսին, որ $\forall x$ և $\forall n$ -ի դեպքում

$$|a_n(x)| \leq K,$$

ապա (2.12)-ը X բամզության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

2. ***Դիրիխլեի հայտանիշը:*** Եթե (2.12*) շարքի մասնակի գումարների $B_n(x)$ հաջորդականությունը $B_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x)$-ը հավասարաչափ սահմանափակ է X-ի վրա՝ գոյություն ունի $M = const$, այնպիսին, որ ցանկացած x-ի և ցանկացած n-ի համար տեղի ունեն՝

$$|B_n(x)| \leq M$$

անհավասարությունները, իսկ $a_n(x)$ ֆունկցիաները (յուրաքանչյուր x-ի համար) կազմում են մոնոտոն հաջորդականություն, որը X բազմության վրա հավասարաչափ ձգտում է 0-ի, ապա (2.12) շարքը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Հետազոտենք հետևյալ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությունը նշված X բազմության վրա:

Օրինակ 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cdot \sin nx}{\sqrt{1+n^2}(1+nx^2)}, \qquad X = (-\infty, +\infty): \tag{2.13}$$

Ունենք՝ $\left|\frac{x\cdot\sin nx}{\sqrt{1+n^2}(1+nx^2)}\right| \le \frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}(1+nx^2)} = \frac{2\cdot|x|\cdot\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+n^2}\left(1+\left|\sqrt{n}|x|\right|^2\right)} \le$ $\frac{1}{2\sqrt{n(1+n^2)}} \le \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$:

Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ շարքը զուգամետ է, ապա համաձայն Վայերշտրասի հայտանիշի, (2.13) շարքը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Նշենք, որ այստեղ օգտվեցինք $2ab \le a^2 + b^2$ անհավասարությունից:

Օրինակ 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2}\sin nx\,, \qquad X = (-\infty, +\infty) \tag{2.14}$$

Ակնհայտ է, որ $\left|e^{-n^5x^2}\sin nx\right| \le n\cdot|x|\cdot e^{-n^5x^2}$:

Գտնենք $v_n(x) = n\cdot|x|\cdot e^{-n^5x^2}$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը ֆիքսած n-երի դեպքում: Քանի որ $v_n(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, բավական է դիտարկել $x \ge 0$ դեպքը:

Ունենք՝ $v'_n(x) = n(1-2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$: $v_n'(x)$-ը զրո է դառնում $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{5}{2}}}$ կետում, $0 \le x \le x_0$ միջակայքում $v_n'(x)$-ը աճում է, իսկ $x_0 < x < +\infty$ միջակայքում նվազում, հետևաբար x_0-ն մաքսիմումի կետ է:

Այսպիսով,

$$v_n(x) \le v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}:$$

Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ շարքը զուգամետ է, ապա համաձայն Վայերշտրասի հայտանիշի, (2.14) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $(-\infty, +\infty)$-ում:

Օրինակ 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot e^{-\frac{x}{n}}}{\sqrt{n}}, \qquad X = [-100, +\infty) \tag{2.15}$$

Նշանակենք $b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $a_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}$ և օգտվենք Աբելի հայտանիշից:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է: $a_n(x)$ հաջորդականությունը ֆիքսած x-ի համար ($\forall x \in X$) մոնոտոն է և սահմանափակ՝

$$|a_n(x)| = \left|e^{-\frac{x}{n}}\right| \leq e^{100}, \quad \forall x \in X:$$

Հետևաբար, ըստ Աբելի հայտանիշի, (2.15) շարքը $X = [-100, +\infty)$ բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Օրինակ 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad 0 < \delta \leq \mathrm{x} \leq 2\pi - \delta: \tag{2.16}$$

Նշանակենք $b_n(x) = \sin nx$, $a_n(x) = \frac{1}{n}$ և օգտվենք Դիրիխլեի հայտանիշից:

Ունենք՝

$$B_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin xn =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}: \tag{2.17}$$

Քանի որ x-ը փոփոխվում է $[\delta, 2\pi - \delta]$ միջակայքում, ապա (2.17)-ից կունենանք

$$|B_n(x)| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}:$$

$a_n(x) = \frac{1}{n}$-ը n-ը ∞-ի ձգտելիս նշված բազմության վրա հավասարաչափ ձգտում է 0-ի: Հետևաբար, համաձայն Դիրիխլեի հայտանիշի, (2.16)-ը հավասարաչափ զուգամետ է $[\delta, 2\pi - \delta]$ միջակայքում:

§2. Շարքի գումարի ֆունկցիոնալ հատկությունները

Դիցուք $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ ֆունկցիաները որոշված են X բազմության վրա: Ենթադրենք X-ի վրա

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{2.18}$$

շարքը զուգամետ է, և նրա գումարը $f(x)$ է: Հաճախ հետաքրքրություն են ներկայացնում $f(x)$-ի ֆունկցիոնալ հատկությունները՝ անընդհատությունը, դիֆերենցելիությունը, ինտեգրելիությունը:

Նշված հատկությունները ուսումնասիրելիս էական նշանակություն ունի շարքի հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարը.

1) Շարքի գումարի անընդհատությունը

Թեորեմ 1: Դիցուք $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ֆունկցիաները որոշված են $X = [a, b]$ հատվածում և բոլորը անընդհատ են $x_0 \in [a, b]$ կետում: Եթե (2.18) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[a, b]$-ում, ապա շարքի գումարը նույնպես անընդհատ է x_0 կետում:

Ապացուցում: Նշանակենք

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \tag{2.19}$$

$$f(x) - f_n(x) = \varphi_n(x): \tag{2.20}$$

(2.20)-ից հետևում է

$$f(x_0) - f_n(x_0) = \varphi_n(x_0): \tag{2.21}$$

(2.20) և (2.21)-ից հետևում է

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)|: \tag{2.22}$$

Դիցուք ε-ը կամայական դրական թիվ է: Համաձայն (2.18) շարքի հավասարաչափ զուգամիտության՝ գոյություն ունի x-ից անկախ n_ε բնական թիվ, որից մեծ n բնական թվերի համար տեղի ունեն

$$|\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.23}$$

և

$$|\varphi_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.24}$$

անհավասարությունները:

$f_n(x)$-ը որպես վերջավոր թվով անընդհատ ֆունկցիաների գումար անընդհատ է x_0 կետում:

Հետևաբար $\frac{\varepsilon}{3}$ թվի համար $\exists\delta > 0$ այնպիսին, որ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}: \tag{2.25}$$

Այժմ, եթե վերցնենք որևէ $n > n_\varepsilon$-ից և հաշվի առնենք (2.23), (2.24) և (2.25) անհավասարությունները, ապա $|x - x_0| < \delta$ դեպքում կունենանք՝

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon: \tag{2.25}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

2) Շարքում անդամ առ անդամ սահմանի անցում

Թեորեմ 2: Դիցուք $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ֆունկցիաները որոշված են X բազմության վրա, a-ն X-ի կուտակման կետ է, գոյություն ունեն վերջավոր սահմանները՝

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = a_n:$$

Եթե (2.18) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X բազմության վրա, ապա 1) զուգամետ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.26}$$

թվային շարքը, որի գումարը կնշանակենք A-ով, և 2) (2.18) շարքի գումարը՝ $f(x)$-ը x-ը a -ին ձգտելիս ունի սահման՝

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A: \tag{2.27}$$

Ապացույց: Համաձայն թեորեմի պայմանի՝ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists n_\varepsilon$ այնպիսին, որ $n > n_\varepsilon$, m բնական թվերի և $x \in X$-ի համար տեղի ունի

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon: \tag{2.28}$$

(2.28)-ում անցնելով սահմանի, երբ x-ը ձգտում է a-ի կստանանք՝

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \le \varepsilon: \tag{2.29}$$

(2.29)-ը ցույց է տալիս, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է: Նշանակենք (2.26) շարքի n-րդ մասնակի գումարը A_n, մնացորդը՝ n-րդ անդամից հետո γ_n, կունենանք՝

$$A = A_n + \gamma_n: \tag{2.30}$$

(2.20) և (2.30) հավասարություններից կունենանք՝

$$|f(x) - A| \le |f_n(x) - A_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|: \tag{2.31}$$

(2.18) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունից և (2.26) շարքի զուգամիտությունից հետևում է, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists n_\varepsilon$ բնական թիվ, որը կախված չէ x-ից, և $\forall n > n_\varepsilon$-ի համար տեղի ունեն

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{և} \qquad |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.32}$$

անհավասարությունները:

Քանի որ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\big(u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)\big) =$ $= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A_n$, ապա $\frac{\varepsilon}{3}$ թվի համար

$$\exists\delta > 0, \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \qquad |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}: \tag{2.33}$$

(2.31), (2.32) (2.33) անհավասարություններից հետևում է, որ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$,այնպես որ $|x - a| < \delta \ \Rightarrow$

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

որը համարժեք է (2.27)-ին:

Թեորեմն ապացուցված է:

3) Շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրում

Թեորեմ 3: Եթե $u_n(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a,b]$ հատվածում, իսկ (2.18) շարքը $[a,b]$-ում հավասարաչափ զուգամետ է, ապա $f(x)$-ի ինտեգրալը $[a,b]$-ում ներկայացվում է

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx =$$
$$= \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + \cdots \qquad (2.34)$$

տեսքով:

Ապացուցում: Համաձայն թեորեմ 1-ի՝ $f(x) \in C[a,b]$:

$[a,b]$-ում ինտեգրենք հետևյալ նույնությունը՝

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \varphi_n(x),$$

կստանանք՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + $$
$$+ \int_a^b \varphi_n(x)dx,$$

որտեղից՝

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx\right)\right| =$$
$$= \left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right|: \qquad (2.35)$$

(2.18) շարքի հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$, որը կախված չէ x-ից, այնպես, որ $\forall n > n_\varepsilon$-ի համար տեղի ունի

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

անհավասարությունը:

Հետևաբար

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \le \int_a^b |\varphi_n(x)|dx < \varepsilon: \qquad (2.36)$$

(2.35) և (2.36) անհավասարություններից հետևում է (2.34)-ը:

Թեորեմն ապացուցված է:

4) Շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցում

Թեորեմ 4: Դիցուք $u_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$ ֆունկցիաները որոշված են և ունեն անընդհատ ածանցյալներ $[a, b]$ միջակայքում: Եթե այդ միջակայքում (2.18) շարքը զուգամետ է, իսկ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots \qquad (2.37)$$

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, ապա (2.18) շարքի գումարը՝ $f(x)$-ը, նույնպես ունի ածանցյալ $[a, b]$-ում, ընդ որում՝

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \qquad (2.38)$$

Ապացուցում: (2.37) հավասարաչափ զուգամետ շարքի գումարը նշանակենք $f^*(x)$: Ըստ թեորեմ 3-ի՝ $f^*(x)$-ի ինտեգրալը $[a, x]$ միջակայքում $(a < x \le b)$ կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x u'_n(t)dt\right):$$

Ակնհայտ է, որ

$$\int_a^x u'_n(t)dt = u_n(x) - u_n(a):$$

Այսպիսով,

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a): \qquad (2.39)$$

Քանի որ $\left(\int_a^x f^*(t)dt\right)' = f^*(x)$, ապա (2.39)-ից կստանանք $f^*(x) = f'(x)$, որտեղից հաշվի առնելով (2.37)-ը կստանանք՝

$$f'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots$$

Թեորեմ 4-ն ապացուցված է:

Օրինակներ:

Օրինակ 1. Հետազոտել ֆունկցիոնալ հաջորդականության զուգամիտությունը և հավասարաչափ զուգամիտությունը նշված բազմությունների վրա՝

$$f_n(x) = \ln\left(3 + \frac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}}\right), \quad \text{ա) } E_1 = [0, 2], \quad \text{բ) } E_2 = [0, +\infty):$$

ա) Դիցուք $x \in E_1$: Ունենք՝

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(3 + \frac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(3 + \frac{\frac{1}{n^2} e^x}{1 + \frac{e^{2x}}{n^4}}\right) = \ln 3:$$

Այսպիսով, տրված հաջորդականությունը զուգամետ է: Սահմանային ֆունկցիան՝ $f(x) = \ln 3$:

E_1-ի վրա ունենք

$$|f_n(x) - f(x)| = \ln\left(1 + \frac{n^2 e^x}{3(n^4 + e^{2x})}\right) \le \frac{n^2 e^x}{3(n^4 + e^{2x})} < \frac{n^2 e^x}{3n^4} < \frac{e^2}{3n^2},$$

որտեղից հետևում է, որ $f_n(x) \rightrightarrows \ln 3$-ի E_1 բազմության վրա:

բ) Դիցուք $x \in E_2 = (0, +\infty)$, վերցնենք $x_n = 2\ln n$:

Ունենք՝

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \ln\left(3 + \frac{n^4}{2n^4}\right) - \ln 3 = \ln\left(\frac{7}{6}\right):$$

Այսպիսով, եթե $\varepsilon_0 = \ln\left(\frac{13}{12}\right)$, ապա որքան էլ մեծ վերցնենք n, հնարավոր չի լինի $[0, +\infty)$ բոլոր x-երի համար $|f_n(x) - f(x)|$-ը դարձնել փոքր ε -ից:

E_2-ի վրա հաջորդականությունը ձգտում է $f(x) = \ln 3$-ին ոչ հավասարաչափ:

Օրինակ 2. Գտնել $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x \in [0, +\infty)$ հաջորդականության սահմանային ֆունկցիան:

ա) Դիցուք $x \in [0, 1]$ միջակայքին, այդ դեպքում $x^n \le 1$ և $0 \le \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \le \frac{1}{2}$:

Հետևաբար $1 \le \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \le \sqrt[n]{\frac{5}{2}}$ և համաձայն «ոստիկանների» թեորեմի՝ $f_n(x) \to 1$, երբ $x \in [0, 1]$:

բ) Ենթադրենք $\begin{cases} x > 1 \\ \frac{x^2}{2} \le x \end{cases} \Rightarrow 1 < x \le 2$:

Այս դեպքում $f(x) = x \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x^n} + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n} \to x$, երբ $n \to \infty$:

գ) Ենթադրենք $x > 2$, այդ դեպքում $\frac{x^2}{2} > x$ և

$$f_n(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n + 1} \to \frac{x^2}{2}, \quad \text{երբ} \quad n \to \infty:$$

Պատ.՝ $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } x \in [0, 1), \\ x, & \text{եթե } x \in [1, 2], \\ \frac{x^2}{2}, & \text{եթե } x \in [2, +\infty): \end{cases}$

Օրինակ 3. Գտնել ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության և բացարձակ զուգամիտության տիրույթները՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}: \tag{2.40}$$

Նշանակենք $\ln x = t$, (2.40)-ն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot t^n: \tag{2.41}$$

Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot |t|^n$ դրական շարքը, համաձայն Դալամբերի հայտանիշի, այն զուգամետ է $|t| < 1$ դեպքում և տարամետ՝ $|t| > 1$: $t = 1$ դեպքում (2.41)-ը տարամետ է, $t = -1$ դեպքում պայմանական զուգամետ է:

Այսպիսով, (2.40) շարքը բացարձակ զուգամետ է, եթե $|\ln x| < 1$, այսինքն՝ $e^{-1} < x < e$ և պայմանական զուգամետ է, եթե $\ln x = -1$ այսինքն՝ երբ $x = e^{-1}$: x-ի մնացած արժեքների դեպքում (2.40)-ը տարամետ է: Պատ.՝ $[e^{-1}, e)$ –ում զուգամետ է, (e^{-1}, e)-ում՝ բացարձակ զուգամետ:

Օրինակ 4. Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ շարքի գումարը անընդհատ է $[0, 1]$ միջակայքում և գտնել այդ գումարը:

Նշանակենք $x^2 e^{-nx} = u_n(x)$: Ապացուցենք, որ տրված շարքը $[0, 1]$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է: Իրոք $u_n(x) > 0$, երբ $x > 0$, $u_n(0) = 0$, $u_n'(x) = e^{-nx}(2x - nx^2) = 0$ հավասարումն ունի միակ լուծում՝ $x = x_n = \frac{2}{n}$, ընդ որում՝ $u_n'(x) > 0$, երբ $x \in (0, x_n)$ և $u_n'(x) < 0$, երբ $x \in (\, x_n, 1]$: Այսպիսով, $sup_{x \in [0,1]} u_n(x) = u_n(x_n)$:

Հետևաբար

$$0 \le u_n(x) \le u_n(x_n) = \frac{4}{n^2} \cdot e^{-2}, \;\; x \in [0, 1],$$

որտեղից հետևում է, որ տրված շարքը հավասարաչափ զուգամետ է:

Քանի որ $u_n(x)$=$x^2 e^{-nx}$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[0, 1]$ միջակայքում, ապա, համաձայն թեորեմ 1-ի (շարքի գումարի անընդհատություն),տրված շարքի գումարը նույնպես անընդհատ է:

Գտնենք շարքի գումարը:

Ունենք՝

$$f_n(x) = x^2 e^{-x} + x^2 e^{-2x} + \cdots + x^2 e^{-nx} = x^2 \frac{e^{-x} - e^{-x(n+1)}}{1 - e^{-x}}:$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{x^2}{e^x-1},\quad x>0:$$

Երբ $x=0$, ապա շարքի բոլոր անդամները հավասար են զրոյի և $f(x)=0$:

Այսպիսով, $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ } x=0, \\ \frac{x^2}{e^x-1}, & \text{երբ } 0<x\leq 1: \end{cases}$

Պարզ է, որ $f(x)$-ը անընդհատ է $x=0$ կետում:

Իրոք

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{0}{1}=0:$$

Այսպիսով, $f(x)\in C[0,1]$:

Օրինակ 5. Գտնել

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \tag{2.42}$$

շարքի $f(x)$ գումարը, իսկ այնուհետև հաշվել

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \tag{2.43}$$

շարքի σ գումարը:

Դիտարկենք $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ շարքը, որը զուգամետ է $(-1,1)$ միջակայքում և նրա գումարը $\frac{1}{x^2+1}$-ն է:

$[-q,q]$ միջակայքում, որտեղ $0<q<1$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, իսկ նրա անդամներն անընդհատ ֆունկցիաներ են: Համաձայն թեորեմ 3-ի (շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրում)՝ շարքը $[0,x]$ միջակայքում ($x\in(-1,1)$) կարող ենք անդամ առ անդամ ինտեգրել՝

$$\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt,$$

կամ

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}: \tag{2.44}$$

Այսպիսով, (2.42) շարքի գումարը՝ $f(x)=\operatorname{arctg} x$:

Այժմ օգտվելով (2.44)-ից՝ հաշվենք (2.43) շարքի գումարը:

(2.44)-ում վերցնենք $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$,կստանանք

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)},$$

որտեղից՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}:$$

Օրինակ 6. Գտնել

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{2.45}$$

շարքի գումարը, որտեղ $x \in (-1, 1)$:

(2.45) շարքի անդամներն անընդհատ ֆունկցիաներ են, շարքի անդամների ածանցյալներով կազմված շարքը՝ $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ հավասարաչափ զուգամետ է $[-q, q]$ միջակայքում, որտեղ $0 < q < 1$ և նրա գումարը հավասար է $\frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$:

(2.45) շարքը, որի գումարը կնշանակենք $f(x)$-ով, անդամ առ անդամ ածանցելով՝ կստանանք

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

որտեղից՝

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x):$$

Հետևաբար՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1:$$

§3. Աստիճանային շարքեր

Սահմանում: Աստիճանային շարք է կոչվում հետևյալ տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + +a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{2.46}$$

որտեղ a_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ հաստատունները կոչվում են (2.46) աստիճանային շարքի գործակիցներ:

Որոշ դեպքերում դիտարկվում է ընդհանուր տեսքի աստիճանային շարք՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + +a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots, \quad (2.47)$$

որտեղ a-ն հաստատուն թիվ է: (2.47) շարքը բերվում է (2.46) տեսքի, եթե նշանակենք $x - a = x'$:

Այդ պատճառով հետագայում մենք հիմնականում կդիտարկենք (2.46) տեսքի աստիճանային շարքերը:

Կետերի բազմությունը որոնցում (2.46) շարքը զուգամետ է դատարկ չէ: Ցանկացած աստիճանային շարք զուգամետ է $x = 0$ կետում:

Կան աստիճանային շարքեր, որոնք զուգամետ են միայն $x = 0$ կետում: Այդպիսին է, օրինակ

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \quad (2.48)$$

շարքը: Իրոք, ցանկացած $x \neq 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 բնական թիվ, որ եթե $n > n_0$, ապա $|n \cdot x| > 2$, հետևաբար $|n^n \cdot x^n| > 2^n$:

Այսպիսով, $x \neq 0$ կետում խախտվում է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը:

Կան աստիճանային շարքեր, որոնք զուգամետ են ցանկացած x կետում: Այդպիսին է, օրինակ

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \quad (2.49)$$

շարքը: Իրոք, ցանկացած x թվի համար $\exists n_0$ բնական թիվ, որ $\forall n > n_0$ թվի համար $\left|\frac{x}{n}\right| < \frac{1}{2}$, որտեղից $\left|\frac{x^n}{n^n}\right| < \frac{1}{2^n}$, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ զուգամետ է: Այսպիսով, (2.49)-ը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է $(-\infty, +\infty)$ բազմության վրա:

Կան աստիճանային շարքեր, որոնք զրոյից տարբեր որոշ կետերում զուգամետ են, մյուսներում՝ տարամետ:

Օրինակ՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (2.50)$$

շարքը, որին անվանում են երկրաչափական պրոգրեսիա, $x_0 = \frac{1}{3}$ կետում զուգամետ է, իսկ $x_1 = 2$ կետում՝ տարամետ:

Աստիճանային շարքի զուգամիտության կետերի բազմությունը գտնելու համար ապացուցենք հետևյալ լեմման:

Լեմմա (Աբելի): Եթե (2.46) շարքը զուգամետ է $x_0 \neq 0$ կետում, ապա այն բացարձակ զուգամետ է ցանկացած x կետում, որը բավարարում է $|x| < |x_0|$ անհավասարությանը:

Ապացուցում: Քանի որ (2.46) շարքը զուգամետ է x_0 կետում, ապա $\lim_{n\to\infty}(a_n x_0^n) = 0$: Այստեղից հետևում է, որ $\exists M > 0$ թիվ այնպիսին, որ

$$|a_n x_0^n| \leq M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots: \qquad (2.51)$$

(2.51)-ի շնորհիվ (2.46) շարքի յուրաքանչյուր անդամի համար ունենք

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M \cdot q^n, (\, n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (2.52)$$

որտեղ $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$: Քանի որ $M \cdot q^n$ դրական անդամներով թվային շարքը $q < 1$ դեպքում զուգամետ է, ապա (2.52)-ից հետևում է Աբելի լեմմայի պնդումը:

Նշենք, որ եթե (2.46) շարքը զուգամետ է միայն $x = 0$ կետում, ապա այն կոչվում է ամենուրեք տարամետ շարք:

Եթե (2.46)-ը զուգամետ է ցանկացած x կետում, ապա այն կոչվում է ամենուրեք զուգամետ:

Օգտվելով Աբելի լեմմայից՝ ցույց տանք, որ եթե (2.46) շարքը ոչ ամենուրեք տարամետ է և ոչ էլ ամենուրեք զուգամետ, ապա գոյություն ունի R դրական թիվ այնպիսին, որ $|x| < R$ դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ $|x| > R$ դեպքում շարքը տարամետ է: (Նկատենք, որ ամենուրեք տարամետ կամ ամենուրեք զուգամետ շարքերի համար ընդունում են համապատասխանաբար $R = 0$ կամ $R = +\infty$):

Դիտարկվող դեպքում OX դրական կիսառանցքի վրա գոյություն ունի $[a_1, b_1]$ հատված, որի ձախ ծայրակետում շարքը զոգամետ է, իսկ աջ ծայրակետում՝ տարամետ: $[a_2, b_2]$-ով նշանակենք $[a_1, b_1]$-ի այն կեսը, որի ձախ ծայրակետում շարքը զուգամետ է, աջում՝ տարամետ և այս պրոցեսը անվերջ շարունակենք: Կստանանք ներդված միջակայքերի հաջորդականություն՝ $[a_n, b_n]$, որը ունի միակ ընդհանուր կետ: Ցույց տանք, որ այդ կետի համապատասխան թիվը R-ն է:

Իրոք, դիցուք $|x| < R$: n-ը ընտրենք այնքան մեծ, որ a_n-ը մեծ լինի $|x|$-ից: Քանի որ a_n կետում շարքը զուգամետ է, ապա ըստ Աբելի լեմմայի (2.46) շարքը բացարձակ զուգամետ է նաև $|x| < a_n < R$ դեպքում: Դիցուք $|x| > R$ և n-ը այնպիսին է, որ $b_n < |x|$: Քանի որ b_n-ը (2.46)-ի համար տարամիտության կետ է և $R < b_n < |x|$, ապա Աբելի լեմմայի համաձայն՝ x կետում (2.46) շարքը տարամետ է:

Այսպիսով ապացուցված է:

Թեորեմ: Ցանկացած աստիճանային շարքի համար, եթե այն ամենուրեք տարամետ չէ և ամենուրեք զուգամետ չէ, ապա գոյություն ունի այնպիսի դրական R թիվ, որ շարքը բացարձակ զուգամետ է, եթե $|x| < R$, և շարքը տարամետ է, եթե $|x| > R$ $(R < +\infty)$:

R թիվը կոչվում է աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղ, իսկ $(-R, R)$ միջակայքը՝ զուգամիտության միջակայք:

Զուգամիտության միջակայքի ծայրակետերում շարքի վարքի մասին որոշակի պնդում անել չի կարելի, այդ կետերում շարքը կարող է լինել ինչպես զուգամետ (բացարձակ կամ պայմանական), այնպես էլ տարամետ:

Օրինակներ

1) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$: Այս շարքը զուգամետ է ամենուրեք, հետևաբար $R = \infty$, զուգամիտության միջակայքը՝ $(-\infty, +\infty)$:

2) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}$,

$R = 1$, զուգամիտության միջակայքը՝ $(-1, 1)$, $x = -1$ և $x = 1$ կետերում շարքը տարամետ է:

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

$R = 1$, զուգամիտության միջակայքը՝ $(-1, 1)$-ն է, իսկ զուգամիտության տիրույթը՝ $[-1, 1]$-ը:

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$,

$R = 1$, զուգամիտության միջակայքը՝ $(-1, 1]$, $x = -1$ կետում շարքը տարամետ է, իսկ $x = 1$, կետում՝ զուգամետ:

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

$R = 1$, զուգամիտության միջակայքը՝ $[-1, 1]$ $x = -1$ և $x = 1$ կետերում շարքը բացարձակ զուգամետ է:

Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է գտնել (2.46) շարքի զուգամիտության շառավիղը:

(2.46) շարքի գործակիցներից կազմենք ոչ բացասական անդամներով հաջորդականություն՝

$$|a_1|, \quad |a_2|^{\frac{1}{2}}, \quad |a_3|^{\frac{1}{3}}, \quad \cdots, \quad |a_n|^{\frac{1}{n}}, \cdots \tag{2.53}$$

և l-ով նշանակենք այդ հաջորդականության վերին սահմանը՝ բոլոր մասնակի սահմաններից ամենամեծը՝

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}:$$

Ակնհայտ է, որ l-ը միշտ գոյություն ունի և $\left\{|a_n|^{\frac{1}{n}}\right\}$ հաջորդականության բոլոր կուտակման կետերից ամենամեծն է:

Թեորեմ (Կոշի-Ադամարի): (2.46) շարքի զուգամիտության R շառավիղը որոշվում է

$$R = \frac{1}{l} \tag{2.54}$$

բանաձևով: Ընդ որում՝ ընդունում են $R = 0$, եթե $l = +\infty$ և $R = +\infty$, եթե $l = 0$:

Ապացուցում: Եթե $l = +\infty$, ապա (2.46)-ի չի կարող զուգամետ լինել $x_0 \neq 0$ կետում:

Իրոք, հակառակ դեպքում գոյություն կունենա $h > 1$ թիվ այնպիսին, որ $|a_n x_0^n| < h$, որտեղից $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{h}{|x_0|}$, $n = 1, 2, \ldots$, որը հնարավոր չէ, քանի որ $l = +\infty$-ից հետևում է, որ $\left\{|a_n|^{\frac{1}{n}}\right\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ:

Դիցուք $l = 0$ և x-ը 0-ից տարբեր ցանկացած թիվ է: $l = 0$ հավասարությունը նշանակում է $l = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$, այսինքն՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists n_0$ բնական թիվ այնպիսին, որ $n > n_\varepsilon \implies |a_n|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$: Մասնավոր դեպքում, եթե $\varepsilon = \frac{1}{2|x|}$, ապա սկսած n-ի ինչ-որ արժեքից, կունենանք

$$|a_n x^n| < \frac{1}{2^n},$$

որտեղից հետևում է (2.46) շարքի բացարձակ զուգամիտությունը:

Այժմ ցույց տանք, որ զրոյից տարբեր վերջավոր l-ի դեպքում (2.46) շարքը $|x| < \frac{1}{l}$ միջակայքում բացարձակ զուգամետ է, իսկ $|x| > \frac{1}{l}$ բազմության վրա՝ տարամետ:

Համաձայն l թվի սահմանման՝ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար սկսած ինչ-որ n համարից, կունենանք

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon: \tag{2.55}$$

Դիցուք $|x| < \frac{1}{l}$: Այս անհավասարությունից հետևում է $1 - l \cdot |x| > 0$: (2.55)-ում վերցնելով $\varepsilon = \frac{1-l|x|}{2|x|}$, $(x \neq 0)$՝ կստանանք

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < l + \frac{1 - l|x|}{2|x|} = \frac{1 + l|x|}{2|x|}$$

կամ

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |x| < \frac{1 + l|x|}{2} = q < 1:$$

Վերջին անհավասարությունից հետևում է

$$|a_n x^n| < q^n,$$

հետևաբար (2.46) շարքը բացարձակ զուգամետ է $|x| < \frac{1}{l}$ դեպքում:

Դիցուք $|x| > \frac{1}{l}$, համաձայն l թվի սահմանման ցանկացած ε թվի համար գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ n բնական թվեր, որոնց համար տեղի ունի $|a_n|^{\frac{1}{n}} > l - \varepsilon$ և վերցնելով $\varepsilon = \frac{l|x|-1}{2|z|}$, կունենանք $|a_n x^n| > 1$: Այսինքն՝ խախտվում է (2.46) շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը, որը նշանակում է $|x| > \frac{1}{l}$ դեպքում (2.46) շարքը տարամետ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

5) Աստիճանային շարքի գումարի անընդհատություն

Դիցուք (2.46) շարքի զուգամիտության շառավիղը R է $(R > 0)$: Ինչպիսին էլ լինի r դրական թիվը $(r < R)$ (2.46) շարքը $[-r, r]$ միջակայքում կլինի հավասարաչափ զուգամետ:

Քանի որ, եթե $r < R$, ապա (2.46) շարքը բացարձակ զուգամետ է $x = r$ կետում, այսինքն՝ զուգամետ է

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| r + +|a_2| r^2 + \cdots + |a_n| r^n + \cdots \tag{2.56}$$

շարքը, որը $[-r, r]$-ում (2.46)-ի համար մաժորանտ շարք է:

Այսպիսով, թեորեմ 1-ից կունենանք[3] հետևանք, որ (2.46) աստիճանային շարքի գումարն անընդհատ ֆունկցիա է:

6) Աստիճանային շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումը

---

[3] Տե՛ս, պարագրաֆ 3:

Թեորեմ: (2.46) աստիճանային շարքը $[0,x]$ միջակայքում, որտեղ $|x| < R$ կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել՝

$$\int_0^x f(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots: \qquad (2.57)$$

Ապացույց: $|x|$ և R թվերի միջև վերցնենք r թիվ: (2.46)-ը $[-r,r]$-ում հավասարաչափ զուգամետ է, հետևաբար $[0,x]$ միջակայքում այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել:

Օրինակ՝

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

շարքի զուգամիտության միջակայքն է $(-1, 1)$:

$[0,x]$ միջակայքում ($|x| < 1$) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է և նրա գումարը հավասար է $\frac{1}{1+x}$:

Անդամ առ անդամ ինտեգրելով հետևյալ հավասարությունը

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

$[0,x]$ միջակայքում ($|x| < 1$) կստանանք

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots:$$

7) Աստիճանային շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցումը

Թեորեմ: (2.46) աստիճանային շարքը իր զուգամիտության միջակայքում կարելի է անդամ առ անդամ դիֆերենցել, այսինքն՝ շարքի $f(x)$ գումարը ունի ածանցյալ, որը արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots: \quad (2.58)$$

Ապացույց: Դիցուք $x = x_0$, $-R < x_0 < R$: Ակնհայտ է, որ գոյություն ունեն r_0 և r թվեր, այնպիսիք, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$|x_0| < r_0 < r < R:$$

Քանի որ (2.46)-ը $x = r$ կետում զուգամետ է, ապա a_nr^n-ը սահմանափակ է՝

$$|a_n| \cdot r^n \leq L, \quad (n = 1, 2, \dots; \quad L = cosnt):$$

Դիցուք $|x| < r_0$, այդ դեպքում

$$n \cdot |a_nx^{n-1}| \leq n \cdot |a_n| \cdot r^{n-1} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leq L_0 \cdot n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1},$$

որտեղ $\left(n = 1, 2, \dots; L_0 = \frac{L}{r} = cosnt\right)$:

Այսպիսով, (2.58) շարքի անդամների բացարձակ արժեքներով կազմված շարքը, x-ի նշված արժեքների դեպքում ունի մաժորանտ շարք՝

$$L_0 + L_0 \cdot 2\left(\frac{r_0}{r}\right) + L_0 \cdot 3\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \dots + L_0 \cdot n\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} + \cdots,$$

որի զուգամիտությունը հեշտությամբ ապացուցվում է, օրինակ, օգտվելով Դալամբերի հայտանիշից:

Ուրեմն (2.58) շարքը $[-r_0, r_0]$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է: Այսինքն՝ (2.46) շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցումը $[-r_0, r_0]$-ում, հետևաբար նաև $x = x_0$ կետում ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ աստիճանային շարքը իր զուգամիտության միջակայքում՝ $(-R, R)$, կարելի է ցանկացած թվով անգամ ածանցել: Ածանցումից ստացված շարքերը կունենա նույն զուգամիտության միջակայքը:

Օրինակ: Որպես նախորդ թեորեմի կիրառություն դիտարկենք Բեսելի հավասարումը՝

$$xu'' + u' + xu = 0, \tag{2.59}$$

որը հաճախ հանդիպում է մաթեմատիկական ֆիզիկայում և նրա կիրառություններում:

(2.59)-ի լուծումը փնտրենք աստիճանային շարքի տեսքով՝

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.60}$$

որտեղ a_n-երը անորոշ գործակիցներ են, որոնք պետք է որոշել այնպես, որ (2.60)-ը բավարարի (2.59) հավասարմանը:

Ունենք

$$xu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1},$$

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$xu''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}:$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունները (2.59) հավասարման մեջ՝ x-ի նկատմամբ կստանանք նույնություն՝

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}+n^2a_n)x^{n-1}\equiv 0\,, \qquad (2.61)$$

որտեղից կստացվի համակարգ՝

$$\begin{cases} a_1=0, \\ a_{n-2}+n^2a_n=0, \end{cases} (n=2,3,4,\dots) \qquad (2.62)$$

(2.62)-ից հետևում է $a_{2m-1}=0$, $(m=1,2,3,\dots)$, և $a_{2m}=-\frac{1}{4m^2}a_{2m-2}$ ռեկուրենտ բանաձևը, որից կստանանք

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{1}{(m!)^2\cdot 2^{2m}}\cdot a_0:$$

Այսպիսով, a_0 հաստատուն բազմապատկչի ճշտությամբ կստանանք

$$u(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(m!)^2\cdot 2^{2m}}: \qquad (2.63)$$

Ակնհայտ է, որ (2.63) շարքը ամենուրեք զուգամետ է և նրա $u(x)$ գումարը բավարարում է Բեսելի հավասարմանը:

§4. Թեյլորի շարք

Սահմանում: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում և այդ կետում ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ: Այդ դեպքում

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (2.64)$$

աստիճանային շարքը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարք x_0 կետում:

$x_0=0$ դեպքում (2.64)-ը կոչվում է նաև Մակլորենի շարք:

Հարց է ծագում՝ երբ է x_0 կետի որևէ շրջակայքում (2.64) շարքը զուգամիտում $f(x)$-ին:

Որպեսզի պատասխանենք այդ հարցին x_0 կետում գրենք Թեյլորի բանաձևը[4]՝

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x)\,: \qquad (2.65)$$

---

[4] Տե՛ս, I մաս, էջ 147:

Նշանակենք՝
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k:$$
(2.65)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝
$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \qquad (2.66)$$
որտեղ $S_n(x)$-ը Թեյլորի շարքի մասնակի գումարն է: (2.66)-ից հետևում է.

Թեորեմ: Որպեսզի $f(x)$-ը դիտարկվող միջակայքում հավասար լինի իր Թեյլորի շարքի գումարին, այսինքն՝ $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ միջակայքի բոլոր x-երի համար $f(x)$-ի Թեյլորի (2.65) բանաձևի մնացորդային անդամը ձգտի զրոյի՝
$$\lim_{\to\infty} r_n(x) = 0: \qquad (2.67)$$

Նշենք ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի վերլուծման բավարար պայման.

Թեորեմ: Դիցուք $f(x)$-ը անվերջ դիֆերենցելի է (x_0-h, x_0+h) միջակայքում և այդ միջակայքում նրա բոլոր ածանցյալները սահմանափակ են միևնույն հաստատունով՝ $\exists M = const$, այնպիսին, որ
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, x \in (x_0-h, x_0+h); n = 0, 1, 2, \dots \qquad (2.68)$$
Այդ դեպքում (x_0-h, x_0+h) միջակայքում $f(x)$-ը ներկայացվում է Թեյլորի շարքով՝
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0| < h: \qquad (2.69)$$

Ապացուցում: Որպեսզի ապացուցենք (2.69)-ը, բավական է ապացուցել, որ
$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \qquad (2.70)$$
որտեղ $r_n(x)$-ը Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամն է: Վերցնենք $r_n(x)$-ը Լագրանժի տեսքով[5]՝
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}: \qquad (2.71)$$
Հաշվի առնելով (2.68)-ը՝ (2.71)-ից կստանանք
$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le M \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \le M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$
որտեղից հետևում է, որ

---

[5] Տե՛ս, մաս I, էջ 150:

$$\lim_{n\to\infty}|r_n(x)| = 0:$$ [6]

Թեորեմն ապացուցված է:

§5. Տարրական ֆունկցիաների Թեյլորի շարքերը

1. $f(x) = e^x$ ֆունկցիայի վերլուծությունը $x_0 = 0$ կետի շրջակայքում:

Քանի որ $f^{(n)}(x) = e^x$, ապա ցանկացած ֆիքսած h-ի համար բոլոր $x \in (-h, h)$-ի և բոլոր $n = 0, 1, 2, \dots$ թվերի համար տեղի ունեն

$$0 < f^{(n)}(x) < e^h$$

պայմանները, ապա համաձայն նախորդ թեորեմի՝ ամբողջ թվային առանցքի վրա կունենանք

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!}: \tag{2.72}$$

2. $f(x) = \sin x$ և $f(x) = \cos x$ ֆունկցիաների վերլուծությունները $x_0 = 0$ կետի շրջակայքում:

Եթե $f(x) = \sin x$, ապա $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ [7] և $\forall n$-ի և $\forall x$ -ի համար տեղի ունեն $\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$ պայմանները, հետևաբար

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}: \tag{2.73}$$

Նման ձևով կստանանք՝

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}, \tag{2.74}$$

3. $f(x) = \ln(1 + x)$ ֆունկցիայի վերլուծությունը x_0 կետի շրջակայքում:

$f(x)$-ի Թեյլորի բանաձևը ունի հետևյալ տեսքը[8]՝

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + r_n(x), \tag{2.75}$$

$r_n(x)$-ը գրենք Լագրանժի տեսքով՝

---

[6] Տե՛ս, I մաս, էջ 55, օրինակ 2:

[7] Տե՛ս, I մաս, էջ 131:

[8] Տե՛ս, I մաս, էջ 152:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

որտեղ c-ն գտնվում է x-ի և x_0-ի միջև:

Հաշվի առնելով, որ

$$f^{(n+1)}(x) = (\ln(1+x))^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

և $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$՝ կունենանք

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot(1+\theta x)^{n+1}}, \qquad 0 < \theta < 1:$$

Եթե $0 \leq \theta \leq 1$, ապա $0 < \frac{1}{1+\theta x} \leq 1$ և $|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}$: Հետևաբար

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0: \tag{2.76}$$

Իսկ եթե $-1 < x < 0$, ապա հարմար է $r_n(x)$-ը գրել Կոշիի ներկայացմամբ՝

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}:$$

Այս դեպքում $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1$, բացի դրանից,

$$\frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|}:$$

Հետևաբար

$$|r_n(x)| \leq \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1+\theta x|} \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

որտեղից $-1 < x < 0$ պայմանին բավարարող x-երի համար նույնպես ստանում ենք (2.76) հավասարությունը:

Այսպիսով, $(-1, 1]$ միջակայքի ցանկացած x-ի համար տեղի ունի վերլուծություն՝

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}: \tag{2.77}$$

Երբ $x = -1$ ստացվում է հարմոնիկ շարք (-1) արտադրիչի ճշտությամբ, հետևաբար (2.77)-ը $x = -1$ կետում տարամետ է: (2.77)-ը տարամետ է նաև $\forall x$-ի դեպքում, եթե $|x| > 1$, քանի որ նրա ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի:

(2.77) շարքը անվանում են լոգարիթմական շարք:

Օգտվելով (2.77) վերլուծությունից (լոգարիթմական շարքից)՝ անգլիացի մաթեմատիկոս Ստիրլինգը ստացել է մաթեմատիկական անալիզի կարևոր բանաձևերից մեկը՝

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad (0 < \theta < 1), \tag{2.78}$$

որից բավականաչափ մեծ n-երի համար կունենանք՝

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n :$$

§6. $f(x) = (1 + x)^\alpha$ ֆունկցիայի վերլուծությունը $x_0 = 0$ կետի շրջակայքում

$x_0 = 0$ կետի շրջակայքում դիտարկենք $f(x) = (1 + x)^\alpha$ ֆունկ-ցիան, որտեղ α-ն 0-ից և բոլոր բնական թվերից տարբեր ցանկացած իրական թիվ է: Այդ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + r_n(x), \tag{2.79}$$

(2.79) բանաձևի $r_n(x)$ մնացորդային անդամը գրենք Կոշիի ներ-կայացմամբ՝

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\cdots(\alpha - n + 1)(\alpha - n) \cdot (1 + \theta x)^{\alpha - n - 1}}{n!} \cdot (1 - \theta)^n \cdot x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1:$$

(θ -ն կախված է x-ից և n-ից):

Նշանակենք

$$A_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\cdots(\alpha - 1 - (n - 1))}{n!}x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha \cdot x(1 + \theta x)^{\alpha - 1},$$

$$C_n(x) = \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^n :$$

Ունենք՝

$$r_n(x) = A_n(x) \cdot B_n(x) \cdot C_n(x):$$

Ակնհայտ է, որ $A_n(x)$-ը բինոմական շարքի ընդհանուր անդամն է, և քանի որ բինոմական շարքը $|x| < 1$ դեպքում զուգամետ է $\forall\alpha$-ի համար, ապա

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0, \quad |x| < 1:$$

Այնուհետև

$$|B_n(x)| = |\alpha x| \cdot |1 + \theta x|^{\alpha - 1}, \qquad 0 < \theta < 1, -1 < x < 1$$

առնչություններից հետևում է՝

$$|\alpha x| \cdot (1 - |x|)^{\alpha - 1} \le |B_n(x)| \le |\alpha x| \cdot (1 + |x|)^{\alpha - 1},$$

որտեղից եզրակացնում ենք, որ $\{B_n(x)\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Վերջապես՝

$$|C_n(x)| = \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leq \left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right| < 1:$$

$A_n(x)$, $B_n(x)$ և $C_n(x)$ արտահայտությունների վերը նշված հատկություններից հետևում է, որ

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \text{ եթե } |x| < 1:$$

Այսպիսով, ցանկացած $x \in (-1,1)$-ի համար տեղի ունի հավասարություն՝

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n: \qquad (2.82)$$

Օրինակներ:

Գտնել ֆունկցիայի վերլուծությունը Թեյլորի շարքի x_0 կետի շրջակայքում:

Օրինակ 1. $f(x) = \arcsin x$:

Ունենք $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$:

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$ ֆունկցիան $(-1,1)$ միջակայքում, ըստ (2.80) բանաձևի, կարելի է ներկայացնել

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-x^2)^n}{n!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

որտեղից

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n+1}}{2^n \cdot n! \cdot (2n+1)}:$$

Օրինակ 2. $f(x) = 3^x$:

Ունենք՝ $f(x) = e^{x\cdot\ln 3}$, $-\infty < x < +\infty$:

Ըստ (2.72)-ի՝

$$3^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{n!} x^n:$$

Օրինակ 3. $f(x)=\cos^2 x$:

Ունենք՝ $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$:

Ըստ (2.74)-ի՝

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\dots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)=$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+\dots+\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,\qquad -\infty<x<\infty:$$

Օրինակ 4. $f(x)=\ln(x+a)$, $a>0$:

Ունենք՝ $f(x)=\ln\left(a\cdot\left(1+\frac{x}{a}\right)\right)=\ln a+\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)$:

Ըստ (2.77)-ի՝

$$\ln(x+a)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n}{n}=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n,$$

$$-a<x<a:$$

ԳԼՈՒԽ III
ՖՈՒՐԻԵԻ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

3.1. Ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգեր

Սահմանում: $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են ***օրթոգոնալ*** $[a,b]$-ում, եթե

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0:$$

Սահմանում: Դիցուք $\{\varphi_n(x)\}$-ը $(n = 1,2,\dots)$ $[a,b]$-ում որոշված ֆունկցիաների հաջորդականություն է, այնպիսին, որ այդ հաջորդականության ցանկացած երկու ֆունկցիաներ օրթոգոնալ են: Այդ դեպքում $\{\varphi_n(x)\}$ համակարգը կոչվում է ***օրթոգոնալ համակարգ*** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$-ում:

Եթե $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1,2,\dots)$ համակարգի համար տեղի ունեն նաև

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx = 1, (n = 1,2,\dots)$$

հավասարությունները, ապա $\{\varphi_n(x)\}$-ը կոչվում է ***օրթոնորմալ համակարգ***:

Օրինակ՝

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \tag{3.1}$$

եռանկյունաչափական համակարգը օրթոգոնալ է $[-\pi,\pi]$-ում:

Իրոք՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \;\; n = 1,2,3,\dots, \tag{3.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \;\; n = 1,2,3,\dots \tag{3.3}$$

հավասարությունները նշանակում են, որ 1 հաստատուն ֆունկցիան օրթոնորմալ է $\sin nx$ և $\cos nx$, $(n = 1,2,\dots)$ ֆունկցիաներին: Համակարգի օրթոգոնալության մնացած պայմանները հետևում են (3.2) և (3.3) հավասարություններից և հետևյալ եռանկյունաչափական նույնություններից.

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x),$$
$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x),$$
$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x):$$

Քանի որ
$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \pi,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx = \pi,$$
ապա $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգը օրթոնորմալ է ցանկացած միջակայքում, որի երկարությունը 2π է:

3.2. Ֆուրիեի շարք, Ֆուրիեի գործակիցներ

Սահմանում: Հետևյալ տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը՝
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
կոչվում է ***եռանկյունաչափական*** շարք, որտեղ $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ գործակիցները հաստատուններ են (ազատ անդամը հարմար է գրել $\frac{a_0}{2}$ տեսքով):

Դիցուք տրված է 2π պարբերությամբ կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիա: Դիտարկենք խնդիր. $f(x)$-ը $[-\pi, \pi]$ միջակայքում ներկայացնել եռանկյունաչափական շարքի տեսքով՝
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx): \tag{3.4}$$

Ենթադրենք (3.4) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[-\pi, \pi]$-ում: Հետևաբար այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել:

Ինտեգրելով (3.4)-ը՝ կստանանք
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx\right): \tag{3.5}$$

Համաձայն (3.2)-ի և (3.3)-ի՝ (3.5)-ից կունենանք

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \cdot \pi,$$

որտեղից՝ $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$: (3.6)

Որպեսզի գտնենք a_m գործակիցները (3.4)-ի ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք $\cos mx$-ով և անդամ առ անդամ ինտեգրենք՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\, dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\, dx\right): \quad (3.7)$$

Քանի որ (3.1) համակարգը օրթոգոնալ է, ապա (3.7)-ից կունենանք

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\, dx = \frac{a_m}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2mx)dx =$$

$$= \pi \cdot a_m,$$

որտեղից՝

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx, \qquad (m = 1, 2, \dots): \quad (3.8)$$

Նման եղանակով կգտնենք՝

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx, \qquad (m = 1, 2, \dots): \quad (3.9)$$

Նկատենք, որ a_0-ն կստացվի (3.8)-ից, եթե $m = 0$:

(3.8)-ում և (3.9)-ում m-ը փոխարինենք n-ով, կստանանք՝

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\left\{\begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix}\right. dx, \qquad (n = 1, 2, \dots): \quad (3.10)$$

a_n, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ թվերը կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի ***Ֆուրիեի գործակիցներ***:

Սահմանում: (3.4) եռանկյունաչափական շարքը, որի գործակիցները որոշվում են (3.10) բանաձևերով, կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարք, անկախ նրանից, նրա գումարը հավասար է $f(x)$-ին, թե ոչ:

Այդ իմաստով գրում են՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx): \quad (3.11)$$

Դիտողություն: Եթե (3.11)-ի աջ մասի շարքը, որտեղ գործակիցները որոշվում են (3.10) բանաձևերով հավասարաչափ զուգամետ է, ապա (3.11)-ում $\sim$ նշանի փոխարեն կարող ենք գրել $=$ նշանը:

Դիցուք $f(x)$-ը որոշված է $[-\pi, \pi]$-ում: Գրելով նրա (3.11) Ֆուրիեի շարքը՝ դրա զուգամիտության մասին որևէ պնդում անել չենք կարող: Ուստի առաջանում են բնական հարցեր.

Արդյո՞ք շարքը զուգամետ է և եթե այո, նրա գումարը հավասա՞ր է $f(x)$-ի:

Պարզաբանման համար դիտարկենք հետևյալ օրինակը. Դիցուք $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[-\pi, \pi]$-ում՝

$$f_1(x) = 0, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi],$$
$$f_2(x) = 0, \qquad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \ \ f_2(0) = 1:$$

Ակնհայտ է, որ երկու ֆունկցիաներն էլ ունեն միևնույն Ֆուրիեի շարքերը, որոնք հավասարաչափ զուգամետ են $[-\pi, \pi]$-ում, քանի որ $a_n = b_n = 0$: Այդ շարքերի գումարը հավասար է $f_1(x)$-ի և ոչ $f_2(x)$-ի, քանի որ $f_2(x)$-ը նույնաբար զրո չէ:

Այս պարզ օրինակը ցույց է տալիս, որ $f(x)$-ի Ֆուրիեի շարքը պարտադիր չէ, որ զուգամիտի $f(x)$-ին, նույնիսկ, եթե այդ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, ինչպես նաև ցույց է տալիս, որ երկու տարբեր ֆունկցիաներ կարող են ունենալ միևնույն Ֆուրիեի շարքը:

Հետաքրքրություն է ներկայացնում հետևյալ խնդիրը՝ առանձնացնել ֆունկցիաների դասեր, որոնց համար Ֆուրիեի շարքը զուգամետ է և ներկայացնում է տվյալ ֆունկցիան: Այս խնդրի սկզբնաղբյուրներ են ֆիզիկայի այնպիսի բաժիններ, ինչպիսիք են տատանումների (մասնավորապես մակընթացության և տեղատվության երևույթները) և ջերմության տարածման տեսությունները: Խնդիրն ունի ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական մեծ նշանակություն:

3.3. Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության հայտանիշները

Սահմանում: $\mathbb{R}$ բազմության վրա որոշված 2π պարբերություն ունեցող $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր դիֆերենցելի, եթե գոյություն ունի $[-\pi, \pi]$ հատվածի $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ տրոհում, այնպիսին, որ տրոհման Δ_i հատվածներից յուրաքանչյուրի ներսում f-ը դիֆերենցելի է, տրոհման կետերում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ և բացի այդ գոյություն ունեն

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i \pm 0)}{\Delta x}, \qquad (i = 0, 1, \dots, n)$$

վերջավոր սահմանները:

Սահմանում: $\mathbb{R}$ բազմության վրա որոշված 2π պարբերությամբ $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ***կտոր առ կտոր մոնոտոն***, եթե գոյություն ունի $[-\pi, \pi]$ հատվածի տրոհում, այնպիսին, որ տրոհման հատվածներից յուրաքանչյուրի ներսում f-ը մոնոտոն է, իսկ տրոհման կետերում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ:

Առանց ապացուցման[9] ձևակերպենք Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի զուգամիտության հայտանիշները.

Թեորեմ (Լիպշիցի հայտանիշ): Կտոր առ կտոր դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը ցանկացած x_0 կետում զուգամետ է և ունի $S_0 = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ գումար: Մասնավորապես, եթե $f(x)$-ը x_0 կետում անընդհատ է, ապա շարքը զուգամիտում է $f(x_0)$-ին:

Թեորեմ (Դիրիխլեի հայտանիշ): Կտոր առ կտոր մոնոտոն $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը x_0 ցանկացած կետում զուգամետ է և ունի $S_0 = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ գումար:

3.4. Ոչ պարբերական ֆունկցիայի դեպքը

Մինչ այժմ մենք ենթադրում էինք, որ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր իրական արժեքների դեպքում և ունի 2π պարբերություն: Բայց հաճախ հարկ է լինում դիտարկել ոչ պարբերական ֆունկցիաներ, կամ ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են միայն $[-\pi, \pi]$-ում: Որպեսզի այդպիսի ֆունկցիաների նկատմամբ վերը շարադրվածը կարողանանք կիրառել, դիտարկենք օժանդակ $f^*(x)$ ֆունկցիա՝

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), -\pi < x \leq \pi, \\ f(\pi), \text{երբ } x = -\pi, \end{cases}$$

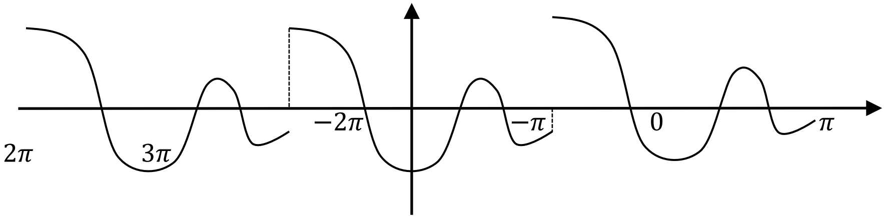
իսկ մնացած x-երի համար $f^*(x)$-ը որոշենք պարբերականության օրենքով՝ $f^*(x + 2\pi) = f^*(x)$:

2π պարբերությամբ $f^*(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կարելի է կիրառել վերլուծության թեորեմները: Եթե խոսքը x_0-կետի մասին է

[9] Ապացույցը տե՛ս Г. М. Фихтенгольц, "Курс дифференциального и интегрального исчисления", том III:

$(-\pi < x_0 < \pi)$, ապա թեորեմի պայմանները ստուգելիս, մենք գործ կունենանք $f(x)$-ի հետ:

Սակայն հատուկ ուշադրություն են պահանջում միջակայքի $x = \pm\pi$ ծայրակետերը (գծ. 1):



Գծ. 1

Օրինակ՝ $x = \pi$ կետում որևէ թեորեմի պայմանները ստուգելիս $f^*(x)$ ֆունկցիայի համար, մենք գործ կունենանք ոչ միայն $f^*(x)$-ի ընդունած արժեքների հետ, երբ $x < \pi$, որտեղ նրանք համընկնում են $f(x)$-ի արժեքների հետ, այլև $x > \pi$-ից $f^*(x)$-ի արժեքների հետ, որտեղ նրանք համընկնում են $x > -\pi$-ից $f(x)$-ի արժեքների հետ: Ուստի $x = \pm\pi$ դեպքում որպես s_0 պետք է վերցնել հետևյալ թիվը՝

$$s_0 = \frac{f^*(\pi+0) + f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0) + f^*(-\pi-0)}{2} =$$
$$= \frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2}: \qquad (3.12)$$

(3.12)-ից հետևում է՝ եթե $f(x)$-ը նույնիսկ անընդհատ է $x = \pm\pi$ կետերում, բայց չունի 2π պարբերություն $(f(-\pi) \neq f(\pi))$, ապա Ֆուրիեի շարքի զուգամիտության որևէ բավարար պայմանի առկայության դեպքում այդ շարքի գումարը կլինի $\frac{1}{2}(f(-\pi) + f(\pi))$ թիվը, որը տարբեր է ինչպես $f(-\pi)$-ից, անպես էլ $f(\pi)$-ից: Հետևաբար, այդպիսի ֆունկցիայի համար վերլուծություն կարող է տեղի ունենալ միայն $(-\pi, \pi)$ միջակայքում:

3.5. Կամայական միջակայքի դեպքը

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[-l, l]$, $(l > 0)$ միջակայքում: Կատարելով x փոփոխականի փոխարինում՝

$$x = \frac{l}{\pi} y, \quad (-\pi \leq y \leq \pi), \qquad (3.13)$$

կստանանք $[-\pi,\pi]$-ում որոշված y փոփոխականի $f\left(\frac{l}{\pi}y\right)$ ֆունկցիա, որը որոշակի պայմանների առկայության դեպքում կարելի է վերլուծել ըստ Ֆուրիեի շարքի՝

$$f\left(\frac{l}{\pi}y\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny), \tag{3.14}$$

իսկ շարքի գործակիցները որոշվում են

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}y\right)\cos ny\,dy\,, \qquad (n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}y\right)\sin\frac{l}{\pi}y\,dy\,, \qquad (n=1,2,\dots)$$

բանաձևերով:

(3.13)-ից կունենանք՝ $y=\frac{\pi x}{l}$, հետևաբար (3.14)-ից կստանանք $f(x)$-ի վերլուծություն, որը կոչվում է Ֆուրիեի ընդհանրացված եռանկյունաչափական շարք՝

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right):$$

Նույն փոխարինմամբ վերլուծության գործակիցների համար ստանում ենք՝

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx\,, \qquad (n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\,, \qquad (n=1,2,\dots)$$

բանաձևերը:

3.6. Վերլուծություններ միայն ըստ կոսինուսների կամ միայն ըստ սինուսների

Նախ նշենք հետևյալ փաստը՝ եթե $[-\pi,\pi]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է, սահմանափակ է և զույգ, ապա

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx: \qquad (3.15)$$

Իրոք,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx: \qquad (3.16)$$

(3.16)-ի աջ մասի առաջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = -t$: Կունենանք՝

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(-t)d(-t) = -\int_{-\pi}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{\pi} f(t)dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi} f(x)dx: \qquad (3.17)$$

(3.16)-ից և (3.17)-ից հետևում է (3.15)-ը:

Նման ձևով $f(x)$ կենտ ֆունկցիայի դեպքում կստանանք

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0:$$

Դիցուք $f(x)$-ը որոշված է $[-\pi, \pi]$ միջակայքում, ինտեգրելի է այդ միջակայքում և զույգ է: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ $f(x) \cdot \sin nx$ ֆունկցիան կենտ է և տեղի ունեն հավասարություններ՝

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots):$$

Հետևաբար $[-\pi, \pi]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ զույգ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը կպարունակի միայն կոսինուսներ՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

որտեղ

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots): \qquad (3.18)$$

Իսկ եթե $f(x)$-ը կենտ է, ապա կենտ կլինի նաև $f(x)\cos nx$ ֆունկցիան և այս դեպքում կունենանք

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots):$$

Այսպիսով, $f(x)$ կենտ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը կպարունակի միայն սինուսներ՝

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

որտեղ b_n գործակիցները կորոշվեն

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \qquad (3.19)$$

բանաձևերով:

Նկատենք, որ ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիա, որը որոշված է $[-a, a]$, $(a > 0)$ սիմետրիկ միջակայքում, կարելի է ներկայացնել զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումարի տեսքով՝

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

որտեղ $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$:

Պարզ է, որ $f(x)$-ի Ֆուրիեի շարքը կազմված է $f_1(x)$-ի կոսինուսների և $f_2(x)$-ի սինուսների վերլուծությունների գումարից:

Այժմ ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է միայն $[0, \pi]$-ում: Ցանկանալով $f(x)$-ը վերլուծել (3.11) տեսքի Ֆուրիեի շարքի, մենք $[-\pi, 0]$-ում $f(x)$-ը կշարունակենք կամայապես, այնուհետև կվարվենք այնպես ինչպես 3.4-ում: Շնորհիվ շարունակման կամայականությանը, այդ ճանապարհով կստանանք տարբեր եռանկյունաչափական շարքեր: Եթե մի որևէ $x_0 \in (0, \pi)$ կետում ֆունկցիան բավարարում է Ֆուրիեի շարքի վերլուծման որևէ հայտանիշի, ապա այդ բոլոր շարքերը x_0 կետում կզուգամիտեն $f(x_0)$-ին կամ խզման դեպքում՝ $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$-ին: Օգտագործելով $[-\pi, 0]$-ում $f(x)$ շարունակման կամայականությունը՝ կարելի է ստանալ $f(x)$-ի վերլուծություններ, որոնք պարունակում են միայն կոսինուսներ, կամ միայն սինուսներ:

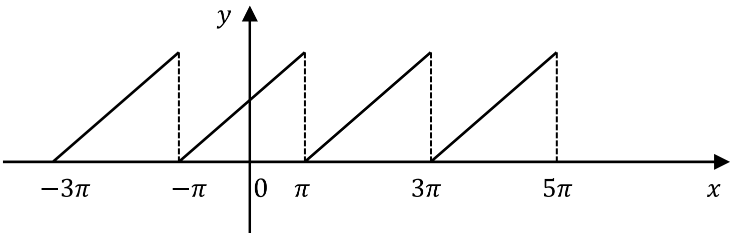
Իսկապես, ենթադրենք, որ $-\pi \le x < 0$ արժեքների համար մենք ընդունել ենք $f(x) = f(-x)$ այնպես, որ արդյունքում ստացել ենք $[-\pi, \pi]$-ում որոշված զույգ ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիայի վերլուծությունը կպարունակի միայն կոսինուսներ: Վերլուծության գործակիցները կարելի է հաշվել (3.18) բանաձևերով, որտեղ մասնակցում են միայն $f(x)$-ի արժեքները:

Նման ձևով, եթե $f(x)$-ը $[-\pi, 0]$ սահմանվում է $f(-x) = -f(x)$ պայմանով, այնպես, որ այն դառնա կենտ, ապա նրա վերլուծությունը կպարունակի միայն սինուսներ, իսկ գործակիցները կորոշվեն (3.19) բանաձևերով:

3.7. Օրինակներ

Վերլուծել Ֆուրիեի շարքի.

1. $f(x) = \pi + x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$:



Գծ. 2

Գծ. 2-ի վրա ցույց է տրված $y = S(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $S(x)$-ը $f(x)$-ի Ֆուրիեի շարքի գումարն է:

Այդ գումարը $[-\pi, \pi]$ միջակայքում համընկնում է $f(x)$-ի հետ:

Հաշվենք Ֆուրիեի գործակիցները.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)dx = \frac{1}{\pi}\pi x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} xd\sin nx + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots:$$

Հաշվենք b_n գործակիցները՝

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\pi + x)\sin nx\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} xd\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(x\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx =$$

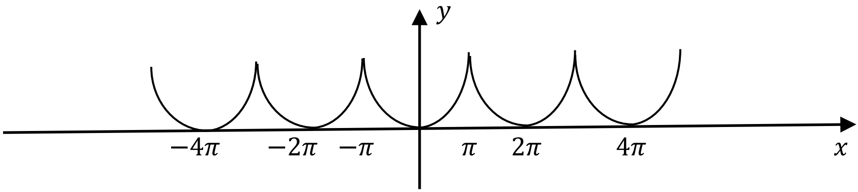
$$= -\frac{1}{\pi n}(\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos n(-\pi)) = -\frac{1}{n}\cdot(-1)^n - \frac{1}{n}\cdot(-1)^n$$

$$= \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1},\ \ n = 1, 2, \ldots:$$

Հետևաբար $f(x) = \pi + x$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը կլինի

$$f(x) = \pi + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ \ -\pi < x \le \pi:$$

2. $f(x) = x^2, -\pi \le x \le \pi$:



Գծ. 3

Ֆունկցիան զույգ է, նկարում գրաֆիկն է պարբերական շարունակության հետ մեկտեղ:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2 d\sin nx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(x^2\sin nx|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\sin nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} xd\cos nx = \frac{4}{\pi n}\cdot(x\cos nx)|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi n}\cdot(-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots:$$

Այսպիսով,

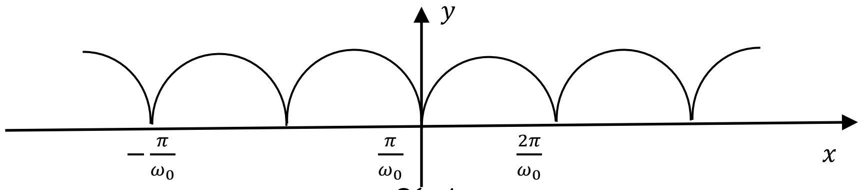
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}, -\pi \le x \le \pi, \tag{3.20}$$

(3.20) վերլուծությունում վերցնենք $x = 0$ և $x = \pi$: Համապատասխանաբար կունենանք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi}{12} \quad \text{և} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}:$$

3. $f(x) = |\sin\omega_0 x|, \omega_0 > 0$:

$f(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է $\frac{\pi}{\omega_0}$ պարբերությամբ:



Գծ. 4

$$2l = \frac{\pi}{\omega_0}, \quad l = \frac{\pi}{2\omega_0}, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx =$$

$$= \frac{4\omega_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\sin\omega_0 x\cos 2\omega_0 x\,dx,$$

որտեղից

$$a_0 = \frac{4\omega_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\sin\omega_0 x\,dx = \frac{-4}{\pi}\cos\omega_0 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}} = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2\omega_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}}(\sin(2n+1)\omega_0 x - \sin(2n-1)\omega_0 x)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\cos\frac{(2n+1)\omega_0 x}{2n+1} + \cos\frac{(2n-1)\omega_0 x}{2n-1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)},$$

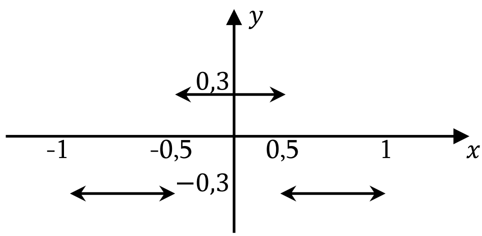
$$n = 1, 2, \ldots:$$

Այսպիսով,

$$|\sin\omega_0 x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\omega_0 n x}{4n^2-1}, -\infty < x < \infty:$$

4. Տրված ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի՝ միայն ըստ կոսինուսների կամ միայն ըստ սինուսների.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}3, & \text{երբ } 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ -0{,}3, & \text{երբ } \dfrac{1}{2} < x < 1: \end{cases}$$



Գծ. 5 ա)

Լուծում. ա) Որպեսզի ստանանք տրված ֆունկցիայի վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի ըստ միայն կոսինուսների, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ բազմության վրա, ֆունկցիան կշարունակենք զույգության օրենքով՝ (գծ. 5ա) $f(x) = f(-x)$:

Կստացվի $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ բազմության վրա որոշված զույգ ֆունկցիա: Այս դեպքում $l = 1$, $b_n = 0$, իսկ

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\, dx, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 0{,}3dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 0{,}3dx\right) = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 0{,}3\cos n\pi x\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0{,}3\cos n\pi x\,dx\right) =$$

$$= 0{,}6\left(\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right) = \frac{1{,}2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots:$$

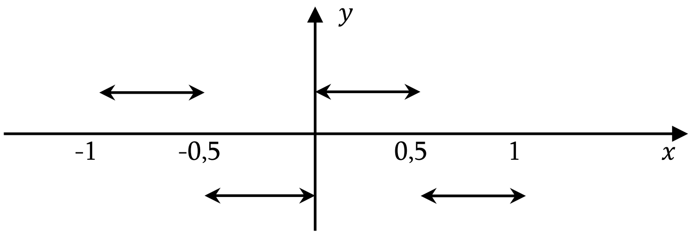
Եթե n-ը կենտ է՝ $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ապա

$$a_n = \frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}\cdot\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}:$$

Հետևաբար, որոնելի վերլուծությունը միայն ըստ կոսինուսների կլինի

$$f(x) = \frac{1{,}2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}\cos(2k-1)\pi x\,, \qquad x \in (0, 1):$$

բ) Որպեսզի ստանանք $f(x)$-ի վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի միայն ըստ սինուսների $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ բազմության վրա ֆունկցիան շարունակենք կենտության օրենքով՝ եթե $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, ապա $f(x) = -f(x)$ (գծ. 5 բ)):



Գծ. 5 բ)

Այդ դեպքում $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\sin\pi n x\,dx = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 0{,}3\sin n\pi x\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0{,}3\sin n\pi x\,dx\right) =$$

$$= 0{,}6\left(\frac{\cos\pi n x}{\pi n}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{\cos\pi n x}{\pi n}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{0{,}6}{\pi n}\left(\cos n\pi - 2\cos\frac{n\pi}{2} + 1\right):$$

Եթե $n = 2k - 1$, ապա $b_n = b_{2k-1} = 0$:

Եթե $n = 2k$, ապա $b_{2k} = \frac{0,6}{2k\pi}(\cos 2\pi k - 2\cos \pi k + 1) = \frac{0,6(1-\cos k\pi)}{k\pi}$:

Եթե k-ն զույգ է՝ $k = 2m$, ապա $b_n = b_{4m} = 0$, իսկ եթե $k = 2m - 1$, ապա $b_{2(2m-1)} = \frac{0,6(1-\cos(2m-1)\pi)}{(2m-1)\pi} = \frac{1,2}{(2m-1)\pi}$:

Այսպիսով, որոնելի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \frac{1,2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)}\sin 2(2m-1)\pi x:$$

3.8. Ֆուրիեի ինտեգրալ

Դիցուք $f(x)$-ը որոշված է $[-l, l]$-ում: Որոշակի պայմանների առկայության դեպքում այն կարելի է այդ միջակայքում ներկայացնել եռանկյունաչափական շարքով՝

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

որտեղ

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi n}{l}u\,du, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{\pi n}{l}u\,du, \qquad (n = 1, 2, \dots):$$

Տեղադրելով a_n, b_n գործակիցների արժեքները շարքի մեջ, կստանանք՝

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi n}{l}(u-x)\,du: \quad (3.21)$$

Դիցուք $f(x)$-ը $(-\infty, +\infty)$-ում որոշված է և բացարձակ ինտեգրելի է: Այդ դեպքում ցանկացած $|x| < l$-ի համար $f(x)$-ը կներկայացվի (3.21) տեսքով:

$[0, +\infty)$ միջակայքում ներմուծենք անընդհատ փոփոխվող z փոփոխական և նշանակենք $z_n = \frac{\pi n}{l}$, $\Delta z_n = z_{n+1} - z_n = \frac{\pi}{l}$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

Այդ դեպքում (3.21) հավասարությունը կընդունի

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(u)du + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta z_n \int_{-l}^{l} f(u) \cos z_n(u-x)\, du \quad (3.22)$$

տեսքը:

Նկատենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta z_n \int_{-l}^{l} f(u) \cos z_n(u-x)\, du$ արտահայտությունը հիշեցնում է $[0,+\infty)$ միջակայքում որոշված, z-ից կախված

$$\int_{-l}^{l} f(u) \cos z(u-x)\, du$$

ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարին:

Հետևաբար բնական է սպասել, որ $f(x)$-ի վրա դնելով որոշակի սահմանափակումներ, (3.22)-ում կարելի է սահմանային անցումներ կատարել, երբ $l \to +\infty$ և $f(x)$-ի համար ստանալ

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x)\, du\,, -\infty < x < +\infty \quad (3.23)$$

ներկայացում, որը հայտնի է որպես Ֆուրիեի ինտեգրալային բանաձև:

(3.23) բանաձևի աջ մասի արտահայտությունը կոչվում է ***Ֆուրիեի ինտեգրալ:***

Զբաղվենք (3.23) բանաձևի հիմնավորմամբ:

Դիտարկենք

$$\mathcal{T}(A) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{A} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x_0)\, du, \qquad (3.24)$$

ինտեգրալը, որտեղ A-ն կամայական դրական թիվ է, իսկ x_0-ն x-ի ֆիքսված արժեք է: Ֆուրիեի ինտեգրալը ստացվում է (3.24)-ից, երբ $A \to +\infty$: Քանի որ $[-B,B]$ $(B>0)$-ում $f(x)$-ը բացարձակ ինտեգրելի է, ապա կարող ենք գրել

$$\int_{0}^{A} dz \int_{-B}^{+B} f(u) \cos z(u-x_0)\, du = \int_{-B}^{B} du \int_{0}^{A} f(u) \cos z(u-x_0)\, dz =$$

$$= \int_{-B}^{B} f(u) \frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0} du \qquad (3.25)$$

հավասարությունը:

Նկատենք, որ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du \tag{3.26}$$

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է, ըստ z-ի, ցանկացած միջակայքում, քանի որ

$$|f(u)\cos z(u-x_0)| \le |f(u)|,$$

իսկ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|du$$

ինտեգրալը զուգամետ է:

Հետևաբար $\int_{-B}^{+B} f(u)\cos z(u-x_0)\,du$ ինտեգրալը իր (3.26) սահմանին ձգտում է հավասարաչափ, երբ $B \to +\infty$: Ուստի (3.25)-ում անցնելով սահմանի, երբ $B \to +\infty$, ձախ մասում կարելի է սահմանի անցնել ինտեգրալի նշանի տակ: $\mathcal{T}(A)$-ի համար կստանանք

$$\mathcal{T}(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du$$

արտահայտությունը, որը պարզ ձևափոխություններով բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$\mathcal{T}(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)\frac{\sin At}{t}dt: \tag{3.27}$$

3.9. Ֆունկցիայի ներկայացումը Ֆուրիեի ինտեգրալով

Ենթադրենք $f(x)$-ը բացարձակ ինտեգրելի է $(-\infty,+\infty)$-ում և դիտարկենք այն x_0 կետերը, որտեղ $f(x)$-ը անընդհատ է կամ ունի առաջին սեռի խզումներ, ընդ որում ընդունում ենք՝

$$s_0 = \begin{cases} f(x_0), & \text{եթե } x_0 - \text{ն անընդհատության կետ է,} \\ \dfrac{1}{2}\big(f(x_0+0)-f(x_0-0)\big), & \text{եթե } x_0 - \text{ն խզման կետ է:} \end{cases}$$

Հետևյալ հավասարության

$$1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt\,,\qquad (A>0)$$

երկու մասը բազմապատկելով S_0-ով և արդյունքը հանելով (3.27) հավասարությունից՝ կստանանք

$$\mathcal{T}(A)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\right)\frac{\sin At}{t}dt: \quad (3.28)$$

Թեորեմ (Դինիի հայտանիշը): Եթե

$$\int_{0}^{h}\frac{|f(x_0+t)-f(x_0-t)-2S_0|}{t}dt$$

ինտգերալը զուգամետ է որևէ $h>0$ թվի համար, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի ինտեգրալը x_0 կետում զուգամետ է և ունի S_0 արժեք:

Ապացույց: (3.28) ինտեգրալը ներկայացնենք

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\right)\frac{\sin At}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{h}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\right)\frac{\sin At}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{h}^{+\infty}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\right)\frac{\sin At}{t}dt$$

գումարի տեսքով: Աջ մասի առաջին գումարելին ձգտում է զրոյի, երբ $A\to+\infty$ (ըստ Ռիմանի լեմմայի)[10]: Աջ մասի երկրորդ ինտեգրալն իր հերթին ներկայացնենք երկու ինտեգրալների տարբերության տեսքով՝

$$\frac{1}{\pi}\int_{h}^{+\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin At\,dt-\frac{2S_0}{\pi}\int_{h}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt:$$

Քանի որ $f(x)$-ը բացարձակ ինտեգրելի է $[h,+\infty)$ միջակայքում, ապա վերջին տարբերության առաջին գումարելին ձգտում է 0-ի, երբ $A\to+\infty$:

Վերջապես,

---

[10] Տե՛ս Г. М. Фихтенгольц, “Основы математического анализа”, том II:

$$\int_{h}^{+\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \int_{Ah}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

ինտեգրալի զրոյի ձգտելը հետևում է $\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$ անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունից:

Թեորեմն ապացուցված է:

Այս թեորեմից ստացվում են ավելի պարզ հայտանիշներ.

Թեորեմ: Եթե $f(x)$-ը բացարձակ ինտեգրելի է $(-\infty, +\infty)$-ում և կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում, ապա ցանկացած $x = x_0$ կետում նրա Ֆուրիեի ինտեգրալը զուգամետ է և ունի $S_0 = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$ արժեքը:

Թեորեմ: Եթե $f(x)$-ը բացարձակ ինտեգրելի է $(-\infty, +\infty)$-ում և յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, ապա ցանկացած x_0 կետում տեղի ունի

$$\frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x_0) du$$

բանաձևը:

3.10. Ֆուրիեի ինտեգրալի տարբեր տեսքերը

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան ներկայացվում է իր Ֆուրիեի ինտեգրալով՝

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x) du: \qquad (3.29)$$

Օգտվելով $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ բանաձևից՝ (3.29)-ը կարելի է գրել

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos zx\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu du +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sin zx\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu du$$

տեսքով: Նշանակենք՝

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zudu \,, \qquad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zudu: \quad (3.30)$$

Կստանանք՝

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} (\mathrm{a(z)cos}\, zx + b(z) \sin zx) dz: \qquad (3.31)$$

(3.31) հավասարությունը նման է Ֆուրիեի շարքին, իսկ (3.30) ֆունկցիաները՝ Ֆուրիեի գործակիցներին:

Դիցուք $f(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է: (3.30)-ից կունենանք՝

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zudu = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(u) \cos zudu \,,$$

$$b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zudu = 0:$$

Հետևաբար, Ֆուրիեի ինտեգրալը կընդունի

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} a(z) \cos zx \, dz$$

տեսքը կամ՝

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \cos zx \, dz \int_{0}^{+\infty} f(u) \cos zu \, du: \qquad (3.32)$$

Եթե $f(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է, նման ձևով, կունենանք

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \sin zx \, dz \int_{0}^{+\infty} f(u) \sin zu \, du: \qquad (3.33)$$

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան տրված է միայն $[0, +\infty)$-ում, որտեղ բացարձակ ինտեգրելի է և կտոր առ կտոր դիֆերենցելի յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում կամ բացարձակ ինտեգրելի է և կտոր առ կտոր մոնոտոն՝ յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում, ապա $f(x)$-ը շարունակելով $(-\infty, 0]$-ի վրա $f(x) = f(-x)$ կամ $f(x) = -f(-x)$ $(x < 0)$ հավասարություններով՝ մենք ստանում ենք առաջին դեպքում զույգ ֆունկցիա, երկրորդ դեպքում՝ կենտ ֆունկցիա՝ $(-\infty, +\infty)$-ում: Այդպիսով, դրական x-երի համար կարող ենք օգտվել ինչպես (3.32), այնպես էլ (3.33) բանաձևերից:

Այժմ ստանանք Ֆուրիեի ինտգերալի կոմպլեքս տեսքը: Նկատենք, որ (3.29)-ում ներքին ինտեգրալը z-ի զույգ ֆունկցիա է, որը կարող ենք գրել նաև

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x)\, du \tag{3.34}$$

տեսքով:

Քանի որ $f(x)$-ը բացարձակ ինտեգրելի է $(-\infty, +\infty)$-ում, ապա գոյություն ունի նաև

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u - x)\, du$$

ինտգերալը, որը z-ի անընդհատ և կենտ ֆունկցիա է: Ընդհանրապես չի կարելի պնդել այդ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալի գոյությունը $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում, սակայն Կոշիի գլխավոր արժեքի իմաստով այն գոյություն ունի, ընդ որում՝

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u - x)\, du = 0: \tag{3.35}$$

Այս հավասարությունը բազմապատկելով $\frac{i}{2\pi}$-ով և գումարելով (3.34)-ին՝ կստանանք

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iz(u-x)} du \tag{3.36}$$

բանաձևը, որտեղ արտաքին ինտեգրալը հասկացվում է գլխավոր արժեքի իմաստով:

3.11. Ֆուրիեի ձևափոխությունը

Ենթադրենք (3.36) բանաձևը տեղի ունի միջակայքի բոլոր x-երի համար, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերից:

Եթե նշանակենք

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du, \tag{$*$}$$

ապա (3.36)-ը կընդունի

$$f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(z)e^{-izx}dz \qquad (3.37)$$

տեսքը:

Սահմանում: $\hat{f}(z)$-ը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ***Ֆուրիեի ձևափոխություն***: Իր հերթին, ըստ (3.37) բանաձևի $f(x)$-ը $\hat{f}(z)$-ի Ֆուրիեի ձևափոխությունն է (տարբերությունը i-ի նշանն է): (3.37)-ը թույլ է տալիս վերականգնել f ֆունկցիան, եթե հայտնի է նրա Ֆուրիեի ձևափոխությունը:

(3.37) բանաձևը կոչվում է ***շրջման բանաձև***:

Այժմ դիտարկենք (3.32) և (3.33) բանաձևերը: Եթե դրանք տեղի ունեն բոլոր դրական x-երի համար, ապա նշանակելով

$$\widehat{f_c}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(u)\cos zu\,du \qquad (3.38)$$

և

$$\widehat{f_s}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(u)\sin zu\,du: \qquad (3.39)$$

(3.32) և (3.33) բանաձևերը համապատասխանաբար կընդունեն

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \widehat{f_c}(z)\cos zx\,dz \qquad (3.38^*)$$

և

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \widehat{f_s}(z)\sin zx\,dz \qquad (3.39^*)$$

տեսքերը:

Սահմանում: $\widehat{f_c}$ և $\widehat{f_s}$ ֆունկցիաները կոչվում են, համապատասխանաբար, f ֆունկցիայի ***Ֆուրիեի կոսինուս և Ֆուրիեի սինուս ձևափոխություններ***:

(3.38*) և (3.39*) բանաձևերը ցույց են տալիս, որ f ֆունկցիան $\widehat{f_c}$-ից ($\widehat{f_s}$-ից) ստացվում է ճիշտ նույն կերպ ինչպես որ $\widehat{f_c}$-ն ($\widehat{f_s}$-ը) f-ից: Այլ խոսքերով f և $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) ֆունկցիաները փոխադարձորեն հանդիսանում են կոսինուս (սինուս) ձևափոխություններ:

Օրինակներ:

1. Գտնենք $f(x)=e^{-x}$ $(x \geq 0)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի կոսինուս և սինուս ձևափոխությունները:

Լուծում. Ըստ սահմանման՝

$$\widehat{f_c}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u}\cos zu\, du:$$

Ունենք[11]՝

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx=\frac{e^{ax}(b\sin bx-a\cos bx)}{a^2+b^2},$$

հետևաբար

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}\cos zu\, du=\frac{e^{-u}(z\sin zu-\cos zu)}{1+z^2}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{1+z^2},$$

որտեղից՝

$$\widehat{f_c}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+z^2}:$$

Նման ձևով կստանանք՝

$$\widehat{f_s}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{z}{1+z^2}:$$

$\widehat{f_c}(z)$ և $\widehat{f_s}(z)$ ֆունկցիաների վրա կիրառելով Ֆուրիեի կոսինուս և սինուս ձևափոխությունները՝ կստանանք $f(x)$ ֆունկցիան՝

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos zx}{z^2+1}dz=e^{-x},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{z\sin zx}{z^2+1}dz=e^{-x},$$

Որտեղից էլ կստանանք Լապլասի ինտեգրալները՝

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos zx}{z^2+1}dz=\frac{\pi}{2}e^{-x},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{z\sin zx}{z^2+1}dz=\frac{\pi}{2}e^{-x}:$$

[11] Տե՛ս, Վ. Հ. Օհանյան, «Մաթեմատիկական անալիզ», մաս II, էջ 11:

2. Գտնենք հետևյալ ֆունկցիայի Ֆուրիեի ձևափոխությունը.

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{x}{2}, & \text{եթե } |x|\le\pi;\\ 0, & \text{եթե } |x|>\pi:\end{cases}$$

Ըստ (*) բանաձևի՝

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{izu}du:$$

Ունենք՝

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{u}{2}e^{izu}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{u}{2}\cos zu\,du+$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{u}{2}\sin zu\,du: \tag{3.40}$$

(3.40) հավասարության աջ մասի երկրորդ ինտեգրալը հավասար է զրոյի (ընդինտեգրալ ֆունկցիան կենտ է), հետևաբար

$$\hat{f}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos\left(z+\frac{1}{2}\right)u+\cos\left(z-\frac{1}{2}\right)u\right)du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{2}{2z+1}\cdot\sin\left(z+\frac{1}{2}\right)u+\frac{2}{2z-1}\cdot\sin\left(z-\frac{1}{2}\right)u\right)\Bigg|_{u=0}^{u=\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{2}{2z+1}\cdot\cos z\pi-\frac{2}{2z-1}\cdot\cos z\pi\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4z-2-4z-2}{4z^2-1}\cdot\cos z\pi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-4}{4z^2-1}\cdot\cos z\pi:$$

Պատասխան՝ $\hat{f}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-4}{4z^2-1}\cdot\cos z\pi$:

3. Գտնենք հետևյալ ֆունկցիայի Ֆուրիեի ձևափոխությունը.

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & \text{եթե } -1\le x<0;\\ e^{-x}, & \text{եթե } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{եթե } |x|>1:\end{cases}$$

Ըստ (*) բանաձևի՝

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{izu}du,$$

որտեղից կունենանք՝

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0}(-e^{u})e^{izu}du+\int_{0}^{1}e^{-u}e^{izu}du\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-1}{1+iz}e^{(iz+1)u}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{iz-1}e^{(iz-1)u}\Big|_{0}^{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-1}{1+iz}+\frac{1}{1+iz}e^{-iz-1}+\frac{1}{iz-1}e^{iz-1}-\frac{1}{iz-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-1}{1+iz}+\frac{1}{1-iz}+\frac{1}{e(iz-1)}e^{-iz}+\frac{e^{iz}}{e(iz-1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2iz}{1+z^2}+\frac{iz(e^{iz}+e^{-iz})+e^{iz}-e^{-iz}}{-e(1+z^2)}\right)=$$

$$=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e\cdot z-z\cos z-\sin z}{e(1+z^2)}:$$

Պատասխան՝ $\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e\cdot z-z\cos z-\sin z}{e(1+z^2)}$:

Վարժություններ

$f(x)$ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի.

1. $f(x)=\begin{cases}-x, \text{եթե} -\pi\le x\le 0,\\ 0, \text{ եթե } 0<x\le\pi:\end{cases}$

Պատասխան՝ $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$:

2. $f(x)=e^x$, $(-\pi\le x\le\pi)$:

Պատասխան՝ $f(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\sin nx)\right)$:

3. $f(x)=\pi-2x \quad (0\le x\le\pi)$ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի՝ ա) $[-\pi,0]$-ում այն շարունակելով զույգության օրենքով; բ) $[-\pi,0]$-ում՝ կենտության օրենքով:

Պատասխան՝ ա) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, բ) $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$:

4. Հետևյալ ֆունկցիան ներկայացնել Ֆուրիեի ինտեգրալով՝

ա) $f(x)=\begin{cases}1, \text{եթե } |x|<1,\\ 0, \text{եթե } |x|>1:\end{cases}$

Պատասխան՝ $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\cos ux\,du$:

բ) $f(x)=\begin{cases}A\sin\omega x, \text{եթե } |x|\le\frac{2\pi n}{\omega},\\ 0, \text{ եթե } |x|>\frac{2\pi n}{\omega},\end{cases}$ (n-ը բնական թիվ է):

Պատասխան՝ $f(x) = \frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{2\pi n u}{\omega}}{u^2-\omega^2} \sin ux\, du$:

գ) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0, -\infty < x < +\infty$:

Պատասխան՝ $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{\alpha^2+u^2} du$:

5. Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի ձևափոխությունը.

ա) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ եթե } |x| \le \pi, \\ 0, \quad \text{եթե } |x| > \pi: \end{cases}$

Պատասխան՝ $\hat{f}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z \sin \pi z}{1-z^2}$:

բ) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ եթե } |x| \le 1, \\ 0, \quad \text{եթե } |x| > 1: \end{cases}$

Պատասխան՝ $\hat{f}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2z \cos z + (z^2-2)\sin z}{z^3}$:

գ) $f(x) = \begin{cases} x \sin x, \text{ եթե } |x| \le \pi, \\ 0, \quad \text{եթե } |x| > 0: \end{cases}$

Պատասխան՝ $\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi(1-z^2)\cos \pi z + 2z \sin \pi z}{(1-z^2)^2}$:

ԳԼՈՒԽ IV
ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

4.1. Պարամետրից կախված ինտգրալներ

Սահմանում: Դիցուք իրական արժեքներ ընդունող $f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $D = \{(x,y): a \leq x \leq b, y \in Y\}$ բազմության վրա, որտեղ $Y = \{y\}$ որևէ թվային բազմություն է: Եթե y փոփոխականի (պարամետրի) յուրաքանչյուր արժեքի համար $f(x,y)$-ը ինտգերելի է $[a,b]$ միջակայքում, ապա

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b f(x,y)dx \qquad (4.1)$$

ֆունկցիան կոչվում է պարամետրից կախված ինտեգրալ:

Հարցեր են ծագում $\mathcal{I}(y)$-ի ֆունկցիոնալ հատկությունների՝ սահման ունենալու, դիֆերենցելիության և ինտեգրելիության վերաբերյալ:

1. Հավասարաչափ ձգտում սահմանային ֆունկցիային:

Դիցուք y_0-ն Y բազմության կուտակման կետ է և $y_0 \neq \infty$:

Սահմանում: Եթե 1) y-ը y_0-ին ձգտելիս $f(x,y)$-ը ունի սահմանային ֆունկցիա, ապա

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x), \quad x \in [a,b], \qquad (4.2)$$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որը կախված չէ x-ից և $|y - y_0| < \delta$ անհավասարությունից հետևում է

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad (4.3)$$

անհավասարությունը, միաժամանակ $\forall x \in [a,b]$-ի համար, ապա ասում են, որ $f(x,y)$-ը y-ը y_0-ին ձգտելիս, ըստ x-ի հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային:

Այս դեպքում գրում են՝ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, $y \to y_0$, $x \in [a,b]$:

Եթե y_0-ն վերջավոր թիվ չէ, օրինակ՝ $y_0 = +\infty$, ապա նախորդ սահմանման մեջ բավական է $|y - y_0| < \delta$ անհավասարությունը փոխարինել $y_0 > \Delta$ անհավասարությունով:

Ձևակերպենք սահմանային ֆունկցիային հավասարաչափ ձգտելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Թեորեմ: Դիցուք y_0-ն վերջավոր թիվ է: Որպեսզի y-ը y_0-ին ձգտելիս $f(x,y)$-ը ունենա սահմանային ֆունկցիա և նրան ձգտի հա-

վասարաչափ, ըստ x-ի $[a,b]$ միջակայքում, անհրաժեշտ և բավարար, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $\delta > 0$ թիվ, որը կախված չէ x-ից, այնպիսին, որ
$$|y - y_0| < \delta \text{ և } |y' - y_0| < \delta, \qquad (y, y' \in Y) \tag{4.4}$$
անհավասարություններից կհետևի՝
$$|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon, \ \ \forall x \in [a,b] \tag{4.5}$$
անհավասարությունը:

Անհրաժեշտությունը: Ըստ պայմանի՝ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, $y \to y_0$, $x \in [a,b]$: Դիցուք ε-ը կամայական դրական թիվ է: $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ թվի համար $\exists \delta > 0$, այնպիսին, որ $|y - y_0| < \delta$ և $|y' - y_0| < \delta$ անհավասարություններից հետևում են
$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ և } \ |f(x,y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
անհավասարությունները, որոնցից հետևում է (4.5)-ը: Անհրաժեշտությունը ապացուցված է:

Բավարարությունը: Եթե թեորեմի պայմանները տեղի ունեն, ապա $f(x,y)$-ը y-ը y_0-ին ձգտելիս ունի սահմանային ֆունկցիա, որը կնշանակենք $\varphi(x)$-ով: (4.5)-ում անցնելով սահմանի, երբ y'-ը ձգտում է y_0-ին (y-ը հաստատագրում ենք այնպես, որ բավարարվի $|y - y_0| < \delta$ պայմանը), կստանանք
$$|\varphi(x) - f(x,y)| \le \varepsilon,$$
Այսինքն՝ y-ը y_0-ին ձգտելիս $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$-ի՝ ըստ x-ի:

Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ կարևոր փաստը:

Թեորեմ 1: Եթե $f(x,y)$-ը $\forall y \in Y$-ի դեպքում անընդհատ է ըստ x-ի $[a,b]$ միջակայքում և y-ը y_0-ին ձգտելիս հավասարաչափ ըստ x-ի ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային, ապա $\varphi(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$-ում:

Ապացուցում: Դիցուք $x, x_0 \in [a,b]$, $y \in Y$ և ε-ը կամայական դրական թիվ է: Ունենք
$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \big|&\big(\varphi(x) - f(x,y)\big) + \big(f(x_0,y) - \varphi(x_0)\big) \\ &+ \big(f(x,y) - f(x_0,y)\big)\big|:\end{aligned} \tag{4.6}$$

Թեորեմի պայմանների համաձայն՝ $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ թվի համար $\exists \delta > 0$ այնպիսին, որ $|x - x_0| < \delta$ և $|y - y_0| < \delta$ պայմաններից հետևում են.
$$|\varphi(x) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(x_0,y) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.7}$$

անհավասարությունները:

(4.6) և (4.7) առնչություններից հետևում է, որ

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{եթե } |x - x_0| < \delta,$$

այսինքն՝ $\varphi(x)$-ը անընդհատ է x_0 կետում:

Թեորեմն ապացուցված է:

2. Սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ:

Դիցուք $f(x,y)$-ը որոշված է $D = \{(x,y): x \in [a,b], y \in Y\}$ բազմության վրա: Ենթադրենք y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է:

Թեորեմ 1: Եթե $f(x,y)$-ը հաստատագրված $y \in Y$-ի դեպքում ըստ x-ի անընդհատ է $[a,b]$-ում և y-ը y_0-ին ձգտելիս հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային, ապա տեղի ունի հավասարություն՝

$$\lim_{y \to y_0} \mathcal{I}(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \ : \qquad (4.8)$$

Ապացուցում: Համաձայն նախորդ թեորեմի՝ $\varphi(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$-ում: Դիցուք $\varepsilon > 0$ կամայական թիվ է: Համաձայն թեորեմ 1-ի պայմանի՝ $\exists \delta > 0$ այնպիսին, որ $|y - y_0| < \delta \Rightarrow \ |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$:

Հետևաբար y-ի նշված արժեքների համար կունենանք՝

$$\left| \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right| = \left| \int_a^b \big(f(x,y) - \varphi(x)\big)dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x,y) - \varphi(x)|dx < \varepsilon(b-a):$$

Թեորեմ 1-ը ապացուցված է:

Նկատենք, որ (4.8) հավասարությունը կարելի է գրել նաև

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\, dx$$

տեսքով:

Թեորեմ 2: Եթե $f(x,y)$-ը, որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա, անընդհատ է $\Pi = [a,b;c,d]$ ուղղանկյունում, ապա (4.1) ինտեգրալը անընդհատ է $[c,d]$ միջակայքում:

Ապացուցում: Π ուղղանկյունում $f(x,y)$-ի ըստ երկու փոփոխականների անընդհատ է, հետևաբար $\forall\varepsilon > 0$-ի համար $\exists\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|x'' - x'| < \delta, \quad |y'' - y'| < \delta \tag{4.9}$$

անհավասարություններից հետևում է

$$|f(x'',y'') - f(x',y')| < \varepsilon$$

անհավասարությունը, որտեղ (x',y')-ը և (x'',y'')-ը Π-ի կամայական կետեր են, որոնք բավարարում են (4.9) պայմաններին:

Մասնավորապես վերցնենք $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y$: Այդ դեպքում $|y - y_0| < \delta$ պայմանից (ինչպիսին էլ լինի x-ը) կհետևի, որ

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon:$$

Այսպիսով, y-ը y_0-ին ձգտելիս $f(x,y)$-ը հավասարաչափ, ըստ x-ի, ձգտում է $f(x,y_0)$ ֆունկցիային:

Ըստ թեորեմ 1-ի՝

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx$$

կամ

$$\lim_{y\to y_0}\mathcal{I}(y) = \mathcal{I}(y_0):$$

Թեորեմ 2-ը ապացուցված է:

3. Անցում ինտեգրալի նշանի տակ:

Թեորեմ 3: Դիցուք $f(x,y)$-ը որոշված է $\Pi = [a,b;c,d]$ ուղղանկյունում և $[c,d]$-ի ցանկացած հաստատագրված y-ի համար անընդհատ է ըստ $x \in [a,b]$-ի: Ենթադրենք $\exists f'(x,y)$-ը և որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա անընդհատ է Π-ում: Այդ դեպքում $\forall y \in [c,d]$ համար տեղի ունի

$$\mathcal{I}'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx \tag{4.10}$$

հավասարությունը:

Ապացուցում: Դիցուք y_0-ն $[c,d]$ միջակայքի հաստատագրված կետ է, $\Delta y \neq 0$ և $y_0 + \Delta y \in [c,d]$: Նշանակենք $\Delta y = h$:

Ունենք՝

$$\frac{\mathcal{I}(y_0+h) - \mathcal{I}(y_0)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h}dx: \tag{4.11}$$

Ցույց տանք, որ (4.11)-ում ինտեգրալի նշանի տակ թույլատրելի է սահմանի անցում, երբ h-ը ձգտում է 0-ի: Ըստ վերջավոր աճերի բանաձևի՝

$$\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}=f'_y(x,y_0+\theta h),\quad (0<\theta<1): \quad (4.12)$$

Օգտվելով Π-ում $f'_y(x,y)$-ի հավասարաչափ անընդհատությունից՝ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնենք այնպիսի $\delta>0$, որ

$$|x''-x'|<\delta \quad \text{և} \quad |y''-y'|<\delta$$

անհավասարություններից կհետևի

$$\left|f'_y(x'',y'')-f'_y(x',y')\right|<\varepsilon$$

անհավասարությունը:

Վերջին անհավասարությունում ընդունելով $x''=x'=x$, $y'=y_0$, $y''=y_0+\theta h$, հաշվի առնելով (4.12)-ը և պահանջելով, որ $|h|<\delta$-ից՝ կստանանք

$$\left|\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}-f'_y(x,y_0)\right|<\varepsilon:$$

Այստեղից պարզ է, որ h-ը զրոյի ձգտելիս (4.12) ընդինտեգրալային ֆունկցիան հավասարաչափ, ըստ x-ի, ձգտում է $f'_y(x,y_0)$-ին: Համաձայն թեորեմ 1-ի՝ (4.11)-ում ինտեգրալի նշանի տակ կարելի է անցնել սահմանի, երբ $h\to 0$-ի՝

$$\mathcal{J}'(y_0)=\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}dx=$$

$$=\int_a^b\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}dx=\int_a^b f'_y(x,y_0)dx:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

4. Ինտեգրում ինտեգրալի նշանի տակ:

Թեորեմ 4: Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան, որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա, անընդհատ է $\Pi=[a,b;c,d]$ ուղղանկյունում, ապա տեղի ունի հավասարություն՝

$$\int_c^d \mathcal{J}(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx: \quad (4.13)$$

Ապացուցում: Ապացուցենք ավելի ընդհանուր հավասարությունը՝

$$\int_c^\eta \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^\eta f(x,y)dy \right) dx, \qquad (4.14)$$

որտեղ $\eta \in [c,d]$:

Գտնենք (4.14) հավասարության աջ և ձախ մասերի ածանցյալներն ըստ η -ի:

Ձախ մասի ընդինտեգրալային ֆունկցիան $\mathcal{I}(y)$-ն է, որը, ըստ թեորեմ 2-ի, անընդհատ է $[c,d]$-ում: Հետևաբար

$$\left(\int_c^\eta \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \right)'_\eta = \int_a^b f(x,\eta)dx = \mathcal{I}(\eta): \qquad (4.15)$$

Նշանակենք $\int_c^\eta f(x,y)dy = \varphi(x,\eta)$, որի շնորհիվ (4.14)-ի աջ մասը կընդունի

$$\int_a^b \varphi(x,\eta)dx$$

տեսքը:

$\varphi(x,\eta)$-ն բավարարում է թեորեմ 3-ի պայմաններին, հետևաբար

$$\left(\int_a^b \varphi(x,\eta)dx \right)'_\eta = \int_a^b \varphi'_\eta(x,\eta)dx = \int_a^b f(x,\eta)dx = \mathcal{I}(\eta), \qquad (4.16)$$

(4.15)-ից և (4.16)-ից հետևում է, որ (4.14)-ի աջ և ձախ մասերը կարող են տարբերվել միայն հաստատունով: Բայց $\eta = c$ դեպքում այդ արտահայտությունները հավասար են: Հետևաբար հավասար են նաև η -ի բոլոր արժեքների դեպքում, և (4.14)-ը ապացուցված է: Վերցնելով $\eta = d$՝ կստանանք (4.13)-ը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտարկենք ավելի ընդհանուր տեսքի ինտեգրալ, երբ ինտեգրման սահմանները նույնպես կախված են պարամետրից՝

$$\mathcal{I}(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx: \qquad (4.17)$$

Առանց ապացուցման (4.17) ինտեգրալի վերաբերյալ ձևակերպենք երկու թեորեմներ:

Թեորեմ 5: Դիցուք $f(x,y)$-ը որոշված է և անընդհատ $\Pi = [a,b;c,d]$ ուղղանկյունում, իսկ

$$x=\alpha(y), \qquad x=\beta(y), \qquad (c\le y\le d)$$

կորերը անընդհատ են և նրանց գրաֆիկները ընկած են Π-ում: Այդ դեպքում (4.17) ինտեգրալը անընդհատ է $[c,d]$ միջակայքում:

Թեորեմ 6: Եթե բացի թեորեմ 5-ի պայմաններից $f(x,y)$-ը Π-ում ունի նաև անընդհատ $f'_y(x,y)$ մասնակի ածանցյալ և գոյություն ունեն $\alpha'(y)$ և $\beta'(y)$ ածանցյալները, ապա (4.17) ինտեգրալը ունի ածանցյալ՝

$$\mathcal{I}'(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+\beta'(y)f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y):$$

Ապացույց: Թեորեմ 5-ի և թեորեմ 6-ի[12]:

Օրինակներ

Օրինակ 1. Ստուգել, որ սահմանային անցումն ինտեգրալի նշանի տակ թույլատրելի է և հաշվել սահմանը.

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}:$$

Այս օրինակում $f(x,n)=\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$, $D=\{(x,n): 0\le x\le 1, n\in\mathbb{N}\}$

$$\lim_{n\to\infty}f(x,n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\frac{1}{1+e^x}=\varphi(x):$$

Ցույց տանք, որ n-ը ∞-ի ձգտելիս $f(x,n)\rightrightarrows\varphi(x)$:

Ունենք՝ $|f(x,n)-\varphi(x)|=\left|\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}-\frac{1}{1+e^x}\right|=\frac{\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|}{\left(1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)(1+e^x)}\le$ $\max_{[0,1]}\left(e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$: Քանի որ $e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$-ը $[0,1]$-ում ունի ոչ բացասական ածանցյալ, ապա $\max_{[0,1]}\left(e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)\le e-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$:

Բայց $0<e-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{e}{n}$:[13]

Այսպիսով, $f(x,n)\rightrightarrows\frac{1}{1+e^x}$:

Կիրառելով թեորեմ 1-ը՝ կունենանք

[12] Ապացույցները տե՛ս Г. М. Фихтенгольц, "Основы математического анализа", том II:

[13] Տե՛ս, Գ. Գ. Գևորգյան և ուրիշներ, «Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք», մաս I, խնդիր N 278:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x-\ln(1+e^x)|_0^1 = 1-\ln(1+e)+\ln 2 =$$

$$= \ln\frac{2e}{1+e}:$$

Օրինակ 2. Համոզվել, որ ինտեգրալը, ըստ պարամետրի, անընդհատ է և հաշվել սահմանը՝

$$\lim_{\alpha\to 1}\int_0^\pi x\cos\alpha x\,dx:$$

Նշանակենք՝ $\mathcal{I}(\alpha) = \int_0^\pi x\cos\alpha x\,dx$:

Քանի որ $\alpha\to 1$, ապա կարող ենք ենթադրել, որ $\alpha\in[0,2]$ միջակայքին: Դիտարկենք $\Pi = [0,\pi; 0,2]$ փակ ուղղանկյունը: Ակնհայտ է, որ $f(x,\alpha) = x\cos\alpha x$ ֆունկցիան անընդհատ է Π-ում, հետևաբար $\mathcal{I}(\alpha)$ ինտեգրալը $[0,2]$ միջակայքում անընդհատ է ըստ α-ի: Համաձայն թեորեմ 2-ի՝

$$\lim_{\alpha\to 1}\int_0^\pi x\cos\alpha x\,dx = \int_0^\pi \left(\lim_{\alpha\to 1} x\cos\alpha x\right)dx = \int_0^\pi x\cos\alpha x\,dx = \int_0^\pi xd\sin x =$$

$$= x\cdot\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx =$$

$$= \cos x|_0^\pi = \cos\pi - \cos 0 = -1-1 = -2:$$

Օրինակ 3. Գտնենք պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցյալը.

$$\mathcal{I}(y) = \int_1^2 \frac{e^{yx^2}}{x}dx:$$

Այս խնդրում $f(x,y) = \frac{e^{yx^2}}{x}$, $Y = (-\infty,+\infty)$, $x\in[1,2]$:

$\forall y\in Y$-ի համար $f'_y(x,y) = \frac{1}{x}\cdot\left(e^{yx^2}\right)'_y = \frac{1}{x}\cdot e^{yx^2}\cdot x^2 = x\cdot e^{yx^2}$, $x\in[1,2]$:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\Pi = [1, 2; c, d]$ ուղղանկյունում տեղի ունեն թեորեմ 3-ի պայմանները, հետևաբար ըստ (4.10)-ի՝

$$\mathcal{I}'(y) = \int_1^2 \left(\frac{e^{yx^2}}{x}\right)'_y dx = \int_1^2 \left(x \cdot e^{yx^2}\right) dx: \tag{4.18}$$

Ենթադրենք $y \neq 0$, այդ դեպքում $\mathcal{I}'(y) = \frac{1}{2y} \cdot \int_1^2 \left(e^{yx^2}\right) d(yx^2) = \frac{1}{2y} \cdot \left(e^{yx^2}\Big|_{x=1}^{x=2}\right) = \frac{1}{2y} \cdot (e^{4y} - e^y)$:

$y = 0$ դեպքում (4.18)-ից կստանանք $\mathcal{I}'(0) = \int_1^2 x dx = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$:

Այսպիսով,

$$\mathcal{I}'(y) = \begin{cases} \dfrac{(e^{4y} - e^y)}{2y}, \text{երբ } y \neq 0, \\ \dfrac{3}{2}, \quad\quad \text{երբ } \ y = 0: \end{cases}$$

Օրինակ 4. Գտնենք պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցյալը.

$$\mathcal{I}(y) = \int_{e^{-y}}^{e^y} \ln(1 + y^2x^2)\frac{dx}{x}, \ \ y \neq 0:$$

Այս խնդրում $f(x, y) = \frac{\ln(1+y^2x^2)}{x}$, $f'_y(x, y) = \frac{2xy}{1+y^2x^2}$:

Ակնհայտ է, որ և՛ $f(x, y)$-ը, և՛ $f'_y(x, y)$-ը անընդհատ են ցանկացած $[e^{-y}, e^y; c, d]$ ուղղանկյունում, հետևաբար համաձայն թեորեմ 6-ի՝

$$\mathcal{I}'(y) = \int_{e^{-y}}^{e^y} \frac{2xy}{1 + y^2x^2} dx + e^y \frac{\ln(1 + y^2e^{2y})}{e^y} + e^{-y} \frac{\ln(1 + y^2e^{-2y})}{e^{-y}} =$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \int_{e^{-y}}^{e^y} \frac{d(1 + x^2y^2)}{1 + x^2y^2} + \ln(1 + y^2e^{2y}) + \ln(1 + y^2e^{-2y}) =$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \ln(1 + x^2y^2)\Big|_{x=e^{-y}}^{x=e^y} + \ln(1 + y^2e^{2y}) + \ln(1 + y^2e^{-2y}) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{y}\right)\ln(1 + y^2e^{2y}) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)\ln(1 + y^2e^{-2y}):$$

Օրինակ 5. Կիրառելով ինտեգրալի նշանի տակ ինտեգրումը՝ հաշվենք ինտեգրալը.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad (a > 0, b > 0)։$$

Քանի որ

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_0^1 x^y dy, \tag{4.19}$$

ապա

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^y dy \right) dx։$$

$f(x,y) = x^y$ ֆունկցիան անընդհատ է $\Pi = [0 \le x \le 1; a \le y \le b]$ ուղղանկյունում, հետևաբար համաձայն թեորեմ 4-ի՝

$$\mathcal{I} = \int_a^b dy \int_a^b x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}։$$

4.2. Պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալ

Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $D = \{(x,y): a \le x < +\infty; y \in Y\}$ բազմության վրա, որտեղ Y-ը որևէ թվային բազմություն է։ Ենթադրենք $\forall y \in Y$-ի համար

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx \tag{4.20}$$

ինտեգրալը զուգամետ է։

Ըստ անիսկական ինտեգրալի սահմանման՝

$$\int_a^{+\infty} f(x,y) dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x,y) dx։$$

(4.20)-ը նշանակում է

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y) dx \tag{4.21}$$

ֆունկցիան, որը կախված է A-ից և y-ից, A-ն $+\infty$-ի ձգտելիս ունի $\mathcal{I}(y)$ սահման։

Սահմանում: Եթե A-ն $+\infty$-ի ձգտելիս $F(A,y)$-ը հավասարաչափ, ըստ y-ի, ձգտում է $\mathcal{I}(y)$-ի, ապա ասում են (4.20) ինտեգրալը ***հավասարաչափ զուգամետ է***:

Դա նշանակում է, որ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists A_0 \geq a$ թիվ, որը կախված չէ y-ից այնպիսին, որ $\forall A > A_0$-ի համար տեղի ունի

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon:$$

Ձևակերպենք (4.20) անիսկական ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը (Կոշիի սկզբունքը).

Որպեսզի (4.20) ինտեգրալը լինի հավասարաչափ զուգամետ y պարամետրի նկատմամբ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա A_0 թիվ, որը կախված չէ y-ից, այնպիսին, որ $A' > A > A_0$ պայմաններից հետևում է՝

$$\left|\int_a^{A'} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

անհավասարությունը բոլոր $y \in Y$-ների համար:

4.3. Պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշները

1. Վայերշտրասի հայտանիշը: Դիցուք $f(x,y)$-ը, ըստ x-ի, անընդհատ է $[a,+\infty)$ միջակայքում: Եթե գոյություն ունի միայն x-ից կախված $\varphi(x)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$-ը զուգամետ է և $\forall(x,y) \in D$-ի համար տեղի ունի անհավասարություն՝

$$|f(x,y)| \leq \varphi(x),$$

ապա (4.20) ինտեգրալը Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է: Այս դեպքում $\varphi(x)$-ին անվանում են $f(x,y)$-ի ինտեգրելի մաժորանտ:

Այս հայտանիշի ապացույցը հետևում է

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| \leq \int_A^{A'} |f(x,y)|dx \leq \int_A^{A'} \varphi(x)dx$$

անհավասարությունից:

Օրինակ 1

$$\mathcal{J}(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{k^2+x^2}dx,\quad (k=const\ \neq 0) \tag{ա}$$

(ա) y պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալը, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի, հավասարաչափ զուգամետ է:

Իրոք, ակնհայտ է, որ $\forall y$-ի համար, ունենք

$$|f(x,y)|=\left|\frac{\cos xy}{k^2+x^2}\right|\leq\frac{1}{k^2+x^2}\equiv\varphi(x),$$

իսկ

$$\int\limits_0^{+\infty}f(x,y)dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{k^2+x^2}$$

անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է:

2. Աբելի հայտանիշը: Դիցուք $f(x,y)$ և $g(x,y)$ ֆունկցիաները $\forall y\in Y$ արժեքի դեպքում ըստ x-ի ինտեգրելի են ցանկացած $[a,A]$, $(A>a)$ միջակայքում : Եթե

ա) $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$-ը Y-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է,

բ) պարամետրի ցանկացած $y\in Y$ արժեքի դեպքում $g(x,y)$-ը $[a,+\infty)$-ի վրա մոնոտոն է և $\exists M$ թիվ, այնպիսին, որ D-ում $|g(x,y)|\leq M$, ապա $\int_a^{+\infty}\big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx$-ը Y-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Օրինակ 2

Դիտարկենք

$$\mathcal{J}(y)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx,\quad (y\geq 0) \tag{բ}$$

ինտեգրալը: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$-ը զուգամետ է (հավասարաչափ), իսկ $g(x,y)=e^{-yx}$ ֆունկցիան մոնոտոն նվազում է և սահմանափակ է 1-ով: Համաձայն Աբելի հայտանիշի՝ (բ) անիսկական ինտեգրալը $y\in[0,+\infty)$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է:

3. Դիրիխլեի հայտանիշը: Դիցուք $f(x,y)$ և $g(x,y)$ ֆունկցիաները $\forall y\in Y$ արժեքի դեպքում ցանկացած $[a,A]$, $(A>a)$ միջակայքում, ըստ x-ի, ինտեգրելի են: Եթե

ա) $\exists L=const$ այնպիսին, որ $\forall b\in[a,+\infty)$ թվի և y-ի ցանկացած արժեքների համար տեղի ունի $\left|\int_a^b f(x,y)dx\right|<L$,

բ) պարամետրի ցանկացած $y \in Y$ արժեքի դեպքում $g(x,y)$-ը $[a,+\infty)$-ի վրա մոնոտոն է և $g(x,y) \rightrightarrows 0$, երբ $x \to +\infty$, $y \in Y$, ապա $\int_a^{+\infty}\big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx$-ը Y-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Դիտարկենք

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin xy}{k^2+x^2}dx, \quad (k \neq 0) \tag{գ}$$

անիսկական ինտեգրալը: Այս օրինակում $f(x,y) = \frac{x\sin xy}{k^2+x^2}$, $D = \{(x,y) : 0 \le x < +\infty; y \ge a_0 > 0\}$:

Հետազոտենք (բ) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը: Օգտվենք Դիրիխլեի հայտանիշից: Ընդունենք՝ $f(x,y) = \sin xy$, $g(x,y) = \frac{x}{k^2+x^2}$:

Ունենք $\left|\int_0^A f(x,y)dx\right| = \left|\int_0^A \sin xy\, dx\right| = \left|-\frac{\cos xy}{y}\Big|_0^A\right| = \frac{1-\cos Ay}{y} \le \frac{2}{a_0} = L$, իսկ $g(x,y)$-ը, x-ը $+\infty$-ի ձգտելիս, մոնոտոն նվազելով ձգտում է 0-ի:

Այսպիսով, (բ) անիսկական ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է:

4.4. Պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալի ֆունկցիոնալ հատկությունները

Սահմանային անցում:

Թեորեմ 1: Դիցուք $f(x,y)$ որոշված է $D = \{(x,y) : 0 \le x < +\infty; y \in Y\}$ բազմության վրա, y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է: Եթե 1) $f(x,y)$-ը անընդհատ է ըստ x-ի, 2) y-ը y_0-ին ձգտելիս, $f(x,y)$-ը ցանկացած $[a,A]$, $(A > a)$ միջակայքում, ***հավասարաչափ,*** ըստ y-ի, ձգտում է $\varphi(x)$-ի, 3) $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է Y-ի վրա, ապա

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty}\Big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big)dx = \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx: \tag{4.22}$$

Ապացույց: Նշենք, որ համաձայն թեորեմ 1-ի պայմանների $\varphi(x)$-ը անընդհատ է[14]:

[14] Տե՛ս, թեորեմ 1*:

Քանի որ $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$-ը հավասարաչափ զուգամետ է, ապա $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_0 > a$, այնպիսին, որ $A_0 < A < A'$ պայմաններից հետևում է

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

անհավասարությունը բոլոր $y \in Y$-ների համար:

Այս անհավասարությունում անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$\left|\int_A^{A'} \varphi(x)dx\right| \le \varepsilon,$$

որտեղից հետևում է $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$-ի զուգամիտությունը:

Ցանկացած $A > a$ թվի համար ունենք՝

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx\right| \le$$
$$\le \left|\int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|$$
$$+ \left|\int_A^{+\infty} \varphi(x)dx\right|:$$

Դիցուք ε-ը կամայական դրական թիվ է: Համաձայն թեորեմի պայմանների՝ A-ն կարելի է վերցնել այնպես, որ $y \in Y$-ի համար աջ մասի վերջին երկու գումարելիներից յուրաքանչյուրը փոքր լինեն $\frac{\varepsilon}{3}$-ից: Այնուհետև, y-ը այնքան մոտեցնենք y_0-ին, որ աջ մասի առաջին գումարելին նույնպես դառնա փոքր $\frac{\varepsilon}{3}$-ից: Այդ դեպքում նշված y-ների համար կունենանք

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon,$$

որից հետևում է (4.22)-ը:

Թեորեմ 1-ը ապացուցված է:

Առանց ապացույցի ձևակերպենք հետևյալ թեորեմները:

Անընդհատություն: Թեորեմ 2: Եթե $f(x,y)$-ը որոշված է և որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա անընդհատ է $D^* = \{(x,y) : a \le x < \infty; c \le y \le \partial\}$ կիսաշերտում, իսկ $\mathcal{I}(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $[c,\partial]$ միջակայքում, ապա $\mathcal{I}(y)$-ը անընդհատ է $[c,\partial]$-ում:

Ինտեգրում: Թեորեմ 3: Եթե թեորեմ 2-ի պայմանները տեղի ունեն, ապա տեղի ունի բանաձև՝

$$\int_c^\partial \mathcal{I}(y)dy = \int_c^\partial \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^\partial f(x,y)dy\right)dx,$$

որը գրում են նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\int_c^\partial \mathcal{I}(y)dy = \int_c^\partial dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^\partial f(x,y)dy:$$

Դիֆերենցում: Թեորեմ 4: Դիցուք $f(x,y)$ որոշված է և անընդհատ, ըստ x-ի և y-ի, D^*-ում: -ը $f(x,y)$-ը D^*-ում ունի $f_y'(x,y)$ ածանցյալ, որը որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա անընդհատ է D^*-ում: Եթե $\mathcal{I}(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է $\forall y \in [c,\partial]$-ում, իսկ $\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $[c,\partial]$-ի վրա, ապա $\mathcal{I}(y)$-ը $[c,d]$-ում դիֆերենցելի է, ընդ որում, ճշմարիտ է ինտեգրալի ածանցմամբ Լայբնիցի կանոնը.

$$\mathcal{I}'(y) = \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)_y' = \int_a^{+\infty} f'(x,y)dx:$$

Մի շարք դեպքերում հարկ է լինում օգտվել հետևյալ պնդումից.

Թեորեմ 5: Դիցուք $f(x,y)$-ը որոշված է և անընդհատ $E = \{(x,y) : a \le x < \infty; c \le y < +\infty\}$ բազմության վրա ու ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ: Եթե

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \qquad \text{և} \qquad \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

անընդհատ ֆունկցիաներ են՝ առաջինը y-ից, իսկ երկրորդը x-ից և

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \qquad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

երկու հաջորդական ինտեգրալներից մեկը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև մյուսը և տեղի ունի հավասարություն՝

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

Օրինակ 1. Օգտվելով Կոշիի սկզբունքից՝ ապացուցենք, որ $Y=\{y\}=[1+h,+\infty]$, $h>0$ բազմության վրա $\mathcal{J}(y)=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^y}$ պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է:

Ցույց տանք, որ $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0$ $(A_0>1)$ թիվն այնպիսին է, որ $A'>A>A_0$ պայմանից հետևում է

$$\left|\int_A^{A'}\frac{dx}{x^y}\right|<\varepsilon \tag{4.23}$$

անհավասարությունը, $\forall y\in[1+h,+\infty)$-ի համար:

Քանի որ $x\geq 1$, $y\geq 1+h$ և $1<A<A'$, ապա

$$\left|\int_A^{A'}\frac{dx}{x^y}\right|=\int_A^{A'}x^{-y}dx=\left.\frac{x^{-y+1}}{-y+1}\right|_A^{A'}=\frac{1}{y-1}\left(\frac{1}{A^{y-1}}-\frac{1}{(A')^{y-1}}\right)<$$

$$<\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{A^{y-1}}<\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{A^h}<\frac{1}{h\cdot A_0^h}:$$

Այսպիսով, որպեսզի տեղի ունենա (4.23)-ը բավական է որպես A_0 վերցնել $\left(\frac{1}{\varepsilon\cdot h}\right)^{\frac{1}{h}}$ թիվը:

Պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 2. Ապացուցենք, որ պարամետրից կախված

$$\mathcal{J}(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx,\quad (y\in(0,+\infty)\equiv Y)$$

ինտեգրալը Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ չէ:

Ցույց տանք, որ $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ թվի համար ինչպիսին էլ լինի A_0-ն $\exists A,A'>A_0$ և y_0 թվեր այնպիսիք, որ տեղի ունի

$$\left|\int_A^{A'}e^{-y_0x^2}dx\right|>\varepsilon_0:$$

Իրոք, վերցնելով $A=n$, $A'=n+1$, $y_0=\frac{1}{n+1}$՝ կունենանք

$$\left|\int_A^{A'}e^{-y_0x^2}dx\right|=\int_n^{n+1}\frac{1}{e^{\left(\frac{x}{n+1}\right)^2}}dx>\int_n^{n+1}\frac{1}{e}dx=\frac{1}{e}\approx\frac{1}{2.7}>\varepsilon_0:$$

Պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 3. Ապացուցենք, որ $F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dx$ ֆունկցիան y պարամետրից կախված անընդհատ ֆունկցիա է:

Կատարելով $x=y+t$ փոխարինում՝ կստանանք

$$F(y)=\int_{-y}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-y}^{0}e^{-t^2}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{0}^{y}e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{\pi}}{2}:$$

Քանի որ e^{-t^2} ֆունկցիան անընդհատ է, ապա անընդհատ է $\int_0^y e^{-t^2}dt$ ֆունկցիան, հետևաբար նաև $F(y)$-ը, ինչը պահանջվում էր ապացուցել:

Օրինակ 4. Ցույց տանք, որ $F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+y)^2}dx$ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալ ցանկացած y-ի դեպքում:

Կատարելով $x+y=t$ տեղադրում կստանանք՝

$$F(y)=\int_{y}^{+\infty}\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}dt-\int_{0}^{y}\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}dt: \qquad (ա)$$

(ա)-ում կատարելով ձևական ածանցում, ըստ y պարամետրի, կստանանք

$$F'(y)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(t-y)}{1+t^2}dt-\int_{0}^{y}\frac{\sin(t-y)}{1+t^2}dt-\frac{1}{1+t^2}: \qquad (բ)$$

Քանի որ $f(x,y)=\frac{\sin(t-y)}{1+t^2}$, $0\le t<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ ֆունկցիան անընդհատ է և (ա)-ի ու (բ)-ի աջ մասերի առաջին ինտեգրալները, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի, հավասարաչափ զուգամետ են, երբ $|y|<+\infty$, ապա ինտեգրալի նշանի տակ ըստ պարամետրի ածանցումը թույլատրելի է և $F'(y)$-ը անընդհատ է՝ $(-\infty<y<+\infty)$:

Ինչը պահանջվում էր ցույց տալ:

Օրինակ 5. Ընդինտեգրալ ֆունկցիան ներկայացնելով որպես պարամետրից կախված ինտեգրալ և կատարելով ինտեգրալի նշանի տան ինտեգրում՝ հաշվենք ինետգրալը $(0<a<b)$.

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx:$$

Ունենք $\int_a^b x^y dy=\frac{x^y}{\ln x}\Big|_{y=a}^{y=b}=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, որը հաշվի առնելով կարող ենք գրել՝

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \Bigg|_0^1 \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1)|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}:$$

Օրինակ 6. Հաշվենք Էյլեր-Պուասոնի ինտեգրալը.

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx:$$

Այս ինտեգրալում կատարելով $x = u \cdot t$ փոխարինում, որտեղ t-ն նոր անկախ փոփոխական է, իսկ u-ն ցանկացած դրական թիվ է, կստանանք՝

$$\mathcal{J} = u \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt:$$

Վերջին հավասարությունը բազմապատկելով e^{-u^2}-ով և, ըստ u-ի, ինտեգրելով $[0, +\infty)$ միջակայքում՝ կունենանք

$$\mathcal{J} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \mathcal{J}^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u du \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt:$$

Այսպիսով,

$$\mathcal{J}^2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt \right) du:$$

Դիտարկենք $D = \{(u,t) : 0 < u_0 \leq u < +\infty; 0 \leq t < +\infty\}$ բազմությունը:

Այդ բազմությունում

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2},$$

և

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt = e^{-u^2} \cdot \mathcal{J}$$

ֆունկցիաներն անընդհատ ֆունկցիաներ են, համապատասխանաբար t-ից և u-ից: Հետևաբար, ըստ թեորեմ 5*-ի, կունենանք

$$\int_{u_0}^{+\infty} du \left(\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt \right) = \int_0^{+\infty} dt \left(\int_{u_0}^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du \right):$$

Վերջին հավասարության աջ և ձախ մասերում անցնելով սահմանի, երբ $u_0 \to +0$-ի կստանանք

$$\mathcal{J}^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

որտեղից՝

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}:$$

Վարժություններ

Գտնել սահմանը.

1) $\lim_{y\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos yx) e^{x \sin y} dx$: Պատասխան՝ 2π:

2) $\lim_{y\to 0} \int_0^{\pi} (x \cos(1+y)x) dx$: Պատասխան՝ -2:

Ապացուցել, որ $\mathcal{J}(y)$ ֆունկցիան անընդհատ է R-ում՝

1) $\mathcal{J}(y) = \int_0^2 \cos yx^2 \, dx$:

2) $\mathcal{J}(y) = \int_{-1}^3 \frac{x^2+1}{2+x^2+y^2x^4} dx$:

Գտնել $\mathcal{J}'(y)$-ը, եթե

1) $\mathcal{J}(y) = \int_1^3 \frac{\cos yx^3}{x} dx$: Պատասխան՝ $\frac{\cos 27y - \cos y}{3y}$:

2) $\mathcal{J}(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx$:

Պատասխան՝ $\mathcal{J}'(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx - \sin y \, e^{y|\sin y|} - \cos y \, e^{y|\cos y|}$:

3) $\mathcal{J}(y) = \int_{3y}^{y^2} e^{yx^2} dx$:

Պատասխան՝ $\mathcal{J}'(y) = \int_{3y}^{y^2} x^2 e^{yx^2} dx + 2ye^{y^5} - 3ye^{9y^3}$:

Հետազոտել $\mathcal{J}(y)$-ի հավասարաչափ զուգամիտությունը E բազմության վրա՝

1) $\mathcal{J}(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^y} dx$, $E = [0, +\infty)$:

Պատասխան՝ հավասարաչափ զուգամետ է:

2) $\mathcal{J}(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$, $E = [0, 1]$:

Պատասխան՝ հավասարաչափ զուգամետ չէ:

3) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+x^y} dx\,,\ E = (0,+\infty)$:

Պատասխան՝ հավասարաչափ զուգամետ է:

4) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \operatorname{arctg}(yx)\, dx\,,\ E = R$:

Պատասխան՝ հավասարաչափ զուգամետ է:

Հետազոտել $\mathcal{I}(y)$-ի անընդհատությունը E բազմության վրա՝

1) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^y}, E = (2,+\infty)$:

Պատասխան՝ անընդհատ է:

2) $\mathcal{I}(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^y}, E = (0,+\infty)$: Պատասխան՝ անընդհատ է:

3) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos x^2\, dx, E = [0,+\infty)$:

Պատասխան՝ անընդհատ է:

Ապացուցել, որ $\mathcal{I}(y)$-ը E բամզության վրա հավասարաչափ զուգամետ է՝

1) $\mathcal{I}(y) = \int_1^{+\infty} x^y e^{-2x} dx, E = [1,3]$:

2) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos 2x\, dx, E = [a_0,+\infty),\ \ a_0 > 0$:

3) $\mathcal{I}(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2+y^4} dx, E = R$:

4) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx, E = [0,+\infty)$:

Ապացուցել, որ $\mathcal{I}(y)$-ը E բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ չէ.

1) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx, E = [0,+\infty)$:

2) $\mathcal{I}(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^y x}{x} \sin x\, dx, E = [1,+\infty)$:

3) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^y}, E = (1,+\infty)$:

Օգտվելով Դիրեխլեի ինտեգրալից՝

$$\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y\,, \qquad y \in R,$$

հաշվել ինտեգրալները.

ա) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos yx}{x^2} dx$: Պատասխան՝ $\frac{\pi}{2}|y|$:

Ցուցում: Կատարել ածանցում ինտգերալի նշանի տակ:

բ) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$: Պատասխան՝ $\frac{\pi}{2}$:

Ցուցում: Ինտեգրալը ներկայացնել $-\int_0^{+\infty} \sin^2 x\, d\left(\frac{1}{x}\right)$ տեսքով, կիրառել մասերով ինտեգրման բանաձևը և օգտվել Դիրիխլեի ինտեգրալից:

գ) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$: Պատասխան՝ $\frac{\pi}{4}$:

Ցուցում: Կատարել $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ տեղադրություն:

դ) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$: Պատասխան՝ $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$:

Ցուցում: Օգտվել $\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$ բանաձևից և Դիրիխլեի ինտգերալից:

ե) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos yx - \cos zx}{x^2} dx$: Պատասխան՝ $\frac{\pi}{2}(|z| - |y|)$:

Ցուցում: $\frac{\cos yx - \cos zx}{x^2}$ ֆունկցիան ներկայացնել $\frac{1-\cos zx}{x^2} - \frac{1-\cos yx}{x^2}$ տեսքով և օգտվել ա)-ից:

Կատարելով ածանցում ըստ պարամետրի՝ հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos yx}{x} e^{-zx} dx\,, z > 0$: Պատասխան՝ $\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right)$:

բ) $\mathcal{I}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} e^{-zx} dx\,, z > 0$: Պատասխան՝ $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$:

Օգտագործելով Էյլեր-Պուասոնի ինտեգրալը՝

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ապացուցել, որ

ա) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{a}},\ a > 0$:

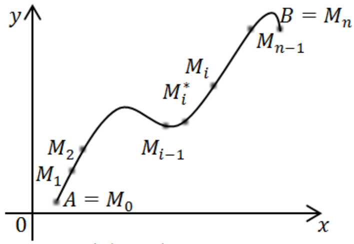
բ) $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2y},\ y > 0$:

Ցուցում: $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{y^2}{x^2}\right)} dx$ ինտեգրալը նշանակել $\mathcal{I}(y)$-ով, գտնել $\mathcal{I}'(y)$-ը, այնուհետև $\mathcal{I}(y)$-ում կատարել $x = \frac{y}{t}$ փոխարինում:

ԳԼՈՒԽ V
ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

5.1. Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալ

Սահմանում: Դիցուք OXY հարթության վրա տրված է $\breve{AB}$ ողորկ[15], կամ կտոր առ կտոր ողորկ կոր, որի վրա որոշված է $z = f(x,y)$ սահմանափակ ֆունկցիա: Դիցուք կորի վրա ընտրված է ուղղություն A-ից B:



(գծ. 5.1)

$\breve{AB}$-ն կամայական եղանակով $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ կետերով տրոհենք (գծ. 5.1) n մասերի: Հարմարության համար նշանակենք $A = M_0$ և $B = M_n$: $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ աղեղի վրա ընտրենք կամայական M_i^* կետ, $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ աղեղի երկարությունը նշանակենք Δs_i և կազմենք գումար՝

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta s_i: \qquad (5.1)$$

(5.1) գումարը կոչվում է $z = f(x,y)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար $\breve{AB}$ կորով: Նշանակենք $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}}\{\Delta s_i\}$:

Սահմանում: Եթե (5.1) ինտեգրալային գումարը λ-ն զրոյի ձգտելիս ունի $\mathcal{I}$ վերջավոր սահման, անկախ $\breve{AB}$ կորի տրոհման եղանակից և անկախ M_i^* կետերի ընտրությունից, ապա այդ սահմանը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի ***առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալ*** $\breve{AB}$ կորով և նշանակվում է հետևյալ սիմվոլով՝

$$\mathcal{I} = \int_{\breve{AB}} f(x,y)ds:$$

---

[15] $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ հավասարումներով տրված կորը կոչվում է ***ողորկ կոր***, եթե $\varphi'(t)$ և $\psi'(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[\alpha,\beta]$-ում և միջակայքի ոչ մի կետում միաժամանակ զրո չեն դառնում:
Անընդհատ կորը, որը կազմված է վերջավոր թվով ողորկ կտորներից կոչվում է ***կտոր առ կտոր ողորկ***:

Այդ դեպքում $f(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է ***ինտեգրելի*** $\breve{AB}$ կորով:

Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը հեշտությամբ բերվում է որոշյալ ինտեգրալի: Իրոք, եթե $\breve{AB}$-ի համար որպես պարամետր ընտրենք s =երկարություն $\breve{AM}$-ը, որտեղ M-ը $\breve{AB}$-ի փոփոխական կետ է, ապա կստանանք $\breve{AB}$-ի պարամետրական հավասարումները՝

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad 0 \leq s \leq S:$$

Որտեղ S-ը $\breve{AB}$-ի երկարությունն է:

Այս դեպքում $\breve{AB}$-ի վրա որոշված՝ $f(x,y)$ կլինի s պարամետրից ֆունկցիա՝ $f(x(s),y(s))$: s_i և s_i^*-ով նշանակենք պարամետրի այն արժեքները, որոնք համապատասխանում են M_i և M_i^* կետերին և (5.1) գումարը արտագրենք հետևյալ տեսքով.

$$\sum_{i=1}^{n} f\big(x(s_i^*), y(s_i^*)\big)\Delta s_i, \tag{5.2}$$

որտեղ $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ և $s_{i-1} \leq s_i^* \leq s_{i+1}$:

Ակնհայտ է, որ (5.2)-ը $f(x(s),y(s))$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարն է $[0,S]$ միջակայքում: Քանի որ (5.1) և (5.2) գումարները իրար հավասար են, ապա հավասար են նաև համապատասխան ինտեգրալները՝

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)ds = \int_0^S f\big(x(s),y(s)\big)ds: \tag{5.3}$$

Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը օժտված է պարզ հատկություններով՝

1) Եթե փոխվում է կորի վրա ընտրված ուղղությունը, ապա ինտեգրալի արժեքը չի փոխվում, այսինքն՝

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)ds = \int_{\breve{BA}} f(x,y)ds,$$

2) Եթե ինտեգրման կորը ինչ-որ C կետով տրոհվում է $\breve{AC}$ և $\breve{CB}$ մասերի, ապա

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)ds = \int_{\breve{AC}} f(x,y)ds + \int_{\breve{CB}} f(x,y)ds:$$

Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն՝ $f(M) \geq 0$ դեպքում թվապես հավասար է այն գլանային մակերևույթի մակերեսին, որի ծնիչները զուգահեռ են OZ առանցքին, իսկ ուղղորդ կորն $\breve{AB}$-ն է:

Բացի դրանից, առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը ունի լայն կիրառություն ֆիզիկայում: Նրա միջոցով գտնում են նյութական կորի զանգվածը, եթե տրված է նրա գծային խտությունը, գտնում են կոորդինատային առանցքների նկատմամբ իներցիայի մոմենտները և այլն:

Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալի հաշվումը.

1) Դիցուք $\breve{AB}$ կորը տրված է պարամետրական տեսքով՝

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq \mathrm{t} \leq \beta,$$

որտեղ $\varphi(t)$-ն և $\psi(t)$-ն իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են $\alpha \leq \mathrm{t} \leq \beta$ միջակայքում, իսկ $f(x, y)$-ն անընդհատ է $\breve{AB}$-ի վրա: Այս պայմանների դեպքում կունենանք[16], որ երկարություն՝ $\breve{AM} = s = s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\left(\varphi'(\tau)\right)^2 + \left(\psi'(\tau)\right)^2} d\tau$, $\alpha \leq \mathrm{t} \leq \beta$, որտեղից, համաձայն փոփոխական վերին սահմանով որոշյալ ինտեգրալի հատկության, կստանանք

$$ds(t) = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} dt: \tag{5.4}$$

(5.3) հավասարության աջ մասում կատարելով s փոփոխականի փոխարինում և հաշվի առնելով (5.4)-ը՝ կստանանք

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y) ds = \int_0^S f\big(x(s), y(s)\big) ds =$$

$$= \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \sqrt{\left(\varphi'(\tau)\right)^2 + \left(\psi'(\tau)\right)^2} d\tau: \tag{5.5}$$

Մասնավոր դեպքում, եթե $\breve{AB}$-ն տրված է $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ բացահայտ հավասարումով, որտեղ $y(x)$-ը և $y'(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիաներ են $[a, b]$-ում, ապա x-ը ընդունելով որպես պարամետր կունենանք՝

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y) ds = \int_0^S f\big(x, y(x)\big) \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx: \tag{5.6}$$

---

[16] Տե՛ս, Վ. Հ. Օհանյան, «Մաթեմատիկական անալիզ», մաս II, էջ 114:

Համանման ձևով սահմանվում է $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալ տարածական ողորկ կորով՝ $\breve{AB}:\{x(t),y(t),z(t);\ \alpha\le t\le\beta\}$, որը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt:$$

Օրինակ 1. Հաշվել առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը.

$$\int\limits_{\breve{AB}} xds,$$

որտեղ $\breve{AB}$-ն $A(1,1)$ և $B(2,3)$ կետերը միացնող հատվածն է: $\breve{AB}$: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=t\ \Rightarrow\begin{cases} x=t+1=\varphi(t),\\ y=2t+1=\psi(t),\end{cases}\quad 0\le t\le 1$:

Համաձայն (5) բանաձևի՝

$$\int\limits_{\breve{AB}} xds=\int\limits_0^1 (t+1)\sqrt{((t+1)')^2+((2t+1)')^2}dt=\int\limits_0^1 \sqrt{5}(t+1)dt=$$

$$=\sqrt{5}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^1=\sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}:$$

Օրինակ 2. Հաշվել կորագիծ ինտեգրալը՝

$$\int\limits_{\breve{AB}} y^2ds,$$

որտեղ $\breve{AB}$: $\begin{cases} x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$:

$$\int\limits_{\breve{AB}} y^2ds=\int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2(\sin t)^2}dt=$$

$$=a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{2(1-\cos t)}dt=4a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\cdot 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=$$

$$=-16a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2\left(d\cos\frac{t}{2}\right):$$

Վերջին ինտեգրալում կատարենք $z = \cos\frac{t}{2}$ փոխարինում: Եթե $t = 0$, ապա $z = 1$,եթե $t = 2\pi$, ապա $z = -1$, հետևաբար

$$\mathcal{I} = -16a^3 \int_1^{-1} (1 - t^2)^2 dt = 16a^3 \int_{-1}^{1} (1 - 2t^2 + t^4) dt =$$

$$= 16a^3 \left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 16a^3 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - 16a^3 \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = 16a^3 \left(2 - \frac{4}{2} + \frac{2}{5}\right) =$$

$$= 16a^3 \cdot \frac{16}{15} = \frac{256}{15} a^3:$$

5.2. Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալի որոշ կիրառություններ

Դիցուք Γ կտոր առ կտոր ողորկ կորի վրա բաշխված է $\rho(x, y, z)$ (կամ $\rho(x, y)$ հարթ կորի համար) խտությամբ զանգված:

Կորի զանգվածը գտնում են

$$m = \int_{(\Gamma)} \rho(x, y, z) ds \quad \left(\int_{(\Gamma)} \rho(x, y) ds \right): \tag{5.6*}$$

բանաձևով:

Կորի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները գտնում են

$$x_c = \frac{1}{m} \int_{(\Gamma)} x\rho(x, y, z) ds, \qquad y_c = \frac{1}{m} \int_{(\Gamma)} y\rho(x, y, z) ds,$$

$$z_c = \frac{1}{m} \int_{(\Gamma)} z\rho(x, y, z) ds: \tag{5.6**}$$

բանաձևերով:

Կորի OX, OY, OZ առանցքների նկատմամբ ունեցած իներցիայի մոմենտները գտնում են

$$\mathcal{I}_x = \int\limits_{(\Gamma)} (x^2 + z^2)\rho ds, \qquad \mathcal{I}_y = \int\limits_{(\Gamma)} (z^2 + x^2)\rho ds,$$

$$\mathcal{I}_z = \int\limits_{(\Gamma)} (x^2 + y^2)\rho ds: \tag{5.6***}$$

բանաձևերով:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1. Գտնել $(\Gamma): x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t$, $0 \le t \le 1$, $\rho = ye^{-x}$ նյութական հարթ կորի զանգվածը:

Ըստ (5.6*) բանաձևի՝ կունենանք

$$m = \int\limits_{(\Gamma)} \rho(x, y) ds = \int\limits_{(\Gamma)} ye^{-x} ds:$$

Քանի որ $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t$, $0 \le t \le 1$, ապա $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt =$

$$= \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}\, dt = 1 \cdot dt = dt \text{ որտեղից}$$

$$m = \int_0^1 \frac{2\operatorname{arctg} t - t}{1 + t^2} dt = 2\int_0^1 \operatorname{arctg} t \, d \operatorname{arctg} t - \int_0^1 \frac{tdt}{1 + t^2} =$$

$$= (\operatorname{arctg} t)^2 \big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2:$$

Պատասխան՝ $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2$:

Օրինակ 2. Գտնել $(\Gamma): x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ նյութական կորի զանգվածը:

Ըստ (5.6*) բանաձևի՝

$$m = \int\limits_{(\Gamma)} \rho(x, y, z) ds = \int\limits_{(\Gamma)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds:$$

Քանի որ

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2} dt =$$

$\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2} dt = = \sqrt{2 + t^2} dt$, ապա

$$m=\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2+t^2}\cdot\sqrt{2+t^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2t^2}\cdot\sqrt{2+t^2}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left((2+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{2}(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2}\left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{4}{3}\left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right):$$

Պատասխան՝ $\frac{4}{3}\left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)$:

Օրինակ 3. Գտնել $(\Gamma): x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi,\ (\rho=1)$ նյութական կորի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Ըստ (5.6**) բանաձևերի՝

$$x_c=\frac{1}{m}\int_{(\Gamma)}x\rho(x,y)ds,\qquad y_c=\frac{1}{m}\int_{(\Gamma)}y\rho(x,y)ds:$$

Նախ գտնենք կորի զանգվածը՝

$$m=\int_{(\Gamma)}\rho(x,y)ds=\int_0^{2\pi}1\cdot\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2(\sin t)^2}dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2}=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=8a:$$

$x_c=\frac{1}{8a}\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt=$

$$=\frac{a}{4}\int_0^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt=$$

$$=-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}td\cos\frac{t}{2}-\frac{a}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\sin\frac{t}{2}=$$

$$= -\frac{a}{2}\left(\left(t\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt\right) = -\frac{a}{4}\cdot\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = a\pi:$$

$$y_c = \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{a}{4}\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -a\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -a\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= -a\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{3}:$$

Պատասխան՝ $(x_c, y_c) = \left(a\pi, \frac{4a}{3}\right)$:

Օրինակ 4. Գտնել $(\Gamma): x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,,\ z = \frac{ht}{2\pi}\ \ 0 \le t \le 2\pi$, նյութական համասեռ կորի ($\rho = 1$), $\mathcal{I}_x$, $\mathcal{I}_y$, $\mathcal{I}_z$ իներցիայի մոմենտները:

(5.6***) բանաձևերում ρ -ն տեղադրելով 1՝ կստանանք

$$\mathcal{I}_x = \int_{(\Gamma)}(y^2+z^2)ds, \qquad \mathcal{I}_y = \int_{(\Gamma)}(z^2+x^2)ds, \quad \mathcal{I}_z = \int_{(\Gamma)}(x^2+y^2)ds:$$

Ունենք՝

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt$$

$\Longrightarrow$

$ds = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt$:

$$\mathcal{I}_x = \int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t + \frac{h^2t^2}{(2\pi)^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2t}{2}\right)dt + \frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi} + \frac{8\pi^3h^2\cdot\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{8\pi^3\cdot 3} =$$

$$= \frac{3a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2} + 2h^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{6} =$$

$$= \frac{(3a^2+2h^2)\cdot\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{6}:$$

Նման ձևով՝

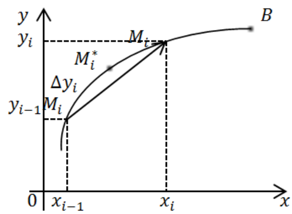
$$\mathcal{I}_y = \int_0^{2\pi}\left(a^2\,cos^2\,t + \frac{h^2t^2}{(2\pi)^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt = \mathcal{I}_x$$

քանի որ $\int_0^{2\pi} a^2\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} a^2\sin^2 t\,dt$:

$$\mathcal{I}_z = \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt = a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}:$$

Պատասխան՝ $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y = \frac{(3a^2+2h^2)\cdot\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{6}$, $\mathcal{I}_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$:

5.3. Երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալ



(գծ. 5.2)

Դիցուք OXY կոորդինատային համակարգում տրված է $\breve{AB}$ կորը, որի վրա ընտրված է ուղղություն՝ A-ից B և կորի վրա որոշված են $P(x,y)$ ու $Q(x,y)$ սահմանափակ ֆունկցիաները: $\breve{AB}$ կորը $A = M_0$, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_{n-1}, $M_n = B$ կետերով տրոհենք n մասերի: $\overrightarrow{M_{\iota-1}M_\iota}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ վեկտորի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա (գծ. 5.2) նշանակենք Δx_i և Δy_i: Յուրաքանչյուր $\overset{\frown}{M_{\iota-1}M_\iota}$ աղեղի վրա վերցնենք կամայական M_i^* կետ և կազմենք ինտեգրալային գումարներ՝

$$\sum_{i=1}^{n} P(M_i^*)\cdot\Delta x_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} Q(M_i^*)\cdot\Delta y_i\right): \qquad (5.7)$$

Նշանակենք $\lambda = \max_{1\le i\le n}$(երկարություն $\overset{\frown}{M_{\iota-1}M_\iota}$):

Սահմանում: Եթե (5.7) ինտեգրալային գումարը λ -ն զրոյի ձգտելիս ունի վերջավոր $\mathcal{I}$ սահման, անկախ $\breve{AB}$-ի տրոհման եղանակից և անկախ M_i^* կետերի ընտրությունից, ապա այդ սահմանը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի **երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալ $\breve{AB}$ կորով**, իսկ $f(x,y)$-ը ինտեգրելի $\breve{AB}$-ով և նշանակվում սիմվոլով՝

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx, \quad \left(\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy\right):$$

Այս երկու ինտեգրալների գումարին

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

անվանում են երկրորդ տիպի ընդհանուր կորագիծ ինտեգրալ:

Երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը հեշտությամբ բերվում է ռիմանյան ինտեգրալի: Իրոք, դիցուք $\breve{AB}$-ն տրված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

որտեղ $\varphi(t)$-ն և $\psi(t)$-ն իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են $[\alpha,\beta]$ միջակայքում, $t=\alpha$-ին համապատասխանում է A կետը, իսկ $t=\beta$-ին՝ B կետը և $\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 \neq 0$: Եթե նշված պայմաններից բացի $P(x,y)$-ը և $Q(x,y)$-ը անընդհատ են $\breve{AB}$-ի վրա, ապա տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt;$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\psi'(t)dt: \qquad (5.8)$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big) \cdot\psi'(t)\Big)dt: \qquad (5.8^*)$$

Ապացուցենք (5.8) բանաձևերից առաջինը, մյուսը ապացուցվում է նման ձևով:

Դիցուք տրոհման M_i կետը համապատասխանում է t պարամետրի t_i արժեքին, իսկ M_i^*-ը՝ t_i^* արժեքին, այսինքն՝ M_i-ի կոորդինատներն են $\varphi(t_i)$-ն և $\psi(t_i)$-ն, իսկ M_i^*-ի՝ $\varphi(t_i^*)$-ն և $\psi(t_i^*)$-ն, $i = 1, 2, \dots, n$: Ակնհայտ է, որ $P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[\alpha, \beta]$ միջակայքում:

Կազմենք $P(x, y)$ ֆունկցիայի (5.7) ինտեգրալային գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} P(M_i^*) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P\big(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)\big) \cdot \Delta x_i:$$

Քանի որ $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, ապա ըստ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի՝ $\Delta x_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t)dt$, որը հաշվի առնելով՝ կստանանք

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} P\big(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)\big) \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P\big(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)\big)\varphi'(t)dt:$$

Մյուս կողմից, վերը նշված պայմանների առկայությամբ կարելի է գրել՝

$$\mathcal{I} = \int_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t)dt:$$

Գնահատենք տարբերությունը՝

$$\sigma - \mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(P\big(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)\big) - P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\Big)\varphi'(t)dt: \quad (5.9)$$

Քանի որ $P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[\alpha, \beta]$ միջակայքում, ապա Կանտորի թեորեմի համաձայն՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta > 0$ թիվն այնպիսին է, որ երբ $\mu = \max_{i=\overline{1,n}}\{\Delta t_i\} < \delta$, ապա

$$\big|P\big(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)\big) - P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\big| < \varepsilon: \quad (5.10)$$

Քանի որ $\psi'(t)$-ն անընդհատ է $[\alpha, \beta]$ միջակայքում, ապա $\exists K > 0$ այնպիսին է, որ $\forall t \in [\alpha, \beta]$-ի համար տեղի ունի

$$|\varphi'(t)| \le K: \quad (5.11)$$

Հաշվի առնելով (5.10) և (5.11) անհավասարությունները՝ (5.9) տարբերության համար կստանանք գնահատական՝

$$|\sigma - \mathcal{I}| = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big|P\big(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)\big) - P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\big||\varphi'(t)|dt \le \varepsilon \cdot K(\beta - \alpha),$$

որտեղից, ε -ի կամայական լինելու շնորհիվ, կհետևի՝

$$\lim_{\mu\to 0}\sigma = \mathcal{J}: \tag{5.12}$$

Ապացուցենք, որ եթե $\mu \to 0$ ապա $\lambda \to 0$, որտեղ $\lambda = \max_{1\le i\le n}$ (երկարություն $\overset{\frown}{M_{\iota-1}M_\iota}$):

Ունենք՝

$$\Delta l_i \equiv \text{երկարություն}\ \overset{\frown}{M_{\iota-1}M_\iota} = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\,dt: \tag{5.13}$$

Քանի որ $\varphi'(t)$-ն և $\psi'(t)$-ն անընդհատ են $[\alpha,\beta]$ միջակայքում և $\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2 \neq 0$, ապա $\exists m = const$ և $M = const$ այնպիսիք, որ $\forall t \in [\alpha,\beta]$-ի համար

$$m \le \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2} \le M:$$

(5.13)-ից հետևում է՝

$$m\cdot\Delta t_i \le \Delta l_i \le M\cdot\Delta t_i: \tag{5.14}$$

Իսկ (5.14)-ից եզրակացնում ենք՝ եթե $\mu = \max_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\} \to 0$, ապա $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta l_i\} \to 0$:

Այսպիսով,

$$\lim_{\mu\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \mathcal{J} = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx,$$

այսինքն՝ $P(x,y)$ ֆունկցիան $\overset{\frown}{AB}$ կորով ինտեգրելի է և այդ ինտեգրալը կարելի է հաշվել (5.8) բանաձևով:

Եթե ինտեգրման $\overset{\frown}{AB}$ կորը տրված է բացահայտ տեսքով՝

$$\big(\overset{\frown}{AB}\big) \equiv (L) : y = f(x);\ \ a \le x \le b,$$

որտեղ $f'(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$-ում, ապա (5.8*) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

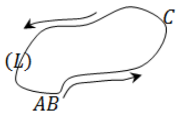
$$= \int_a^b \Big(P\big(x,f(x)\big)\,dx + Q\big(x,f(x)\big)\,f'(x)\Big)\,dx: \tag{5.8**}$$

Երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալում, եթե փոխվում է կորի վրա ընտրված ուղղությունը, ապա ինտեգրալը փոխում է նշանը.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx\,, \qquad \int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Q(x,y)dx:$$

Իրոք, փոխելով կորի վրա ընտրված ուղղությունը, մենք (5.7) գումարներում փոխում ենք Δx_i-երի և Δy_i-ների նշանները, հետևաբար այդ գումարները և նրանց սահմանները փոխում են նշանը:

Երբ ինտեգրման (L) կորը փակ է $(A = B)$, ապա կորի շրջանցման դրական ուղղություն համարում են այն, որի դեպքում տիրույթը, որը գտնվում է այդ փակ կորի ներսում, մնում է շրջանցողի ձախ կողմում:



(գծ. 5.3)

(L) փակ կորի $(A = B)$ դեպքում կորագիծ ինտեգրալները (I և II) տիպի հաշվում են հետևյալ բանաձևերով

$$\int_{(L)} \dots = \int_{(\overset{\frown}{AC})} \dots \int_{(\overset{\frown}{CB})} \dots,$$

որտեղ C-ն (L)-ի ցանկացած կետ է (գծ. 5.3), որը տարբեր է A-ից:

(L) փակ կորով կորագիծ ինտեգրալը նշանակում են հետևյալ սիմվոլով՝

$$\oint_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy:$$

Եթե $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիաները որոշված են $L : \{x(t), y(t), z(t);\ \alpha \le t \le \beta\}$ կտոր առ կտոր ողորկ տարածական կորի վրա, ապա համապատասխան երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը սահմանվում է համանման ձևով և այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big) \cdot y'(t)$$
$$+ R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)\, dt: \qquad (5.15)$$

Օրինակ 1. Հաշվենք հետևյալ կորագիծ ինտեգրալը՝

$$\int\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz,$$

որտեղ (L)-ը $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$ կորն է:

Լուծում: Որոնելի ինտեգրալը նշանակենք $\mathcal{I}$ -ով և օգտվենք (5.15) բանաձևից կունենանք՝

$$\mathcal{I} = \int\limits_{0}^{2\pi} (a\sin t \cdot (-a\sin t) + bt \cdot a\cos t + a\cos t \cdot b)\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (-a^2\sin^2 t + ab \cdot t\cos t + ab\cos t)\, dt$$

$$= -a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 t\, dt + ab \int\limits_{0}^{2\pi} t\cos t\, dt + ab \int\limits_{0}^{2\pi} \cos t\, dt:$$

Նշանակենք՝ $\mathcal{I}_1 = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt, \mathcal{I}_2 = \int_0^{2\pi} t\cos t\, dt, \mathcal{I}_3 = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt$:

Ունենք՝

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi,$$

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{0}^{2\pi} td\sin t = (t\sin t)|_0^{2\pi} - \int\limits_{0}^{2\pi} \sin t\, dt = \cos t|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\mathcal{I}_3 = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos t\, dt = \sin t|_0^{2\pi} = 0$$

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = -a^2\pi$:

Օրինակ 2. Հաշվել երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը.

$$\mathcal{I} = \int\limits_{(L)} (2a - y)dx + xdy,$$

որտեղ (L)-ը $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ կորն է:

Համաձայն (5.8*) բանաձևի՝

$$\mathcal{I} = \int\limits_{0}^{2\pi} \big((2a - a(1 - \cos t)a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a\sin t)\big)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 t + a^2 \cdot t \sin t - a^2 \sin^2 t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt =$$

$$= -a^2 \int_0^{2\pi} t d \cos t = -a^2 \left((t \cos t)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t \, dt \right) = -2a^2\pi:$$

Օրինակ 3. Հաշվել

$$\mathcal{I} = \int_{(L)} (xy - y^2) dx + x dy,$$

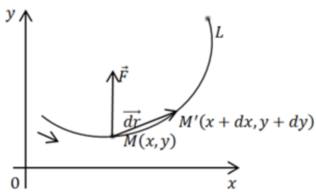
որտեղ (L)-ը $y = 2\sqrt{x}$ $0 \le x \le 1$ կորն է:

Համաձայն (5.8**) բանաձևի՝

$$\mathcal{I} = \int_{(L)} (xy - y^2) dx + x dy = \mathcal{I} = \int_0^1 \left(2x\sqrt{x} - 4x + x\left(2\sqrt{x}\right)'\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^{\frac{3}{2}} - 4x + x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{5} - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{8}{15}:$$

5.4. Երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալի ֆիզիկական իմաստը



(գծ. 5.4)

Դիցուք OXY հարթության վրա տրված է կտոր առ կտոր ողորկ L: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ կորը, որի յուրաքանչյուր կետում կիրառված է $\vec{F}\big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ անընդհատ փոփոխվող ուժ (գծ. 5.4): Պահանջվում է գտնել $\vec{F}$ ուժի կատարած աշխատանքը: L կորի $M(x,y)$ ընթացիկ կետի տեղաշարժման վեկտորը նշանակենք $\overrightarrow{dr}$-ով: Ունենք $\overrightarrow{dr} = (dx, dy)$:

Քանի որ անվերջ փոքր $\widetilde{MM'} \cong \overrightarrow{dr}$ ճանապարհի վրա $\vec{F}$ անընդհատ ուժը կարելի է դիտարկել հաստատուն, ապա այդ ուժի տարրական աշխատանքը կլինի՝

$$dA = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (5.16)$$

որը L կորով ինտեգրելով կստանանք $\vec{F}$ ուժի կատարած աշխատանքը՝

$$A = \int\limits_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy: \qquad (5.17)$$

Այսպիսով, երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը փոփոխական $\vec{F}$ ուժի աշխատանքն է (L) կորով:

Օրինակ: Գտնել $\vec{F} = \{3y, -x\}$ ուժի աշխատանքը, եթե նրա կիրառման կետը հարթության վրա շարժվում է $y = x^2$, $(0 \leq x \leq 2)$ պարաբոլի աղեղով:

Այս խնդրում $P(x,y) = 3y$, $Q(x,y) = -x$, $L : y = x^2$, $(0 \leq x \leq 2)$:

Համաձայն (5.17) և (5.8**) բանաձևերի՝

$$A = \int\limits_{(L)} 3ydx - xdy = \int\limits_0^2 (3x^2dx - x \cdot 2xdx) = \int\limits_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}:$$

Վարժություններ

Հաշվել առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը.

1) $\int_{(\Gamma)} \frac{ds}{y-x}$, որտեղ (Γ)-ն $A(0,-2)$ և $B(4,0)$ ծայրակետերով հատվածն է: Պատասխան՝ $-\sqrt{5}\ln 2$:

2) $\int_{(\Gamma)} (x-y)ds$, որտեղ (Γ)-ն $x^2 + y^2 = ax$ շրջանագիծն է: Պատասխան՝ $\frac{a^2\pi}{2}$:

3) $\int_{(\Gamma)} (xy)ds$, որտեղ (Γ)-ն $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x \geq 0, y \geq 0)$ գիծն է: Պատասխան՝ $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$: Ցուցում. Γ -ն ներկայացնել պարամետրական հավասարումներով՝

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}:$$

4) $\int_{(\Gamma)} \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, որտեղ (Γ)-ն $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$ գիծն է: Պատասխան՝ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \cdot \mathrm{arctg}\frac{2\pi b}{a}$:

Հաշվել երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը.

5) $\int_{(\Gamma)} 2xydx - x^2dy$, որտեղ (Γ)-ն $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $(0 \le x \le 2)$ կորն է: Պատասխան՝ $\frac{12}{5}$:

6) $\int_{(\Gamma)}(x-y)^2dx + (x+y)^2dy$, որտեղ (Γ)-ն OAB բեկյալն է՝ $D(0,0), A(2,0), B(4,2)$: Պատասխան՝ $\frac{136}{3}$:

7) $\int_{(\Gamma)} \cos y\, dx - \sin y\, dy$, որտեղ (Γ)-ն $y = -x$, $(-2 \le x \le 2)$ ուղիղ գծի հատվածն է: Պատասխան՝ $2\sin 2$:

8) $\int_{(\Gamma)}(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, որտեղ (Γ)-ն $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$, $(0 \le t \le \pi)$ գիծն է: Պատասխան՝ 0:

Գտնել նյութական կորի զանգվածը.

9) $(\Gamma): x = a\cos^3 t\,,\ y = a\sin^3 t\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2};\quad \rho(x,y) = \sqrt[3]{y}$:

Պատասխան՝ $m = a^{\frac{4}{3}}$:

10) $(\Gamma): x = at,\ y = \frac{at^2}{2},\ z = \frac{at^3}{3},\quad 0 \le t \le 1;\quad \rho(x,y,z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$:

Պատասխան՝ $\frac{3a}{16}\left(\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right)$:

Գտնել նյութական կորի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները.

11) $(\Gamma): y = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2},\quad -a \le x \le a;\quad \rho(x,y) = 1$:

Պատասխան՝ $\left(0, \frac{\operatorname{sh} 2 + 2}{4\operatorname{sh} 1} \cdot a\right)$:

12) $(\Gamma): x = R\cos\varphi\,,\ y = R\sin\varphi\,,\ z = \frac{h\varphi}{2\pi},\quad 0 \le \varphi \le 2\pi;\quad \rho = \rho_0 = const$

Պատասխան՝ $\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$:

13) Գտնել $\vec{F}(-y,x)$ ուժի աշխատանքը, եթե նրա կիրառման կետը հարթության վրա շարժվում է $(\Gamma): x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ կորով:

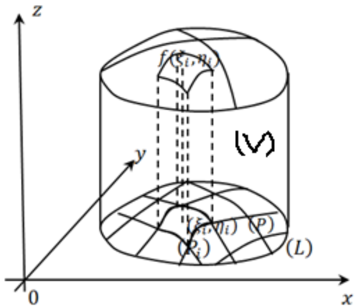
Պատասխան՝ $-6a^2\pi$:

14) Գտնել $\vec{F}\left(-\frac{y}{x^2+y^2};\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ ուժի աշխատանքը, եթե նրա կիրառման կետը հարթության վրա շարժվում է $x^2+y^2=1$ շրջանագծով՝ ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ:

Պատասխան՝ 2π:

ԳԼՈՒԽ VI
ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

6.1. Կրկնակի ինտեգրալի սահմանումը և պարզագույն հատկությունները



(գծ. 6.1)

Դիտարկենք խնդիր՝ գտնել (V) մարմնի ծավալը, որը վերևից սահմանափակված է $z = f(x,y)$ հավասարումով որոշվող մակերևույթով, ներքևից XOY հարթության վրա գտնվող (P) քառակուսելի պատկերով, իսկ կողքերից OZ առանցքին զուգահեռ ծնիչներ ունեցող գլանային մակերևույթով, որի ուղղորդ գիծն է (P)-ի (L) եզրը (գծ. 6.1)։ (V)-ին անվանում են ***գլանակերպ***։ Այս խնդրի լուծումը բերում է կրկնակի ինտեգրալի գաղափարին։ Խնդիրը լուծելու համար (P)-ն կորերի ցանցով տրոհենք $(P_1),(P_2),\dots,(P_n)$ մասերի։ Դիտարկենք (P_i) $(i = 1,2,\dots,n)$ հիմք ունեցող գլանակերպերը, որոնց միավորումը (V)-ն է։ (P_i)-ում ընտրենք կամայական $M_i(\xi_i,\eta_i)$ կետ։ Եթե ստացված գլանակերպերը մոտավորապես դիտարկենք որպես գլաններ, ապա i-րդ $(i = 1,2,\dots,n)$գլանակերպի ծավալը կլինի

$$f(\xi_i,\eta_i)\cdot P_i,$$

իսկ (V) մարմնի ծավալը մոտավորապես՝

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot P_i։$$

Նշանակենք $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}}$ (տրամագիծ (P_i))։

Բնական է սպասել, որ (V) մարմնի ծավալի ճշգրիտ արժեք կհանդիսանա վերը նշված գումարի սահմանը, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի։ Այդ տեսքի սահմանին անվանում են $f(x,y)$ ֆունկցիայի ***կրկնակի ինտեգրալ*** (P) տիրույթով։

Այժմ տանք կրկնակի ինտեգրալի սահմանումը։

Դիցուք (P) քառակուսելի տիրույթում որոշված է $f(x,y)$ ֆունկցիա։ (P) տիրույթը կորերի ցանցով տրոհենք վերջավոր թվով տիրույթների՝ $(P_1),(P_2),\dots,(P_n)$, որոնց մակերեսներն են $P_1,P_2,\dots,P_n$: (P_i)-ում վերցնենք կամայական $M_i(\xi_i,\eta_i)$ կետ և կազմենք գումար՝

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot P_i: \tag{6.1}$$

(6.1) գումարն անվանում են $f(x,y)$-ի ***ինտեգրալային գումար*** (P) տիրույթում:

Նշանակենք λ-ով (P_i) $(i=1,2,\dots,n)$ տիրույթների տրամագծերից[17] ամենամեծը:

Սահմանում: Եթե λ-ն զրոյի ձգտելիս σ գումարը ունի $\mathcal{I}$ վերջավոր սահման, անկախ (P) տիրույթի տրոհման եղանակից և անկախ $M_i(\xi_i,\eta_i)$ կետերի ընտրությունից՝

$$\mathcal{I}=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot P_i, \tag{6.2}$$

ապա $\mathcal{I}$ թվին անվանում են $f(x,y)$ ֆունկցիայի ***կրկնակի ինտեգրալ*** (P) տիրույթով և նշանակում են

$$\mathcal{I}=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \qquad \text{կամ} \qquad \mathcal{I}=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$$

սիմվոլներով: Այս դեպքում $f(x,y)$-ը կոչվում է ինտեգրելի (P) բազմության վրա:

1. Կրկնակի ինտեգրալի գոյության պայմանը

Ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, հեշտ է ցույց տալ[18], որ ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է:

Որպեսզի ձևակերպենք ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը դիտարկենք Դարբուի ստորին և վերին գումարները՝

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \qquad S=\sum_{i=1}^{n} M_i P_i,$$

---

[17] $P=\{(x,y)\}$ տիրույթի տրամագիծ է կոչվում $d=\sup\Big(\rho\big(M'(x',y'),M(x,y)\big)\Big)$ թիվը, որտեղ M'-ը և M-ը P-ի ցանկացած կետեր են, իսկ $\rho(M',M)=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$:

[18] Տե՛ս, Վ. Հ. Օհանյան, «Մաթեմատիկական անալիզ», մաս II, 2013թ.:

որտեղ m_i-ն և M_i-ն $f(x,y)$-ի ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերն են (P_i)-ում: Ակնհայտ են անհավասարությունները՝

$$s \le \sigma \le S:$$

Դարբուի գումարները, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, ունեն հետևյալ հատկությունները.

Հատկություն I. Շարունակելով (P)-ն (P_i) մասերի բաժանելը, ավելացնելով նոր գծեր նախկին տրոհման գծերին, Դարբուի ստորին գումարը չի փոքրանա, իսկ վերինը չի մեծանա:

Հատկություն II. Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարի, եթե նույնիսկ այդ գումարները համապատասխանում են տարբեր տրոհումների:

Ապացույցը կատարվում է ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում:

Հատկություններ I-ից և II-ից հետևում է ճշգրիտ եզրերի գոյությունը՝

$$I_* = \sup\{s\}, \quad I^* = \inf\{S\}:$$

Ակնհայտ է, որ տեղի ունեն անհավասարություններ՝

$$s \le I_* \le I^* \le S:$$

Օգտվելով վերը նշված փաստերից հեշտ է ապացուցել.

Թեորեմ: Որպեսզի $f(x,y)$-ը լինի ինտեգրելի (P) տիրույթում անհրաժեշտ է բավարար

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s) = 0$$

պայմանը, կամ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i P_i = 0, \tag{6.3}$$

որտեղ ω_i-ն $f(x,y)$ ֆունկցիայի $M_i - m_i$ տատանումն է (P_i) տիրույթում:

2. Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասերը

Սահմանում: Ասում են, որ (L) հարթ կորը ունի 0 մակերես, եթե ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ թիվը $\exists(A)$ բազմանկյուն, այնպիսին, որ $(L) \subset (A)$ և $A < \varepsilon$:

Առանց ապացուցելու ձևակերպենք երկու թեորեմներ.

Թեորեմ I: Եթե $f(x,y)$-ն անընդհատ է (P) քառակուսելի է տիրույթում, ապա այն ինտեգրելի է:

Թեորեմ II: Եթե (P) քառակուսելի տիրույթում որոշված $f(x,y)$ սահմափակ ֆունկցիան ունի վերջավոր թվով խզում 0 մակերես ունեցող կորերի վրա, ապա $f(x,y)$-ը ինտեգրելի է (P)-ում:

3. Կրկնակի ինտեգրալի և ինտեգրելի ֆունկցիաների հատկությունները

Հատկություն 1: Եթե (P)-ում որոշված $f(x,y)$ ինտեգրելի ֆունկցիայի արժեքները կամայական եղանակով փոփոխենք (P)-ում ընկած ցանկացած (L) կորի վրա, որը ունի 0 մակերես (չխախտելով փոփոխված ֆունկցիայի սահմանափակությունը), ապա նոր ստացված ֆունկցիան նույնպես կլինի ինտեգրելի և նրա ինտեգրալը հավասար կլինի $f(x,y)$-ի ինտեգրալին:

Այս պնդումը ապացուցելու համար բավական է կազմել ինտեգրալային գումարներ և անցնել սահմանի, երբ $\lambda \to 0$:

Հատկություն 2: Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիայի որոշման (P) տիրույթը 0 մակերես ունեցող (L) կորով տրոհենք (P') և (P'') տիրույթների, ապա $f(x,y)$-ի (P)-ում ինտեգրելի լինելուց հետևում է նրա ինտեգրելիությունը (P')-ում և (P'')-ում և հակառակը:

Ընդ որում՝

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P')} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(P'')} f(x,y)dxdy:$$

Ապացույցն ակնհայտ է:

Հատկություն 3: Եթե $f(x,y)$-ը ինտեգրելի է (P)-ում, $k = const$, ապա $k \cdot f(x,y)$-ը նույնպես ինտեգրելի է (P)-ում և տեղի ունի հավասարություն՝

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = k \cdot \iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$$

Ապացույցը հետևում է կրկնակի ինտեգրալի սահմանումից:

Հատկություն 4: Եթե $f(x,y)$-ը և $g(x,y)$-ը (P) տիրույթում ինտեգրելի ֆունկցիաներ են, ապա (P)-ում ինտեգրելի են նաև $f(x,y) \pm g(x,y)$ ֆունկցիաները և տեղի ունեն հավասարություններ՝

$$\iint\limits_{(P)} \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{(P)} g(x,y)dxdy:$$

Հատկություն 5: Եթե (P) տիրույթում $f(x,y)$ և $g(x,y)$ ինտեգրելի ֆունկցիաները բավարարում են $f(x,y) \leq g(x,y)$ պայմանին, ապա

$$\iint_{(P)} f(x,y)dxdy \leq \iint_{(P)} g(x,y)dxdy:$$

Հատկություն 6: Եթե $f(x,y)$-ը ինտեգրելի է (P)-ում, ապա $|f(x,y)|$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է (P)-ում և տեղի ունի անհավասարություն՝

$$\left|\iint_{(P)} f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_{(P)} |f(x,y)|dxdy: \tag{6.4}$$

Ապացույց: (P_i) տիրույթում $|f(x,y)|$-ի տատանումը նշանակենք ω_i^*-ով, իսկ $f(x,y)$-ինը՝ ω_i-ով: Ակնհայտ է, որ $\omega_i^* \leq \omega_i$:

Հետևաբար

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^* P_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i:$$

Աջ մասի գումարը ձգտում է զրոյի (տե՛ս 6.3), հետևաբար զրոյի է ձգտում նաև ձախ մասը, այսինքն՝ $|f(x,y)|$-ը ինտեգրելի է (P)-ում: Իսկ (6.4) անհավասարությունը ստացվում է

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)P_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i,\eta_i)|P_i$$

անհավասարությունում սահմանի անցումից, երբ $\lambda \to 0$:

Հատկություն 7: Եթե $f(x,y)$-ը բավարարում է

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

անհավասարություններին, ապա

$$mP \leq \iint_{(P)} f(x,y)dxdy \leq MP: \tag{6.5}$$

Ապացույց: Ունենք ակնհայտ առնչություններ՝

$$m \cdot P_i \leq f(\xi_i,\eta_i) \cdot P_i \leq M \cdot P_i, \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

Գումարելով այս անհավասարությունները և անցնելով սահմանի՝ երբ $\lambda \to 0$-ի, կստանանք (6.5)-ը:

(6.5)-ի բոլոր մասերը բաժանելով P-ի վրա՝ կստանանք

$$m \le \frac{\iint_{(P)} f(x,y)dxdy}{P} \le M: \qquad (6.6)$$

Եթե (6.6)-ում միջին արտահայտությունը նշանակենք μ-ով, կունենանք

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \mu \cdot P, \quad (m \le \mu \le M), \qquad (6.7)$$

որը կոչվում է թեորեմ միջին արժեքի մասին:

Եթե $f(x,y)$-ը անընդհատ է (P)-ում, իսկ m-ը և M-ը նրա փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են, ապա (P)-ում $\exists(\bar{x},\bar{y})$ կետը այնպիսին է, որ $\mu = f(\bar{x},\bar{y})$ և (6.7)-ը կընդունի

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = f(\bar{x},\bar{y}) \cdot P, \ (m \le \mu \le M) \qquad (6.8)$$

տեսքը: Նշենք, որ $f(\bar{x},\bar{y})$ թվին անվանում են $f(x,y)$ ֆունկցիայի միջին արժեք (P) տիրույթում:

6.2. Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը

1. Կրկնակի ինտեգրալի արտահայտումը հաջորդական ինտեգրալով, երբ տիրույթը ուղղանկյուն է

Թեորեմ: Դիցուք $f(x,y)$-ը որոշված է $(P) =$ $[a,b;c,d]$ուղղանկյունում: Եթե 1) $f(x,y)$-ը ինտգերելի է (P)-ում և 2) $[a,b]$ միջակայքին պատկանող կամայական x-ի դեպքում $f(x,y)$-ը ըստ y-ի ինտեգրելի է $[c,d]$ միջակայքում, ապա գոյություն ունի

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \equiv \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \qquad (6.9)$$

հաջորդական ինտեգրալը և տեղի ունի հավասարություն՝

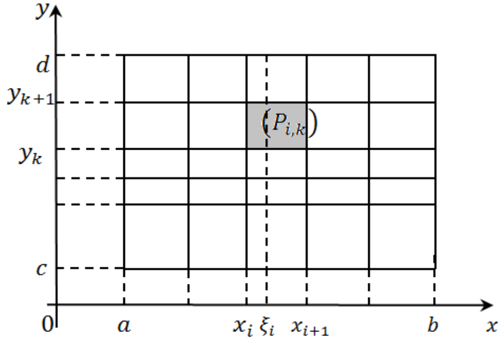
$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy \equiv \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy: \qquad (6.10)$$

Ապացույց: $[a,b]$ և $[c,d\ ]$ միջակայքերը տրոհենք մասերի՝

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k < y_{k+1} < \cdots < y_m = d:$$

Եթե տրոհման կետորով տանենք զուգահեռ ուղիղներ համապատասխանաբար oy և ox առանցքներին, ապա (P)-ն կտրոհվի $(P_{i,k})$ ուղղանկյունների (գծ. 6.2)՝

$$(P_{i,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}], \quad (i = 0,1, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots, m-1):$$



(գծ. 6.2)

Եթե $m_{i,k}$ և $M_{i,k}$-ով նշանակենք համապատասխանաբար $f(x,y)$-ի ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերը $(P_{i,k})$ ուղղանկյունում, ապա այդ ուղղանկյան բոլոր (x,y) կետերի համար կունենանք

$$m_{i,k} \le f(x,y) \le M_{i,k}: \tag{6.11}$$

$[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում հաստատագրենք x-ը նրան տալով ξ_i արժեք և $[y_k, y_{k+1}]$ միջակայքում (6.11) ինտեգրելով ըստ y-ի՝ կստանանք

$$m_{i,k}\Delta y_k \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \le M_{i,k}\Delta y_k, \tag{6.12}$$

որտեղ $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$:

k-ին տալով 0-ից մինչև $m-1$ արժեքներ և գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \le \int_a^b f(\xi_i, y)dy \le \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k: \tag{6.13}$$

Եթե նշանակենք $\int_c^d f(x,y)dy$-ը $\mathcal{I}(\mathrm{x})$ -ով, ապա (6.13)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\, \Delta y_k \le \mathcal{I}(\xi_i) \le \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\, \Delta y_k: \tag{6.14}$$

(6.14) -ի բոլոր մասերը բազմապատկենք Δx_i-ով, այնուհետև i-ին տալով 0-ից մինչև $n-1$ արժեքներ և ստացված անհավասարությունները գումարելով՝ կստանանք

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\sum_{k=0}^{m-1}m_{i,k}\,\Delta y_k\le\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{I}(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\sum_{k=0}^{m-1}M_{i,k}\Delta y_k: \qquad (6.15)$$

(6.15)-ի եզրային արտահայտությունները $f(x,y)$ ֆունկցիայի Դարբուի s և S գումարներն են, որոնք համապատասխանում են տվյալ տրոհմանը, իսկ միջին արտահայտությունը $[a,b]$ միջակայքում $\mathcal{I}(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարն է: Քանի որ $f(x,y)$-ը ինտեգրելի է (P)-ում, ապա, երբ Δx_i և Δy_k միաժամանակ զրոյի ձգտեն, s-ն և S-ն կձգտեն $\iint_{(P)}f(x,y)dxdy$ թվին: Հետևաբար միջին արտահայտությունը նույնպես կձգտի $\iint_{(P)}f(x,y)dxdy$-ին: Բայց միջին արտահայտության սահմանը $\int_a^b\mathcal{I}(x)dx$ թիվն է:

Այսպիսով,

$$\iint\limits_{(P)}f(x,y)dxdy=\int_a^b\mathcal{I}(x)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

$$\equiv\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy: \qquad (6.16)$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Եթե փոխենք x-ի և y-ի դերերը, ապա (6.16) հավասարության ապացուցման նման կարող ենք ապացուցել նաև հետևյալ հավասարությունը՝

$$\iint\limits_{(P)}f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx: \qquad (6.16^*)$$

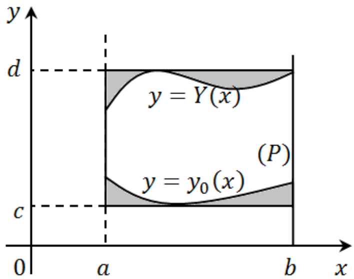
Դիտողություն: Եթե $f(x,y)$-ը ինտեգրելի է (P)-ում, հաստատուն x-ի դեպքում ինտեգրելի է $[c,d]$-ում, և հաստատուն y-ի դեպքում ինտեգրելի է $[a,b]$-ում, ապա միաժամանակ տեղի ունեն և՛ (6.16), և՛ (6.16*) հավասարությունները, որոնցից կհետևի՝

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

համապատասխանությունը, որն անվանում են կրկնակի ինտեգրալում ***կար-գի փոփոխման բանաձև***:

2. Կրկնակի ինտեգրալի բերումը հաջորդական ինտեգրալի կորագիծ տիրույթի դեպքում

Դիցուք xoy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրված է (P) տիրույթ, որը ներքևից սահմանափակված է $y = y_0(x)$ անընդհատ կորով, վերևից $y = Y(x)$ անընդհատ կորով, ձախից $x = a$, իսկ աջից $x = b$ ուղիղ գծերի հատվածներով (գծ. 6.3):



(գծ. 6.3)

Այդ դեպքում տեղի ունի նախորդ թեորեմին համանման թեորեմ. Եթե

1) $f(x,y)$-ը որոշված է և ինտեգրելի (P)-ում և

2) $[a,b]$ միջակայքի ցանկացած հաստատագրված x-ի դեպքում $f(x,y)$-ը ինտեգրելի է $[y_0(x), Y(x)]$ միջակայքում, այսինքն՝ գոյություն ունի

$$\mathcal{I}(x) = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy$$

պարզ ինտեգրալը, ապա գոյություն ունի նաև

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy$$

հաջորդական ինտեգրալը և տեղի ունի հավասարություն՝

$$\iint_{(P)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy: \qquad (6.17)$$

Ապացույց: Նշանակենք $\min_{x\in[a,b]} y_0(x) = c$, $\max_{x\in[a,b]} Y(x) = d$ և դիտարկենք $(R) = [a,b;c,d]$ ուղղանկյունը: (R)-ում որոշենք $f^*(x,y)$ ֆունկցիան հետևյալ օրենքով՝

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f^*(x,y), \text{եթե } (x,y) \in P, \\ 0, \quad\quad \text{եթե } (x,y) \in (R)\backslash(P): \end{cases}$$

$f^*(x,y)$-ի սահմանումից հետևում է հավասարություն՝

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy: \qquad (6.18)$$

Իրոք, եթե x-ը $[a,b]$-ում հաստատագրված է, ապա

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_c^{y_0(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)dy + \int_{Y(x)}^d f^*(x,y)dy =$$

$$= \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)dy: \qquad (6.19)$$

(6.18) և (6.19)-ը ցույց են տալիս, որ (R)-ում $f^*(x,y)$-ի համար տեղի ունեն նախորդ թեորեմի բոլոր պայմանները, հետևաբար՝

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x,y)dy: \qquad (6.20)$$

(6.18) և (6.19) հավասարություններից հետևում է, որ (6.20)-ը համարժեք է (6.17)-ին:

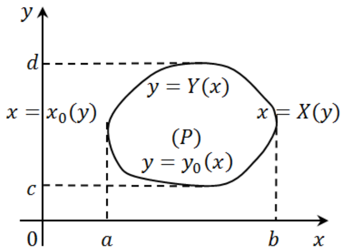
Թեորեմն ապացուցված է:

Եթե (P)-ն տիրույթ է, որը սահմանափակված է $x = x_0(y)$, $x = X(y)$, $(c \leq y \leq d)$ կորերով և $y = c$ ու $y = d$ ուղիղներով, ապա (6.17)-ի փոխարեն կունենանք

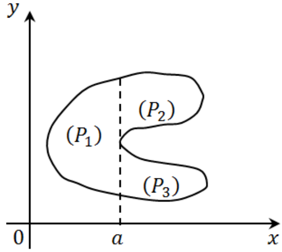
$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)dx, \qquad (6.17^*)$$

այն ենթադրությամբ, որ $f(x,y)$-ը (P)-ում ինտեգրելի է և $\forall y = const$-ի $(y \in [c,d])$ դեպքում $f(x,y)$-ը ըստ x-ի ինտեգրելի է $[x_0(y), X(y)]$ հատվածում:

Դիտողություն: Եթե ինտեգրման (P) տիրույթի եզրը հատվում է ox և oy առանցքներին զուգահեռ ուղիղների հետ ոչ ավելի քան երկու կետերում (ինչպես, օրինակ, պատկերված է (գծ. 6.4)-ի վրա), ապա կրկնակի ինտեգրալը հաշվելիս կարող ենք օգտվել ինչպես (6.17), այնպես էլ (6.17*) բանաձևերից:



(գծ. 6.4)



(գծ. 6.5)

Այսպիսով կարող ենք գրել՝

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)dx: \qquad (6.21)$$

(6.21) հավասարությունը անվանում են կրկնակի ինտեգրալում ***ինտեգրման կարգի փոփոխման*** բանաձև:

Եթե (P) տիրույթի եզրն ունի ավելի բարդ տեսք, ապա այն տրոհում են վերջավոր թվով մասերի, որոնք ունեն քննարկված տեսքերը (գծ. 6.4): Օրինակ, (գծ. 6.5)-ում պատկերված տիրույթը $x = a$ ուղղով տրոհվում է երեք տիրույթների, որոնցից յուրաքանչյուրը (գծ. 6.4) տիրույթի տեսքի է:

Կրկնակի ինտեգրալների հաշվման օրինակներ.

Օրինակ 1. Հաշվել կրկնակի ինտեգրալը.

$$\mathcal{I} = \iint_{(D)} (x\, sin\, y + y\, cos\, x\,)dxdy,$$

որտեղ $D = \left\{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$:

Օգտվենք (6.10) բանաձևից.

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin y + y \cos x)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(-x \cos y + \frac{y^2}{2} \cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-x \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} \cos x\right) - \left(-x \cos 0 + \frac{0^2}{2} \cos x\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{8} \cos x + x\right) dx = \left(\frac{\pi^2}{8} \sin x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}:$$

Պատասխան՝ $\frac{\pi^2}{4}$:

Օրինակ 2. $\mathcal{I} = \iint_{(D)}(x^2 + yx)dxdy$, որտեղ $(D) = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq y\}$:

Նախ $y^2 \leq x \leq y$ պայմաններից հետևում են $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y^2 \leq y$: Վերջին անհավասարություններից հետևում է $(y-1)y \leq 0$, քանի որ $y \geq 0$, ապա $y - 1 \leq 0 \Longrightarrow y \leq 1$: Այսպիսով, $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$:

Ըստ (6.17*) բանաձևի՝

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} (x^2 + yx)dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{yx^2}{2}\right)\Bigg|_{x=y^2}^{x=y}\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{2}\right) - \left(\frac{y^6}{3} + \frac{y^5}{2}\right)\right) dy = \left(\frac{5y^4}{24} - \frac{y^6}{12} - \frac{y^7}{21}\right)\Bigg|_0^1 =$$

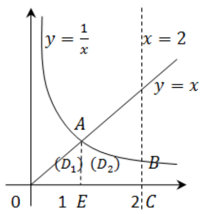
$$= \frac{5}{24} - \frac{1}{12} - \frac{1}{21} = \frac{13}{168}:$$

Պատասխան՝ $\frac{13}{168}$:

Օրինակ 3

$$\mathcal{I} = \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{y^2 + 1}\right) dxdy,$$

որտեղ (D)-ն $y = x$, $y = 0$, $xy = 1$, $x = 2$ գծերով սահմանափակված տիրույթն է:



(գծ. a)

Նախ հարթության վրա պատկերենք (D) տիրույթը (գծ. a): (D)-ն դիտարկենք որպես $(OAE) \equiv (D_1)$ եռանկյան և $(D_2) \equiv (EABC)$ սեղանակերպի միավորում, $\mathcal{I}$-ն՝ որպես երկու ինտեգրալների գումար.

$$\mathcal{I} = \iint_{(D_1)} \left(\frac{x^2}{y^2 + 1}\right) dxdy + \iint_{(D_2)} \left(\frac{x^2}{y^2 + 1}\right) dxdy$$

$$= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2:$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{x^2}{y^2 + 1}\right) dy = \int_0^1 \left((x^2 arct\, g\, y)\big|_{y=0}^{y=x}\right) dx = \int_0^1 (x^2 \operatorname{arctg} x) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (\operatorname{arctg} x) dx^3 = \frac{1}{3}(x^3 \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{x^2 d(x^2+1)}{x^2+1}:$$

Վերջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում $x^2+1=t$, երբ $x=0$, $t=1$, երբ $x=1$, $t=2$:

Այսպիսով,

$$\int_0^1 \frac{x^2 d(x^2+1)}{x^2+1} = \int_1^2 \frac{(t-1)dt}{t} = \int_1^2 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = (t-\ln|t|)|_1^2 =$$

$$= 2 - \ln 2 - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2:$$

Հետևաբար $\mathcal{I}_1 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln 2}{6}$:

Նման ձևով կգտնենք

$$\mathcal{I}_2 = \iint\limits_{(D_2)} \left(\frac{x^2}{y^2+1}\right) dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{x^2}{y^2+1} dy =$$

$$= \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}:$$

Այսպիսով ,

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2 + \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\ln\frac{5}{2} =$$

$$= \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\ln\frac{4}{5}:$$

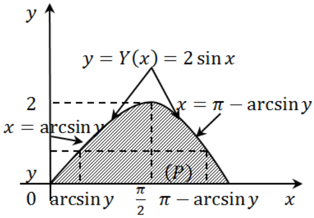
Պատասխան՝ $\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + +\frac{1}{3} + +\frac{1}{6}\ln\frac{4}{5}$:

Օրինակ 4. Փոխել ինտեգրման կարգը.

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{2\sin x} f(x,y)dy:$$

Դիցուք $(P) = \{(x,y) : a \le x \le b, y_0(x) \le y \le Y(x)\}$-ն սեղանակերպ է. $f(x,y)$-ը (P)-ի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիա է, այդ դեպքում (տե՛ս 6.17)՝

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy:$$



(գծ. ա)

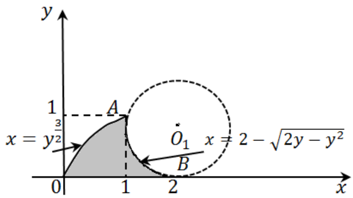
Այս դեպքում (P)-ն ունի (գծ. ա)-ում պատկերված տեսքը:

Ակնհայտ է, որ $(P) = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2, \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y\}$: Ըստ (6.21) բանաձևի՝

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{2\sin x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx:$$

Օրինակ 5. Փոխել ինտեգրման կարգը.

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x, y) dx + \int_1^2 dx \int_0^{1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}} f(x, y) dy:$$



(գծ. բ)

Այս խնդրում (P)-ն (գծ. բ)-ում նշագծված պատկերն է: Երկրորդ հաջորդական ինտեգրալում $y = Y_0(x) = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{4x - x^2 - 3} = 1 - y$ $\Longrightarrow$ $4x - x^2 - 3 = (1 - y)^2$ $\Longrightarrow$ $x^2 - 4x + 3 + (y - 1)^2 = 0$ $\Longrightarrow$ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$, հետևաբար $\widetilde{AB}$-ն $O_1(2, 1)$ կենտրոնով և $R = 1$ շառավղով շրջանագծի աղեղն է, որի հավասարումն է $x = 2 - \sqrt{2y - y^2}$:

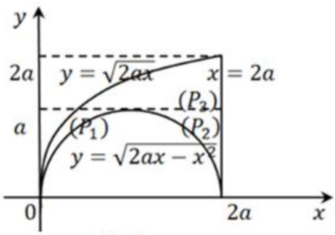
Այսպիսով,

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x, y) dx + \int_1^2 dx \int_0^{1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}} f(x, y) dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2 - \sqrt{2y - y^2}} f(x, y) dx:$$

Օրինակ 6. Փոխել ինտեգրման կարգը.

$$\mathcal{J} = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy, \quad (a > 0):$$



(գծ. գ)

$(P)=\left\{(x,y):\ \ 0\le x\le 2a, \sqrt{2ax-x^2}\le y\le\sqrt{2ax}\right\}$ տիրույթը (գծ. գ) $y=a$ գծով տրոհենք երեք տիրույթների՝ $(P_1),(P_2)$ և (P_3): $y=\sqrt{2ax-x^2}\Longrightarrow y^2+(x-a)^2=a^2$ շրջանագիծ է. որտեղից $x=a\pm\sqrt{a^2-x^2}$:

Ունենք՝ $(P_1)=\left\{(x,y):0\le y\le a,\ \frac{y^2}{2a}\le x\le a-\sqrt{a^2-y^2}\right\}$, $(P_2)=\left\{(x,y):0\le y\le a,\ a+\sqrt{a^2-y^2}\le x\le 2a\right\}$ և $(P_3)=\left\{(x,y):a\le y\le 2a,\ \frac{y^2}{2a}\le x\le 2a\right\}$:

Հետևաբար՝

$$\mathcal{I}=\int\limits_0^a dy\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int\limits_0^a dy\int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx$$

$$+\int\limits_a^{2a} dy\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx:$$

6.3. Կրկնակի ինտեգրալի կիրառությունները ֆիզիկայում

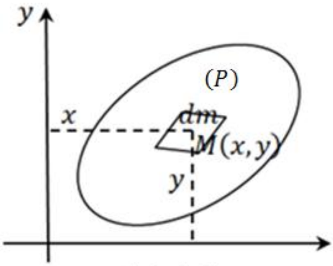
Դիցուք (P)-ն նյութական թիթեղ է: Եթե (ΔP)-ն (P) թիթեղի M կետը պարունակող մասն է, որի զանգվածը հավասար է Δm-ի, իսկ մակերեսը ΔP-ի, ապա, ըստ սահմանման,

$$\frac{\Delta m}{\Delta P}$$

հարաբերությունը կոչվում է (P) թիթեղի (ΔP) մասի մակերևութային միջին խտություն, իսկ նրա սահմանը, երբ Δp-ն ձգտում է 0-ի կոչվում է (P)-ի մակերևութային խտություն M կետում: Նշանակում են՝

$$\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta p}=\rho(M):$$

Ենթադրենք (P) նյութական թիթեղի մակերևութային խտությունը $M(x,y)$ կետում հավասար է $\rho(x,y)$, որտեղ $\rho(x,y)$-ը տրված անընդհատ ֆունկցիա է:



(գծ. 6.6)

Դիտարկենք (P)-ի անվերջ փոքր (dp) մասը, որը պարունակում է M կետը (գծ. 6.6): Քանի որ այդ մասում կարելի է ընդունել, որ թիթեղը համասեռ է, ապա dp-ի զանգվածը հավասար կլինի՝

$$dm = \rho dp: \tag{6.22}$$

Ինտեգրելով (1)-ը (P)-ում՝ կգտնենք թիթեղի զանգվածը

$$m = \iint\limits_{(P)} \rho dxdy: \tag{6.23}$$

dm-ը դիտարկելով որպես նյութական կետ, որը կոորդինատային ox և oy առանցքներից գտնվում է համապատասխանաբար y և x հեռավորության վրա, կստանանք թիթեղի տարրական ստատիկ մոմենտները՝

$$dS_x = ydm = y \cdot \rho(x,y)dp$$

և

$$dS_y = xdm = x \cdot \rho(x,y)dp:$$

Ինտեգրելով այս արտահայտությունները (P) տիրույթում՝ կգտնենք (P) թիթեղի ստատիկ մոմենտները կոորդինատային առանցքների նկատմամբ՝

$$\begin{cases} P_x = \iint\limits_{(P)} y\rho(x,y)dxdy, \\ P_y = \iint\limits_{(P)} x\rho(x,y)dxdy: \end{cases} \tag{6.24}$$

Եթե (P) նյութական թիթեղի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները նշանակենք x_0-ով և y_0-ով, ապա համաձայն սահմանման՝ կունենանք

$$P_x = m \cdot y_0, \quad P_y = m \cdot x_0,$$

հետևաբար՝

$$\begin{cases} x_0 = \frac{P_y}{m} = \frac{1}{m} \cdot \iint\limits_{(P)} x \cdot \rho(x,y)dxdy \\ y_0 = \frac{P_x}{m} = \frac{1}{m} \cdot \iint\limits_{(P)} y \cdot \rho(x,y)dxdy, \end{cases} \tag{6.25}$$

որտեղ m-ը նյութական (P) թիթեղի զանգվածն է, որը հաշվում են (6.23) բանաձևով:

Խնդիր: Գտնել $(P) = \{(x,y) : 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2\}$ քառակուսի նյութական թիթեղի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, որի մակերևութայինի խտությունը՝ $\rho = x + y$:

Լուծում: Օգտվելով (6.23) բանաձևից՝ գտնենք թիթեղի զանգվածը.

$$m = \iint\limits_{(P)} \rho dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (x+y)dy = \int_0^2 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 (2x+2)dx = 8:$$

Օգտվելով (6.24) բանաձևերից՝ գտնենք թիթեղի ստատիկ մոմենտները.

$$P_x = \iint\limits_{(P)} y \cdot \rho(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (xy + y^2)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x + \frac{8}{3}\right) dx = \left(x^2 + \frac{8}{3}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 4 + \frac{16}{3} = \frac{28}{3},$$

$$P_y = \iint\limits_{(P)} x \cdot \rho(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (xy + y^2)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\left(x^2y + \frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 (2x^2 + 2x)dx = \left(\frac{2x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3}:$$

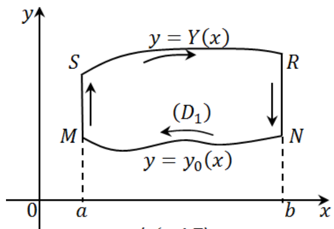
Օգտվելով (6.25) բանաձևերից՝ կգտնենք, որ

$$x_0 = \frac{P_y}{m} = \frac{\frac{28}{3}}{3} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6},$$

$$y_0 = \frac{P_x}{m} = 1\frac{1}{6}:$$

Պատասխան՝ Թիթեղի ծանրության կենտրոնը $M_0\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$ կետն է:

6.4. Գրինի բանաձևը



(գծ. 6.7)

xoy կոորդինատային համակարգում դիտարկենք (D_1) տիրույթ (գծ. 6.7), որը վերևից սահմանափակված է $(SR) : y = Y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ կորով, ներքևից $(MN) : y = y_0(x)$ $(a \leq x \leq b)$ կորով, ձախից՝ (MS) և աջից՝ (NR) հատվածներով, որոնք զուգահեռ են oy առանցքին: Ենթադրենք (D_1)-ում որոշված է $P(x, y)$ ֆունկցիա, որը $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$-ի հետ անընդհատ է (D_1)-ում:

Հաշվենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\iint_{(D_1)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy:$$

Համաձայն (9) բանաձևի՝

$$\iint_{(D_1)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left(P(x, y)\big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)}\right) dx =$$

$$= \int_a^b P\big(x, Y(x)\big)dx - \int_a^b P\big(x, y_0(x)\big)dx:$$

Վերջին երկու որոշյալ ինտեգրալները կարելի է ներկայացնել կորագիծ ինտեգրալների տեսքով՝

$$\int_a^b P\big(x, Y(x)\big)dx = \int_{(SR)} P(x,y)dx, \quad \int_a^b P\big(x, y_0(x)\big)dx = \int_{(MN)} P(x,y)dx:$$

Այսպիսով,

$$\iint_{(D_1)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_{(SR)} P(x,y)dx - \int_{(MN)} P(x,y)dx =$$

$$= \int_{(SR)} P(x,y)dx + \int_{(NM)} P(x,y)dx:$$

Այս հավասարության աջ մասին գումարելով երկու ինտեգրալներ՝ $\int_{(MS)} P(x,y)dx$ և $\int_{(RN)} P(x,y)dx$, որոնք հավասար են զրոյի, կստանանք՝

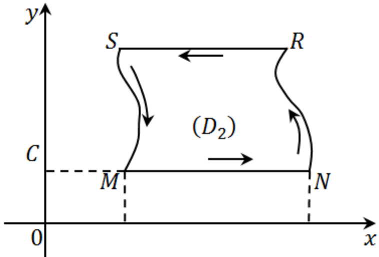
$$\iint_{(D_1)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$$

$$= \int_{(MS)} P(x,y)dx + \int_{(SR)} P(x,y)dx + \int_{(RN)} P(x,y)dx$$

$$+ \int_{(NM)} P(x,y)dx:$$

Այս հավասարության աջ մասը $P(x,y)$ ֆունկցիայի կորագիծ ինտեգրալն է (D_1) տիրույթի (L_1) եզրով, բայց տիրույթի շրջանցման բացասական ուղղությամբ, հետևաբար՝

$$\iint_{(D_1)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_{(L_1)} P(x,y)dx: \qquad (6.26)$$



(գծ. 6.8)

Այժմ ենթադրենք հարթության վրա տրված է (D_2) տիրույթ (գծ. 6.8), որը ձախից սահմանափակված է $x = x_0(y)$ $(c \le y \le d)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկով, աջից՝ $x = X(y)$ $(c \le y \le d)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկով, ներքևից՝ $y = c$ և վերևից՝

$y = d$ ուղիղներով:

Դիցուք $Q(x,y)$-ը և $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$-ը (D_2)-ում անընդհատ ֆունկցիաներ են: Նախորդ դեպքի նման կստանանք

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{(L_2)} Q(x,y)dx \qquad (6.27)$$

բանաձևը, որտեղ (L_2)-ը (D_2)-ի եզրն է:

Վերջապես, եթե (D)-ն ունի և՛ (D_1)-ի, և՛ (D_2)-ի հատկությունները, ապա (D)-ում կարելի է կիրառել և՛ (6.26), և՛ (6.27) բանաձևերը: (6.26)-ից և (6.27)-ից կստանանք՝

$$\int\limits_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy: \qquad (6.28)$$

Այս բանաձևը կոչվում է Գրինի[19] բանաձև:

Օգտվելով Գրինի բանաձևից՝ կարելի է հաշվել պատկերի մակերեսը: Իրոք, եթե (6.28)-ում $Q(x,y)$-ը վերցնենք հավասար x-ի, իսկ $P(x,y) = 0$-ի, ապա կունենանք

$$\int\limits_{(L)} xdy = D: \qquad (6.29)$$

Եթե վերցնենք $P(x,y) = -y$, իսկ $Q(x,y) = 0$, ապա կստանանք

$$-\int\limits_{(L)} ydx = D, \qquad (6.30)$$

(6.29)-ից և (6.30)-ից հետևում է, որ (D) տիրույթի մակերեսը կարելի է հաշվել նաև հետևյալ բանաձևով՝

$$D = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{(L)} xdy - ydx: \qquad (6.31)$$

[19] Ջորջ Գրին (1793-1841) - անգլիացի մաթեմատիկոս:

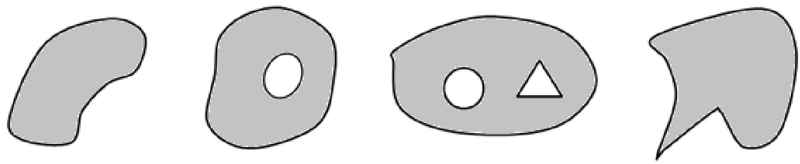
6.5. Կորագիծ ինտեգրալի ճանապարհից անկախ լինելու պայմանը

Դիցուք հարթության (D) կապակցված տիրույթում տրված են $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաներ: Հետաքրքրություն է ներկայացնում հետևյալ հարցը.

$$\int\limits_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

կորագիծ ինտեգրալը ի՞նչ պայմանների դեպքում (D)-ին պատկանող ցանկացած կտոր առ կտոր ողորկ, պարզ (L) փակ կորով հավասար կլինի զրոյի:

Այս հարցը քննարկելիս, մենք կենթադրենք, որ $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ և $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ ֆունկցիաներն անընդհատ են (D)-ում, իսկ (D)-ն սահմանափակ, միակապ տիրույթ է: Հիշեցենք, որ սահմանափակ տիրույթը կոչվում է միակապ, եթե նրա եզրը պարզ, փակ կոր է:



(ա) (բ) (գ) (դ)

(գծ. 6.9)-ում ա)-ն և դ)-ն միակապ տիրույթներ են, իսկ բ)-ն և գ)-ն միակապ տիրույթներ չեն:

Թեորեմ 1: Դիցուք $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ (D) միակապ տիրույթում: Որպեսզի տեղի ունենա հավասարությունը՝

$$\int\limits_{(L)} Pdx + Qdy = 0, \qquad (6.32)$$

որտեղ (L)-ը (D)-ին պատկանող ցանկացած պարզ փակ կոր է, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (D)-ում տեղի ունենա

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (Ա)$$

նույնությունը:

Ապացույցն ակնհայտ է:

Այժմ դիտարկենք կորագիծ ինտեգրալ $(\overset{\frown}{AB})$ կորով՝

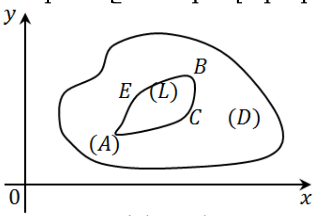
$$\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (6.33)$$

որտեղ կորը պատկանում է (D) տիրույթին:

Հարց է առաջանում, ի՞նչ պայմանի պետք է բավարարեն $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաները, որպեսզի $\int_{(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ինտեգրալը կախված չլինի $(\overset{\frown}{AB})$ գծի տեսքից, այլ կախված լինի միայն A և B կետերից:

Այս հարցին պատասխան է տալիս հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: Նախորդ թեորեմի պայմանների առկայության դեպքում, որպեսզի (6.33) ինտեգրալը կախված չլինի $(\overset{\frown}{AB})$ կորի տեսքից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (D)-ում տեղի ունենա (Ա) պայմանը:



(գծ. 6.10)

Անհրաժեշտությունը: Ենթադրենք (6.33) ինտեգրալը կախված չէ ճանապարհից: (D)-ում վերցնենք որևէ պարզ փակ (L) կոր (գծ. 6.10):

Եթե A-ն և B-ն (L)-ի երկու կետեր են, ապա

$$\int_{(\overset{\frown}{ACB})} Pdx + Qdy = \int_{(\overset{\frown}{AEB})} Pdx + Qdy, \qquad (6.34)$$

որտեղից՝

$$\oint_{(L)} Pdx + Qdy = \int_{(\overset{\frown}{ACB})} + \int_{(\overset{\frown}{BEA})} = 0, \qquad (6.35)$$

(6.35)-ից, ըստ թեորեմ 1-ի, հետևում է (Ա)-ն:

Բավարարություն: Ենթադրենք (D)-ում տեղի ունի (Ա) պայմանը: Պետք է ցույց տալ, որ եթե (D)-ի ցանկացած երկու՝ A և B, կետերը միացնենք երկու պարզ կորերով՝ $(\overset{\frown}{ACB})$ և $(\overset{\frown}{AEB})$, ապա տեղի կունենա (6.34) հավասարությունը: Դա ակնհայտ է, եթե նշված կորերը A-ից և B-ից բացի ուրիշ ընդհանուր կետեր չունեն:

6.6. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ արտահայտության լրիվ դիֆերենցիալ լինելու պայմանը

Ենթադրենք xoy կոորդինատային հարթության (D) տիրույթում տրված են $P(x, y)$ և $Q(x, y)$ ֆունկցիաները: Հարց է առաջանում՝

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{6.36}$$

դիֆերենցիալ արտահայտությունը ե՞րբ կհանդիսանա ինչ-որ $F(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ: Այսինքն՝

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{6.37}$$

Ակնհայտ է, որպեսզի տեղի ունենա (6.37)-ը, պետք է, որ

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad և \quad Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}: \tag{6.38}$$

Թեորեմ 3: Դիցուք $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ ֆունկցիաները անընդհատ են միակապ (D) տիրույթում: Որպեսզի (6.36) դիֆերենցիալ արտահայտությունը լինի լրիվ դիֆերենցիալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա (Ա) պայմանը:

Անհրաժեշտությունը: Եթե (6.36)-ը լրիվ դիֆերենցիալ է, ապա այնպիսի $\exists F(x, y)$ ֆունկցիա, որ

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy, \tag{6.39}$$

որտեղից՝

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y): \tag{6.40}$$

(6.40)-ից՝ կունենանք

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}: \tag{6.41}$$

Մենք կենթադրենք, որ $F(x, y)$-ի խառը ածանցյալները անընդհատ են, հետևաբար

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{Ա}$$

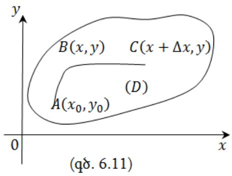
Անհրաժեշտությունն ապացուցված է:

Բավարարություն: Ենթադրենք (Ա)-ն տեղի ունի, այդ դեպքում (6.33)-ը կախված չէ ճանապարհի տեսքից, հետևաբար, եթե $A(x_0,y_0)$-ն և $B(x_0,y_0)$-ն ճանապարհի սկզբնակետն ու վերջնակետն են, ապա

$$\int\limits_{(\breve{AB})} Pdx+Qdy=\int\limits_{A}^{B} Pdx+Qdy=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy:$$

Եթե $A(x_0,y_0)$-ն հաստատագրենք, իսկ B-ն փոխարինենք (D)-ի ցանկացած $M(x,y)$ կետով, ապա ստացված ինտեգրալը կհանդիսանա $M(x,y)$ կետի ֆունկցիա (D)-ում, որը կնշանակենք $F(x,y)$-ով՝

$$F(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy, \qquad (6.42)$$



(գծ. 6.11)

x-ին տանք $\Delta x\neq 0$ աճ: C-ով (գծ. 6.11) նշանակենք $x+\Delta x$ և y կոորդինատներ ունեցող կետը՝ $C(x+\Delta x,y)\in(D)$: Ունենք $F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=\int_{(\breve{BC})}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(\breve{BC})}P(x,y)dx$:

Քանի որ վերջին ինտեգրալներում $y=const$, ապա

$$F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=(R)\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx:$$

$\int_x^{x_0+\Delta x}P(x,y)$ինտեգրալի համար կիրառելով միջին արժեքի թեորեմը՝ վերջին արտահայտությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx=P(x+\theta\cdot\Delta x,y)\Delta x,$$
$$(0\leq\theta\leq 1),$$

որտեղից՝

$$\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}=P(x+\theta\cdot\Delta x,y): \qquad (6.43)$$

Δx -ը ձգտեցնելով զրոյի՝ (12)-ից կստանանք

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y):$$

Համանման ձևով կստանանք՝

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)\text{:}$$

Քանի որ $M(x,y)$-ը (D)-ի ցանկացած կետ է, ապա վերջին հավասարությունները տեղի ունեն (D)-ում:

Այսպիսով,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

ինչը պահանջվում էր ապացուցել:

Օրինակ 1. Հաշվել կորագիծ ինտեգրալը՝

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{(L)} \frac{ydx - xdy}{x^2},$$

որտեղ (L)-ը $A(2,1)$ և $B(1,2)$ կետերը միացնող, և $x = 0$ ուղիղը չհատող կոր է:

Այս խնդրում $P(x,y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x,y) = \frac{-1}{x}$:

Ունենք $\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(-\frac{1}{x}\right)'_x = 1/x^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$, հետևաբար $\frac{y}{x^2}dx + \frac{-1}{x}dy$-ը լրիվ դիֆերենցիալ է:

Գտնենք $F(x,y)$-ը: $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) = \frac{y}{x^2} \Longrightarrow F(x,y) = \int \frac{y}{x^2}dx + \varphi(y)$, որտեղ $\varphi(y)$ որևէ դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

$$F(x,y) = -\frac{y}{x} + \varphi(y) \;\Longrightarrow\; \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y),$$

բայց $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) = -\frac{1}{x}$, այսպիսով, $-\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x} \;\Longrightarrow\; \varphi'(y) = 0$ $\Longrightarrow \varphi(y) = C = const$:

Այսպիսով, $F(x,y) = -\frac{y}{x} + C$:

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{(L)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x} + C\right) = \left(-\frac{y}{x}\right)\Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{2}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) == -\frac{3}{2}\text{:}$$

Օրինակ 2. Հաշվել

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy,$$

որտեղ φ-ն և ψ-ն անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Այս խնդրում $P(x,y) = \varphi(x)$ և $Q(x,y) = \psi(y)$: Ակնհայտ է, որ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$, այսինքն՝ $\varphi(x)dx + \psi(y)dy$-ը լրիվ դիֆերենցիալ է՝

$\exists F(x,y)$, այնպիսին, որ $\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x)$ և $\frac{\partial F}{\partial y} = \psi(y)$, այս հավասարություն-ներից առաջինից կունենանք՝ $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt + h(y)$, որտեղից $\frac{\partial F}{\partial y} = h'(y) = \psi(y) \quad \Longrightarrow \quad h(y) = \int_{y_0}^{y} \psi(\tau)d\tau + C$։ $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt + \int_{y_0}^{y} \psi(\tau)d\tau + C$։

$$\mathcal{J}_2 = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1) =$$

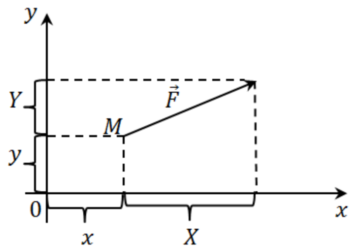
$$= \int_{x_0}^{x_2} \varphi(t)dt + \int_{y_0}^{y_2} \psi(\tau)d\tau + C - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(t)dt - \int_{y_0}^{y_1} \psi(\tau)d\tau - C =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} \psi(\tau)d\tau = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy:$$

Պատասխան՝ $\mathcal{J}_2 = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy$։

6.7. Կորագիծ ինտեգրալի կիրառությունները ֆիզիկայում (ուժային դաշտի աշխատանքը)

Ենթադրենք xoy հարթության վրա որոշված է (D) միակապ տիրույթ։ Դիցուք այդ տիրույթի յուրաքանչյուր M կետի միավոր զանգվածի վրա կիրառված է $\vec{F}$ ուժ, որի մեծությունը և ուղղությունը կախված են միայն M կետի դիրքից։ Այս դեպքում (D) տիրույթը կոչվում է ***ուժային դաշտ,*** իսկ միավոր զանգվածի վրա ազդող $\vec{F}$ ուժը՝ ***դաշտի լարվածություն***։



(գծ. 6.12)

Ակնհայտ է, որ $\vec{F}$ ուժը տրված է, եթե հայտնի են նրա X և Y պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա (գծ. 6.12), որոնք կախված են M կետի x, y կոորդինատներից՝ $X = X(x,y)$, $Y = Y(x,y)$։

Դիցուք (D) ուժային դաշտում տրված է (L) կտոր առ կտոր ողորկ կորը։ Նախորդ գլխում ցույց տրվեց, որ $\vec{F}$ ուժի A աշխատանքը (L) կորով կարելի է հաշվել

$$A = \int_{(L)} X(x,y)dx + Y(x,y)dy \tag{6.44}$$

բանաձևով:

Նշենք այն պայմանը, որի դեպքում $\vec{F}$ ուժի կատարած A աշխատանքը կախված չէ (L) կորի տեսքից, այլ կախված է միայն կորի (ճանապարհի) սկզբնական և վերջնական կետերից:

Այդ պայմանը համարժեք է նրան, որ (6.44) ինտեգրալը կախված չլինի ինտեգրման ճանապարհից, հետևաբար որոնելի պայմանը հետևյալ հավասարությունն է՝

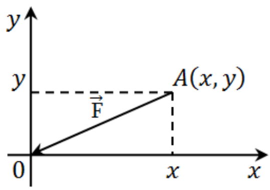
$$\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}: \qquad (6.45)$$

Ենթադրվում է, որ $X(x,y)$ և $Y(x,y)$ ֆունկցիաները և նրանց մասնակի ածանցյալները անընդհատ են (D) տիրույթում (ուժային դաշտում): Բայց (6.45) պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $X(x,y)dx+Y(x,y)dy$ տարրական աշխատանքը լինի ինչ-որ միարժեք $U(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ: Այդպիսի ֆունկցիային անվանում են ***ուժային ֆունկցիա*** կամ ***պոտենցիալ***: Եթե գոյություն ունի այդպիսի ֆունկցիա, ապա դաշտը կոչվում է ***պոտենցիալ դաշտ***:

Պոտենցիալ դաշտում $\vec{F}$ ուժի կատարած աշխատանքը, երբ ուժը տեղափոխվում է $A(x_0,y_0)$ կետից $B(x_1,y_1)$ կետ հավասար կլինի $U(x,y)$ ուժային ֆունկցիայի աճին՝

$$U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0)=U(B)-U(A): \qquad (6.46)$$

Որպես օրինակ դիտարկենք ***նյուտոնյան ձգողականության*** դաշտը: Եթե կոորդինատների $O(0,0)$ կետում տեղադրենք μ զանգված, իսկ $A(x,y)$ կետում՝ 1 զանգված, ապա վերջինս $O(0,0)$-ի կողմից կձգվի $\vec{F}$ ուժով, որի մեծությունը կլինի



(գծ. 6.12*)

$$F=\frac{\mu}{r^2},$$

որտեղ $r=\sqrt{x^2+y^2}$:

Քանի որ $\vec{F}$ ուժի ox և oy առանցքների հետ կազմած անկյունների կոսինուսները, համապատասխանաբար, հավասար են (գծ. 6.12*) $-\frac{x}{r}$ և $-\frac{y}{r}$, ապա $\vec{F}$-ի պրոյեկցիաները հավասար կլինեն

$$X(x,y)=-\frac{\mu x}{r^3}, \qquad Y(x,y)=-\frac{\mu y}{r^3}$$

արտահայտություններին:

Հեշտ է ստուգել, որ $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$, հետևաբար գոյություն ունի այնպիսի $U(x,y)$ ֆունկցիա, որ տեղի ունի

$$dU(x,y)=X(x,y)dx+Y(x,y)dy \tag{6.47}$$

հավասարությունը:

(16)-ից հետևում է, որ

$$\frac{\partial U}{\partial x}=X(x,y)=-\frac{\mu x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3},$$

որտեղից

$$U(x,y)=\frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}+\varphi(y) \tag{6.48}$$

(6.48) հավասարությունից կստանանք՝

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\varphi'(y), \tag{6.49}$$

բայց՝

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Y(x,y)=\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}: \tag{6.50}$$

(6.49)-ից և (6.50)-ից կգտնենք $\varphi'(y)=0$, որտեղից $\varphi(y)=const=C$:

Այսպիսով,

$$U(x,y)=\frac{\mu}{r}+C: \tag{6.51}$$

(6.51) բանաձևով որոշվող $U(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է նյուտոնյան պոտենցիալ:

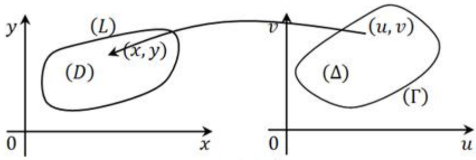
Այսպիսով, նյուտոնյան դաշտում $\vec{F}$ ուժի կատարած աշխատանքը, նյութական կետը M_1 դիրքից M_2-ը տեղափոխելիս հավասար է

$$A=\frac{\mu}{r_{M_2}}-\frac{\mu}{r_{M_1}},$$

որտեղ r_{M_1}-ը և r_{M_2}-ը M_1 և M_2 կետերի հեռավորություններն են O կենտրոնից:

6.8. Փոփոխականների փոխարինումը կրկնակի ինտեգրալում

Ենթադրենք տրված են երկու կոորդինատային հարթություններ՝ XOY և UO_1V: Դիցուք (D)-ն և (Δ)-ն այդ հարթությունների վրա որոշված, սահմանափակ, միակապ տիրույթներ են: (D)-ի եզրը կնշանակենք (L)-ով, իսկ (Δ)-ի եզրը՝ (Γ)-ով: Կենթադրենք, որ (L)-ը և (Γ)-ն կտոր առ կտոր ողորկ կորեր են (գծ. 6.13):



(գծ. 6.1)

Ենթադրենք (Δ) տիրույթում տրված են երկու անընդհատ ֆունկցիաներ՝

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \tag{6.52}$$

որոնք ստեղծում են փոխմիարժեք համապատասխանություն (Δ)-ի և (D)-ի, ինչպես նաև (Γ)-ի և (L)-ի միջև:

Կենթադրենք նաև, որ (6.52) ֆունկցիաները ոչ միայն անընդհատ են (Δ)-ում, այլ ունեն նաև անընդհատ առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներ, և

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{6.53}$$

ֆունկցիոնալ որոշիչը, որը կոչվում է Յակոբիի որոշիչ կամ յակոբյան (Δ) տիրույթի ոչ մի կետում հավասար չէ 0-ի: Եթե (Δ) տիրույթում վերցնենք պարզ, կտոր առ կտոր ողորկ (γ) կոր, ապա (6.52) ձևափոխությունը (D)-ի վրա նրան համապատասխանության մեջ կդնի նույնպիսի պարզ կտոր առ կտոր ողորկ (L) կոր: u և v թվերը, որոնք որոշում են կետի դիրքը (D)-ի վրա կոչվում են կետի կորագիծ կոորդինատներ:

1. Մակերեսի արտահայտումը կորագիծ կոորդինատներով

Ենթադրենք (6.52) օրենքներով որոշված $x(u, v)$ ու $y(u, v)$ ֆունկցիաները բավարարում են վերը նշված բոլոր պայմաններին և բացի դրանից (Δ)-ում գոյություն ունեն

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \quad \text{և} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} \tag{6.54}$$

խառը ածանցյալները, որոնք անընդհատ են (Δ)-ում: Այս պայմանների առկայության դեպքում գտնենք (D) տիրույթի մակերեսը:

Օգտվելով (6.29) բանաձևից՝ կարող ենք գրել

$$D = \int\limits_{(L)} xdy = \int\limits_{(L)} x(u,v)dy(u,v): \tag{6.55}$$

Դիցուք

$$(\Gamma): \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta \quad \text{կամ} \quad \alpha \ge t \ge \beta: \tag{6.56}$$

Այս դեպքում (L)-ի համար կունենանք՝

$$(L): \begin{cases} x = x\big(u(t), v(t)\big) = x(t), \\ y = y\big(u(t), v(t)\big) = y(t): \end{cases} \tag{6.57}$$

Հաշվի առնելով (6.56)-ը և (6.57)-ը՝ (6.55)-ից կստանանք

$$D = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x\big(u(t), v(t)\big) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}v'(t)\right)dt: \tag{6.58}$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ կորագիծ ինտեգրալը՝

$$\int\limits_{(\Gamma)} x(u,v)\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right), \tag{6.59}$$

որտեղ (Γ)-ն շրջանցվում է դրական ուղղությամբ:

Եթե ցանկանանք (6.59) կորագիծ ինտեգրալը բերել որոշյալ ինտեգրալի, ապա կվերադառնանք (6.58)-ին:

Բայց հնարավոր է t պարամետրը α-ից β փոփոխելիս (L)-ի և (Γ)-ի շրջանցումները լինեն հակառակ ուղղություններով, հետևաբար

$$D = \pm \int\limits_{(\Gamma)} x(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}du + x(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}dv, \tag{6.60}$$

(6.60)-ից, կիրառելով Գրինի բանաձևը, կստանանք

$$D = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(x(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(x(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right)dudv =$$

$$= \pm \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)dudv = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \iint\limits_{(\Delta)} |\mathcal{I}(u,v)|dudv: \tag{6.61}$$

2. Փոփոխականի փոխարինում կրկնակի ինտեգրալում

Դիցուք (D) տիրույթում, որի եզրը կտոր առ կտոր ողորկ (L) փակ կորն է, որոշված է $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիա:

Դիտարկենք

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \tag{6.62}$$

կրկնակի ինտեգրալը:

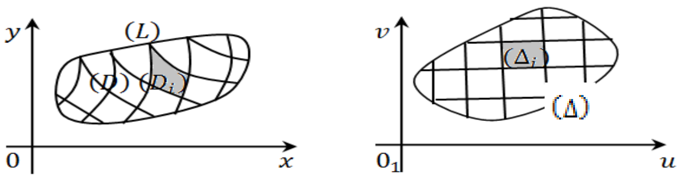
Ենթադրենք (D) տիրույթը (6.52) բանաձևերով՝

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

կապված է uo_1v հարթության (Δ) տիրույթի հետ և պահպանվում են բոլոր այն պայմանները, որոնց առկայությամբ ստացվեց (6.61) բանաձևը:

Այժմ (6.62) ինտեգրալը ներկայացնենք (Δ) տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալով, կատարելով փոփոխականների փոխարինում:

Դրա համար (Δ) տիրույթը կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհենք մասերի՝ (Δ_i), $(i = 1,2,\dots,n)$, այդ դեպքում (D) տիրույթը համապատասխան կորերով կտրոհվի (D_i), $(i = 1,2,\dots,n)$ մասերի (գծ. 6.14):



(գծ. 6.14)

(D_i) տիրույթներից յուրաքանչյուրում ընտրենք $M_i(x_i,y_i)$ կետ և (6.31) ինտեգրալի համար կազմենք ինտեգրալային գումար՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i) \cdot D_i: \tag{6.63}$$

Այնուհետև, օգտվելով կրկնակի ինտեգրալի համար միջին արժեքի թեորեմից, կունենանք

$$D_i = |\mathcal{I}(\bar{u}_i,\bar{v}_i)| \cdot \Delta_i, \tag{6.64}$$

որտեղ $(\bar{u}_i,\bar{v}_i)$-ը (Δ_i) տիրույթի որոշակի կետ է:

Քանի որ σ գումարում (x_i, y_i) կետը կամայական է և σ-ի սահմանը կախված չէ այդ կետի ընտրությունից, ապա մենք կարող ենք որպես x_i և y_i վերցնել

$$x_i = x(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \qquad y_i = y(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$$

թվերը: Այդ դեպքում σ-ն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\big(x(\bar{u}_i, \bar{v}_i), y(\bar{u}_i, \bar{v}_i)\big) \cdot |\mathcal{I}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)|, \tag{6.65}$$

ակնհայտ է, որ σ-ն ինտեգրալային գումարն է

$$\mathcal{I} = \iint\limits_{(\Delta)} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot \mathcal{I}(u,v) du dv \tag{6.66}$$

կրկնակի ինտեգրալի համար:

Քանի որ $f(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ և $\mathcal{I}(u,v)$ ֆունկցիաները անընդհատ են, ապա $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta_i$-ն զրոյի ձգտելիս σ-ն կձգտի $\mathcal{I}$ թվին՝

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \mathcal{I}: \tag{6.67}$$

Մյուս կողմից (6.64) հավասարությունից հետևում է, որ $\tau = \max_{i=\overline{1,n}}\{\mathrm{D}_i\}$-ն նույնպես ձգտում է զրոյի, λ-ն զրոյի ձգտելիս, հետևաբար

$$\lim_{\tau \to 0} \sigma = \lim_{\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot D_i = \iint\limits_{(D)} f(x,y) dx dy: \tag{6.68}$$

(6.67)-ից և (6.68)-ից կստանանք՝

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y) dx dy = \iint\limits_{(\Delta)} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |\mathcal{I}(u,v)| du dv: \tag{6.69}$$

(6.69) բանաձևը կոչվում է փոփոխականի փոխարինման բանաձև կրկնակի ինտեգրալում:

Մասնավոր դեպքում, երբ անցնում ենք բևեռային կոորդինատների՝

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad (\Delta) = \{(r,\varphi) : r_0 \le r \le r_1;\ \alpha \le \varphi \le \beta\},$$

$$\mathcal{I}(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

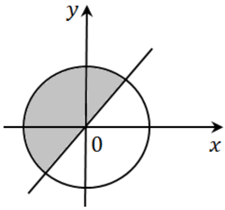
(6.69) բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot rdrd\varphi:$$

Խնդիրներ

Օրինակ 1. Հաշվել կրկնակի ինտեգրալը.

$$\mathcal{I} = \iint\limits_{(D)} (ax+by)dxdy\,, \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2;\ \ x-y \le 0\}:$$



Անցնենք բևեռային կոորդինատային համակարգի՝ $\begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi : \end{cases}$

Ունենք՝ $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \le R^2 \implies 0 \le r \le R$ և $r\cos\varphi - r\sin\varphi \le 0 \implies \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$:

Այսպիսով, համաձայն (6.69) բանձևի՝ կունենանք

$$\mathcal{I} = \int_0^R dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (ar\cos\varphi + br\sin\varphi)rd\varphi:$$

Հաշվենք ներքին ինտեգրալը՝

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r^2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)d\varphi = r^2(a\sin\varphi - b\cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}(b-a)r^2:$$

Հաշվենք $\mathcal{I}$-ն.

$$\mathcal{I} = \int_0^R \left(\sqrt{2}(b-a)\cdot r^2\right)dr = \sqrt{2}(b-a)\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^R == \frac{\sqrt{2}}{3}(b-a)R^3:$$

Օրինակ 2. Հաշվել ինտեգրալը.

$$\mathcal{I} = \iint\limits_{(D)} \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy\,, \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le ax;\ a > 0\}:$$

Անցնենք բևեռային համակարգի՝ $\begin{cases} x = rco\,s\,\varphi\,, \\ y = rsi\,n\,\varphi : \end{cases}$

Այդ համակարգում $x^2 + y^2 \leq ax$ -ին կհամապատասխանի $r^2 \leq a \cdot r\cos\varphi \Longrightarrow\ r \leq a\, cos\,\varphi \quad \Longrightarrow 0 \leq r \leq a\, cos\,\varphi$: Մյուս կողմից $x^2 + y^2 \leq ax\ \Longrightarrow\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y-0)^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2$:

Ակնհայտ է, որ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ և $0 \leq r \leq a\cos\varphi$:

Այսպիսով,

$$\mathcal{I} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\,cos\,\varphi} \frac{r^2\sin^2\varphi}{r^2} rdr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} rdr,$$

Ունենք՝

$$\int_0^{a\cos\varphi} rdr = \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{a\cos\varphi} = \frac{a^2\cos^2\varphi}{2},$$

հետևաբար

$$\mathcal{I} = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi == \frac{\pi a^2}{16}:$$

Վարժություններ

Հաշվել կրկնակի ինտեգրալը.

1. $\iint_{(D)}(x-y)dxdy$, որտեղ (D)-ն $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$ գծերով սահմանափակված տիրույթն է: Պատասխան՝ $\frac{64}{15}$:

2. $\iint_{(D)}(\cos 2x + \sin y)dxdy$, որտեղ (D)-ն $x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y - \pi = 0$ գծերով սահմանափակված տիրույթն է: Պատասխան՝ $\frac{1}{4}\left(\pi + 1 - 2\sqrt{2}\right)$:

3. $\iint_{(D)}\sqrt{y^2 - x^2}dxdy$, որտեղ (D)-ն $y = 1$, $y = x$, $y = -x$ գծերով սահմանափակված տիրույթն է: Պատասխան՝ $\frac{\pi}{15}$:

Փոխել ինտեգրման կարգը.

4. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$: Պատասխան՝ $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx$:

5. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$:

Պատասխան՝ $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$:

6. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$:

Պատասխան՝ $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$:

7. Հաշվել $y^2 = 4x + 4$ և $y^2 = -2x + 4$ պարաբոլներով սահմանափակված նյութական թիթեղի ($\rho(x,y) = 1$) ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Պատասխան՝ $x_0 = \frac{2}{5}$, $y_0 = 0$:

8. Հաշվել $x = 2$, $y = 2$, $x + y = 2$ ուղիղներով սահմանափակված համասեռ ($\rho(x,y) = 1$) նյութական թիթեղի իներցիայի մոմենտը OX առանցքի նկատմամբ: Պատասխան՝ $\mathcal{I}_x = 4$:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ հաշվել ինտեգրալը.

9. $\iint_{(D)} \cos\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$, որտեղ $(D) == \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$: Պատասխան՝ $-\frac{4}{\pi}$:

10. $\iint_{(D)} \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}$, որտեղ $(D) = \{(x,y) : 9 \le x^2 + y^2 \le 25\}$: Պատասխան՝ $\pi \ln 3$:

11. $\iint_{(D)} \frac{y^2dxdy}{x^2+y^2}$, որտեղ $(D) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le ax\}$, $a > 0$: Պատասխան՝ $\frac{\pi a^2}{16}$:

12. $\iint_{(D)} xdxdy$, որտեղ $(D) = \{(x,y) : ax \le x^2 + y^2 \le 2ax,\ y \ge 0\}$, $a > 0$: Պատասխան՝ $\frac{7\pi a^3}{16}$:

13. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y}dy$: Պատասխան՝ $\frac{16\sqrt{2}}{15}$:

Ցուցում: Նախ տրված հաջորդական ինտեգրալը ներկայացնել (D) տիրույթում կրկնակի ինտեգրալի տեսքով, որտեղ $(\mathrm{D}) = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) : \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \le 2\mathrm{y},\ \mathrm{x} \ge 0\}$ կիսաշրջանն է:

ԳԼՈՒԽ VII
ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՍ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

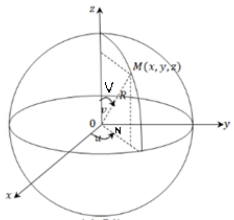
7.1. Մակերևույթ, մակերևույթի մակերես

Սահմանում: Եռաչափ տարածության կետերի $(S) = \{M(x, y, z)\}$ բազմությունը, որոնց կոորդինատները երկու փոփոխականների ֆունկցիաներ են՝

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in (\Delta) \subset R^2, \\ z = z(u, v), \end{cases} \tag{7.1}$$

կոչվում է մակերևույթ:

(S)-ը կոչվում է ***ողորկ մակերևույթ***, եթե (7.1) ֆունկցիաները (Δ) տիրույթում ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: u և v փոփոխականները կոչվում են $M(x, y, z)$ կետի ***կորագիծ կոորդինատներ***: (7.1)-ին անվանում են (S) մակերևույթի ***պարամետրական հավասարումներ***:



(գծ. 7.1)

Օրինակ, եռաչափ տարածության մեջ $O(0, 0, 0)$ կենտրոն և R շառավղով (S) գնդային մակերևույթի կամայական $M(x, y, z)$ կետի x, y, z (գծ. 7.1) կոորդինատների համար ունենք $ON = R \cdot \sin v$, $x = ON \cdot \cos u$, $y = ON \cdot \sin u$, $z = R \cdot \cos v$, որտեղից՝

$$\begin{cases} x = R \sin v \cos u\,, \\ y = R \sin v \sin u\,, \\ z = R \cos v : \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ (S)-ի բոլոր կետերը կստացվեն, եթե u-ն փոփոխվի 0-ից 2π և v -ն՝ 0-ից π, այսինքն՝ $(\Delta) = [0, 2\pi; 0, \pi]$ ուղղանկյունն է:

Մակերևույթը կարող է տրված լինել նաև

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \text{կամ} \qquad z = \varphi(x, y):$$

հավասարումներով: Վերջին տեսքը կոչվում է մակերևույթի հավասարում բացահայտ տեսքով:

Նախքան կոր մակերևույթի մակերեսի սահմանելը նշենք մի քանի հայտնի փաստեր:

1) Մակերևույթի շոշափող հարթություն և նորմալ:

Ենթադրենք (7.1) հավասարումներով տրված (S) մակերևույթի $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը ***եզակի*** կետ չէ:

Այսինքն՝

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

ֆունկցիոնալ մատրիցի

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \tag{7.3}$$

որոշիչներից առնվազն մեկը M_0-ին համապատասխան $N_0(u_0, v_0) \in (\Delta)$ կետում հավասար չէ զրոյի:

Եթե, օրինակ, $N_0(u_0, v_0)$ կետում C-ն զրոյից տարբեր է, ապա (7.1)-ից հետևում է, որ $N_0(u_0, v_0)$-ին համապատասխան $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում (7.1)-ը կարելի է ներկայացնել

$$z = f(x, y) \tag{7.4}$$

բացահայտ տեսքով:

Ապացուցված է, որ նշված պայմանների առկայության դեպքում (S) մակերևույթն ունի շոշափող հարթություն, որը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0): \tag{7.5}$$

Ակնհայտ է, որ M_0 կետում (S)-ի նորմալ կհանդիսանա $\vec{n} = \{A, B, C\}$ վեկտորը, իսկ $\vec{n}$-ի ուղղորդ կոսինուսները կլինեն

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

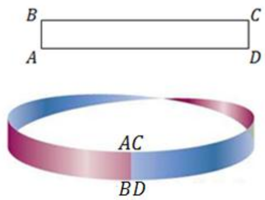
թվերը:

2) Մակերևույթի կողմ:

Որոշ դեպքում այս հասկացությունը անկիայտ է, օրինակ, եթե մակերևույթը տրված է $z = f(x, y)$ բացահայտ հավասարումով, ապա կարելի է խոսել մակերևույթի վերին կողմի և ստորին կողմի մասին: Եթե մակերևույթը ինչ-որ սահմանափակ մարմնի եզր է, ապա կարելի է խոսել նրա ներքին և արտաքին կողմերի մասին:

Դիտարկենք (S) ողորկ մակերևույթը և նրա ցանկացած M_0 կետում տանենք նորմալ, և այդ նորմալին վերագրենք երկու հնարավոր ուղղություններից մեկը: Այնուհետև մակերևույթի վրա ընտրենք M_0 կետով անցնող կամայական (L) փակ կոր, որը չի հատում մակերևույթի եզրը: Ենթադրենք M_0-ն շարժվում է (L) կորով: M_0-ի յուրաքանչյուր հաջորդ դիրքում նրան վերագրենք երկու ուղղություններից այն, որի հետ կիամընկնի M_0 կետում տարված անընդհատ շարժվող նորմալը: Հնարավոր է երկու դեպք, կամ շրջանցումից հետո կետը կվերադառնա M_0 դիրքին նորմալի սկզբնական ուղղությամբ կամ հակադիր ուղղությամբ:

Երկրորդ դեպքում մակերևույթը կոչվում է ***միակողմանի***: Միակողմանի մակերևույթի դասական օրինակ է Մյոբիուսի թերթը (գծ. 7.2):



(գծ. 7.2)

Այն ստացվում է $ABCD$ ուղղանկյուն թերթիկից, որը մեկ անգամ պտտում և սոսնձում են այնպես, որ A կետը համընկնի C-ի, իսկ B-ն՝ D-ի հետ: Եթե ստացված «ոլորված օղակը» ներկենք որևէ գույնով, առանց եզրը անցնելու, և վրձինը չկտրենք օղակից, ապա այն կներկվի մեկ գույնով: Միակողմ մակերևույթներ մենք չենք դիտարկելու:

Այժմ ենթադրենք, որ (S)-ի ցանկացած M_0 կետում ընտրված է նորմալի որոշակի ուղղություն, (L)-ը M_0 կետով անցնող, (S)-ի եզրը չհատող որևէ փակ կոր է և M_0 կետը (L) կորով շարժվելիս վերադառնում է ելակետային դիրքին նորմալի ելակետային ուղղությամբ: Այդ դեպքում (S)-ը կոչվում է ***երկկողմ մակերևույթ***:

Դիցուք (S)-ը երկկողմ մակերևույթ է: Նրա վրա վերցնենք կամայական M_0 կետ և այդ կետում (S)-ին տարված նորմալին վերագրենք որոշակի ուղղություն, իսկ (S)-ի վրա վերցնենք մեկ այլ M_1 կետ: M_0-ն միացնենք M_1-ի հետ (S)-ին պատկանող և նրա եզրը չհատող կամայական (L) կորով: $M \in L$ կետը այդ ճանապարհով շարժենք M_0-ից M_1: Ակնհայտ է, որ M կետում տարված նորմալը անընդհատ փոփոխվելով M_1 կետում կունենա որոշակի ուղղություն, որը կախված չէ (L)-ից:

Իրոք, դիտարկենք M_0-ից M_1 տանող (L_1) և (L_2) ճանապարհները: Եթե $M_1(L_1)$ և $M_1(L_2)$-ում նորմալների ուղղությունները տարբեր լինեն, ապա M_0-ից շարժվելով $M_0(L_1)M_1(L_2^{-1})M_0$ փակ կորով և վերադառնալով M_0 կետին կունենանք փոփոխված ուղղությամբ նորմալ, որը հակասում է (S)-ի երկկողմ մակերևույթ լինելուն:

Այսպիսով, երկկողմ մակերևույթի վրա մեկ կետում նորմալի ուղղության ընտրությունը որոշվում է նորմալի ուղղությունը մակերևույթի բոլոր կետերում: Այս դեպքում ասում են, որ (S) մակերևույթը ***կողմնորոշված է:***

Երկկողմ ողորկ մակերևույթի պարզագույն օրինակ է $z = f(x, y)$ բացահայտ հավասարումով տրված (S) մակերևույթը, որտեղ $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$ և $f'_y(x, y)$ ֆունկցիաները անընդհատ են xoy հարթության (D) տիրույթում:

Ակնհայտ է, որ (S)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$(S):\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D: \tag{7.6}$$

Նշանակելով $p(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $q(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$՝ կունենանք

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{vmatrix} = -p, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{vmatrix} = -q,$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1: \tag{7.7}$$

Այստեղից կստացվեն բացահայտ հավասարումով տրված մակերևույթի նորմալի ուղղորդ կոսինուսները՝

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}: \tag{7.8}$$

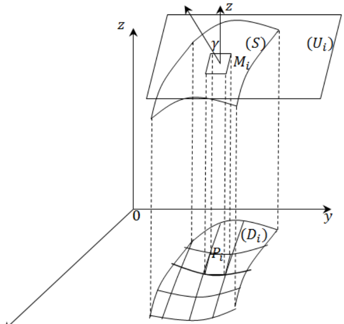
Արմատի առջև ընտրելով նշանը կընտրվի մակերևույթի կողմը՝ վերին, եթե ընտրվել է "+" նշանը, ներքին՝ հակառակ դեպքում:

3) Մակերևույթի մակերես:

Բնական է սպասել, որ կոր մակերևույթի մակերեսը սահմանվի որպես այդ մակերևույթին ներգծած բազմանիստների մակերեսների սահման, երբ բազմանիստի բոլոր նիստերի տրամագծերը ձգտում են զրոյի: Սակայն գերմանացի մաթեմատիկոս Շվարցը նկատեց, որ այնպիսի պարզ մակերևույթին, ինչպիսին շրջանային գլանն է, կարելի է ներգծել բազմանիստ, որի մակերեսը կարող է մեծ լինել ցանկացած դրական թվից[20]:

[20] Տե՛ս, Г. М. Фихтенгольц, "Основы математического анализа", т. II:

Հաշվի առնելով այս հանգամանքը՝ ընտրում են կոր մակերևույթի մակերեսի այլ սահմանում:



(գծ. 7.3)

Ենթադրենք (S)-ը տրված է $z = f(x,y)$, $(x,y) \in (D)$ բացահայտ հավասարումով, որտեղ f-ը անընդհատ է և ունի առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ՝

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}:$$

(D) տիրույթը զրո մակերես ունեցող գծերով տրոհենք n մասերի՝

$$(D_1), (D_2), \dots, (D_n),$$

որոնց վրա, որպես հիմքեր կկառուցենք oz առանցքին զուգահեռ ծնիչներով $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ գլաններ: (D_i), տիրույթում ընտրենք կամայական $P_i(x_i, y_i)$ կետ: M_i-ով նշանակենք (S) մակերևույթի $\big(x_i, y_i; f(x_i, y_i)\big)$ կետը: (S) մակերևույթին $M_i(x_i, y_i, z_i)$ կետով տանենք (U_i) շոշափող հարթություն (գծ. 7.3):

Նշանակենք՝ $(V_i) \cap (S) = (S_i)$, $(V_i) \cap (U_i) = (T_i)$, $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \big(\text{տրամագիծ } (D_i)\big)$: T_i-ն կարելի է դիտարկել որպես S_i-ի մոտավոր արժեք:

(T_i) պատկերների $(i = 1, 2, \dots, n)$ միավորումը «թեփուկային» մակերևույթն է, որի մակերեսը մոտավորապես հավասար կլինի (S)-ի մակերեսին:

Նշանակենք՝

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i: \tag{7.9}$$

Սահմանում: Եթե σ_n գումարը, որը «թեփուկային» մակերևույթի մակերեսն է, λ-ն զրոյի ձգտելիս, անկախ (D) տիրույթի տրոհման եղանակից և անկախ P_i կետերի ընտրությունից, ունի վերջավոր S սահման, ապա այդ սահմանը կոչվում է (S) մակերևույթի մակերես՝

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} T_i:$$

Ապացուցենք, որ S-ը կարելի է ներկայացնել կրկնակի ինտեգրալով՝

$$S=\iint\limits_{(D)}\frac{1}{|\cos\gamma|}dxdy,\qquad(7.10)$$

որտեղ γ-ն (S)-ի նորմալի և oz առանցքի կազմած անկյունն է:

Իրոք, եթե γ_i-ն M_i կետում (S)-ի նորմալի և oz-ի կազմած անկյունն է, ապա

$$D_i=T_i|\cos\gamma_i|,$$

որտեղից՝

$$T_i=\frac{1}{|\cos\gamma_i|}\cdot D_i:$$

Ակնհայտ է, որ σ_n՝

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}T_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\cos\gamma_i|}\cdot D_i,$$

(7.10)-ի համար ինտեգրալային գումարն է:

Քանի որ (S)-ը $z=f(x,y)$, $(x,y)\in(D)$ բացահայտ հավասարումով տրված ողորկ մակերևույթ է, ապա (D)-ում $p(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ և $q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$ ֆունկցիաները անընդհատ են, որտեղից հետևում է նաև $\frac{1}{\cos\gamma}=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ ֆունկցիայի անընդհատությունը:

Հետևաբար

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy:\qquad(7.10^*)$$

Ինչը պահանջվում էր ապացուցել:

Այժմ ենթադրենք (S) ողորկ մակերևույթը տրված է (7.1) պարամետրական հավասարումներով: Դիցուք M-ը (S)-ի որևէ կետ է և այդ կետում $C=x'_u\cdot y'_v-x'_v\cdot y'_u\neq 0$: Ապացուցված է, որ այդ դեպքում գոյություն ունի (S) մակերևույթի M կետը պարունակող (S) մաս, որը ունի հետևյալ հատկությունները՝

1) (S) մակերևույթը կարելի է ներկայացնել $z=f(x,y)$, $(x,y)\in(D)$ տեսքով,

2) եթե (δ)-ն (Δ)-ի այն մասն է, որին համապատասխանում է (S)-ը, ապա (δ)-ում $C\neq 0$:

Նման պնդում կարելի է անել նաև այն դեպքերում, երբ զրո չեն A-ն կամ B-ն:

Եթե (S)-ի պրոյեկցիան xoy հարթության վրա նշանակենք (d)-ով, ապա (տե՛ս (7.10)) կունենանք

$$s = \iint\limits_{(d)} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}: \tag{7.11}$$

(7.11) կրկնակի ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի փոխարինում, կստանանք

$$s = \iint\limits_{(\delta)} \frac{1}{\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \cdot |C| dudv = \iint\limits_{(\delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv: \tag{7.12}$$

Ակնհայտ է նաև, որ $\forall(S)$ սահմանափակ, կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթը կարելի է ներկայացնել որպես վերջավոր թվով (s) մակերևույթների միավորում:

(S)-ի մակերեսը սահմանելով, որպես նրա բոլոր (s) մասերի մակերեսների գումար և գումարելով (7.12) հավասարությունները կստանանք

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv: \tag{7.13}$$

Պարզ է, որ (7.13) բանաձևը կախված չէ (S)-ի տրոհման եղանակից:

Եթե նշանակենք $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E$, $\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = F$, $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G$, ապա հեշտ է ստուգել, որ տեղի ունի նույնություն՝

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

իսկ (7.13) բանաձևը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2} dudv: \tag{7.14}$$

Նշենք, որ E, F և G ֆունկցիաները կոչվում են (S) մակերևույթի ***գաուսյան գործակիցներ***, իսկ $\sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$ արտահայտությունը կոչվում է մակերեսի տարր:

Օրինակ 1. Գտնել $z = xy$ մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որն ընկած է $x^2 + y^2 = a^2$ գլանի ներսում:

Լուծում: Այս խնդրում $f(x,y) = xy$, որտեղից $p = y$, $q = x$, հետևաբար, ըստ (7.10*) բանաձևի,

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy,$$

որտեղ $(D) = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \le a^2\}$ շրջանն է:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad 0 \le \rho \le a, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

կունենանք

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + \rho^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} \left((1 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right) d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left((1 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right):$$

Օրինակ 2. Գտնել հելիկոիդի (պտուտակաձև մակերևույթ)՝ $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = h\varphi$, մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որի համար $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < 2\pi$:

Լուծում: Որոնելի մակերեսը գտնելու համար օգտվենք (7.13) բանաձևից (u-ի և v-ի դերերը այստեղ կատարում են ρ-ն և φ-ն): Ունենք՝

$$x'_\rho = \cos\varphi, \qquad y'_\rho = \sin\varphi, \qquad z'_\rho = 0, \qquad x'_\varphi = -\rho\sin\varphi,$$
$$y'_\varphi = \rho\cos\varphi, \qquad z'_\varphi = h:$$

$$E = \left(x'_\rho\right)^2 + \left(y'_\rho\right)^2 + \left(z'_\rho\right)^2 = 1,$$

$$G = \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = \rho^2 + h^2,$$

$$F = x'_\rho \cdot x'_\varphi + y'_\rho \cdot y'_\varphi + z'_\rho \cdot z'_\varphi = 0,$$

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{\rho^2 + h^2}d\rho: \tag{7.15}$$

Հայտնի է, որ

$$\int\limits_0^a \sqrt{\rho^2 + h^2}d\rho = \left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2 + h^2} + \frac{h^2}{2}\ln\left|\rho + \sqrt{\rho^2 + h^2}\right|\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + h^2} + \frac{h^2}{2}\ln\left|a + \sqrt{a^2 + h^2}\right| - \frac{h^2}{2}\ln|h|: \tag{7.16}$$

Պատասխան՝ $S=\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\cdot\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{|h|}\right)$:

7.2. Առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ

1. Առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալի սահմանումը

Դիցուք ինչ-որ (S) ողորկ (կամ կտոր առ կտոր ողորկ) մակերևույթի վրա, որի եզրը նույնպես ողորկ (կտոր առ կտոր ողորկ) կոր է, որոշված է $f(M)=f(x,y,z)$ ֆունկցիա: (S) մակերևույթը կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհենք n մասերի՝ (S_1), (S_2), …, (S_i), …, (S_n): (S_i), $(i=1,2,\ldots,n)$ մակերևույթի վրա վերցնենք կամայական $M_i(x_i,y_i,z_i)$ կետ, հաշվենք ֆունկցիայի արժեքը այդ կետում և կազմենք գումար՝

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\cdot S_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\cdot S_i,$$

որին կանվանենք ***ինտեգրալային գումար:***

Նշանակենք՝ $\lambda=\max_{\overline{1,n}}\left(\text{տրամագիծ }(S_i)\right)$

Սահմանում: Եթե λ-ն զրոյի ձգտելիս σ ինտեգրալային գումարը, անկախ (S)-ի տրոհման եղանակից և M_i կետերի ընտրությունից, ձգտում է վերջավոր $\mathcal{I}$ սահմանի, ապա $\mathcal{I}$ թիվը կոչվում է $f(M)=f(x,y,z)$ ֆունկցիայի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ (S) մակերևույթով:

Առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալը նշանակում են

$$\iint\limits_{(S)}f(M)dS=\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)dS \tag{7.17}$$

սիմվոլով:

2. Առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալի հաշվումը կրկնակի ինտեգրալի միջոցով:

Թեորեմ Ա: Եթե (S)-ը տրված է (7.1) պարամետրական հավասարումներով, $f(x,y,z)$-ը անընդհատ է (S)-ի վրա, ապա (7.17) ինտեգրալը գոյություն ունի և տեղի ունի հավասարություն՝

$$\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{(\Delta)}f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}dudv: \tag{7.18}$$

Ապացուցում: (S) մակերևույթը տրոհենք (S_1), (S_2), ..., (S_n) մասերի: Քանի որ (S)-ի և (Δ)-ի միջև ստեղծված է փոխմիարժեք համապատասխանություն (տե՛ս (7.1)), ապա (S_i)-ին կհամապատասխանի (Δ_i), ($i = 1, 2, \dots, n$) մաս:

Յուրաքանչյուր (S_i)-ի վրա վերցնենք $M_i(x_i, y_i, z_i)$ կետ, որի համապատասխան կետը (Δ_i)-ի վրա նշանակենք (u_i, v_i), այնպես, որ

$$x_i = x(u_i, v_i), \qquad y_i = y(u_i, v_i), \qquad z_i = z(u_i, v_i): \tag{7.19}$$

(7.17) ինտեգրալի համար կազմենք ինտեգրալային գումար՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S_i:$$

Ըստ (7.14) բանաձևի՝

$$S_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{EG - F^2} dudv:$$

Վերջին ինտեգրալի համար, կիրառելով միջին արժեքի թեորեմը, կունենանք

$$S_i = \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i,$$

որտեղ ($\bar{u}_i, \bar{v}_i$)-ն (Δ_i)-ի կետ է:

Այժմ σ -ն կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\big(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)\big) \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i:$$

Այս տեսքով σ -ն նման է (7.18)-ի ինտեգրալային գումարին՝

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f\big(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)\big) \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i:$$

Դիտարկենք այս երկու գումարների տարբերությունը՝

$$\sigma - \sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\dots) \left(\left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right) \cdot \Delta_i:$$

Դիցուք ε-ը կամայական դրական թիվ է: $\sqrt{EG - F^2}$ ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատության շնորհիվ $\exists \delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ եթե (Δ_i)-ի տրամագիծը փոքր է δ-ից, ապա

$$\left| \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right| < \varepsilon:$$

Հաշվի առնելով $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի սահմանափակությունը՝

$$|f(x,y,z)| \leq L,$$

կունենանք գնահատական՝

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon \cdot L \cdot \Delta,$$

որտեղից հետևում է՝ $\lim_{\lambda \to 0}(\sigma - \sigma^*) = 0$:

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ եթե σ^*-ը ունի վերջավոր սահման, ապա σ -ն ևս ունի նույն սահմանը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Եթե մակերևույթը տրված է

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in (D)$$

բացահայտ հավասարումով, ապա (7.18) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{(D)} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy, \qquad (7.20)$$

որտեղ $p = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$:

Քանի որ $\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{\cos\gamma}$, ապա (7.20) կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{(D)} f\big(x,y,z(x,y)\big)\frac{dxdy}{\cos\gamma}: \qquad (7.20^*)$$

Այն դեպքերում, երբ մակերևույթը տրված է $x = x(y,z)$, կամ $y = y(x,z)$, հավասարումներով, ստանում ենք համապատասխան հավասարություններ՝

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{(D_1)} f(x(y,z),y,z)\frac{dydz}{\cos\alpha}, \qquad (7.21)$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{(D_2)} f(x,y(x,z),z)\frac{dxdz}{\cos\beta}: \qquad (7.22)$$

Դիտողություն: (7.20*), (7.21) և (7.22) բանաձևերում α-ն, β-ն և γ-ն $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ և $z = z(x,y)$ բացահայտ հավասարումներով որոշված ողորկ մակերևույթների համապատասխան նորմալների կազմած անկյուններն են ox, oy և oz առանցքների հետ:

Օրինակ 1. Հաշվել $\mathcal{J} = \iint_{(S)}(x^2+y^2)dS$, որտեղ (S)-ը $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ մարմնի (կոնի) եզրն է:

Լուծում: Այս խնդրում ինտեգրումը կատարվում է ըստ կոնի կողմնային մակերևույթի և հիմքի՝

$$\mathcal{J} = \iint_{(S_1)}(x^2+y^2)dS + \iint_{(S_2)}(x^2+y^2)dS,$$

որտեղ (S_1)-ը կոնի կողմնային մակերևույթն է, (S_2)-ը՝ հիմքը:

(S_1)-ի հավասարումն է՝ $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2},}$ որտեղից $\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{2}$: (S_1)-ի պրոյեկցիան xoy-ի վրա $x^2+y^2 \leq 1$ շրջանն է, որը կնշանակենք (D)-ով: Այսպիսով,

$$\iint_{(S_1)}(x^2+y^2)dS = \iint_{(D)}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}dxdy:$$

Աջ մասի կրկնակի ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = \rho\cdot\cos\varphi$, $y = \rho\cdot\sin\varphi$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, կստանանք՝

$$\iint_{(S_1)}(x^2+y^2)dS = \iint_{(D)}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}:$$

(S_2)-ի վրա $z = 1$, $p = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, որտեղից $\sqrt{1+p^2+q^2} = 1$, $(D) = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$:

Ունենք՝

$$\iint_{(S_2)}(x^2+y^2)dS = \iint_{(D)}(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}:$$

Պատասխան՝ $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$:

Օրինակ 2. Հաշվել առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալը՝

$$\mathcal{I}=\iint\limits_{(S)}(x+y+z)dS,$$

որտեղ $(S)=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0\}$-ը $O(0,0,0)$ կենտրոնով և R շառավղով գնդային մակերևույթի վերին կեսն է:

Գրենք (S)-ի պարամետրական հավասարումները (գծ. 7.1)՝

$$(S)=\begin{cases}x=R\cos u\sin v\,,\\ y=R\sin u\sin v\,,\quad 0\leq u\leq 2\pi,\qquad 0\leq v\leq\dfrac{\pi}{2}:\\ \quad x=R\cos v\,,\end{cases}$$

$\mathcal{I}$-ն հաշվելու համար օգտվենք (7.18) բանաձևից՝

$$\mathcal{I}=\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{(\Delta)}f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}dudv:$$

Այս օրինակում $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=(-R\sin v\cdot\sin u)^2+$ $+(R\sin v\cdot\cos u)^2+0=R^2\sin^2 v,\qquad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=R^2,$ $F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=0:$

Այսպիսով,

$$\mathcal{I}=\iint\limits_{(\Delta)}R(\sin v\cos u+\sin v\sin u+\cos v)\cdot R^2\sin v\,dudv=$$

$$=R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}dv\int_0^{2\pi}(\sin^2 v\cos u+\sin^2 v\sin u+\sin v\cos v)du=$$

$$=R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 v\sin u-\sin^2 v\cos u+u\sin v\cos v)\Big|_{u=0}^{u=2\pi}dv=$$

$$=R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\sin v\cos v\,dv=2\pi R^3\cdot\frac{\sin^2 v}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi R^3:$$

Պատասխան՝ πR^3:

7.3. Երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալ

1. Երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալի սահմանումը

Դիցուք (S)-ը ողորկ, երկկողմ մակերևույթ է: Այդ մակերևույթի կողմերից մեկը հաստատագրենք և դիտարկենք (S)-ի վրա որոշված $\vec{F}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ վեկտոր-ֆունկցիան: Մակերևույթի $M(x,y,z)$ կետում $\vec{F}$ վեկտորի պրոյեկցիան՝ $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, նորմալի ուղղությամբ նշանակենք F_n-ով՝ $F_n=P\cdot\cos\alpha+Q\cdot\cos\beta+R\cdot\cos\gamma$:

Սահմանում: Հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\iint\limits_{(S)}(P\cdot\cos\alpha+Q\cdot\cos\beta+R\cdot\cos\gamma)dS, \tag{7.23}$$

կոչվում է $\vec{F}$ վեկտոր ֆունկցիայի ***երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալ,*** ըստ (S) մակերևույթի ընտրված կողմի, այն նշանակում են

$$\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy \tag{7.24}$$

սիմվոլով:

Մակերևույթի մյուս կողմի համար (7.24) ինտեգրալը վերցնում են հակադիր նշանով:

2. Երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալի հաշվումը

Թեորեմ: Եթե

$(S)=\{(x,y,z):x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v);\ \ (u,v)\in(\Delta)\}$-ը երկկողմ, ողորկ մակերևույթ է, $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ և $R(x,y,z)$ ֆունկցիաները անընդհատ են (S)-ի վրա, ապա տեղի ունի հավասարություն՝

$$\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=$$

$$\begin{aligned}=\pm(R)\iint\limits_{(\Delta)}\Big(P\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot A(u,v)\\+Q\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot B(u,v)+,\\+R\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot C(u,v)\Big)dudv,\end{aligned} \tag{7.25}$$

որտեղ + և - նշանները կախված են (S) մակերևույթի կողմի ընտրությունից, (7.25)-ի աջ մասի ինտեգրալը ռիմանյան սովորական կրկնակի ինտեգրալ է, իսկ $A(u,v)$, $B(u,v)$ և $C(u,v)$ ֆունկցիաները որոշվում են (7.3) բանաձևերով:

Ապացուցում: Քանի որ երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալը սահմանվում է հետևյալ առնչությամբ՝

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS, \qquad (7.26)$$

որի աջ մասը առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ է, իսկ ըստ թեորեմի պայմանների P, Q, R, A, B, C ֆունկցիաները անընդհատ են (Δ) տիրույթում, ապա օգտվելով թեորեմ Ա-ից, կստանանք (7.25)-ը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Եթե (S) ողորկ մակերևույթը տրված է

$$z = z(x,y), \qquad (x,y) \in (D) \qquad (7.27)$$

բացահայտ հավասարումով, $\frac{\partial z}{\partial x} = p(x,y)$ և $\frac{\partial z}{\partial y} = q(x,y)$ ֆունկցիաները անընդհատ են (D)-ում, ապա (7.25)-ը կընդունի

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = (R)\iint\limits_{(D)} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy \qquad (7.28)$$

տեսքը, եթե ընտրված է (S)-ի վերին կողմը:

Եթե ընտրենք (S)-ի ստորին կողմը, կստանանք

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = -(R)\iint\limits_{(D)} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy: \qquad (7.29)$$

Նման ձևով կստացվեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{(D_1)} P(x(y,z),y,z)dydz, \qquad (7.30)$$

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{(D_2)} Q(x,y(x,z),z)dzdx: \qquad (7.31)$$

Օրինակ 1. Հաշվել երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալը.

$\mathcal{I} = \iint_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, որտեղ (S)-ը $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ գնդային մակերևույթի արտաքին մասն է:

Լուծում: Դիտարկենք $\mathcal{I}_1 = \iint_{(S)} zdxdy$ ինտեգրալը: Այն ներկայացնենք

$$\mathcal{I}_1 = \iint\limits_{(S_+)} zdxdy + \iint\limits_{(S_-)} zdxdy$$

տեսքով, որտեղ (S_+)-ը և (S_-)-ը համապատասխանաբար (S) գնդային մակերևույթի վերին և ստորին կեսերի արտաքին մասերն են:

(S_+)-ի վրա $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, (S_-)-ի վրա $z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$:

Դիցուք (D)-ն (S_+)-ի պրոյեկցիան է xoy հարթության վրա: (S_-)-ի արտաքին նորմալը oz-ի դրական ուղղության հետ կազմում է բութ անկյուն, հետևաբար մակերևութային ինտեգրալը կրկնակի ինտեգրալով ներկայացնելիս պետք է պրոյեկցիան վերցնել "-" նշանով: Արդյունքում կունենանք

$$\mathcal{I}_1 = 2 \cdot \iint\limits_{(D)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

որտեղ $(D): x^2+y^2 \le a^2$:

Անցնելով բևեռային համակարգի՝ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ կստանանք՝

$$\mathcal{I}_1 = 2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2-r^2} \cdot rdr = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (a^2-r^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2-r^2) =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=a} \right) d\varphi = -\frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi} (0-a^3)d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3:$$

Քանի որ $\iint_{(S)} xdydz = \iint_{(S)} ydzdx$, ապա $\mathcal{I} = 3 \cdot \mathcal{I}_1 = 4\pi a^3$:

Պատասխան՝ $4\pi a^3$:

Օրինակ 2. Հաշվել $\iint_{(S)} zdxdy$ որտեղ (S)-ը $z^2 = x^2+y^2$, $0 \le z \le H$ կոնական մակերևույթի ներքին կողմն է:

Կոնական մակերևույթի նորմալը oz առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն:

Օգտվելով (7.29) բանաձևից և անցնելով բևեռային համակարգի՝ կստանանք

$$\iint\limits_{(S)} zdxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq H^2} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H r^2 dr = -\frac{2}{3}\pi H^3:$$

Պատասխան՝ $-\frac{2}{3}\pi H^3$:

Ստոքսի բանաձևը

Դիցուք տարածական ինչ-որ (V) տիրույթում, որը պարունակում է (7.1) հավասարումներով տրված (S) երկկողմ, ողորկ, սահմանափակ մակերևույթը, որոշված է $P(x,y,z)$ ֆունկցիա, որն իր առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների հետ միասին անընդհատ է (V) տիրույթում: Այդ դեպքում տեղի ունի բանաձև՝

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}dxdy, \qquad (7.32)$$

որտեղ (L)-ը (S) մակերևույթի եզրն է: Ընդ որում՝ (L)-ի շրջանցման ուղղությունը համապատասխանում է (S)-ի կողմնորոշմանը:

Դիցուք (Δ) տիրույթի եզրը (l) կորն է, որի պարամետրական հավասարումներն են՝

$$u = u(t), \qquad v = v(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta):$$

Եթե (L)-ը (7.1) հավասարումներով որոշվող (S) ողորկ մակերևույթի եզրն է, ապա նրա պարամետրական հավասարումները կլինեն՝

$$x = x(u(t),v(t)), \qquad y = y(u(t),v(t)), \qquad z = z(u(t),v(t)),$$
$$(\alpha \leq t \leq \beta):$$

Այդ դեպքում տեղի ունի հավասարություն՝

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)dx = \int\limits_{(l)} P(x,y,z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right): \qquad (7.33)$$

Իրոք, (7.33)-ի ձախ և աջ մասերը հավասար են նույն որոշյալ ինտեգրալին՝

$$\int\limits_\alpha^\beta P\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)dt:$$

Այժմ (7.33) հավասարության աջ մասը ձևափոխենք՝ օգտվելով Գրինի բանաձևից՝

$$\int\limits_{(l)} P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}du + P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}dv = \iint\limits_{(\Delta)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)dudv: \quad (7.34)$$

Ունենք՝

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + P\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u} -$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - P\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial z}\cdot B - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot C: \quad (7.35)$$

Եթե հաշվի առնենք (7.35)-ը և (7.34)-ը, ապա (7.33)-ը կարող ենք արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$\int\limits_{(L)} Pdx = \iint\limits_{(\Delta)}\left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right)dudv,$$

որը (7.25)-ի շնորհիվ կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int\limits_{(L)} Pdx = \iint\limits_{(S)}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy:$$

(7.32) բանաձևը ապացուցված է:

Նման ձևով՝

$$\int\limits_{(L)} Qdy = \iint\limits_{(S)}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz, \quad (7.36)$$

$$\int\limits_{(L)} Rdz = \iint\limits_{(S)}\frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx, \quad (7.37)$$

որտեղ Q-ն և R-ը x, y, z փոփոխականների ֆունկցիաներ են և բավարարում են նույն պայմաններին, ինչ պայմանների բավարարում է P-ն:

Գումարելով (7.32), (7.36) և (7.37) հավասարությունները՝ կստանանք

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz: \qquad (7.38)$$

(7.38) հավասարությունը կոչվում է Ստոքսի բանաձև:

Մասնավոր դեպքում, եթե (S)-ը xoy հարթության (D) հարթ տիրույթ է, ապա (7.38) բանաձևը կընդունի

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

տեսքը, որը Գրինի բանաձևն է: Այսպիսով, Գրինի բանաձևը Ստոքսի բանաձևի մասնավոր դեպքն է:

Ենթադրենք տարածական (T) բաց տիրույթում տրված են P, Q, R ֆունկցիաները, որոնք անընդհատ են իրենց $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$ ածանցյալների հետ միասին:

Ստոքսի բանաձևից հետևում է.

Թեորեմ: Որպեսզի $\forall(L) \subset (T)$ փակ, պարզ կորի դեպքում

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz \qquad (7.39)$$

ինտեգրալը հավասար լինի զրոյի, անհրաժեշտ են և բավարար հետևյալ պայմանները՝

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}: \qquad (7.40)$$

Նշենք, որ բավարարությունը ակնհայտ է, իսկ անհրաժեշտությունը կարելի է ապացուցել հակասող ենթադրությամբ:

Օրինակ 1. Կիրառելով Ստոքսի բանաձևը՝ հաշվել ինտեգրալը՝

$$\mathcal{I} = \oint\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz,$$

որտեղ (L)-ը $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ շրջանագիծն է, որը շրջանցվում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ, եթե նայելու լինենք $(1, 0, 0)$ կետից:

Լուծում: Օգտվենք (7.38) բանաձևից: Այս խնդրում

$$P(x, y, z) = y, \qquad Q(x, y, z) = z, \qquad R(x, y, z) = x;$$

S-ը $x + y + z = 0$ հարթությունն է:

$$\mathcal{I} = \int\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (0-1)dydz + (0-1)dzdx + (0-1)dxdy =$$

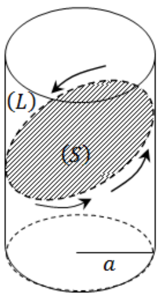
$$= -\iint\limits_{(S)} dydz + dzdx + dxdy = -\iint\limits_{(S)} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)dS,$$

որտեղ $\cos\alpha$-ն, $\cos\beta$-ն և $\cos\gamma$-ն $x + y + z = 0$ հարթության նորմալի ուղղությամբ միավոր վեկտորի կոորդինատներն են: Քանի որ (S)-ի նորմալը $\vec{n} = \{1, 1, 1\}$, ապա

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}:$$

$$\mathcal{I} = -\sqrt{3} \cdot \iint\limits_{(S)} dS = -\sqrt{3} \cdot \text{մակերես}(S) = -\sqrt{3}\pi a^2$$

Պատասխան՝ $-\sqrt{3}\pi a^2$:



գծ. 7.4

Օրինակ 2. Կիրառելով Ստոքսի բանաձևը՝ հաշվել ինտեգրալը՝

$$\mathcal{I} = \oint\limits_{(L)} (y-x)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

որտեղ (L)-ը $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, \end{cases}$ $(a > 0,\ h > 0)$ կորն է, որը շրջանցվում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ, եթե նայելու լինենք ox

առանցքի $(1,0,0)$ կետից:

Լուծում. Ըստ Ստոքսի բանաձևի՝

$$\mathcal{I} = -2 \iint\limits_{(S)} dydz + dzdx + dxdy = -2 \iint\limits_{(S)} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS,$$

որտեղ (S)-ը (գծ. 7.4) (L)-ով (էլիպսով) սահմանափակված հարթ մակերևույթն է, $\cos\alpha$-ն, $\cos\beta$-ն , $\cos\gamma$-ն $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ հարթության $\vec{n}$ նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են:

(S) մակերևույթի պրոյեկցիան xoy հարթության վրա, որը կնշանակենք (D)-ով, $x^2 + y^2 \leq a^2$ շրջանն է: Քանի որ $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ հարթության նորմալը oz-ի դրական ուղղության հետ կազմում է սուր անկյուն, ապա ուղղորդ կոսինուսների բանաձևերում արմատը պետք է վերցնել "+" նշանով:

Մակերևութային ինտեգրալը կրկնակի ինտեգրալով ներկայացնելիս հաշվի առնելով հավասարությունները՝

$$\cos\alpha \cdot dS = \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}} \cdot dS = \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}} \cdot |\mathcal{I}| \cdot dxdy$$

$$= -z'_x dxdy,$$

$$\cos\beta \cdot dS = -z'_y dxdy, \quad \cos\gamma \cdot dS = dxdy,$$

կստանանք՝

$$\mathcal{I} = -2 \iint\limits_{(D)} \left(-z'_x - z'_y + 1\right) dxdy:$$

Քանի որ $z = -\frac{h}{a}x + h$, ապա $z'_x = -\frac{h}{a}$, $z'_y = 0$:

Հետևաբար՝

$$\mathcal{I} = -2 \iint\limits_{(x^2+y^2 \leq a^2)} \left(\frac{h}{a} + 1\right) dxdy = -2\pi a^2 \left(1 + \frac{h}{a}\right):$$

Վարժություններ VII գլխի վերաբերյալ

1) Գտնել $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ կոնի այն մասի մակերեսը, որն ընկած է $x^2 + y^2 = 2x$ գլանի ներսում:

Պատասխան՝ $S = \pi \cdot \sqrt{2}$:

2) Գտնել $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ գնդային մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որն ընկած է $x^2 + y^2 = ay$ գլանի ներսում:

Պատասխան՝ $4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$:

3) Գտնել $z = x$ հարթության այն մասի մակերեսը, որն ընկած է $x^2 + y^2 = 4$ գլանի ներսում և $z \geq 0$:

Պատասխան՝ $S = 2\pi\sqrt{2}$:

Հաշվել առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալները:

4) $\iint_{(S)}(x + y + z)dS$, որտեղ (S)-ը $x + 2y + 4z = 4$ հարթության այն մասն է, որի համար $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$:

Պատասխան՝ $\frac{7\sqrt{21}}{3}$:

5) $\iint_{(S)}(x^2 + y^2 + z^2)dS$, որտեղ (S)-ը $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, $|z| \leq a$ խորանարդի մակերևույթն է:

Պատասխան՝ $40a^4$:

6) $\iint_{(S)} zdS$, որտեղ (S)-ը $\begin{cases} x = u\cos v\,, \\ y = u\sin v\,, \\ z = v, \end{cases}$ $u \in [0,1]$, $v \in [0,2\pi]$ մակերևույթն է:

Պատասխան՝ $\pi^2\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$:

Հաշվել երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալները՝

7) $\iint_{(S)} zdx\,dy$, որտեղ (S)-ը $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z \leq H$ կոնական մակերևույթի ներքևի կողմն է:

Պատասխան՝ $-\frac{2}{3}\pi H^3$: Ցուցում: (S)-ի նորմալը oz-ի հետ կազմում է բութ անկյուն:

8) $\iint_{(S)}(2z - x)dydz + (x + 2z)dzdx + 3zdxdy$, որտեղ (S)-ը $x + 4y + z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ եռանկյան վերին կողմն է:

Պատասխան՝ $\frac{128}{3}$: Ցուցում: (S)-ը ներկայացնել պարամետրական տեսքով՝

$(S): \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 4 - u - 4v, \end{cases}$ $(u,v) \in (\Delta)$, որտեղ $(\Delta) = \left[0,4; 0 \leq v \leq 1 - \frac{u}{4}\right]$, և օգտվել (7.2) և (7.25) բանաձևերից:

9) $\iint_{(S)} x^2y^2zdxdy$, որտեղ (S)-ը $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$ մակերևույթն է:

Պատասխան՝ $-\frac{2\pi\cdot R^7}{105}$:

Հաշվել ինտեգրալները՝ օգտվելով Ստոքսի բանաձևից:

10) $\int_{(L)}(x+z)dx+(x-y)dy+xdz$, որտեղ (L)-ը $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$ էլիպսն է, որի ուղղությունը $(0,0,1)$ վեկտորի ծայրից նայելիս, երևում է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ:

Պատասխան՝ $-\pi ab$:

11) $\int_{(L)} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, որտեղ (L)-ը $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$ գագաթներով եռանկյան եզրն է, որի ուղղությունը $(0,1,0)$ վեկտորի ծայրից նայելիս երևում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ:

Պատասխան՝ $-a^3$:

ԳԼՈՒԽ VIII
ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Դիտարկենք ֆիզիկայի խնդիր, որը լուծելիս հանգում ենք եռակի ինտեգրալի գաղափարին:

Դիցուք $oxyz$ եռաչափ տարածությունում տրված է (V) մարմին, որի յուրաքանչյուր $M(x, y, z)$ կետում հայտնի է նրա խտությունը՝ $\rho(x, y, z)$: Գտնել այդ մարմնի զանգվածը: Այս խնդիրը լուծելու համար (V) մարմինը տրոհենք մասերի՝

$$(V_1), (V_2), \dots, (V_i), \dots (V_n,)$$

և նրանցից յուրաքանչյուրում ընտրենք կամայական կետ՝

$$M_i(x_i, y_i, z_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n):$$

Եթե ընդունենք (V_i),-ում խտությունը հաստատուն և հավասար $\rho(x_i, y_i, z_i)$, ապա (V_i) մասի զանգվածը մոտավորապես կլինի

$$m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot V_i,$$

իսկ ամբողջ մարմնի զանգվածը մոտավորապես կլինի

$$m = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot V_i:$$

Եթե մարմնի բոլոր մասերի տրամագծերը միաժամանակ ձգտեն զրոյի, ապա վերը նշված մոտավոր հավասարությունից կստանանք՝

$$m = \lim \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot V_i$$

և խնդիրը լուծված է:

Այսպիսով, դիտարկված խնդրի լուծումը բերվեց ***ինտեգրալային գումարի*** սահման գտնելուն:

Ընդունված է հետևյալ նշանակումը՝

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x, y, z) dV:$$

Վերջին հավասարության աջ մասն անվանում են եռակի ինտեգրալ:

8.1. Եռակի ինտեգրալի սահմանումը

Ենթադրենք եռաչափ տարածությունում տրված է (V) խորանարդելի տիրույթ: Դիցուք (V) տիրույթում որոշված է $f(x,y,z)$ ֆունկցիա: (V) տիրույթը մակերևույթների ցանցով տրոհենք $(V_1),(V_2),\dots,(V_i),\dots(V_n)$ մասերի, որոնք համապատասխանաբար ունեն V_1, V_2, …, V_n, ծավալներ: (V_i)-ում ընտրենք կամայական $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ կետ, հաշվենք $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի արժեքը M_i կետում՝ $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ և կազմենք գումար՝

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot V_i, \tag{8.1}$$

որը կոչվում է ***ինտեգրալային գումար***:

Նշանակենք $\lambda=\max_{i=\overline{1,n}}(\textit{տրամագիծ}\,(V_i))$

Սահմանում: Եթե λ-ն զրոյի ձգտելիս σ ինտեգրալային գումարը ունի վերջավոր $\mathcal{I}$ սահման անկախ (V) տիրույթի տրոհման եղանակից և անկախ M_i կետերի ընտրությունից, ապա այդ սահմանը կոչվում է $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի ***եռակի*** ինտեգրալ (V) տիրույթում: Այն նշանակում են հետևյալ սիմվոլով՝

$$\mathcal{I}=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz: \tag{8.2}$$

Այս դեպքում ասում են $f(x,y,z)$-ը ինտեգրելի է (V)-ում: Անկիայտ է, որ σ գումարը կունենա վերջավոր սահման միայն սահմանափակ ֆունկցիայի համար:

Դիտարկենք գումարներ՝

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot V_i\,,\qquad S=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot V_i,$$

որտեղ $m_i=\inf_{M\in(V_i)}\{f(M)\}$, $M_i=\sup_{M\in(V_i)}\{f(M)\}$:

s-ը և S-ը կոչվում են Դարբուի ստորին և վերին գումարներ:

Ինչպես որոշյալ ինտեգրալի դեպքում, հեշտ է ապացուցել.

Թեորեմ: Որպեսզի $f(x,y,z)$-ը լինի ինտեգրելի (V)-ում անհրաժեշտ է և բավարար

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$$

պայմանը կամ

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i V_i = 0,$$

որտեղ $\omega_i = M_i - m_i$-ն $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի տատանումն է (V_i) տիրույթում:

Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ ցանկացած անընդհատ ֆունկցիա ինտեգրելի է (V) տիրույթում:

Ապացուցված է հետևյալ պնդումը. Ցանկացած ֆունկցիա, որի բոլոր խզումները գտնվում են (V)-ին պատկանող զրո ծավալ ունեցող վերջավոր թվով մակերևույթների վրա, ինտեգրելի է:

Հետևանք: Եթե (8.2)-ում վերցնենք $f(x,y,z) \equiv 1$, ապա խորանարդելի (V) տիրույթի ծավալի համար կստացվի բանաձև՝

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz:$$

8.2. Ինտեգրելի ֆունկցիայի և եռակի ինտեգրալի հատկությունները

1⁰. Ֆունկցիայի ինտեգրելի լինելը և եռակի ինտզերալի արժեքը կախված չեն զրո ծավալ ունեցող վերջավոր թվով մակերևույթների վրա ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից:

2⁰. Եթե $(V) = (V_1) \cup (V_2)$, երբ (V_1)-ը և (V_2)-ը ընդհանուր ներքին կետեր չունեն, ապա

$$\iiint\limits_{(V)} f dV = \iiint\limits_{(V_1)} f dV + \iiint\limits_{(V_2)} f dV,$$

ընդ որում, եթե f-ը ինտեգրելի է (V)-ում, ապա ինտեգրելի է (V_1)-ում ու (V_2)-ում և հակառակը:

3⁰. Եթե $k = const$ և f-ը ինտեգրելի է (V)-ում, ապա

$$\iiint\limits_{(V)} k \cdot f dV = k \cdot \iiint\limits_{(V)} f dV:$$

4⁰. Եթե f-ը և g-ն ինտեգրելի են (V)-ում, ապա (V)-ում ինտեգրելի են նաև $f \pm g$ ֆունկցիաները, ընդ որում՝

$$\iiint\limits_{(V)} (f \pm g) dV = \iiint\limits_{(V)} f dV \pm \iiint\limits_{(V)} g dV:$$

5^0. Եթե (V)-ում f և g ինտեգրելի ֆունկցիաների համար տեղի ունի $f \leq g$ անհավասարությունը, ապա

$$\iiint\limits_{(V)} f dV \leq \iiint\limits_{(V)} g dV:$$

6^0. Եթե f-ը ինտեգրելի է (V)-ում, ապա $|f|$-ը նույնպես ինտեգրելի է (V)-ում և տեղի ունի անհավասարություն՝

$$\left| \iiint\limits_{(V)} f dV \right| \leq \iiint\limits_{(V)} |f| dV:$$

7^0. Եթե $f(x, y, z)$ ինտգրելի ֆունկցիան (V)-ում բավարարում է

$$m \leq f(x, y, z) \leq M$$

անհավասարություններին, ապա

$$mV \leq \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dV \leq MV:$$

Այս անհավասարություններից կստանանք՝

$$m \leq \frac{\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV}{V} \leq M:$$

Վերջին կոտորակը նշանակելով μ-ով կունենանք

$$\iiint\limits_{(V)} f dV = \mu V,$$

որը կոչվում է ***միջին արժեքի բանաձև***:

Եթե $f(x, y, z)$-ը անընդհատ է (V)-ում, ապա վերջին բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\iiint\limits_{(V)} f dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z},) \cdot V, \tag{8.3}$$

որտեղ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z},)$ կետը պատկանում է (V) տիրույթին:

Թվարկված հատկությունների մի մասի ապացույցներն ակնհայտ են, մնացածները ապացուցվում են այնպես, ինչպես կրկնակի ինտեգրալի համապատասխան հատկությունները:

8.3. Եռակի ինտեգրալի հաշվումը

VII գլխում ցույց տրվեց, որ կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը բերվում է հաջորդական ինտեգրալի: Նման ձևով ցույց է տրվում, որ եռակի ինտեգրալի հաշվումը նույնպես բերվում է հաջորդական ինտեգրալի:

Այս երկու դեպքերը տարբերվում են միայն նրանով, որ կրկնակի ինտեգրալը հաշվվում է երկու որոշյալ ինտեգրալների հաջորդաբար կիրառմամբ, իսկ եռակի ինտեգրալը՝ կրկնակի և որոշյալ ինտեգրալների հաջորդաբար կիրառմամբ:

Դիտարկենք մի քանի դեպքեր.

I Ենթադրենք $(V) = [a, b; c, d; e, g] \equiv (Q)$-ն ուղղանկյուն զուգահեռանիստ է, իսկ $f(x, y, z)$-ը անընդհատ է (Q)-ում, հետևաբար ինտեգրելի է: (Q)-ի պրոյեկցիան yoz հարթության վրա կլինի $(D) = [c, d; e, g]$ ուղղանկյունը:

Հեշտ է ապացուցել (ինչպես կրկնակի ինտեգրալի դեպքում), որ

$$\iiint\limits_{(Q)} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{(D)} f(x, y, z)dydz: \qquad (8.4)$$

Կրկնակի ինտեգրալը փոխարինելով հաջորդական ինտեգրալով, եռակի ինտեգրալի հաշվումը կբերվի երեք պարզ ինտեգրալների հաջորդական հաշվմանը՝

$$\iiint\limits_{(Q)} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^g f(x, y, z)\, dz: \qquad (8.5)$$

Եթե առաջին երկու ինտեգրալները միավորենք որպես կրկնակի ինտեգրալ, ապա կստանանք՝

$$\iiint\limits_{(Q)} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{(E)} dxdy \int\limits_c^d f(x, y, z)dz, \qquad (8.6)$$

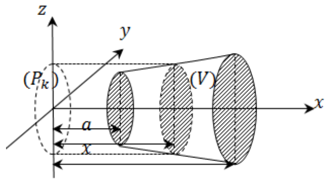
որտեղ $(E) = [a, b; c, d]$: Ընդհանրապես, ակնհայտ է, որ (8.4)-(8.6) հավասարություններում x, y, z փոփոխականների տեղերը կարելի է փոփոխել:

Այժմ ենթադրենք (V) տիրույթը տարբեր է զուգահեռանիստից: Եթե (Q)-ով նշանակենք (V)-ն իր մեջ ընդգրկող մինիմալ չափերի զուգահեռանիստը և (Q)-ում դիտարկենք $f^*(x,y,z)$ ֆունկցիա, որը որոշվում է

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), \text{երբ } (x,y,z) \in (V), \\ \quad 0, \quad \text{երբ } (x,y,z) \in (Q)\backslash(V) \end{cases}$$

օրենքով, ապա խնդիրը կբերվի նախորդ խնդրին:

II Դիցուք (V)-ն այնպիսի տիրույթ է, որն ընկած է $x = a$ և $x = b$ հարթությունների միջև և այդ հարթություններին զուգահեռ ցանկացած հարթություն, որն անցնում է $(x, 0, 0)$, $(a \le x \le b)$ կետով, (V) մարմինը հատում է քառակուսելի պատկերով: Եթե պատկերի պրոյեկցիան zoy հարթության վրա նշանակենք (P_x)-ով (գծ. 8.1), ապա կունենանք՝



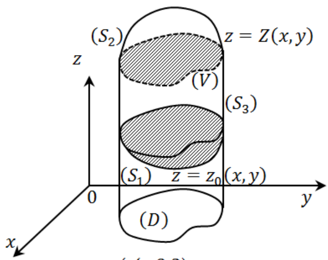
(գծ. 8.1)

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{(P_x)} f(x,y,z)dydz, \qquad (8.4^*)$$

այն ենթադրություններով, որ եռակի և կրկնակի ինտեգրալները գոյություն ունեն:

III Դիցուք (V) մարմինը գլանակերպ է, որը ներքևից և վերևից սահմանափակված է

$$z = z_0(x,y) \qquad \text{և} \qquad z = Z(x,y)$$

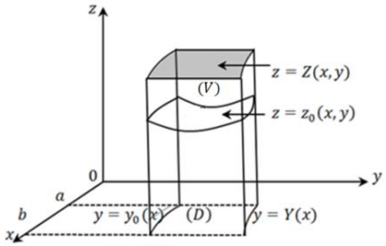


(գծ. 8.2)

մակերևույթներով: (V)-ի պրոյեկցիան xoy հարթության վրա հանդիսանում է (D) քառակուսելի տիրույթը: (V)-ն «կողքերից» սահմանափակված է գլանային մակերևույթով, որի ծնիչները զուգահեռ են oz առանցքին, իսկ ուղղորդ կորը (D)-ի (K) եզրն է (գծ. 8.2):

Այդ դեպքում (8.6) բանաձևի նմանությամբ կունենանք

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz: \qquad (8.6^*)$$

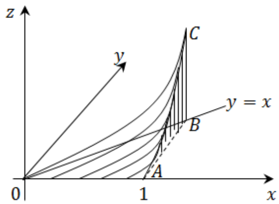


(գծ. 8.3)

Եթե մասնավոր դեպքում (D) տիրույթը կորագիծ սեղան է՝ $(D) = \{(x,y) : a \le x \le b;\ y_0(x) \le y \le Y(x)\}$ (գծ. 8.3), ապա

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)\,dz: \qquad (8.5^*)$$

Եռակի ինտեգրալի հաշվման օրինակներ.



(գծ. 8.4)

Օրինակ 1. Հաշվել $\iiint_{(V)} xy^2z^3dxdydz$ -ը, որտեղ (V)-ն $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ մակերևույթներով սահմանափակված տիրույթն է:

Այս օրինակում $z = xy$ մակերևույթի (OAC) պրոյեկցիան xoy հարթության վրա $(OAB) = (D)$ եռանկյունն է (գծ. 8.4): Համաձայն (8.6*) բանաձևի՝ կունենանք

$$\mathcal{I} = \iiint\limits_{(V)} xy^2z^3dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_0^{xy} xy^2z^3dz =$$

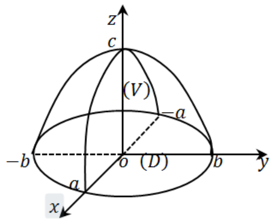
$$= \iint\limits_{(D)} \left(\frac{xy^2z^4}{4}\bigg|_{z=0}^{z=xy} \right) dxdy = \iint\limits_{(D)} \frac{x^5y^6}{4} dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \frac{x^5y^6}{4} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5y^7}{28}\bigg|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \frac{1}{364}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{364}$:

Օրինակ 2. Հաշվել $\iiint_{(V)} zdxdydz$ – ը, որտեղ (V)-ն $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ էլիպսոիդով սահմանափակված մարմնի վերին կեսն է: (V) մարմինը վերևից սահմանափակված է

$$z = C \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$



(գծ. 8.5)

մակերևույթով, որի պրոյեկցիան xoy հարթության վրա (գծ. 8.5) $(D) = \left\{(x, y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ տիրույթն է: Համաձայն (8.6*) բանաձևի՝ կունենանք

$$\mathcal{I} = \iiint\limits_{(V)} z dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_0^{C\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} zdz =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=C\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \right) dxdy = \frac{c^2}{2} \iint\limits_{(D)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy,$$

Քանի որ ընդինտեգրալային ֆունկցիան զույգ է x-ի և y-ի նկատմամբ, իսկ (D)-ն սիմետրիկ է ox և oy առանցքների նկատմամբ, ապա

$$\mathcal{I} = 4 \cdot \frac{c^2}{2} \int\limits_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

$$= 2c^2 \int\limits_0^a \left(\left(y - \frac{x^2 y}{a^2} - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Bigg|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right) dx =$$

$$= 2c^2 \int\limits_0^a \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{bx^2}{a^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{b^3}{3b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx:$$

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ $x = a\sin t$, կստանանք

$$\mathcal{I} = 2c^2 b \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot a\cos t \, dt - \frac{2c^2 b}{a^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot \cos t \cdot a\cos t \, dt -$$

$$-\frac{2c^2b}{3}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\cos t\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=2c^2ab\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-2c^2ab\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{4\cdot 2}dt-$$

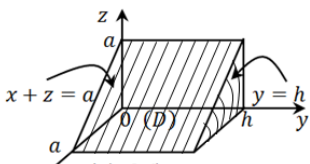
$$-\frac{2c^2ab}{3}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt=2c^2ab\cdot\frac{\pi}{4}-2c^2ab\cdot\frac{\pi}{16}-$$

$$-\frac{2c^2ab}{3}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=2c^2ab\cdot\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)=\frac{\pi abc^2}{4}:$$

Պատասխան՝ $\frac{\pi abc^2}{4}$:

Օրինակ 3. Հաշվել $\iiint_{(V)} xdxdydz$ – ը, որտեղ (V)-ն $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$, $x+h=a$ հարթություններով սահմանափակված պրիզման է:



(գծ. 8.6)

Այս դեպքում (V) մարմինը վերևից սահմանափակված է $z=a-x$ մակերևույթով (հարթությունով), որի պրոյեկցիան xoy հարթության վրա $(D)=\{(x,y):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le h\}$ ուղղանկյունն է (գծ. 8.6): Կիրառելով (8.6*) բանաձևը՝ կստանանք

$$\mathcal{I}=\iiint\limits_{(V)}xdxdydz=\iint\limits_{(D)}dxdy\int\limits_0^{a-x}xdz=$$

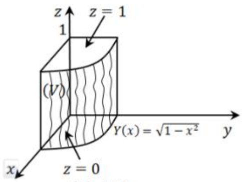
$$=\iint\limits_{(D)}\left(x\cdot z|_{z=0}^{z=a-x}\right)dxdy=\iint\limits_{(D)}x(a-x)dxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^h(ax-x^2)dy=$$

$$=\int\limits_0^a(ax-x^2)hdx=$$

$$= h \cdot \left(a \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3 h}{6}:$$

Պատասխան՝ $\frac{a^3h}{6}$:

Օրինակ 4. Հաշվել $\iiint_{(V)} x \cdot ydxdydz$-ը, որտեղ (V)-ն սահմանափակված է $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 1,\ x \geq 0,$ $y \geq 0$ մակերևույթներով (գծ. 8.7): Օգտվելով (8.5*) բանաձևից՝



(գծ. 8.7)

$$\mathcal{I} = \iiint\limits_{(V)} xydxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^1 xydz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(xyz\Big|_{z=0}^{z=1}\right)dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xydy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x(1 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{8}$:

8.4. Եռակի ինտեգրալի կիրառությունը մեխանիկայում

Դիցուք տրված է (V) մարմինը, որում բաշխված է $\rho(x,y,z)$ անընդհատ խտությամբ զանգված: Այդ մարմնի զանգվածը հաշվում են

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho dV = \iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)dxdydz: \qquad (8.7)$$

բանաձևով:

Ըստ սահմանման տարրական զանգվածի, ստատիկ մոմենտները yoz, zox և xoy կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ կլինեն,

$$dK_{yz} = xdm, \qquad dK_{zx} = ydm, \qquad dK_{yx} = zdm$$

կամ

$$dK_{yz} = x \cdot \rho dV, \qquad dK_{zx} = y \cdot \rho dV, \qquad dK_{yx} = z \cdot \rho dV,$$

հետևաբար (V) նյութական մարմնի ստատիկ մոմենտները կլինեն

$$K_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\rho dV\,, \qquad K_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y\rho dV\,, \qquad K_{yx} = \iiint\limits_{(V)} z\rho dV\,, \qquad (8.8)$$

որտեղից կստացվեն ծանրության $C(\xi, \eta, \zeta)$ կենտրոնի կոորդինատները՝

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x\rho dV}{m}, \qquad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y\rho dV}{m}, \qquad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z\rho dV}{m}: \qquad (8.8)$$

Կոորդինատային առանցքների և կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ իներցիայի մոմենտները որոշվում են համապատասխանաբար հետևյալ բանաձևերով՝

$$\mathcal{I}_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\rho dV\,, \quad \mathcal{I}_y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\rho dV,$$

$$\mathcal{I}_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\rho dV: \qquad (8.9)$$

Օրինակ: Գտնել $x = 0,\ z = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ z + 2z = 3$ հարթություններով սահմանափակված համասեռ $(\rho(x, y, z) = 1)$ մարմնի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Լուծում: Քանի որ $\rho = 1$, ապա

$$m = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 \frac{3-x}{2} dy =$$

$$= \int\limits_0^3 (3-x)dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3\right) = \frac{9}{2}:$$

Օգտվելով (8.9) բանաձևերից՝ գտնենք ծանրության կենտրոնի կոորդինատները՝

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x\rho dxdydz}{m} = \frac{2}{9}\iiint\limits_{(V)} xdxdydz = \frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3 = 1:$$

$$\eta=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 ydy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}dz=\frac{1}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y(3-x)dy=\frac{4}{3}\int_0^3(3-x)dx=$$

$$=\frac{4}{9}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=2:$$

$$\zeta=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}zdz=\frac{2}{9}\int_0^3\frac{(3-x)^2}{8}dx\int_1^3 dy=\frac{4}{9}\int_0^3\frac{(3-x)^2}{8}dx=$$

$$=\frac{1}{18}\left(-\frac{(3-x)^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $C\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$:

8.5. Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը

Դիտարկենք (V) տիրույթը, որը սահմանափակված է

$$(S_1)=\{(x,y,z):z=z_0(x,y),(x,y)\in D\},$$
$$(S_2)=\{(x,y,z):z=Z(x,y),(x,y)\in D\}$$

ողորկ մակերևույթներով և (S_3) գլանային մակերևույթով, որի ծնիչները զուգահեռ են oz առանցքին (գծ. 8.2), իսկ ուղղորդ կորը (D) տիրույթի (K) եզրն է:

Ենթադրենք (V) տիրույթում որոշված է $R(x,y,z)$ ֆունկցիա, որը $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$-ի հետ միասին անընդհատ է (V)-ում և նրա եզրի վրա: Ապացուցենք, որ այս ենթադրությունների դեպքում տեղի ունի հավասարություն՝

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{(S)}Rdxdy,\qquad(8.12)$$

որտեղ (S)-ը (V)-ի եզրն է և ինտեգրումը կատարվում է ըստ մակերևույթի արտաքին կողմի:

Իրոք, համաձայն (8.6*) բանաձևի, կարող ենք գրել՝

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{(D)} R\big(x,y,Z(x,y)\big)dxdy - \iint\limits_{(D)} R\big(x,y,z_0(x,y)\big)dxdy\text{:}$$

Օգտվելով (7.28) և (7.29) բանաձևերից՝ վերջին հավասարությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)dS + \iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)dxdydz,$$

այս հավասարությունը չի խախտվի, եթե նրա աջ մասին գումարենք

$$\iint\limits_{(S_3)} R(x,y,z)dS$$

ինտեգրալը, որի արժեքը զրո է, քանի որ (S_3)-ը գլանային մակերևույթ է: Նշանակելով $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup (S_3)$՝ կստանանք (8.12):

Դիտողություն: (S_1)-ով ինտեգրելիս դիտարկվում է մակերևույթի ***ներքին*** կողմը, (S_2)-ով՝ ***վերին,*** (S_3)-ով՝ արտաքին:

Այսպիսով, վերջնականապես կստանանք՝

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Rdxdy,$$

որտեղ աջ մասի ինտեգրումը դիտարկվում է (V) տիրույթի (S) եզրի արտաքին կողմը:

Հեշտ է տեսնել, որ (8.12)-ը տեղի ունի նաև այնպիսի տիրույթների համար, որոնք կարելի է տրոհել դիտարկված տեսքի մասերի:

(8.12) բանաձևի նման կստանանք՝

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Pdydz, \tag{8.13}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Qdzdx, \tag{8.14}$$

եթե P-ն, $\frac{\partial P}{\partial x}$-ը, Q և $\frac{\partial Q}{\partial y}$-ը անընդհատ են (V)-ում և նրա (S) եզրի վրա:

Գումարելով (8.12), (8.13), (8.14) հավասարությունները՝ կստանանք

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,, \quad (8.15)$$

որը կոչվում է ***Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձև***:

Եթե հաշվի առնենք առաջին և երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալների միջև եղած կապը, ապա (8.15)-ը կարող ենք գրել նաև հտևյալ տեսքով՝

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{(S)} P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\,, \quad (8.16)$$

որտեղ α -ն, β -ն և γ -ն (S) մակերևույթի արտաքին նորմալի կազմած անկյուններն են կոորդինատային առանցքների հետ:

Օրինակներ

1) Գտնել ինտեգրալը՝

$$\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS,$$

որտեղ (S) կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթը (V) սահմանափակ տիրույթի եզրն է:

Ըստ Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևի՝

$$\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right) dV =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} (1+1+1) dxdydz = 3V:$$

Պատասխան՝ $3V$:

2) Դիցուք (S) կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթը (V) սահմանափակ տիրույթի եզրն է:

Կիրառելով Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը՝

$$\iint_{(S)} \frac{\partial u}{\partial x} dydz + \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + \frac{\partial u}{\partial z} dxdy,$$

ինտեգրալը ձևափոխել եռակի ինտեգրալի:

Լուծում: Տրված ինտեգրալը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial x} dydz + \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + \frac{\partial u}{\partial z} dxdy = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS,$$

իսկ վերջին ինտեգրալը, ըստ Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևի, հավասար է

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}\right) dxdydz:$$

Հետևաբար՝

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial x} dydz + \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + \frac{\partial u}{\partial z} dxdy = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}\right) dxdydz:$$

8.6. Փոփոխականների փոխարինում եռակի ինտեգրալում

Ինչպես կրկնակի ինտեգրալում, այնպես էլ եռակիում տեղի ունի կոորդինատային ուղղանկյուն համակարգից անցում նոր կոորդինատային համակարգերի: Վերջիններից հաճախակի կիրառվողներ են գլանային և սֆերիկ կոորդինատային համակարգերը:

Փոփոխականի փոխարինումը եռակի ինտեգրալում կատարվում է հետևյալ կանոնով:

Եթե (x, y, z) տարածության (V) փակ սահմանափակ տիրույթը՝

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

ֆունկցիաներով փոխմիարժեքորեն արտապատկերվում է (u, v, w) տարածության (V^*) տիրույթի վրա, որտեղ $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$-ն անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են և Յակոբիի որոշիչը՝

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

(V^*) տիրույթում հավասար չէ զրոյի, ապա տեղի ունի բանաձև՝

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V^*)} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\cdot|\mathcal{J}|dudvdw\text{:} \qquad (8.17)$$

Նշենք, որ u, v, w թվերը, որոնք միարժեքորեն որոշում են կետի դիրքը xyz տարածությունում կոչվում են այդ կետի ***կորագիծ կոորդինատներ***։ xyz տարածության այն կետերի բազմությունը, որոնց համար կորագիծ կոորդինատներից մեկը պահպանում է հաստատուն արժեք կոչվում է ***կոորդինատային մակերևույթ***։

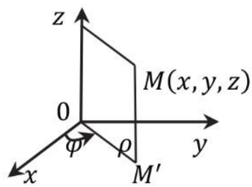
Օրինակներ. 1) Եթե xyz տարածության կետերը $\rho\varphi z$ տարածության կետերի հետ կապված են

$x = \rho\cos\varphi,$

$y = \rho\sin\varphi,$

$z = z,$

$(0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$



(գծ. 8.8)

առնչություններով, ապա ասում են, որ դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգից անցում է կատարվում ***գլանային կոորդինատային*** համակարգի (գծ. 8.8)։

Այս դեպքում Յակոբիի որոշիչը կլինի

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

և (8.17)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V^*)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho d\rho d\varphi dz\text{:} \quad (8.18)$$

Գլանային կոորդինատների դեպքում կոորդինատային մակերևույթները կլինեն.

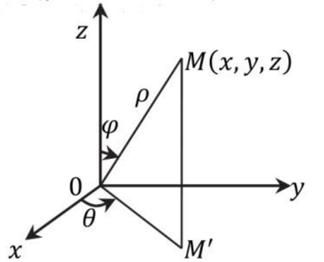
ա) $\rho = const$, որոնք գլանային մակերևույթներ են, որոնց ծնիչները զուգահեռ են oz առանցքին, իսկ ուղղորդ կորերը xoy հարթության վրա գտնվող ρ շառավղով և $O(0,0,0)$ կենտրոնով շրջանագծեր են:

բ) $\theta = const$ հարթությունները, որոնք oz առանցքով անցնող կիսահարթություններ են:

գ) $z = const$ հարթությունները, որոնք xoy հարթությանը զուգահեռ հարթություններ են:

2) Եթե xyz տարածության կետերը $\rho\varphi\theta$ տարածության կետերի հետ կապված են.

$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,$
$y = \rho \sin\theta \sin\varphi,$
$z = \rho \cos\theta,$
$(0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi)$



(գծ. 8.9)

առնչություններով, ապա ասում են, որ դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգից անցում է կատարվում ***սֆերիկ կոորդինատային*** համակարգի (գծ. 8.9):

Այս դեպքում Յակոբիի որոշիչը կլինի՝

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta,$$

և (8.17) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V^*)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\cdot|-\rho^2\sin\theta|d\rho d\varphi dz : (8.19)$$

Սֆերիկ կոորդինատների դեպքում կոորդինատային մակերևույթները կլինեն՝

ա) $\rho = const$, որոնք $O(0,0,0)$ կենտրոնով և ρ շառավղով համակենտրոն գնդային մակերևույթներ են (սֆերաներ),

բ) $\varphi = const$, որոնք շրջանային կոնական մակերևույթներ են, որոնց առանցքը oz-ն է,

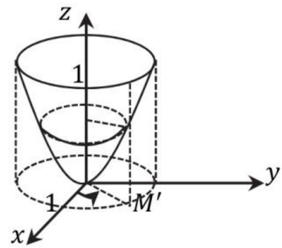
գ) $\theta = const$, որոնք oz առանցքով անցնող կիսահարթություններ են:

Օրինակներ

1. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)}(x^2 + y^2)dxdydz$ ինտեգրալը՝ անցնելով գլանային կոորդինատների, որտեղ (V)-ն $z = x^2 + y^2$ և $z = 1$ մակերևույթներով սահմանափակված տիրույթն է:

Լուծում. Ակնհայտ է, որ $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$: Օգտվենք գլանային կոորդինատներին անցման բանաձևերից՝

$x = \rho\cos\varphi$,
$y = \rho\sin\varphi$,
$z = z$,



Համապատասխան ρ-ին տարածությունում կհամապատասխանի $x^2 + y^2 = \rho^2$ գլանը: z-ը փոփոխվում է $z = \rho^2$-ուց մինչև $z = 1$: Օգտվելով (8.18) բանաձևից՝ կստանանք

$$\mathcal{I} = \iiint\limits_{(V)}(x^2 + y^2)dxdydz = \iiint\limits_{(V)}(\rho^2)\rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 \rho^2 \cdot \rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3 \cdot z)\Big|_{z=\rho^2}^{z=1} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3 - \rho^5)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} d\varphi = = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}:$$

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{\pi}{6}$:

2. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$ ինտեգրալը, որտեղ (V) տիրույթը

$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ գունդն է:

Լուծում: Այս խնդրում հարմար է անցնել սֆերիկ կոորդինատների՝

$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,$

$y = \rho \sin\theta \sin\varphi,$

$z = \rho \cos\theta$:

Ակնհայտ է, որ $(V^*) = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \le \rho \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\}$:

Հետևաբար համաձայն (8.19) բանաձևի՝

$$\mathcal{I} = \iiint\limits_{(V)} (\rho^2) \cdot \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta:$$

Օգտվելով (8.5) բանաձևից՝ կստանանք

$$\mathcal{I} = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\rho^4 \sin\theta) d\theta = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} (-\rho^4 \cos\theta)\big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\varphi =$$

$$= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \big(-\rho^4(-1-1)\big) d\varphi = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho^4) d\varphi = 2\int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 4\pi \int_0^R \rho^4 d\rho = 4\pi \cdot \frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^R =$$

$$= \frac{4}{5}\pi R^5:$$

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{4}{5}\pi R^5$:

Վարժություններ VIII գլխի վերաբերյալ.

1. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)} z dxdydz$ եռակի ինտեգրալը, որտեղ $(V) = \left\{(x, y, z) : 0 \le x \le \frac{1}{2},\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$:

Պատասխան՝ $\frac{7}{192}$:

2. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)} x^2 dxdydz$, որտեղ $(V) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$

Ցուցում: Անցնել սֆերիկ կոորդինատների:

Պատասխան՝ $\frac{4}{15}\pi R^5$:

3. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ – ը, եթե (V)-ն սահմանափակված է $x^2+y^2=2x$ գլանային մակերևույթով և $y=0$, $z=0$, $z=a$ հարթություններով:

Պատասխան՝ $\frac{8}{9}a^2$:

4. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ – ը, եթե (V)-ն $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$ ուղղանկյուն զուգահեռանիստն է:

Պատասխան՝ $\frac{abc}{3}(a^2+b^2+z^2)$:

5. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)} xyzdxdydz$ – ը, եթե (V)-ն սահմանափակված է $x^2+y^2+z^2=1$ գնդային մակերևույթով և $x=0$, $y=0$, $z=0$ հարթություններով:

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{1}{48}$:

6. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ – ը, եթե (V)-ն սահմանափակված է $x^2+z^2=1$ գլանով և $y=0$, $y=1$ հարթություններով:

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{3}{2}\pi$:

Ցուցում: Օգտվել գլանային կոորդինատներից՝ $x=\rho\cos\varphi, y=y, z=\rho\sin\varphi$:

7. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)}(2x+3y-z)dxdydz$ – ը, որտեղ (V)-ն $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$, $(a>0,\ b>0)$ հարթություններով սահմանափակված եռանիստ պրիզման է:

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{ab^2}{12}(10b-3a)$:

8. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz$-ը, որտեղ (V)-ն $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ և $z=2$ մակերևույթներով սահմանափակված մարմինն է:

Պատաասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{16}{3}\pi$:

9. Հաշվել $\mathcal{I} = \iiint_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz$-ը, որտեղ (V)-ն $x^2+y^2+z^2 \le 1$ գունդն է:

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$:

Ցուցում: Օգտվելով սֆերիկ կոորդինատներից.

10. Հաշվել (V) մարմնի ծավալը՝ V-ն, եթե այն սահմանափակված է $hz=x^2+y^2$ և $z=h$, $(h>0)$ մակերևույթներով:

Պատասխան՝ $V = \frac{\pi h^3}{2}$:

Ցուցում: (V) մարմնի ծավալը հաշվում են $V = \iiint_{(V)} dxdydz$ բանաձևով, իսկ ինտեգրալը հաշվելու համար անցնել գլանային կոորդինատների:

11. Հաշվել (V) մարմնի ծավալը, որը սահմանափակված է $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ և $z = x^2 + y^2$ մակերևույթներով:

Պատասխան՝ $\mathcal{I} = \frac{\pi}{6}$:

12. Գտնել $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$ հարթություններով սահմանափակված մարմնի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները $(\rho = 1)$:

Պատասխան՝ $\bar{x} = 1, \bar{y} = 2, \bar{z} = \frac{1}{2}$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գ. Գ. Գևորգյան և ուրիշներ, «Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք», երկրորդ մաս, Երևան, Էդիթ Պրինտ, 2005
2. Հակոբյան Ս. Ա., «Ֆուրիեի շարքեր և ինտեգրալներ», դասախոսություններ, Երևան-1983
3. Фихтенгольц Г. М., “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, том II, III, Москва, “Наука”, 1962
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г., “Основы математического анализа”, Москва, “Наука”, 1967
5. Кудрявцев Л. Д., “Курс математического анализа”, том II, III, Москва “Высшая школа”, 1988, 1989
6. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И., “Сборник задач по математическому анализу”, том III, Москва “Физматлит”, 2003

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՎԱՂԱՐՇԱԿ ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՕՀԱՆՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐՐՈՐԴ ՄԱՍ

Համակարգչային շարվածքը՝ Ա. Մխիթարյանի
Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Ա. Գույումջյանի

Տպագրված է «ՎԱՌՄ» ՍՊԸ-ում:
Ք. Երևան, Տիգրան Մեծի 48, բն. 43

Ստորագրված է տպագրության՝ 25.05.2021:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլը՝ 13:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2021
publishing.ysu.am