

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՆԱԽԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՏՈՄ ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ
ԳԵՎՈՐԳ ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

ՖԻԶԻԿԱ

ԲՈՒՆԱԿԱՆ ԴԱՍՍԱԳԻՐՔ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՏՈՍ ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, ԳԵՎՈՐԳ ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

ՖԻԶԻԿԱ

Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի,
Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետների
համար

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2022

ՀՏԴ 53(075.8)

ԳՄԴ 22.3g73

Մ 992

*Հաստատված է Հայաստանի Հանրապետության կրթության,
գիտության, մշակույթի և սպորտի նախարարության կողմից
որպես բուհական դասագիրք:*

Գրախոսներ՝

Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Լ. Լևոնյան

Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Սահարյան

Մուրադյան Ա. Ժ., Մուրադյան Գ. Ա

Մ 992 Ֆիզիկա (բուհական դասագիրք)։/ Հեղինակներ՝ Մուրադյան
Ա. Ժ., Մուրադյան Գ. Ա., -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2022, 330 էջ:

Դասագիրքը կազմված է «Ինֆոմատիկա և կիրառական մաթեմատիկա», «Մաթեմատիկա և մեխանիկա» մասնագիտությունների ուսանողների համար: Այն ներկայացնում է ֆիզիկայի՝ մեխանիկայի, մոլեկուլային ֆիզիկայի (ներառյալ պատահական պրոցեսների), թերմոդինամիկայի և ստատիստիկական ֆիզիկայի, էլեկտրամագնիսականության և օպտիկայի (ներառյալ անալոգիական և թվային կապի), քվանտային ֆիզիկայի (ներառյալ քվանտային ինֆորմատիկայի) տեսության տարրերն ու հիմնական տեխնոլոգիական կիրառությունները:

Կարող է օգտակար լինել նաև ասպիրանտներին և երիտասարդ գիտաշխատողներին:

ՀՏԴ 53(075.8)

ԳՄԴ 22.3g73

ISBN 978-5-8084-2527-1

© ԵՊՀ հրատ., 2022

© Մուրադյան Ա. Ժ., Մուրադյան Գ. Ա., 2022

ԳԼՈՒԽ I

Դասական մեխանիկա

§ 1. Գալիլեյի հարաբերականության սկզբունքը

Մեխանիկական երևույթների ուսումնասիրության համար մենք ընտրում ենք հաշվարկման համակարգ՝ կոորդինատների համակարգ գումարած ժամանակը ցույց տվող սարք՝ ժամացույց: Հաշվարկման տարբեր համակարգերից մեխանիկական երևույթները (շարժումները) ի հայտ են գալիս տարբեր կերպ, օրինակ՝ տարբեր հետագծերով: Անտարակույս կան նաև ընդհանրություններ և բնական հարց է առաջանում՝ որոնք են դրանք և արդյոք հարկ կա դասակարգելու հաշվարկման համակարգերը: Առաջին հիմնարար պարզաբանումն այստեղ կատարել է Գալիլեյը, հիմնավորելով այնպիսի հաշվարկման համակարգի Գալիլեո Գալիլեյ (1564-1642) գոյությունը, որից դիտելիս մարմինը պահպանում է մեխանիկայի տեսանկյունից պարզագույն՝ դադարի կամ ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման վիճակը, եթե նրա վրա բացակայում է այլ մարմինների ազդեցությունը: Այդպիսի համակարգն ընդունված է անվանել իներցիալ:



Իներցիալ համակարգի սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած այլ հաշվարկման համակարգ, որը դադարի մեջ է կամ շարժվում է ուղղագիծ և հավասարաչափ հայտնի իներցիալ համակարգի նկատմամբ, ապա ինքն էլ է իներցիալ: Մեկ իներցիալ համակարգի գոյությունից բխում է անվերջ բազմության գոյությունը: Մեխանիկական շարժումները բոլոր իներ-

ցիալ համակարգերում տեղի են ունենում միևնույն օրինաչափություններով: Այն կոչվում է Գալիլեյի հարաբերականության սկզբունք:

Սա, մասնավորապես նշանակում է, որ եթե դիտենք որևէ մարմնի շարժում (հետագիծը, ակնթարթային արագությունները և ակնթարթային արագացումները) որևէ իներցիալ համակարգում և ապա տեղափոխենք այդ մարմինը մեկ այլ իներցիալ համակարգ և այդտեղ ապահովենք մարմնի համար նույն սկզբնական պայմանները (դիրքը, արագությունը), ապա մարմնի շարժումը (հետագիծը և այլն) կլինի ճիշտ նույնը, ինչ նախորդ իներցիալ համակարգում էր: Ներկայումս՝ Նյուտոնի կողմից մեխանիկայի հիմնական օրենքների ձևակերպումից հետո, մենք ասում ենք, որ բոլոր իներցիալ համակարգերում մեխանիկայի օրենքները միևնույնն են: Բավարար բարձր ճշտությամբ իներցիալ կարելի է համարել հելիոցենտրիկ հաշվարկման համակարգը (Կոպերնիկոսի համակարգը): Դա հաշվարկի համակարգ է, որի սկզբնակետը տեղադրված է Արեգակի կենտրոնում, իսկ երեք կոորդինատային առանցքներն ուղղված են դեպի որևէ երեք հեռավոր աստղեր, որոնց կարելի է համարել անշարժ: Հաճախ իներցիալ համարվում է նաև Երկրի մակերևույթին ամրացված հաշվարկման համակարգը:

Գալիլեյի հարաբերականության սկզբունքը մաթեմատիկորեն կարելի է ձևակերպել՝ օգտվելով նյութական կետի հասկացությունից: Դիտարկենք երկու հաշվարկման իներցիալ համակարգեր՝ K և K' , որոնցից երկրորդը առաջինի նկատմամբ շարժվում է $\mathbf{v}$ արագությամբ: Միևնույն նյութական կետի $\mathbf{r}$ և $\mathbf{r}'$ կոորդինատներն այդ համակարգերում կապված են

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t, t = t'$$

տարածաժամանակային ձևափոխությունների բանաձևերով, որոնք կոչվում են Գալիլեյի ձևափոխություններ: Մեխանիկայի օրենքները պահպանում են իրենց տեսքը՝ ինվարիանտ են Գալիլեյի ձևափոխությունների նկատմամբ:

§ 2. Նյուտոնի օրենքները

Բնության մեջ բոլոր մարմինները փոխազդում են միմյանց հետ, ինչն իր արձագանքն է գտնում նրանց շարժումների օրինաչափությունների մեջ: Մարմինների միջև փոխազդեցության չափն էապես կախված է նրանց միջև եղած հեռավորությունից և նվազում է, ձգտելով զրոյի, հեռավորության մեծացմանը զուգընթաց:

Եթե տվյալ մարմինը պատկերացնենք այնքան հեռու մնացած մարմիններից, որ նրանց ազդեցությունները քննարկվող մարմնի վրա հնարավոր լինի արհամարհել, ապա այն կլինի



ազատ և կպահպանի իր դադարի կամ հավասարաչափ շարժման վիճակն այս կամ այն իներցիալ համակարգի նկատմամբ: Փորձը նաև ցույց է տալիս, որ մարմինների ազդեցություններն ուղղորդված են տարածության մեջ և հետևաբար ազդեցությունները Իսահակ Նյուտոն (1642-1726/27) քննարկվող մարմնի վրա

կարող են համակշռվել և մարմինը կլինի ազատ: Նյուտոնը Գալիլեյի հայտնագործած այս օրինաչափությունն արժևորեց

որպես մեխանիկայի հիմնական օրենքներից մեկը և ներկայացրեց որպես պնդում իներցիալ համակարգերի գոյության մասին: Այն կոչվում է Նյուտոնի I օրենք, համաձայն որի գոյություն ունեն այնպիսի հաշվարկման համակարգեր, որոնց նկատմամբ ազատ մարմինը շարժվում է ուղղագիծ և հավասարաչափ:

Ազատ մարմնի ուղղագիծ հավասարաչափ շարժումը կոչվում է շարժում ըստ իներցիայի:

Մարմինների միջև փոխազդեցությունը կարելի է նկարագրել ուժի հասկացության միջոցով: Եթե տվյալ մարմնի վրա ազդում են մեկից ավելի ուժեր՝ $F_1, F_2, \dots, F_n$, ապա նրանք գումարվում են վեկտորապես, այսինքն՝ առանձին վեկտորների $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ վեկտորական գումարին հավասար մեկ ուժը մարմնի վրա թողնում է նույն ազդեցությունը, ինչ բոլոր ուժերը միասին ազդելիս: Սա կոչվում է սուպերպոզիցիայի (վերադրման) սկզբունք: Նկատենք, որ վերջավոր չափերով օժտված մարմինների դեպքում հարցը լրացուցիչ քննարկման կարիք ունի, որին, սակայն, մենք չենք անդրադառնա: F ուժը կոչվում է $F_1, F_2, \dots, F_n$ ուժերի համագոր ուժ:

Եթե մարմնի վրա ազդող ուժերի համագորը տարբեր է գրոյից, ապա մարմինը ձեռք է բերում արագացում: Նյուտոնի II օրենքն, ըստ էության, սահմանում է փոխազդեցության բնութագրիչ պարամետր հանդիսացող ուժը որպես իր ստեղծած արագացմանը ուղիղ համեմատական մեծություն՝

$$ma = F : \quad (2.1)$$

Մարմնի զանգվածի արտադրյալը արագացման հետ մարմնի վրա ազդող ուժի համագործն է: Ընդգծենք, որ Նյուտոնի II օրենքը կապում է վեկտորական մեծություններ: Դա նշանակում է՝ ա) (2.1)-ի կողմերի մոդուլների հավասարությունն և բ) մարմնի արագացման վեկտորը համուղղված է իրեն առաջացնող համագործ ուժի վեկտորին (մարմնի m զանգվածը դրական սկալյար մեծություն է): Օրինակ, եթե մարմինը հավասարաչափ շարժվում է շրջանագծով, ապա նրա արագացումն ուղղված է դեպի այդ շրջանագծի կենտրոնը: Այսինքն՝ դեպի կենտրոն է ուղղված նաև մարմնի վրա ազդող բոլոր ուժերի համագործը:

Նյուտոնի II օրենքը՝ (2.1) հավասարությունը, տեղի ունի միայն իներցիալ հաշվարկման համակարգերում, որոնց գոյությունը պնդում է Նյուտոնի I օրենքը:

Նյուտոնի II օրենքը հաճախ անվանում են դինամիկայի հիմնական օրենք, քանի որ թույլ է տալիս որոշել առանձին վերցրած մարմնի կոորդինատը ժամանակի կամայական պահին, այսինքն՝ լուծել մեխանիկայի հիմնական խնդիրը, իմանալով նախորդ պահերին մարմնի վրա ազդող ուժերի տարածաժամանակային վարքը՝

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t), t), \quad (2.2)$$

որտեղ $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ -ն մարմնի արագությունն է, իսկ արագացման համար օգտագործված է $\mathbf{a} = d^2 \mathbf{r}/dt^2$ սահմանումը: Մաթեմատիկական կառուցվածքի տեսանկյունից (1.3) Նյուտոնի II օրենքը երկրորդ կարգի, ընդհանուր դեպքում ոչ գծային հավասարում է մարմնի $\mathbf{r}$ եռաչափ կոորդինատի (կամ որ նույնն

է՝ շառավիղ վեկտորի) նկատմամբ: Նրա լուծման մեկ, համեմատաբար պարզ, օրինակի հետ կծանոթանանք ստորև, Նյուտոնի օրենքների ամփոփումից և մեխանիկական ուժերի հակիրճ ներկայացումից հետո:

Դինամիկայի հաջորդ՝ Նյուտոնի III, օրենքը թույլ է տալիս ձևակերպել դինամիկայի խնդիրը և լուծել այն մեկից ավելի մարմիններից բաղկացած համակարգի համար: Ըստ Նյուտոնի, ինչը հիմնավորվում է նաև փորձերով, փոխազդեցության մեջ մարմինները ներառվում են հավասար «իրավասություններով»՝ երկու մարմիններ փոխազդում են մեծությամբ հավասար և ուղղությամբ հակադիր ուժերով: Այդ ուժերը ունեն նաև միևնույն ֆիզիկական բնույթը: Օրինակ, երբ սեղանին դրված մարմինը ճնշում է գործադրում սեղանի վրա դեպի ներքև ուղղված $\mathbf{P}$ կշռով, ապա սեղանն էլ մարմնին է հրում դեպի վերև հակազդեցության $\mathbf{N} = -\mathbf{P}$ ուժով, ընդ որում երկուսն էլ ունեն առաձգական բնույթ:

§ 3. Ուժերը մեխանիկայում

Բոլոր մարմինների միջև, ներառյալ միկրոաշխարհում, գործում են որոշակի ուժեր: Դրանց տարածաժամանակային օրինաչափությունները բավականին լավ ուսունասիրված են, ինչը թույլ է դինամիկայի (2.2) հիմնական օրենքը ձևակերպելու հետաքրքրություն ներկայացնող բազմաբնույթ խնդիրներում բացահայտ տեսքով և լուծելու դրանք անալիտիկ, իսկ ավելի հաճախ՝ թվային-համակարգչային միջոցներով:

Մեզ շրջապատող աշխարհի մեխանիկական երևույթներում հիմնական դերը կատարում են էլեկտրամագնիսական և գրավիտացիոն ուժերը: Մակրո- և մեզո-աշխարհում, սակայն,

ի հաշիվ մեծաթիվ մասնիկների միաժամանակ ներդրման, համագոր ուժերը դրսևորում են նոր օրինաչափություններ և մենք դրանց դասակարգվում ենք նոր՝ առաձգական, չոր շփման, հեղուկ շփման, մակերևութային լարվածության, դիպոլային փոխազդեցության, լուսային ճնշման և այլն անվանումներով, որոնք մեզ լավ ծանոթ են դպրոցական ծրագրից:

§ 4. Լիցքավորված մասնիկի շարժումը էլեկտրական և մագնիսական դաշտերում

Քննարկենք Նյուտոնի II օրենքի լուծումը սինուսի օրենքով փոփոխվող համասեռ էլեկտրական դաշտում շարժվող q կետային լիցքի դեպքում: Էլեկտրական լարվածության $\mathbf{E}(t)$ վեկտորն ուղղենք կոորդինատների X առանցքով՝ $E_x = E_{0x} \sin(\omega t + \varphi)$, որտեղ φ -ն սկզբնական որևէ փուլ է, $E_y = E_z = 0$: Որպես սկզբնական ընտրենք $v_x(t=0) = v_0$, $x(t=0) = 0$ ընդհանուր պայմանները, որտեղ v_0 -ն կարող է լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական:

Գրենք Նյուտոնի II օրենքը, պրոյեկելով այն X առանցքի վրա.

$$m \frac{d v_x}{dt} = q E_{0x} \sin(\omega t + \varphi):$$

Հավասարումը հեշտությամբ ինտեգրվում է, իսկ ինտեգրման հաստատումը որոշվում է արագության համար գրված սկզբնական պայմանից: Արդյունքում ժամանակի հետագա պահերին մասնիկի արագության համար ստանում ենք

$$v_x(t) = v_0 + \frac{qE_{0x}}{m\omega}(\cos\varphi - \cos(\omega t + \varphi)):$$

Սա առաջին հայացքից անսպասելի արդյունք է, քանի որ մասնիկը շարժվում է միջինում v_0 -ից տարբեր և ուժի սկզբնական փուլից կախված

$$\langle v_x(t) \rangle = v_0 + \frac{qE_{0x}}{m\omega} \cos\varphi$$

արագությամբ: Անգամ դադարի վիճակից սկսված տատանումներն ընդհանուր դեպքում տեղի չեն ունենում զրոյական արժեքի շուրջ:

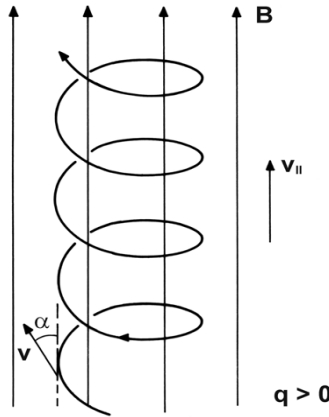
Ցուցում՝ քննարկել մասնավոր դեպքերը և մեկնաբանել գսպանակին ամրացված բեռի օրինակը:

Այժմ քննարկենք լիցքավորված մասնիկի շարժումը համասեռ հաստատուն մագնիսական դաշտում: Մասնիկի վրա ազդում է Լորենցի ուժը, որը որոշվում է $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ բանաձևով: z -երի առանցքը ուղղելով մագնիսական դաշտի ուղղությամբ՝ կունենանք՝

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B_z, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B_z, \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0:$$

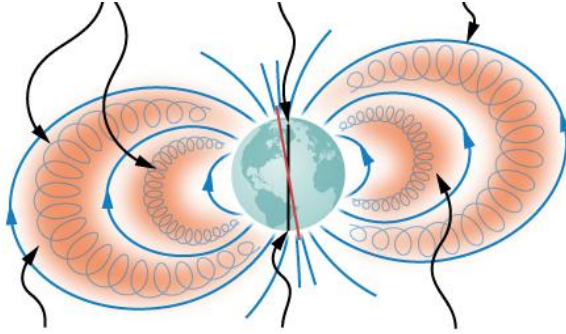
Ստանդարտ գործողությունների արդյունքում մասնիկի կոորդինատների համար ստանում ենք $x(t) = x_0 - r \cos(\omega t)$, $y(t) = y_0 + r \sin(\omega t)$, $z(t) = z_0 + v_z t$ արտահայտությունները, որտեղ $r = mv_\perp / |q|B$, $\omega = |q|B/m$, $v_\perp = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$: Մասնիկը հավասարաչափ պտտվում է մագնիսական ուժագծերի շուրջ r շառավղով պարուրագծով (Նկ. 4.1) մագնիսական

դաշտին ուղղահայաց հարթությունում ունենալով $v_{\perp}$ արագություն:



Նկ. 4.1. Լիցքավորված մասնիկի շարժման հետագիծը
համասեռ մագնիսական դաշտում

Մագնիսական դաշտ գոյություն ունի և Երկրի շուրջ, այն անհամասեռ է և հիշեցնում է դիպոլի մագնիսական դաշտը (Նկ. 4.2): Արեգակից, Ծիր կաթինից և դուրս գալակտիկաներից անընդհատ Երկրի վրա են գալիս լիցքավորված մասնիկների հոսքեր, բաղկացած հիմնականում պրոտոններից (մոտ 92%), α -մասնիկներից (6%), ավելի ծանր էլեմենտներից և էլեկտրոններից (մեկական տոկոս): Մեզ՝ Երկրի բնակիչներին համար հետաքրքիր է իմանալ այդ մասնիկների հետագա ճակատագիրը մերձերկրյա տարածությունում:



Նկ. 4.2. Երկրի մագնիսական դաշտը որպես դիպոլի մագնիսական դաշտ իր ներքին և արտաքին գոտիներով

Երկրի մագնիսական դաշտի ուժագծերը դուրս են գալիս հարավային կիսագնդից և մտնում հյուսիսային կիսագունդ, մակերևույթից ամենամեծ չափով հեռանալով հասարակածային հարթությունում: Անհամասեռ դաշտում, բացի լիցքավորված մասնիկի մասնիկի

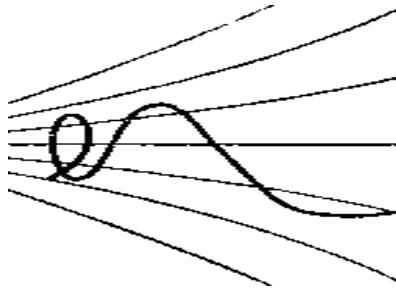
$$E = \frac{m v_{\perp}^2}{2} + \frac{m v_{\parallel}^2}{2}$$

կինետիկ էներգիայից, պահպանվում է նաև պտտվող մասնիկի

$$\mu = \frac{m v_{\perp}^2 / 2}{B}$$

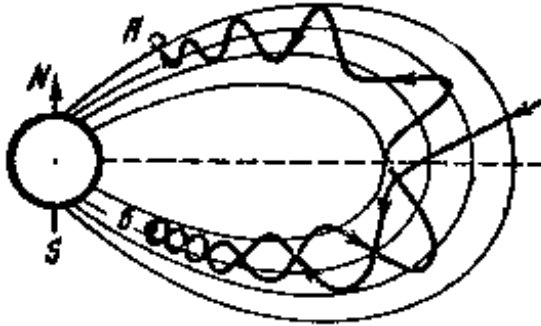
մագնիսական մոմենտը: Երբ մասնիկը պարուրաձև պտտվելով մագնիսական ուժագծի շուրջը շարժվում է դեպի դաշտի ուժեղացման կողմ, ապա μ -ի և E -ի պահպանումից հետևում է, որ լայնական շարժումն արագանում է և այդ տեղի է ունենում ի հաշիվ երկայնական շարժման դանդաղեցման (Նկ. 4.3): Դաշտի որոշակի արժեքի դեպքում լիցքավորված մասնիկի

Երկայնական շարժումը կանգ է առնում, և մասնիկը ետ է դառնում հակառակ ընթացքով:



Նկ. 4.3. Լիցքավորված մասնիկի հետագիծը մագնիսական դաշտի ուժեղացման կողմ շարժվող մասնիկի համար

Երկրի մագնիսական դաշտը բնեռային տիրույթներին մոտենալիս խտանում է: Այդ պատճառով լիցքերը մոտենում են ուժագծերի խտացման տեղամասերին, անդրադառնում են և ուղղորդվում դեպի մյուս կիսագունդ: Այդտեղ նրանք ևս անդրադառնում են և շարժվում դեպի նախկին կիսագունդ: Երկրին մոտեցող լիցքավորված մասնիկները (հրականում՝ նրանց մի մասը) գերված են մնում Երկրի մագնիսական դաշտում (Նկ. 4.4): Ամեն առանձին մասնիկ մնում է գերված այնքան ժամանակ, մինչև ինչ որ պատճառով հայտնվելով մթնոլորտի խիտ շերտերում՝ բախվում է չեզոք մասնիկների հետ և դուրս գալիս գերված՝ բնեռների միջև տատանումներ կատարող վիճակից:



Նկ. 4.4. Լիցքավորված մասնիկի շարժումը Երկրի մագնիսական դաշտում (հասարակածի հարթությունում)

Բևեռներին մոտ տարածություններում լիցքավորված մասնիկների կուտակումներով է բացատրվում բևեռափայլերի երևույթը, որի պատկերներից մեկը բերված է Նկ. 4.5-ում:



Նկ. 4.5. Բևեռափայլի պատկեր

§ 5. Վիճակի հասկացությունը դասական մեխանիկայում: Ընդհանրացված կոորդինատներ

Մեխանիկական երևույթների դասական նկարագրությունը ելնում է նյութական կետի հասկացությունից: Մեխանիկա-

կան համակարգի վիճակը ժամանակի որևէ պահի համարվում է հայտնի, եթե հայտնի են այն կազմող նյութական կետերի դիրքերը և դրանց փոփոխման արագությունները:

Եթե տվյալ մեխանիկական համակարգը բաղկացած է N նյութական կետերից, ապա դրանց տարածական դիրքը որոշվում է N շառավիղ վեկտորներով կամ $3N$ կոորդինատներով: Համակարգի S ազատության աստիճանների թիվը կարող է և փոքր լինել $3N$ -ից, եթե համակարգում կան սահմանափակումներ կամ կապեր: S թվով անկախ մեծությունները միարժեք որոշում են համակարգի (այն կազմող N նյութական կետերի) դիրքը տարածության մեջ: Այդ մեծությունները պարտադիր չէ, որ լինեն կետերի դեկարտյան կոորդինատներ կամ կորագիծ կոորդինատներ, ինչպիսիք են գլանային և սֆերիկ կոորդինատները:

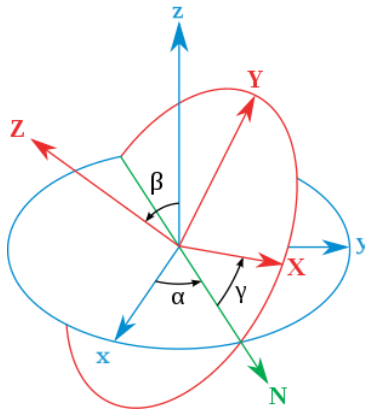
Ազատության աստիճանների S թվով ցանկացած մեծություններ՝ $q_1, q_2, \dots, q_s$, որոնք լրիվությամբ որոշում են համակարգի դիրքը տարածության մեջ կոչվում են ընդհանրացված (երբեմն՝ լագրանժյան) կոորդինատներ: Հետևաբար, բոլոր կետերի շառավիղ վեկտորներն արտահայտվում են ընդհանրացված կոորդինատների միջոցով՝

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t):$$

Որպես այդպիսի կոորդինատներ կարելի է ընտրել պարամետրեր, որոնք ունեն որևէ չափողականություն և որևէ երկրաչափական կամ ֆիզիկական իմաստ, մասնավորապես՝ ուղիղների կամ աղեղների հատվածներ, անկյուններ, մակերեսներ և այլն: Օրինակ, եթե կետը գտնվում է սֆերայի մակերևույթի վրա, ապա որպես ընդհանրացված կոորդինատներ

կարող են ընդունվել Նկ. 5.1-ում պատկերված էլերի α , β , γ անկյունները:

Ընդհանրացված կոորդինատներն իրական են, անկախ են մեկը մյուսից և ունեն ինքնուրույն երկրաչափական (ֆիզիկական) իմաստ, ինչը թույլ է տալիս որոշելու համակարգի դեկարտյան կոորդինատները: Ընդհանրացված կոորդինատների հաջող ընտրությունը խնդրում կարող է հեշտացնել լուծումը և նրա տեսքը կարող է ավելի ակնառու լինել:



Նկ. 5.1. Էլերի անկյունները

մեխանիկական համակարգի համար կարող են լինել ընդհանրացված կոորդինատների մի քանի ընտրություն:

Ազատության անվերջ մեծ թվով համակարգերում (անընդհատ միջավայրեր, ֆիզիկական դաշտեր) ընդհանրացված կոորդինատներ են հանդիսանում պոտենցիալները և ալիքային ֆունկցիաները:

Ընդհանրացված կոորդինատների ժամանակային ածանցյալները կոչվում են ընդհանրացված արագություններ: Ընդհանրացված կոորդինատները և ընդհանրացված արագու-

թյունները միասին որոշում են մեխանիկական համակարգի վիճակը:

§ 6. Ամենափոքր գործողության սկզբունքը:
Լագրանժի ֆունկցիան և Լագրանժի հավասարումները

Մեխանիկական համակարգերի շարժման օրենքի առավել ընդհանուր ձևակերպումը տրվում է ամենափոքր գործողության սկզբունքի միջոցով: Առավել հաճախ գործածվում է սկզբունքի Համիլտոնի ձևակերպումը, համաձայն որի յուրաքանչյուր մեխանիկական համակարգ բնութագրվում է որոշակի

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

ֆունկցիայով, որը կոչվում է տվյալ համակարգի Լագրանժի ֆունկցիա կամ լագրանժյան: Լագրանժի ֆունկցիայում q_i -ն և $\dot{q}_i$ -ը ($i = 1, 2, \dots, s$) համարվում են անկախ փոփոխականներ,

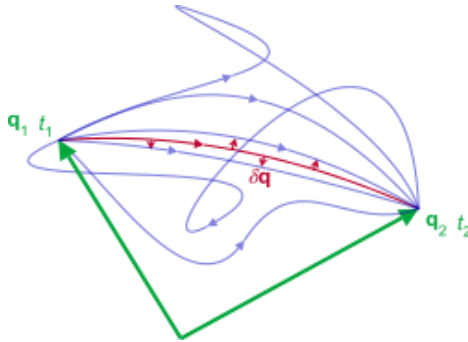
իսկ կապը նրանց միջև առաջանում է ամենափոքր գործողության սկզբունքի պահանջից: Հակիրճության համար արգումենտները կգրենք սղված, քանի դեռ այն թյուրմբոնման չի բերի:



Լագրանժյանի ժամանակային ինտեգրալը ժամանակի երկու որոշակի պահերի Ժոզեֆ-Լուի Լագրանժ (1736–1813) միջև ներկայացնում է գործողությունը՝

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt :$$

Համաձայն ամենափոքր գործողության սկզբունքի, եթե ժամանակի t_1 պահին համակարգի ընդհանրացված կոորդինատները կազմել են $q^{(1)}$ հանրախումբը, իսկ t_2 պահին՝ $q^{(2)}$ հանրախումբը, ապա առաջինից երկրորդին անցումը տեղի է ունենում այնպիսի $q(t)$ օրինաչափությամբ, որի համար S գործողությունն ընդունում է հնարավոր ամենափոքր արժեքը:



Նկ. 6.1. Ամենափոքր գործողության սկզբունքի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Այն, որ Լագրանժի ֆունկցիան պարունակում է միայն q և $\dot{q}$, և ոչ ավելի բարձր կարգի $\ddot{q}$, $\ddot{\ddot{q}}$, ... ածանցյալներ, այն պնդման հետևանքն է, որ համակարգի մեխանիկական վիճակը միարժեքորեն որոշվում է կոորդինատների և արագության միջոցով:

Մինիմումի սկզբունքին բավարարող ժամանակային կախվածության դուրսբերման բանաձևերը պարզեցնելու նպատակով քննարկենք ազատության մեկ աստիճան՝ միա-

չափ շարժումը: Եթե $q(t)$ -ն գործողության մինիմումն ապահովող ֆունկցիան է, ապա նրա փոխարինումը փոքր չափով շեղված որևէ այլ ֆունկցիայով՝

$$q(t) + \delta q(t), \quad (6.1)$$

ենթադրում է զրոյական շեղում քննարկման (t_1, t_2) ինտերվալի եզրակետերում՝

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0: \quad (6.2)$$

Գործողության փոփոխությունը (6.1) անցման դեպքում լիինի

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt:$$

Առաջին ինտեգրալում Լագրանժի ֆունկցիան վերլուծում ենք ըստ δq և $\delta \dot{q}$ փոքր մեծությունների և պահանջում, որ այդ տարբերությունը, համաձայն գործողության մինիմումի պայմանի, լինի զրո՝

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0:$$

Նկատենք որ $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$: Մասերով ինտեգրում ենք երկրորդ անդամը և ստանում

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0:$$

Համաձայն (6.2)-ի՝ այս արտահայտության առաջին անդամը զրո է ինտեգրալը, որը պետք է զրո լինի δq -ի

կամայական արժեքի դեպքում: Դա հնարավոր է միայն եթե գրո է ենթինտեգրալ արտահայտությունը՝

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0:$$

Մի քանի ազատության աստիճանների դեպքում գործողության ֆունկցիոնալն անկախ վարիացիաների է ենթարկվում՝ ըստ բոլոր S հատ $q_i, \dot{q}_i$ զույգերի: Արդյունքում ստացվում են S թվով հավասարումներ.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, s): \quad (6.3)$$

Սրանք փնտրվող շարժման հավասարումներն են և կոչվում են Լագրանժի հավասարումներ: Եթե համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան հայտնի է, ապա Լագրանժի հավասարումները երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ է $q_i(t)$ անհայտ ֆունկցիաների որոշման համար:

Անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ դիտողությունը: Շարժման հավասարումները մնում են նույնը, եթե նախապես վերցված լագրանժյանին ավելացնենք կամայական տարածաժամանակային ֆունկցիայի լրիվ ժամանակային ածանցյալ, այսինքն՝ կատարենք

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t):$$

անցում: Իսկապես, եթե գրենք գործողության ֆունկցիոնալը ըստ նոր լագրանժյանի, և կատարենք ինտեգրման գործողություն երկրորդ անդամում՝

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q, t) dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

ապա վարիացիայի դեպքում լրացուցիչ անդամը վերանում է: Ջուտ մաթեմատիկորեն դա պայմանավորված է նրանով, որ սկզբունքը ձևակերպվում է որպես եզրային խնդիր (q -ն մասնավորեցվում է երկու $q^{(1)}$ և $q^{(2)}$ կետերում) և ոչ որպես սկզբնական արժեքով խնդիր (երբ q -ն և $\dot{q}$ -ը մասնավորեցվում են ժամանակի սկզբնապահին տարածական մեկ կետում):

Այսպիսով, Լագրանժի ֆունկցիան որոշվում է միայն կամայական տարածաժամանակային ֆունկցիայի լրիվ ածանցյալի ճշտությամբ:

Համիլտոնի ամենափոքր գործողության սկզբունքը կիրառելի է ինչպես կոնսերվատիվ, այնպես էլ ոչ կոնսերվատիվ համակարգերի համար:

§ 7. Լագրանժի ֆունկցիայի կառուցումը: Նյութերի թեորեմը

Լագրանժի ֆունկցիան կառուցվում է այնպես, որ Լագրանժի հավասարումները կոորդինատային պատկերացմամբ ներկայանան որպես մեխանիկական համակարգի դինամիկ հավասարումներ՝ Նյուտոնի օրենքներ:

Չփոխազդող մասնիկների համակարգի համար հարկ է լինում այն ընտրել

$$L = \sum_{n=1}^N \frac{m_n v_n^2}{2}$$

տեսքով, ինչը համակարգը կազմող K կինետիկ էներգիան է դեկարտյան հաշվարկման համակարգում: Մասնիկների միջև փոխազդեցության առկայության դեպքում (բայց ոչ արտաքին դաշտերի հետ) լագրանժյանը կազմվում է կինետիկ էներգիայի արտահայտությունից հանելով միջմասնիկային փո-

խագդեցության՝ ժամանակից անբացահայտ կախված $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ պոտենցիալ էներգիայի արտահայտությունը.

$$L = \sum_{n=1}^N \frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N): \quad (7.1)$$

Իսկապես, սրա տեղադրումը շարժման (6.3) հավասարումների մեջ, որտեղ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_n} = m_n \mathbf{v}_n, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_n} = - \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_n},$$

n -րդ մասնիկի համար տալիս է

$$m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = - \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_n}$$

հավասարում, ինչը, նկատի ունենալով պոտենցիալ էներգիայի

$$\mathbf{F}_n = - \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_n}$$

կապը ուժի հետ, Նյուտոնի II օրենքն է քննարկվող պայմաններում:

Վերցնելով մեկ մասնիկի և երկու փոխազդող մասնիկներից բաղկացած համակարգի դեպքերը՝ կարելի է համոզվել համապատասխանաբար Նյուտոնի II և III օրենքների տեղի ունենալում Լագրանժի հավասարումներում:

Նկատենք, որ t -ի փոխարինումը $-t$ -ի թողնում է (7.1) լագրանժյանը, հետևաբար նաև շարժման հավասարումը, նույնը: Այսինքն՝ դասական մեխանիկայի օրենքներով շարժվող փակ համակարգում բոլոր շարժումները շրջելի են՝ կարող են տեղի ունենալ նաև հակառակ հերթականությամբ:

Պեկարտյան հաշվարկման համակարգի՝ որպես ելման դիրքի, օգտագործումը վերին դուրսբերումներում պայմանավորված է նրանով, որ մենք ի սկզբանե իմանում ենք կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների անալիտիկ արտահայտությունները (բացահայտ տեսքերը) հենց դեկարտյան համակարգում: Եթե շարժման նկարագրման համար օգտագործվում են նյութական կետերի ոչ դեկարտյան, կամայական ընդհանրացված կոորդինատներ, ապա հարկ է կատարել համապատասխան

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{f}_n(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{\mathbf{r}}_n = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

ձևափոխությունները: Տեղադրելով սրանք դեկարտյան համակարգում գրված (7.1) արտահայտությունում՝ կստանանք շարժման լագրանժյանի փնտրվող տեսքն ընդհանրացված կոորդինատներով: Այն ընդհանուր դեպքում կլինի

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q): \quad (1.15)$$

տեսքի, ուր $a_{i,j}$ գործակիցները ֆունկցիա են միայն ընդհանրացված կոորդինատներից: Արդյունքում՝ կինետիկ էներգիան ընդհանուր դեպքում կարող է կախված լինել ընդհանրացված կոորդինատներից:

Ֆիզիկական համակարգերը, որպես կանոն, բաց համակարգեր են և նրանց լագրանժյանների կառուցման ընդհանուր օրինաչափությունը հասկանալու համար ենթադրենք քննարկվող A համակարգը փոխազդում է մեկ այլ՝ B համակարգի, հետ, որում շարժումները համարում ենք տրված: Դա նշանակում է, որ A համակարգը շարժվում է տրված, B համակարգի կողմից ստեղծվող, արտաքին դաշտում: Քանի որ շարժման հավասարումները վերաբերում են A համակարգի

կոորդինատներին, իսկ B համակարգի կոորդինատները համարվում են հայտնի (տրված), ապա կարելի է կառուցել միացյալ (փոստորեն՝ A բաց) համակարգի

$$L = K_A(q_A, \dot{q}_A) + K_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$$

լագրանժյանը և նրանում B համակարգի կոորդինատները և դրանց ածանցյալները համարել հայտնի ֆունկցիաներ ժամանակից: Երկրորդ անդամը վարիացիայի ժամանակ տալու է նույնաբար զրո, այնպես որ այն կարելի է բաց թողնել և գրել

$$L = K_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)):$$

Այսպիսով, բաց մեխանիկական համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան գրվում է սովորական՝ կլինետիկ էներգիա հանած պոտենցիալ էներգիա օրինաչափությամբ, ուր պոտենցիալ էներգիայի մեջ ներառվում է նաև արտաքին դաշտերի հետ փոխադրեցության էներգիան:

Համակարգի՝ ընդհանրացված կոորդինատներով նկարագրման դեպքում ընդհանրացված արագությունների հետ միասին, ավելի ճիշտ կլինեն՝ փոխարեն, օգտագործվում է ընդհանրացված իմպուլսի հասկացությունը: Այն սահմանվում է

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, (i = 1, 2, \dots, s)$$

առնչությամբ, ինչի բնականոն լինելու մեջ կարելի է համոզվել Լագրանժի (6.3) հավասարումը համեմատելով Նյուտոնի II օրենքի հետ, գրված

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

տեսքով:

Վերջին հավասարությունից հետևում է Լագրանժան ֆորմալիզմի մի կարևոր և օգտակար կողմ: Եթե համակարգի լագրանժյանը բացահայտ կախված չէ որևէ ընդհանրացված կոորդինատից՝ $\partial L / \partial q_i = 0$, ապա այդ կոորդինատի համապատասխան ընդհանրացված իմպուլսը պահպանվում է ժամանակի ընթացքում՝ $dp_i / dt = 0$: Սա շատ հզոր արդյունք է, որը գալիս է Գալիլեյի՝ շարժումների անկախության սկզբունքից և կարող է դիտվել որպես Նյութերի թեորեմի պրոյեկտում քննարկվող իրավիճակի համար: Նյութերի թեորեմն իր բնօրինակ ձևակերպմամբ վերաբերում է որևէ համաչափությամբ օժտված համակարգի և ասում է, որ ֆիզիկական համակարգի գործողություն ֆունկցիայի ամեն մի դիֆերենցելի

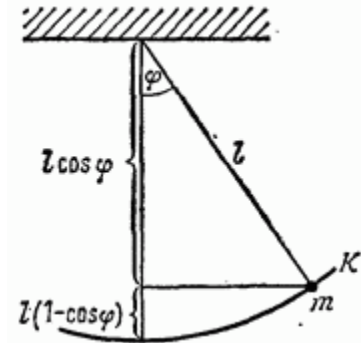
համաչափության համապատասխանում է պահպանման օրենք:

§ 8. Լագրանժի հավասարումների լուսաբանումը չձգվող անկշիռ թելից կախված գնդիկի օրինակով

Այս պարզ օրինակի վրա ցույց տանք խնդրի լուծման ընթացքը Լագրանժի ֆորմալիզմում: Նյութական կետը կատարում է հարթ շարժում ծանրության համասեռ դաշտում (Նկ. 1.8): Կոորդինատների սկզբնակետը տեղակայենք թելի ամրացման կետում և y -ների առանցքն ուղղենք դեպի վար: Գնդիկի Լագրանժի ֆունկցիան կլինի

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy:$$

Թելի անձգելի լինելու հետևանքով գնդիկի հարթ շարժումը կլինի շրջանագծի



Նկ. 1.8. Չձգվող անկշիռ թելից կախված նյութական կետի շարժումը

աղեղով և համակարգը կունենա մեկ ազատության աստիճան՝
թելի կազմած φ անկյունը y -ների առանցքի հետ (Նկ. 1.8):
Ակնհայտ է նրա ընտրումը որպես ընդհանրացված կոորդինատ:
Լագրանժյանում հարկ է դեկարտյան կոորդինատներն արտահայտել այդ անկյան միջոցով՝

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi,$$

որից կունենանք

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = -l \dot{\varphi} \sin \varphi$$

և համապատասխանաբար

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi:$$

Համապատասխան Լագրանժի հավասարումը կլինի

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0:$$

Բազմապատկենք այն $d\varphi/dt$ -ով և գրենք միասնական ածանցյալի տակ՝

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{2g}{l} \cos \varphi \right) = 0 :$$

Ինտեգրման հաստատունը որոշելու համար օգտագործենք պարզ սկզբնական պայման, որ $\varphi = \varphi_m$ առավելագույն շեղման դիրքում $d\varphi/dt$ անկյունային արագությունը հավասար է զրոյի՝

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_m)$$

և հետևաբար՝

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_m},$$

որտեղ աջ կողմում երկու նշանների ֆիզիկական մեկնաբանությունն ակնհայտ է:

Որպես օրինակ դիտարկենք շարժումը պարբերության առաջին քառորդում, որի ընթացքում անկյունը փոքրանում է φ_m -ից մինչև զրո և $d\varphi/dt < 0$: Ինտեգրման արդյունքում կունենանք

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi_m}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_m}} :$$

Այն ինտեգրալի վերին սահմանում նստած տատանման անկյունը ներկայացնում է որպես ժամանակի ֆունկցիա: Այն հնարավոր է լինում արտահայտել մաթեմատիկական ֆիզիկայից հայտնի

$$F(\psi, k) = \int_0^{\psi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\psi} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}$$

առաջին սեռի էլիպտիկ ինտեգրալի միջոցով, եթե էվոյուցիոն հավասարման աջակողմյան ինտեգրալում φ -ի փոխարեն մտցվում է նոր u ֆունկցիա, համաձայն

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k u$$

նշանակման, որտեղ

$$k = \sin \frac{\varphi_m}{2} :$$

Արդյունքում ստանում ենք հետևյալ էվոյուցիոն հավասարումը՝

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_m/2)}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-ku^2)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(F(1, k) - F\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_m/2)}, k \right) \right) :$$

Տեղադրելով $\varphi = 0$ երբ $t = T/4$ ՝ ստանում ենք մաթեմատիկական ճոճանակի տատանումների պարբերության բանաձևը՝

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F(1, k) :$$

Այն կախված է գնդիկի առավելագույն շեղման անկյունից կամ. որ նույնն է, ենթադիայից:

Տատանման փոքր անկյունների դեպքում $k \ll 1$: Սահմանափակվելով թեյլորյան վերլուծության առաջին երկու անդամներով՝ $F(1, k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k}{4} \right)$, ստանում ենք

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{k}{4} \right) :$$

Առաջին (հիմնական) անդամը ներկայացնում է դպրոցական դասընթացից մեզ հայտնի արդյունքը: Նկատենք, որ հա-

վելյալ անդամը համեմատական է տատանման առավելագույն անկյանը:

§ 9. Պահպանվող մեծություններ

Մեխանիկական համակարգի S թվով ընդհանրացված կոորդինատները՝ q_i և S թվով ընդհանրացված արագությունները՝ $\dot{q}_i$, $i = 1, 2, \dots, S$ որոշում են համակարգի վիճակը և ընդհանուր դեպքում փոխվում են ժամանակի ընթացքում: Քննարկենք այդ ընթացքում պահպանվող մեծությունների հարցը:

Շարժման հավասարումները q_i -երի համար 2-րդ կարգի են: Դրանց ընդհանուր լուծումները պարունակում են $2s$ թվով հաստատուններ, որոնք կապվում են S թվով սկզբնական պայմանների հետ q_i -երի համար և նույնքան էլ $\dot{q}_i$ -երի համար: Այսինքն՝

$$q_i = q_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{s-1}, c_s, c_{s+1}, \dots, c_{2s-1}, c_{2s}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{s-1}, c_s, c_{s+1}, \dots, c_{2s-1}, c_{2s}):$$

Հավասարումների այս համակարգում, որպես անհայտներ, կարելի է դիտել $c_1, \dots, c_s, \dots, c_{2s}$ հաստատունները և վիրտուալ լուծել դրանք՝ արտահայտելով կոորդինատների, արագությունների և ժամանակի միջոցով՝

$$c_n = c_n(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s), \quad n = 1, 2, \dots, 2s:$$

Այն ցույց է տալիս, որ գոյություն ունեն ընդհանրացված կոորդինատների, ընդհանրացված արագությունների և ժամանակի $2s$ թվով ֆունկցիաներ (կոմբինացիաներ), որոնք ժա-

մանակի ընթացքում մնում են հաստատուն: Դրանք կոչվում են շարժման ինտեգրալներ:

Եթե համակարգը փակ է, ապա շարժման հավասարումները ժամանակը բացահայտ չեն պարունակում և ինտեգրման հաստատուններից մեկը կարող է համարվել սկզբնապահի ընտրության t_0 կամայական հաստատունը: Արդյունքում՝ անկախ շարժման ինտեգրալների թիվը կլինի $2s - 1$:

Ոչ բոլոր շարժման ինտեգրալները մեխանիկայում ունեն կարևորության միևնույն աստիճանը: Նրանց մեջ կան մի քանիսը, որոնք կապված են տարածության և ժամանակի հիմնական հատկությունների՝ համասեռության և իզոտրոպության հետ: Շարժման ինտեգրալներն իրար հետ չփոխազդող մասերից բաղկացած համակարգերի համար օժտված են ադիտիվության հատկությամբ: Սա հատկապես կարևոր է ցրման բնույթի խնդիրներում, որոնցում վիճակը հայտնի է մինչև որոշակի փոխազդեցության սկսելը, և համակարգի վիճակը փնտրվում է այդ փոխազդեցությունից հետո:

• **Էներգիա:** Դիտարկենք ժամանակի համասեռությունից բխող պահպանման օրենքը: Ժամանակի համասեռությունն ասում է, որ փակ համակարգի մեխանիկական հատկությունները չեն փոխվում այն ժամանակի մեջ տեղափոխելուց: Դա նշանակում է, որ համակարգի բնութագրիչ ֆունկցիան՝ Լագրանժի ֆունկցիան, ժամանակը բացահայտ կերպով չի պարունակում՝ $L = L(q, \dot{q})$, այսինքն՝ ժամանակային լրիվ ածանցյալը կլինի

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i ,$$

առանց ժամանակային մասնավոր ածանցյալի:

Հավասարման աջ մասում կատարենք $\partial L / \partial q_i$ ածանցյալի փոխարինում, օգտագործելով Լագրանժի

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

հավասարումը: Կստանանք՝

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right):$$

Համապատասխանաբար՝

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0:$$

Այսինքն՝

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (9.1)$$

մեծությունը համակարգի էվոլյուցիայի ընթացքում մնում է հաստատուն, այսինքն՝ հանդիսանում է շարժման ինտեգրալներից մեկը: Այն համակարգի էներգիան է: Էներգիան աղիտիվ է այնքանով, որքանով աղիտիվ է Լագրանժյանը:

Մեխանիկական համակարգերը, որոնց էներգիան պահպանվում է կոչվում են կոնսերվատիվ:

Մեխանիկական համակարգի էներգիան արտահայտենք կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաներով՝ օգտագործելով Լագրանյանի արտահայտությունը որպես կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների տարբերություն՝

$$L = K(q, \dot{q}) - U(q):$$

Հաշվենք (9.1)-ի առաջին անդամը՝

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \right) = \sum_{i,j=1}^s a_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = 2K(q, \dot{q}),$$

և տեղադրենք՝

$$E = K(q, \dot{q}) + U(q):$$

Դեկարտյան կոորդինատներում

$$E = \sum_{n=1}^N \frac{m_n v_n^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N):$$

Մեխանիկական համակարգի էներգիան կինետիկ և պո-տենցիալ էներգիաների գումարն է, որոնցից առաջինը դեկար-տյան համակարգում կախված է միայն արագություններից, երկրորդը՝ միայն կոորդինատներից:

• **Իմպուլս:** Մեկ այլ պահպանման օրենք առաջանում է տարածության համասեռության հետևանքով: Այս համասե-ռության փակ համակարգի մեխանիկական հատկությունները չեն փոխվում համակարգի կամայական զուգահեռ տեղաշար-ժումով: Ելնելով սրանից՝ դիտարկենք համակարգի $\delta \mathbf{r}$ ան-վերջ փոքր տեղափոխություն և պահանջենք, որ Լագրանժի ֆունկցիան մնա անփոփոխ:

Տեղաշարժման արդյունքում համակարգը կազմող բոլոր նյութական կետերը ստանում են միևնույն շեղումը՝ $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{r}_n + \delta \mathbf{r}$: L ֆունկցիայի համապատասխան փոփոխու-թյունը կլինի

$$\delta L = \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_n} \delta \mathbf{r}_n = \delta \mathbf{r} \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_n}:$$

Քանի որ $\delta \mathbf{r}$ -ը կամայական է, ապա $\delta L = 0$ պայմանից հետևում է

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_n} = 0: \quad (9.2)$$

Լագրանժի հավասարումից հետևում է՝

$$\sum_{n=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_n} = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_n} = 0:$$

Այն ասում է, որ փակ մեխանիկական համակարգի

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_n}$$

վեկտորական բնութագրիչը շարժման ընթացքում մնում է հաստատուն: $\mathbf{P}$ վեկտորը կոչվում է համակարգի իմպուլս կամ շարժման քանակ: Ածանցելով Լագրանժի ֆունկցիայի արտահայտությունը դեկարտյան կոորդինատներում՝ իմպուլսի համար կստանանք

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{v}_n$$

հայտնի ներկայացումը մասնիկների արագությունների միջոցով:

Ի տարբերություն էներգիայի, համակարգի իմպուլսը հավասար է բաղադրիչ մասնիկների իմպուլսների գումարին (անկախ մասնիկների միջև փոխազդեցության առկայությունը):

Իմպուլսի պահպանության օրենքի վեկտորական բնութից և դուրսբերման բովանդակությունից անմիջականորեն հետևում է, որ եթե համակարգը փակ չէ, սակայն համակարգը որևէ ուղղությամբ տեղաշարժից լագրանժյանը չի փոխվում, ապա համակարգի իմպուլսի պրոյեկցիան այդ ուղղության վրա մնալու է հաստատուն: Օրինակ, եթե արտաքին էլեկտրական դաշտը համասեռ է՝ ուղղված z առանցքի երկայնքով, ապա իմպուլսի x և y բաղադրիչները կմնան հաստատուն:

Նկատենք, որ լագրանժյանի համասեռության (9.2) պայմանը կարելի է գրել ուժերի միջոցով: Եթե նկատի ունենանք,

որ $\partial L / \partial \mathbf{r}_n = -\partial U / \partial \mathbf{r}_n = \mathbf{F}_n$ -ը n -րդ մասնիկի վրա համակարգի մյուս մասնիկների կողմից ազդող ուժն է, ապա համասեռության պայմանն ասում է, որ

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n = 0:$$

Համակարգում գործող ներքին ուժերի երկրաչափական գումարը հավասար է զրոյի: Մա Նյուտոնի III օրենքն է մասնիկների համակարգի համար:

Եթե համակարգը նկարագրվում է ընդհանրացված q_i ($i = 1, 2, \dots, s$) կոորդինատների միջոցով, ապա

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

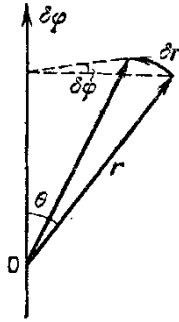
մասնակի ածանցյալները կոչվում են համապատասխանաբար ընդհանրացված ինպուլսներ և ընդհանրացված ուժեր, իսկ Լագրանժի հավասարումները գրվում են

$$\dot{p}_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

տեսքով յուրաքանչյուր ազատության աստիճանի համար:

• **Իմպուլսի մոմենտ:** Իմպուլսի մոմենտի պահպանումը հետևում է տարածության իզոտրոպությունից, համաձայն որի փակ համակարգի մեխանիկական հատկությունները չեն փոխվում նրա՝ որպես ամբողջության կամայական տարածական պտույտից: Դրան համապատասխան դիտարկենք համակարգի անվերջ փոքր անկյունով պտույտ և պահանջենք, որ Լագրանժյանը մնա անփոփոխ:

Տարածական պտույտն ունի վեկտորական (փսևվոր-վեկտորական) բնույթ: Մեկնաբանենք այն Նկ. 9.1-ի օգնությամբ: Պտույտի արդյունքում $\mathbf{r}$ վեկտորը նոր ուղղություն է ձեռք



Նկ. 9.1

բերում, որը կարող է ներկայացվել ծայրակետի $\delta \mathbf{r}$ աղեղնային հետագծով տեղափոխությամբ և դրան համապատասխան պտտման առանցքով: $\delta \varphi$ -ն վեկտոր է, որն ուղղված է պտտման առանցքով, ըստ խցանահանի կանոնի, և ունի պտտման անկյան մեծությունը հավասար մոդուլ՝ $|\delta \varphi| = \delta \varphi$:

Նկարից հետևում է՝ $|\delta \mathbf{r}| = r \sin \theta \delta \varphi$: Համապատասխանաբար նրա վեկտորական համարժեքը՝

$$\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}:$$

Համակարգի պտտման արդյունում իրենց ուղղությունները փոխում են նաև նյութական կետերի արագությունները, ընդ որում, նույն վեկտորական օրինաչափությամբ, ինչ և կոորդինատները՝

$$\delta \mathbf{v} = \delta \varphi \times \mathbf{v}:$$

Լագրանժի ֆունկցիայի համապատասխան փոփոխությունը պետք է լինի զրո՝

$$\delta L = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_n} \delta \mathbf{r}_n + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_n} \delta \mathbf{v}_n \right) = 0:$$

Լագրանժի ֆունկցիայի ածանցյալներից անցնենք իմպուլսներին $\partial L / \partial \mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n$, $\partial L / \partial \mathbf{r}_n = \dot{\mathbf{p}}_n$ բանաձևերի օգնությամբ, տեղադրենք նաև աճերի արտահայտությունները՝

$$\sum_{n=1}^N (\dot{\mathbf{p}}_n (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_n) + \mathbf{p}_n (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_n)) = 0:$$

Խառը արտադրյալներում ցիկլիկ տեղափոխություններով $\delta \boldsymbol{\varphi}$ -ն դուրս հանենք վեկտորական արտադրյալից և ապա նաև գումարման նշանի տակից՝

$$\delta \boldsymbol{\varphi} \sum_{n=1}^N ((\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{p}}_n) + (\mathbf{v}_n \times \mathbf{p}_n)) = \delta \boldsymbol{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N (\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n) = 0:$$

Քանի որ $\delta \boldsymbol{\varphi}$ -ն կամայական է, ապա $\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N (\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n) = 0$ և

հանգում ենք

$$\mathbf{L} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n)$$

իմպուլսի մոմենտ (հաճախ՝ մոմենտ) կոչվող վեկտորական մեծության պահպանման օրենքին:

Իմպուլսի մոմենտն օժտված է ադիտիվության հատկությամբ, ընդ որում, ինչպես և իմպուլսը, այն կախված չէ ենթահամակարգերի միջև փոխադրեցության ներկայության կամ բացակայության հետ:

Եթե համակարգը գտնվում է արտաքին դաշտում, որն օժտված է տարածական պտույտի որոշակի համաչափությամբ, ապա պահպանվում է իմպուլսի մոմենտի պրոյեկցիան այդ առանցքի վրա: Մոմենտն այդ դեպքում պետք է սահմանվի առանցքի որևէ կետի՝ որպես կոորդինատների սկզբնակետի, նկատմամբ:

Այս բնույթի առավել կարևոր օրինակը կենտրոնական սիմետրիայով դաշտն է, ինչպիսին են, օրինակ, կետային մասնիկների գրավիտացիոն և էլեկտրաստատիկ դաշտերը: Այս դեպքում պահպանվում է մոմենտի պրոյեկցիան սիմետրիայի կենտրոնով անցնող կամայական առանցքի վրա: Այսինքն՝ $\mathbf{L}$ վեկտորը պահպանվում է սահմանված ոչ կամայական, այլ համաչափության կենտրոնի նկատմամբ:

§ 10. Նյութական կետի շարժումը կենտրոնական դաշտում

Կենտրոնական դաշտում մասնիկի պոտենցիալ էներգիան կախված է միայն մինչև կենտրոն հեռավորությունից՝ $U(\mathbf{r}) = U(r)$: Մասնիկի վրա ազդող ուժը հավասար է

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}:$$

Այն յուրաքանչյուր կետում ուղղված է շառավիղ վեկտորի երկայնքով:

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ պահպանվող մոմենտը հետագծի յուրաքանչյուր կետում ուղղահայաց է շառավիղ վեկտորին, տարված ուժային կենտրոնից: Դա հնարավոր է միայն եթե մասնիկը կատարում է հարթ շարժում, այսինքն՝ կենտրոնական դաշտում մասնիկի հետագիծը գտնվում է ուժային կենտրոնով անցնող միևնույն հարթության մեջ:

Մասնիկի շարժումը կուսումնասիրենք՝ ելնելով Լագրանժի հավասարումներից՝

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0:$$

Խնդրի համաչափությունը հուշում է, որ հարմար է օգտվել բևեռային կոորդինատներից՝ կապված շարժման հարթության դեկարտյան կոորդինատների հետ

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

բանաձևերով: Ընդհանրացված կոորդինատներ դառնում են r -ը φ -ն:

Անցում կատարելով՝ լագրանժյանի համար ստանում ենք

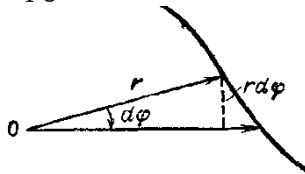
$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

արտահայտությունը, որը, ինչպես տեսնում ենք, բացահայտ կախված չէ φ -ից: Դա նշանակում է, որ $\partial L / \partial \varphi = 0$ և համաձայն Լագրանժի հավասարման, համապատասխան $p_\varphi \equiv \partial L / \partial \dot{\varphi}$ ընդհանրացված իմպուլսը պահպանվում է՝

$$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const} :$$

Բացելով L մոմենտի արտահայտությունը գլանային կոորդինատներում՝ դժվար չէ համոզվել, որ $p_\varphi = L_z = L$, այնպես որ բևեռացման անկյանը համապատասխանող ընդհանրացված իմպուլսը ոչ այլ ինչ է, քան իմպուլսի մոմենտի պրոյեկցիան հետագծի հարթությանն ուղղահայաց ուղղության վրա:

Բերենք (10.1)-ի երկրաչափական մեկնաբանությունը՝ օգտվելով (Նկ. 10.1)-ից:



$1/2 \cdot r \cdot r \dot{\phi}$ արտահայտությունը ներկայացնում է երկու (նկ. 10.1) անվերջ մոտ շառավիղ վեկտորներով և հետագծի տարրով կազմված սեկտորի մակերեսը: Նշանակենք այն ds -ով: Իմպուլսի մոմենտն այս նշանակումով կարող է գրվել $L = 2m\dot{s}$ տեսքով, որտեղ $\dot{s}$ -ը կոչվում է սեկտորիալ արագություն: Ուրեմն, մոմենտի պահպանությունը բերվում է սեկտորիալ արագության պահպանության, համաձայն որի նյութական կետի շառավիղ վեկտորը հավասար ժամանակամիջոցներում գծում է հավասար մակերեսներ: Արեգակի շուրջ

$$F = G \frac{m_{\odot} m}{r^2}$$

գրավիտացիոն ուժի ազդեցությամբ պտտվող մոլորակի դեպքում սա Կեպլերի երկրորդ օրենքն է:

Գրենք մասնիկի էներգիայի արտահայտությունը՝

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r):$$

Նրանում $\dot{\phi}$ անկյունային արագությունից անցնենք L իմպուլսի մոմենտին՝ օգտվելով վերոհիշյալ $L = mr^2 \dot{\phi}$ կապից: Կունենանք՝

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r):$$

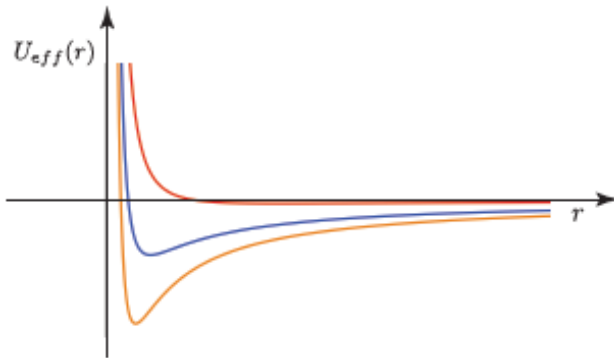
Այն ցույց է տալիս կարևոր օրինաչափություն, որ կենտրոնահամաչափ դաշտում շառաղային փոփոխությունները դիտելով որպես միաչափ շարժում, մի կողմ թողնելով հնարավոր անկյունային փոփոխությունները, կինետիկ էներգիայի հասկացությունը մնում է նույնը, սակայն փոխազդեցությամբ

պայմանավորված $U(r)$ էներգիային ավելանում է «կենտրոնախույս էներգիա» կոչվող $M^2 / 2mr^2$ անդամ: Գումարային

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

էներգիան ընդունված է անվանել էֆեկտիվ պոտենցիալ էներգիա:

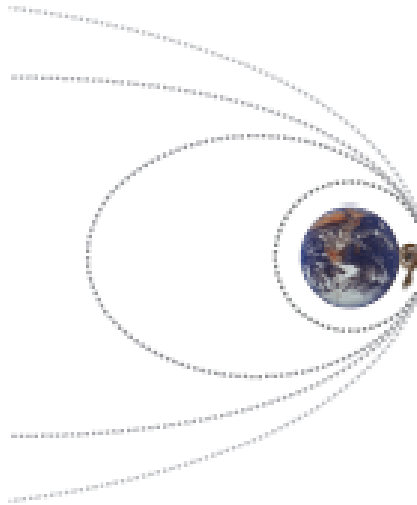
Էֆեկտիվ պոտենցիալի տեսքը պատկերված է Նկ. 10.2-ում, երեք տարբեր ձգողական փոխազդեցության դեպքերում, որոնք իրենց ուժային կենտրոններում կա՛մ զուրկ են եզակիությունից, կա՛մ ունեն $1/r^2$ -ից դանդաղ եզակիություն: Կենտրոնախույս էներգիայի առկայությունն այս դեպքերում սկզբունքորեն արգելափակում է մասնիկի անցման հնարավորությունը ուժային կենտրոնի վրայով:



Նկ. 10.2

Ինչպես տեսնում ենք գրաֆիկներից՝ $E \geq 0$ ոչ բացասական էներգիաների դեպքում մասնիկը, մոտենալով կենտրոնին, անդադադառնում է էներգիայից կախված որոշակի հեռավորությունից և ապա հեռանում անվերջություն: Հետագիծը լի-

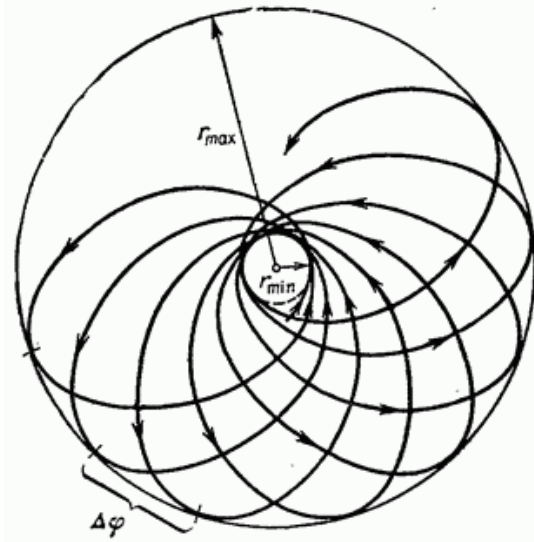
նում է պարաբոլ, եթե $E = 0$, և լինում է հիպերբոլ, եթե $E > 0$ (Նկ. 10.3):



Նկ. 10.3

Պատկերը փոխվում է $E < 0$ բացասական էներգիաների դեպքում: Այստեղ մասնիկի շառավղի ուղղությամբ շարժումը կանգ առնելու $E = U_{eff}(r)$ պայմանը բավարարվում է r -ի երկու արժեքների համար, անվանենք՝ r_{min} և r_{max} : Մասնիկը կենտրոնից r_{min} մինիմալ հեռավորությունից հասնում է մաքսիմալ r_{max} հեռավորության, ապա հակառակը և այսպես շարունակ: Մասնիկը շառավղի ուղղությամբ կատարում է ֆինիթ շարժում:

Չնայած որ շարժումը տեղի է ունենում պտտման անկյան մոնոտոն փոփոխությամբ, հետագիծն ընդհանուր դեպքում փակ կոր չի ստացվում (Նկ. 10.4):



Նկ. 10.4

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Այն փակ է և ունի էլիպսի տեսք դեպքում, ինչպիսին են կարևորագույն՝ գրավիտացիոն և կուլոնյան պոտենցիալները: Էլիպսը այլասերվում է շրջանագծի, եթե մասնիկի էներգիան ճշգրիտ հավասար է էֆեկտիվ պոտենցիալ էներգիայի մինիմալ արժեքին (Նկ. 10.2):

ԳԼՈՒԽ II

Քվանտային մեխանիկա

Երբ ֆիզիկական համակարգի չափերը դառնում են միկրոսկոպիկ, փոքր մոտավորապես 10^{-4} սմ-ից, դասական մեխանիկայի մեր իմացած օրինաչափությունները բավարար չեն լինում բնության օրենքները հասկանալու, մեկնաբանելու և կիրառելու համար և հարկ է լինում կառուցել նոր տեսություն, որը կոչվում է քվանտային մեխանիկա: Հիմնական ներթափանցող գաղափարն այս տեսության համար առաջ է քաշվել դե Բրոյլի կողմից, համաձայն որի յուրաքանչյուր նյութական մասնիկի ներհատուկ է ոչ միայն հատիկային, այլ նաև ալիքային հատկություններ: Ընդ որում, որոշակի E էներգիայով ազատ շարժման վիճակում այն հարթ մոնոքրոմատիկ ալիք է, որը տրվում է

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)/\hbar}$$



Լուի դե Բրոյլ
(1892-1987)

բանաձևով, որտեղ $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$ -ը ազատ շարժման իմպուլսն է, $\mathbf{n}$ -ը միավոր վեկտորը շարժման ուղղությամբ, իսկ $\hbar$ -ը կոչվում է Պլանկի հաստատուն:

Գոյություն ունի, իհարկե, համապատասխանության սկզբունք, որ միկրոհամակարգերից մակրոհամակարգերի անցնելիս քվանտամեխանիկական օրինաչափություններն անցնում են դասական մեխանիկայի օրինաչափությունների: Սակայն հարկ է ի սկզբանե նշել նաև հիմնարար տարբերություն՝ քվանտային տեսությունն իր ար-



Մաքս Պլանկ (1858 -1947)

մասներում ոչ դետերմինիստիկ է, իսկ դետերմինիստիկի այն «վերակերպում» է միայն մեծաթիվ մասնիկներից կազմված համակարգերի վարքում:

§ 11. Քվանտային մեխանիկայի պոստուլատները

Որպես ֆիզիկական տեսություն քվանտային մեխանիկան կառուցվում է հետևյալ պոստուլատների հիման վրա.

Դիտելիների օպերատորներ: Յուրաքանչյուր ֆիզիկական O դիտելիի համապատասխանության մեջ է դրվում $\hat{O}$ օպերատոր, որի վրա դրվում է հերմիտական լինելու

$$\int f^*(\mathbf{r}, t) \hat{O} g(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \int (\hat{O} f(\mathbf{r}, t))^* g(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (11.1)$$

պայման:

Ալիքային ֆունկցիա: Յուրաքանչյուր ֆիզիկական համակարգ ներկայացվում է ընդհանուր դեպքում կոմպլեքս $\psi(\mathbf{r}, t)$ ալիքային ֆունկցիայով այնպես, որ $\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$ -ն հավանականության խտությունն է այն բանի, որ մասնիկը կգտնվի տարածության $\mathbf{r}$ կետում ժամանակի t պահին:

Այն լոկալիզացված վիճակներում նորմավորվող է, այսինքն՝ հավանականությունների գումարն ամբողջ տարածության համար պետք է հավասար լինի մեկի՝

$$\int \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = 1: \quad (11.2)$$

Ալիքային ֆունկցիան որոշում է այն ամբողջ ինֆորմացիան, ինչ կարելի է իմանալ ֆիզիկական համակարգի մասին:

Սեփական ֆունկցիաներ: O դիտելին որոշակի արժեքներ ունենում է միայն վիճակներում, որոնք որոշվում են սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների

$$\hat{O} \psi_o(\mathbf{r}, t) = o \psi_o(\mathbf{r}, t) \quad (11.3)$$

հավասարումից: Հավասարմանը բավարարող O -ի արժեքները կոչվում են սեփական արժեքներ, $\psi_o(\mathbf{r}, t)$ -երը՝ O արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաներ: Օպերատորների էրմիտականությունն ապահովում է O սեփական արժեքների իրական լինելը:

Լրիվ համակարգ: Սեփական ֆունկցիաների բազմությունը կազմում է գծային անկախ ֆունկցիաների լրիվ համակարգ:

Քվանտամեխանիկական միջինը: Տրված $\psi(\mathbf{r}, t)$ ալիքային ֆունկցիայով նկարագրվող համակարգի որևէ q դիտելիի սպասվող արժեքը հաշվվում է

$$\langle o(t) \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{O} \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (11.4)$$

բանաձևի օգնությամբ:

§ 12. Շրեդինգերի հավասարումը: Ազատ ալիքային փաթեթ

Ալիքային ֆունկցիայի ժամանակային հավասարումը, ինչը թույլ է տալիս կանխատեսումներ անել համակարգի էվոլյուցիայի մասին, Շրեդինգերի

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (12.1)$$

հավասարումն է, որտեղ $\hat{H}$ -ը համակարգի համիլտոնյանն է՝ կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների գումարը, որում պոտենցիալ էներգիան ներառում է համակարգը կազմող մասնիկների միջև փոխազդեցությունները և փոխազդեցությունը համակարգից դուրս մարմինների (արտաքին դաշտերի հետ): Ի հաշիվ մաս կազմող պոտենցիալ էներգիայի՝ համիլտոնյանը կարող է կախված լինել նաև ժամանակից: Համիլտոնյանի օպերատորական բնույթը գալիս է նրանից, որ մասնիկի կինետիկ էներգիայի $\mathbf{p}^2/2M$ արտահայտությունում $\mathbf{p}$ իմպուլս փոխարինվում է

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \frac{d}{d\mathbf{r}}$$

տարածական ածանցյալին համեմատական օպերատորով: Կոորդինատի համար պահպանվում է նրա հանրահաշվական մեկնաբանությունը:

(12.1)-ը, ըստ ժամանակի առաջին կարգի, դիֆերենցիալ հավասարում է, ինչը համահունչ է այն հիպոթեզ/մեկնաբանությանը, որ ալիքային ֆունկցիան հայտնի սկզբնական պայմանների դեպքում ներառում է այն ամենը, ինչ ժամանակի հետագա պահերին մենք գիտենք կամ կարող ենք իմանալ համակարգի ֆիզիկական վիճակի մասին:

Առավել պարզ՝ միամասնիկ համակարգերի համար

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{d\mathbf{r}^2} + U(\mathbf{r}, t):$$

Ազատ շարժման դեպքում $U(\mathbf{r}, t) = 0$ և ալիքային ֆունկցիան բավարարում է

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{d\mathbf{r}^2}$$

հավասարմանը: Դիտարկենք միաչափ դեպքը և ընդհանուր լուծումը փնտրենք մոնոքրոմատիկ հարթ ալիքների սուպերպոզիցիայի տեսքով՝

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{i(p x - E(p)t)/\hbar} dp: \quad (12.2)$$

Հավասարմանը բավարարելու պահանջից ստացվում է

$$E(p) = \frac{p^2}{2M}$$

դիսպերսիոն առնչությունը, իսկ վերադրվող ալիքների $c(p)$ ամպլիտուդները ստացվում են ալիքային փաթեթի $\Psi(x, 0)$ սկզբնական տեսքից Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխության միջոցով՝

$$c(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0) e^{-i p x / \hbar} dx: \quad (12.3)$$

Որոշակիության համար ենթադրենք սկզբնական ալիքային փաթեթն ունեցել է գաուսյան տեսք և իմպուլսի p_0 միջին արժեք՝

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} \Delta x}} e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)_0^2} - i \frac{p_0}{\hbar} x},$$

որտեղ գործակիցը ստացվում է ալիքային փաթեթի հավանականային նորմավորման պայմանից: (12.3)-ում և (12.2)-ում հաջորդական տեղադրումներում ստացվում են գաուսյան ինտեգրալներ, որոնք անալիտիկ հաշվվում են

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a u^2 + i b u} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

բանաձևի օգնությամբ, փնտրվող ալիքային ֆունկցիայի համար տալով

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{\Delta x}{(\Delta x)_0^2 + i \hbar t / M}} e^{-\frac{(x - p_0 t / M)^2 / 2}{(\Delta x)_0^2 + i \hbar t / M}}$$

արտահայտությունը: Սա ոչ այլ ինչ է, քան նորից գաուսյան բաշխում, որի գագաթը շարժվում է մասնիկի սկզբնական $v_0 = p_0 / M$ արագությամբ, սակայն բաշխման լայնությունը, այսինքն՝ $x = p_0 t / M$ կետի շուրջ լոկալիզացման չափը, մեծանում է: Ազատ շարժվող մասնիկի հատիկային հատկությունն ալիքային փաթեթի տեսքով ներկայացնելիս վերջինս, համաձայն Շրեդինգերի ալիքային հավասարման, մոնոտոն ճապաղվում է

$$\Delta x = \left((\Delta x)_0^4 + \hbar^2 t^2 / M^2 \right)^{1/4}$$

օրինաչափությամբ: Ջրածնի ատոմի համար, օրինակ, զանգվածների կենտրոնի տարածական բաշխման լայնությունն ատոմի տրամագծից երկու անգամ մեծանում է մոտ մեկ վայրկյանի ընթացքում:

Ճապաղման գոյությունը, այնուամենայնիվ, գաղափարական հակասության չի բերում մասնավորապես այն պատճառով, որ ձգողական պոտենցիալային հորերում ալիքային փաթեթի չափերն ընդհանուր դեպքում օսցիլացվում են, սակայն մնում են վերջավոր:

§ 13. Կապը դասական մեխանիկայի հետ: Էրենֆեստի թեորեմը

Քվանտային և դասական մեխանիկաների համադրման պարզ ճանապարհը ֆիզիկական մեծությունների, առաջին հերթին մասնիկի դիրքի և իմպուլսի, միջին արժեքների ժամանակային եվոլյուցիայի քննարկումն է:

Դիտարկենք որևէ $q(\mathbf{r}, t)$ ֆիզիկական մեծության $\hat{Q}(\mathbf{r}, t)$ օպերատորի

$$\langle q \rangle(t) = \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{Q}(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}$$

քվանտամեխանիկական միջինը և հաշվենք նրա ածանցյալը՝

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle q \rangle &= \int \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \hat{Q}(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} + \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{Q}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d^3\mathbf{r} + \\ &+ \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \hat{Q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \frac{i}{\hbar} \int \left(\hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) \right)^* \hat{Q}(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} - \\ &- \frac{i}{\hbar} \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{Q}(\mathbf{r}, t) \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} + \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \hat{Q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \end{aligned}$$

Առաջին գումարելիում $\hat{H}$ համիլտոնյանի համար օգտվենք հերմիտականության (11.2) առնչությունից, $\hat{f}$ -ի տակ հասկանալով ψ -ն, իսկ $\hat{g}$ -ի տակ՝ $\hat{Q}(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$ -ն՝

$$\int \left(\hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) \right)^* \hat{Q}(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{H} \hat{Q}(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} :$$

Տեղադրելով վերևում, կունենանք

$$\frac{d}{dt} \langle q \rangle = \frac{i}{\hbar} \int \psi^*(\mathbf{r}, t) [\hat{H}, \hat{Q}(\mathbf{r}, t)] \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} + \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \hat{Q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (13.1)$$

ընդհանուր արտահայտությունը կամայական ֆիզիկական մեծության միջինի փոփոխման արագության համար, որտեղ

$[\hat{H}, \hat{Q}] = \hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}$ -ն $\hat{H}$ և $\hat{Q}$ օպերատորների կոմուտատորն է:

Կիրառենք (13.1)-ը N ազատության աստիճան ունեցող համակարգի q_i , ընդհանրացված կոորդինատների և p_i ընդհանրացված իմպուլսների ($i = 1, 2, \dots, N$) նկատմամբ՝

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle q_i \rangle = \langle [q_i, \hat{H}] \rangle, \quad i\hbar \frac{d}{dt} \langle p_i \rangle = \langle [\hat{p}_i, \hat{H}] \rangle,$$

որտեղ աջ մասերում ևս քվանտամեխանիկական միջինացումները ներկայացված են անկյունային փակագծերով: Հավասարումները գրելիս նաև հաշվի է առնվել, որ Համիլտոնի ֆորմալիզմում կոորդինատները, իմպուլսները և ժամանակն ի սկզբանե անկախ փոփոխականներ են (իսկ իրար առնչվում են շարժումը նկարագրող Համիլտոնի հավասարումների միջոցով):

Երկրորդ կոմուտատորը հաշվվում է անմիջապես՝ օգտվելով ընդհանրացված իմպուլսի $\hat{p}_i = -i\hbar \partial / \partial q_i$ ներկայացումից: Երկրորդ կոմուտատորը հաշվելու համար օգտագործվում է $[q_i, \hat{p}_i^n] = ni\hbar \hat{p}_i^{n-1}$ առնչությունը (ինչում նորից կարելի է համոզվել $\hat{p}_i$ -ի բացահայտ տեսքի միջոցով): Դրա համար $\hat{H}$ -ը ներկայացվում է, ըստ $\hat{p}_i$ -երի, վերլուծության միջոցով, կիրառվում է նշված առնչությունն անդամ առ անդամ և ապա շարքը նորից ետ հավաքվում: Արդյունքում ստացվում է $[q_i, \hat{H}] = i\hbar \partial \hat{H} / \partial \hat{p}_i$: Տեղադրումը տալիս է՝

$$\frac{d}{dt} \langle q_i \rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} \right\rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle p_i \rangle = - \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i} \right\rangle: \quad (13.2)$$

Այս հավասարումների էությունը կոչվում է Էրենֆեստի թեորեմ, իսկ հավասարումները՝ Էրենֆեստի հավասարումներ: Դրանք հիշեցնում են դասական մեխանիկայի՝

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (13.3)$$

Համիլտոնի հավասարումները:



Էրենֆեստի աշակերտների հետ (1924թ):

Զախից աջ՝ Գերհարդ Դիկե, Սամուել Գաուդսմիթ, Յան Թինբերգեն, Պաուլ Էրենֆեստ, Ռալֆ Կրոնիգ և Էնրիկո Ֆերմի:

Էրենֆեստի թեորեմի պնդումը այն է, որ ընդհանուր դեպքում ընդհանրացված կոորդինատների և ընդհանրացված իմպուլսների $\langle q_i \rangle$ և $\langle p_i \rangle$ միջինները չեն հետևում դասական մեխանիկայի օրենքներին՝ (13.2) հավասարումները հիշեցնում, սակայն չեն համընկնում (13.3) հավասարումների հետ: Ասվածի բովանդակությունը հասկանալու համար նկատենք, որ դասական մեխանիկայում q_i և p_i մեծությունների (որոնք $\langle q_i \rangle$ և $\langle p_i \rangle$ քվանտամեխանիկական միջինների համարժեքներն են) ժամանակային ածանցյալները, համաձայն (13.3) հա-

վասարումների, այդ նույն մեծությունների խիստ որոշակի $\partial H(p, q)/\partial p_i$ և $-\partial H(p, q)/\partial q_i$ ֆունկցիաներ են, որտեղ p -ով և q -ով նշանակված են համապատասխանաբար՝ $\{p_1, \dots, p_N\}$ և $\{q_1, \dots, q_N\}$ բազմությունները: Հետևաբար, համակարգի շարժման վարքը ժամանակի հետագա պահերին միարժեք որոշվում է ժամանակի որևէ, որպես սկզբնապահ ընտրված, պահին նրանց ունեցած արժեքներով, ինչը առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների միակության բավարար պայմանն է: Իսկ համաձայն (13.2) հավասարումների՝ $d\langle q_i \rangle/dt$, $d\langle p_i \rangle/dt$ ածանցյալները հավասար են որոշ միջինների, որոնք հաշվելու համար, և սա է առանցքային տարբերությունը, անհրաժեշտ է իմանալ $\psi(\mathbf{r}, t)$ ալիքային ֆունկցիան, (13.2) հավասարումների համակարգից դուրս մի բան, որի իմացությունը համարժեք չէ $\langle q_i \rangle$ -ի և $\langle p_i \rangle$ -ի ժամանակի սկզբնապահին իմացությանը:

Կոորդինատների և իմպուլսների $\langle q_i \rangle$ և $\langle p_i \rangle$ միջինները հետևում են դասական մեխանիկայի օրենքներին միայն այն չափով, որ չափով որ (13.2)-ի աջ մասերում ֆունկցիաների միջին արժեքները կարելի է փոխարինել միջինների ֆունկցիաներով, այսինքն՝, եթե

$$\left\langle \frac{\partial \hat{H}(\hat{p}, q)}{\partial \hat{p}_i} \right\rangle \rightarrow \frac{\partial \hat{H}(\langle \hat{p} \rangle, \langle q \rangle)}{\partial \langle \hat{p}_i \rangle}, \quad \left\langle \frac{\partial \hat{H}(\hat{p}, q)}{\partial q_i} \right\rangle \rightarrow \frac{\partial \hat{H}(\langle \hat{p} \rangle, \langle q \rangle)}{\partial \langle q_i \rangle}:$$

Այս փոխարինումը ճշգրիտ է միայն այն դեպքերում, երբ համիլտոնյանը երկրորդ կարգի բազմանդամ է ըստ p և q փոփոխականների (ազատ շարժում, համասեռ էլեկտրական, մագնիսական, գրացիտացիոն դաշտեր, ներդաշնակ օսցիլյա-

տոր): Մնացած բոլոր դեպքերում այդպիսի փոխարինումն արհամարհում է p -ի և q -ի ֆլուկտուացիաներն իրենց միջինների շուրջը:

§ 14. Ստացիոնար վիճակներ

Քվանտային մեխանիկայում առաջնային հետաքրքրություն են ներկայացնում ժամանակից անկախ համիլտոնյանները: Դրանք թույլ են տալիս ստացիոնար՝ էներգիայի որոշակի արժեքով օժտված, վիճակներ: Դրանցից յուրաքանչյուրի $\psi(\mathbf{r}, t)$ ալիքային ֆունկցիան ժամանակից կախված է պարզագույն էքսպոնենցիալ օրենքով՝

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t},$$

որտեղ E -ն էներգիան է, իսկ կոորդինատային մասը՝ $\psi(\mathbf{r})$ -ը՝ համաձայն (12.1) հավասարման, բավարարում է համակարգի համիլտոնյանի համար սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների քիչ վերնում նշված պոստուլատին՝

$$\hat{H} \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}):$$

N նյութական կետերից բաղկացած համակարգի համար հավասարումն ունի

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{d^2 \psi_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{d\mathbf{r}_i^2} + U \psi_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = E \psi_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (14.1)$$

ընդհանուր տեսքը: Այն երկրորդ կարգի $3N$ փոփոխականների դիֆերենցիալ հավասարում է և կոչվում է Շրեդինգերի ստացիոնար հավասարում:

Վերջավոր ծավալում ֆինիթ շարժումների համար (14.1) հավասարումը լուծումներ թույլատրում է էներգիայի միայն

որոշակի՝ դիսկրետ արժեքների դեպքում: Դրանք $\hat{H}$ -ի սեփական արժեքներ են, իսկ $\psi_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ -երը՝ $\hat{H}$ -ի սեփական ֆունկցիաներ: Դիսկրետ սպեկտրի լուծումները հարմար է համարակալել $n = 0, 1, \dots$, ըստ էներգիայի փոքրից մեծ արժեքների հերթականության: Շրեդինգերի հավասարումն էլ գրվում է

$$\left(-\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{d^2}{d\mathbf{r}_i^2} + U \right) \psi_n = E_n \psi_n,$$

տեսքով, որտեղ n -ն ընդունում է վերջավոր կամ հաշվելի թվով անվերջ արժեքներ:

Դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունից հետևում է, որ Շրեդինգերի ստացիոնար հավասարման լուծումների բազմությունը կազմում է լրիվ կամ փակ համակարգ և ուրեմն նույն փոփոխականների կամայական ֆունկցիա, մեր դեպքում համակարգի $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ժամանակային ալիքային ֆունկցիան, կարող է վերլուծվել ըստ այդ լուծումների՝

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \psi_n(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right): \quad (14.2)$$

Վերլուծությունը ալիքային ֆունկցիայի որոշումը բերում է $a_n(t)$ գործակիցների որոշմանը, որոնց մոդուլների քառակուսիները ներկայացնում են հավանականությունն այն բանի, որ ժամանակի t պահին կատարված վիճակի չափումը կհայտնաբերի համակարգը n -րդ ստացիոնար վիճակում:

Տեղադրենք (12.2)-ը (12.1)-ում և օգտվենք ստացիոնարությանից հետևող

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n$$

առնչությունից: Հավասարման երկու մասից նույնական անդամների կրճատումից հետո ստանում ենք՝

$$\sum_n \frac{d a_n(t)}{dt} \psi_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) = 0:$$

Բազիսային վիճակներն ընդունելով օրթոգոնալ՝ այսինքն՝ բավարարող

$$\int \psi_n^* \psi_m d\tau = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

պայմանին, որտեղ ինտեգրումը գնում է ըստ համակարգի բոլոր տարածական ազատության աստիճանների, ստանում ենք՝

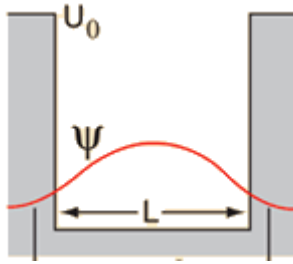
$$\frac{d a_n(t)}{dt} = 0, \quad a_n(t) = a_n(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots:$$

Այսինքն՝ ժամանակից անկախ համիլտոնյանի դեպքում (14.1) վերլուծության գործակիցները ևս անկախ են ժամանակից և ունենում են որպես սկզբնապահ ընտրված որևէ պահին ունեցած արժեքները.

$$\Psi(t) = \sum_n a_n(0) \psi_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right):$$

§ 15. Մասնիկը պոտենցիալային հորում

Որպես ստացիոնար վիճակների օրինակ քննարկենք վերջավոր խորության միաչափ ուղղանկյուն պոտենցիալային հորում մասնիկի խնդիրը (Նկ. 15.1): Պոտենցիալ էներգիայի հաշվարկը կատարվում է հորի հատակից, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը տեղադրված է հատակի կենտրոնում:



Նկ. 15.1

Գրենք մասնիկի ալիքային ֆունկցիայի որոշման Շրեդինգերի ստացիոնար հավասարումը

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & |x| \geq L/2 \\ 0 & |x| < L/2 \end{cases}$$

պոտենցիալային դաշտում՝

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_E(x)}{dx^2} + U(x) \psi_E = E \psi_E(x):$$

Հորի $-L/2 < x < L/2$ ներքին տիրույթում հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$\psi_{\text{middle}}(x) = b_1 e^{ikx} + b_2 e^{-ikx}$$

ֆունկցիան, որտեղ մտցված է մասնիկի էներգիան բնութագրող $k = \sqrt{2mE} / \hbar$ պարամետրը:

Ձախակողմյան $x \leq -L/2$ տիրույթում հավասարումն ունենում է

$$-\frac{d^2 \psi_E(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) \psi_E(x) = 0,$$

տեսքը, որտեղ $E < U_0$, իսկ ընդհանուր լուծումը լինում է՝

$$\psi_{\text{left}}(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x},$$

որտեղ $\alpha = \sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar$: Երբ $x \rightarrow -\infty$, ապա երկրորդ անդամը տարամիտում է և չի բավարարում նորմավորման պայմանին: Հարկ է վերցնել $c_2 = 0$: Նույն պատճառով $x \geq L/2$ աջակողմյան տիրույթի

$$\psi_{\text{right}}(x) = d_1 e^{\alpha x} + d_2 e^{-\alpha x}$$

ընդհանուր լուծման մեջ պետք է վերցնել $d_1 = 0$:

Նկատի ունենալով $U(x)$ ֆունկցիայի սիմետրիկ լինելը՝ (5.8)-ի լուծումները հարմար է լինում տրոհել սկզբնական տիրույթի սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ լուծումների:

Սիմետրիկ լուծումների համար $d_2 = c_1 \equiv c_{\text{sym}}$, $b_2 = b_1 \equiv b_{\text{sym}}$: Մնացող c_{sym} և b_{sym} գործակիցների միջև առաջին առնչությունը կարելի է ստանալ ալիքային ֆունկցիայի $x = L/2$ (կամ $x = -L/2$) կետում անընդհատության պայմանից՝

$$c_{\text{sym}} e^{-\alpha L/2} = 2b_{\text{sym}} \cos(kL/2): \quad (15.2)$$

Երկրորդ պայմանը նույն կետում ածանցյալի անընդհատության պայմանից է՝

$$\alpha c_{\text{sym}} e^{-\alpha L/2} = 2k b_{\text{sym}} \sin(kL/2): \quad (15.3)$$

Այս առնչությունները համատեղելի են, եթե գործակիցներին կազմված դետերմինանտը հավասար է զրոյի, այսինքն, եթե

$$k \operatorname{tg}(kL/2) = \sqrt{k_0^2 - k^2}: \quad (15.4)$$

Սա տրանսցենդենտ հավասարում է $k = \sqrt{2mE} / \hbar$ էներգիայի պարամետրի համար և կիրառելիության $k \leq k_0 \equiv \sqrt{2mU_0} / \hbar$ տիրույթում բավարարվում է վերջավոր

թվով դեպքերում, որոնց ընդհանուր թիվը մեծանում է հորի U_0 խորության և L լայնության մեծացմանը զուգընթաց:

(15.4) պայմանի դեպքում (15.2) և (15.3) հավասարումները կրկնում են իրար, այնպես որ ալիքային ֆունկցիայի գործակիցների համար հարկ է ևս մի պայման, որը նորմավորման պայմանն է: Քննարկվող պայմաններում այն լինում է

$$c_{\text{sym}}^2 \int_{-\infty}^{-L/2} e^{2\alpha x} dx + 4b_{\text{sym}}^2 \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2(kx) dx + c_{\text{sym}}^2 \int_{L/2}^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = 1:$$

Տեղադրումների արդյունքում ալիքային ֆունկցիայի համար ստանում ենք

$$\psi_{\text{sym}}(x) = \begin{cases} c_{\text{sym}} e^{\alpha x} & x \leq -L/2 \\ 2b_{\text{sym}} \cos(kx) & -L/2 < x < L/2 \\ c_{\text{sym}} e^{-\alpha x} & x \geq L/2 \end{cases} \quad (15.5)$$

արտահայտությունները, որտեղ

$$b_{\text{sym}} = \left(\frac{2}{\alpha} (1 + \cos kL) + \frac{2}{k} (kL + \sin kL) \right)^{-1/2},$$

իսկ c_{sym} -ը ստացվում է (15.2) կապից:

Անտիսիմետրիկ լուծումների համար $d_2 = -c_1 \equiv -c_{\text{anti}}$, $b_2 = -b_1 \equiv -b_{\text{anti}}$, իսկ անընդհատության պայմանները տալիս են

$$\begin{aligned} c_{\text{anti}} e^{-\alpha L/2} &= -i 2b_{\text{anti}} \sin(kL/2), \\ \alpha c_{\text{anti}} e^{-\alpha L/2} &= i 2k b_{\text{anti}} \cos(kL/2) \end{aligned}$$

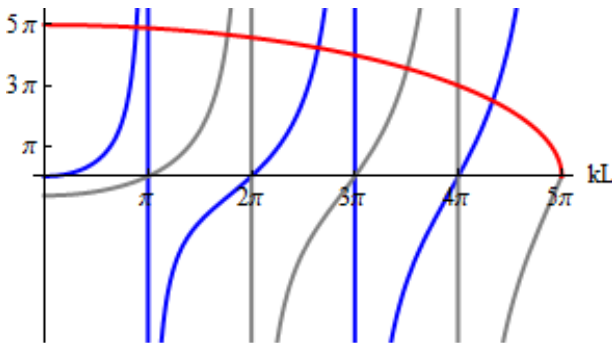
առնչությունները, որոնք համատեղելի են, եթե

$$-k \operatorname{ctg}(kL/2) = \sqrt{k_0^2 - k^2}: \quad (15.6)$$

$$\psi_{\text{anti}}(x) = \begin{cases} -c_{\text{anti}} e^{\alpha x} & x \leq -L/2 \\ 2ib_{\text{anti}} \sin(kx) & -L/2 < x < L/2 \\ c_{\text{anti}} e^{-\alpha x} & x \geq L/2 \end{cases} \quad (15.7)$$

Ինչպես տեսնում ենք (15.4) և (15.6) արտահայտություններից, մասնիկի ալիքային ֆունկցիան սինուս-կոսինուսի օրենքով տատանվում է հորի սահմաններում և ապա էքսպոնենցիալ օրենքով նվազում հորի սահմաններից դուրս, ընդ որում, տատանումները հաճախանում են մասնիկի էներգիայի աճին զուգընթաց, իսկ մարումները հորից դուրս՝ դանդաղում են:

(15.4) և (15.6) տրանսցենդենտ առնչությունները, որոնք որոշում են համապատասխանաբար սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ ալիքային ֆունկցիաներով ստացիոնար վիճակների էներգիաների արժեքները, մեկնաբանված են Նկ. 15.2-ում՝



Նկ. 15.2

Սնով և մոխրագույնով ներկայացված են համապատասխանաբար (15.4)-ի և (15.6)-ի ձախակողմյան մասերը: Վերևով ընթացող հատող կորը հավասարումների աջակողմյան մասն է, որը նույնն է երկու հավասարումների համար էլ: Ուղղահա-

յաց գծերը բաժանում են տիրույթները և գրաֆիկներին չեն պատկանում: Եթե n -րդ հատման կետի աբսցիսը նշանակենք $k_n L$, ապա n -րդ ստացիոնար վիճակի էներգիան՝

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2:$$

Սա մասնիկի էներգետիկ սպեկտրն է և, ինչպես տեսնում ենք Նկ. 13.2-ից, նրանում անտիսիմետրիկ և սիմետրիկ ալիքային ֆունկցիաներով վիճակների էներգիաները հաջորդում են միմյանց: Մինիմալ էներգիայով մակարդակը կոչվում է հիմնական՝ մասնիկը նրանից փոքր էներգիայով լինել չի կարող:

Հետաքրքիր է, որ $k_0 L/2 < \pi/4$ պայմանին բավարարող (ծանձաղ և նեղ) պոտենցիալային հորում մասնիկը պահվել չի կարող:

§ 16. Պոտենցիալային հորում մասնիկի վիճակի դասական անալոգիան

Ինչպես տեսնում ենք, ժամանակից անկախ ալիքային ֆունկցիայի միջոցով քվանտամեխանիկական նկարագրությունը էականորեն նոր մոտեցում է մասնիկի վիճակին: Իսկապես, դասական պատկերացումների դեպքում մասնիկը, գտնվելով հորում, կարող է ունենել կամայական E էներգիա, միայն թե այն փոքր լինի U_0 բարձրությունից: Հորում նա կատարելու է պարբերական շարժում $v = \sqrt{2E/m}$ արագությամբ՝ հաջորդաբար բախվելով հորի պատերին և առաձգականորեն անդրադառնալով: Մասնիկն անշարժ է միայն միջինում, ինչը բավարար համարել չենք կարող քվանտային և դա-

սական պատկերացումների միջև համապատասխանություն տեսնելու համար: վերջինիս համար ելնում ենք տվյալ կետի մոտակայքում մասնիկին հայտնաբերելու հավանականությունից, ինչը հիմնարար գաղափար է n' դասական, n' քվանտային տեսությունների շրջանակներում: Դասական նկարագրության դեպքում որևէ dx լայնության միջակայքում մասնիկի հայտնաբերման հավանականությունը տրվում է

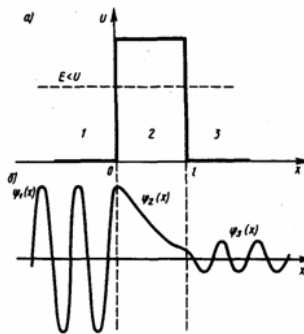
$$dw = \frac{dt}{L/v} = \frac{dx}{L}$$

ակնհայտ արտահայտությամբ, իսկ քվանտային մեխանիկան այս նույն արդյունքը տալիս է հորի ներսում ալիքային ֆունկցիայի մոդուլի քառակուսու տարածական միջինացումից և հորից դուրս ալիքային ֆունկցիայի առկայությունը արհամարհելուց հետո, ինչը հիմնավորված է այնքան, որքան մեծ է վիճակի n քվանտային թիվը, կամ որ նույնն է՝ մասնիկի E_n էներգիան: Սա ընդհանուր կանոն է ֆիզիկական բոլոր համակարգերի համար:

Քվանտային պատկերացումներում առկա է, այնուամենայնիվ, սկզբունքային բնույթի նորություն ևս: Դասական օրինաչափությունների դեպքում մասնիկը չի կարող թափանցել տարածական տիրույթներ, որտեղ լինելու դեպքում նրա էներգիան փոքր կլիներ պոտենցիալ էներգիայի արժեքից, քանի որ կլինետիկ էներգիան այդ դեպքում կլիներ բացասական: Քննարկվող խնդրում դրանք $x = \pm L/2$ կետերից դուրս գտնվող տիրույթներն են: Ինչպես տեսնում ենք խնդրի (15.5) և (15.7) լուծումներից, այդ տիրույթներ թափանցելու հավանականությունը զրո չէ և ընդամենը էքսպոնենցիալ օրենքով նվազում է թափանցման խորության մեծացմանը զուգընթաց:

Ասում ենք, որ քվանտային մասնիկը թունելանում է դասակարգեն ոչ թույլատրելի տիրույթներ:

Քվանտային թունելացման բովանդակությունն ավելի հստակ ի հայտ է գալիս վերջավոր լայնության պոտենցիալային արգելքների դեպքում, ինչպես մասնավորապես պատկերված է Նկ. 15.3-ում: Այն մանրամասն կքննարկվի հետագայում՝ շեշտադրելով առկա տեխնոլոգիական կիրառությունները:

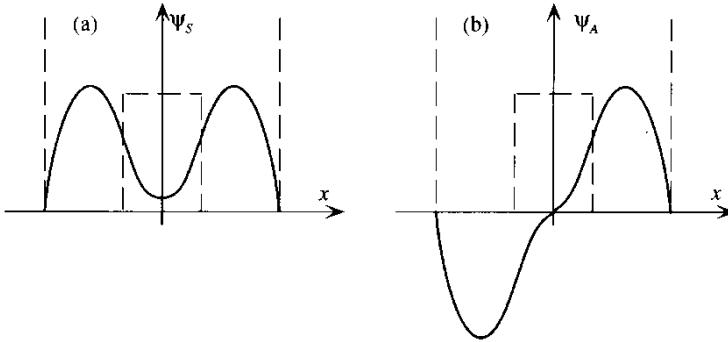


Նկ. 15.3

§ 17. Քվանտային թունելացում կրկնակի պոտենցիալային հորում

Կրկնակի պոտենցիալային հորը անվերջ բարձր պատերի ներսում սիմետրիկ տեղակայված a լայնության երկու ուղղանկյուն պոտենցիալային հորեր են, որոնց միջև գտնվում է U_0 բարձրության և b լայնության պոտենցիալային արգելք: Նկ. 17.1-ում այն պատկերված է գծիկներով, առանց լրացուցիչ մեկնաբանումների: Թունելացման խնդրի լուծուման համար նախ որոշենք մասնիկի ստացիոնար վիճակները՝ համարելով

մասնիկի E էներգիան փոքր պոտենցիալային արգելքի U_0 բարձրությունից:



Նկ. 17.1

Շրեդինգերի ստացիոնար $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ հավասարման լուծումները, ինչպես և նախորդ պարագրաֆում, բաժանվում են սիմետրիկ և անսիմետրիկ դասերի: Ստանդարտ գործողությունների արդյունքում դրանց համար ստանում ենք

$$\psi_{\text{sym}}(x) = \begin{cases} A \sin k(a + b/2 + x) & -a - b/2 \leq x \leq -b/2 \\ B \operatorname{ch}(\alpha x) & -b/2 < x < b/2 \\ A \sin k(a + b/2 - x) & a + b/2 \geq x \geq b/2 \end{cases}$$

և

$$\psi_{\text{anti}}(x) = \begin{cases} -A \sin k(a + b/2 + x) & -a - b/2 \leq x \leq -b/2 \\ B \operatorname{sh}(\alpha x) & -b/2 < x < b/2 \\ A \sin k(a + b/2 - x) & a + b/2 \geq x \geq b/2 \end{cases}$$

արտահայտությունները, որտեղ $k = \sqrt{2mE} / \hbar$, $\alpha = \sqrt{k_0^2 - k^2}$
 և $k_0 = \sqrt{2mU_0} / \hbar$: Էներգիայի թույլատրելի արժեքներն էլ
 ստացվում են որպես

$$\operatorname{tg} ka = -\frac{k}{\alpha} \operatorname{cth} \alpha b/2$$

և

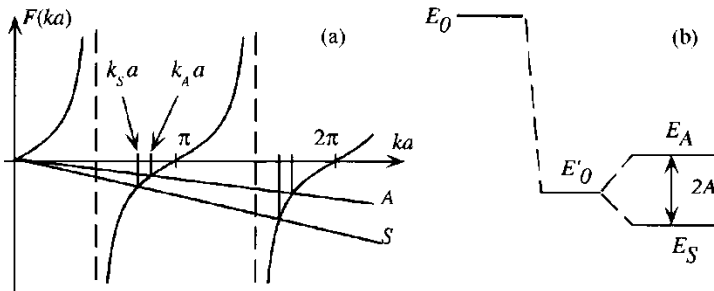
$$\operatorname{tg} ka = -\frac{k}{\alpha} \operatorname{th} \alpha b/2$$

տրանսցենդենտ հավասարումների լուծումներ: Նկ. 17.1-ում
 պատկերված են մասնիկի մեկ սիմետրիկ և մեկ անտիսիմետ-
 ռիկ ալիքային ֆունկցիաներ՝ համապատասխանաբար հիմ-
 նական և առաջին գրգռված էներգետիկ մակարդակներում:

Սահմանափակվենք բարձր միջնորմ պոտենցիալի դեպ-
 քով: Այն ենթադրում է $E \ll U_0$, $\alpha b \gg 1$ պայմանների բավա-
 րարում և համապատասխանաբար α -ի թույլ կախում k -ից:
 Էներգիայի որոշման տրանսցենդենտ հավասարումները
 պարզեցվում են և գրվում

$$\operatorname{tg} ka \simeq -\frac{k}{\alpha} (1 \pm 2 \exp(-\alpha b))$$

տեսքով, որի աջ մասը երկու՝ սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ
 դեպքերի համար էլ համարյա գծային ֆունկցիա է k -ից:
 Դրանք ձախակողմյան արտահայտության գրաֆիկի հետ
 պատկերված են Նկ. 17.2a-ում: Լուծումները ներկայացնող
 հատման կետերի առաջին



Նկ. 17.2

գույգը գտնվում է $ka \approx \pi$ պայմանի հարևանությամբ: Հատկանշական է, որ էներգետիկ մակարդակներն այստեղ ի հայտ են գալիս գույգերով (սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ մեկական ալիքային ֆունկցիաներով), որոնց միջև հեռավորությունն աստիճանաբար մեծանում է: Նկ. 17.2b-ն լրացուցիչ մեկնաբանություն է տալիս իրավիճակին: E_0 -ով նշանակված է անվերջ բարձր պոտենցիալային միջնորմի պայմաններում առանձին հորում մասնիկի հիմնական էներգիայի արժեքը, իսկ E'_0 -ը E_S -ի և E_A -ի համատեղ ասիմպտոտիկ արժեքն է միջանկյալ միջնորմ արգելքի բարձրությունը անվերջության ձգտեցնելիս: E'_0 -ի ճեղքումը E_S -ի և E_A -ի պոտենցիալային միջնորմով քվանտային մասնիկի թունելացման արդյունք է, որի մեծությունը, ի դեպ, մեծանում է մասնիկի էներգիայի աճին զուգընթաց:

• **Հորերի բնակեցվածությունների ժամանակային էվոլյուցիան:** Այժմ անդրադառնանք կրկնակի պոտենցիալային հորում մասնիկի ալիքային ֆունկցիայի ժամանակային վարքին: Դրա համար, համաձայն (14.2)-ի, անհրաժեշտ է, որ ժա-

մանակի սկզբնապահի ալիքային ֆունկցիան ներառի մեկից ավելի էներգետիկ մակարդակներ:

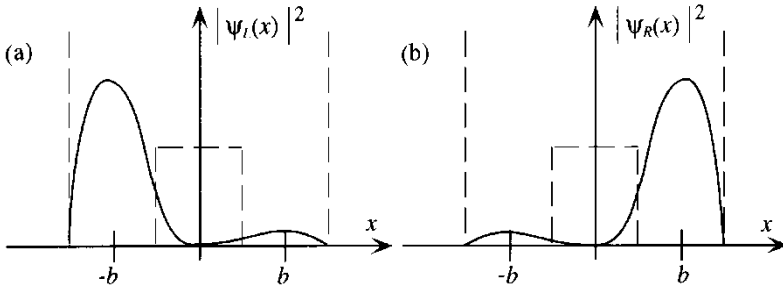
Ենթադրենք բնակեցված են առաջին զույգ մակարդակները հավասար հավանականություններով՝ $a_{\text{sym}}(0) = a_{\text{anti}}(0) = 1/\sqrt{2}$: Գրենք ալիքային ֆունկցիան՝

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= a_{\text{sym}}(0) \psi_{\text{sym}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\text{sym}} t\right) + a_{\text{anti}}(0) \psi_{\text{anti}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\text{anti}} t\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\text{sym}} t\right) \left[\psi_{\text{sym}} + \psi_{\text{anti}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_{\text{anti}} - E_{\text{sym}}) t\right) \right],\end{aligned}$$

և դրանից բխող հավանականության տարածաժամանակային բաշխումը՝

$$\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} \left[\psi_{\text{sym}}^2 + \psi_{\text{anti}}^2 + 2\psi_{\text{sym}}\psi_{\text{anti}} \cos\left(-\frac{1}{\hbar} (E_{\text{anti}} - E_{\text{sym}}) t\right) \right]:$$

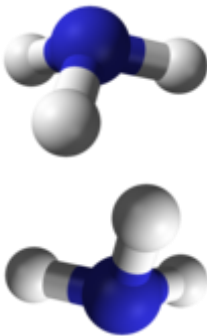
Ինչպես տեսնում ենք, բնակեցվածությունը $T = 2\pi\hbar/(E_{\text{anti}} - E_{\text{sym}})$ պարբերաբարությամբ տատանվում է երկու պոտենցիալային հորերի միջև: Ձախակողմյանում է, երբ $\rho_L(x) = (\psi_{\text{sym}} + \psi_{\text{anti}})^2 / 2$ և աջակողմյանում, երբ $\rho_R(x) = (\psi_{\text{sym}} - \psi_{\text{anti}})^2 / 2$: Դրանց տարածական բաշխվածությունները ներկայացված են Նկ. 17.3-ում, համապատասխանաբար՝ a և b գրաֆիկներով: Մասնիկն ունենալով հորերի միջև պոտենցիալային արգելքից փոքր էներգիա՝ պարբերաբար անցնում է պոտենցիալային մի հորից մյուսը: Սա քվանտային թունելացման երևույթն է, մասնիկի ալիքային հատկությունների հետևանքը:



Նկ. 17.3

Միջնորմ պոտենցիալի բարձրության և լայնության մեծացումը փոքրացնում է $E_{\text{anti}} - E_{\text{sym}}$ տարբերությունը և տատանումները դանդաղում են: Կիրառական խնդիրների տեսանկյունից էներգետիկ մակարդակների զույգի միջև $E_{\text{anti}} - E_{\text{sym}}$ տարբերությունը փորձնականորեն հեշտ չափվող մեծություն է, մասնավորապես օպտիկական անցման արդյունքում ճառագայթված կամ կլանված ֆոտոնների հաճախությունը չափելու միջոցով:

Որպես օրինակ բերենք ամոնիակի մոլեկուլը, որում ջրածնի երեք ատոմներ միավորված են ազոտի ատոմի հետ (NH_3):



Քվանտային թունելացումն այստեղ վերաբերում է ազոտի ատոմին, որը եռանիստ բուրգի վերին գագաթից կարող է անցնել ներքևի գագաթ, հաղթահարելով այդ երկու դիրքերի միջև առկա պոտենցիալային արգելքը: Տատանողական սիմետրիկ-անսիմետրիկ վիճակների էներգիաների $\sim 10^{-4}$ էլեկտրոն-վոլտ տար-

բերությանը կազմում է $\nu = \omega/2\pi \approx 24$ գեգահերց և ներկայումս լայնորեն օգտագործվում է ամոնիակային մագեթրում:

§ 18. Սպին

Յուրաքանչյուր մարմին ընդհանուր դեպքում կրում է անկյունային մոմենտի երկու տեսակ՝ օրբիտալ, որը կապված է զանգվածների կենտրոնի շարժման հետ և պտտական, որը պայմանավորված է զանգվածների կենտրոնի շուրջ մարմնի պտույտով: Քվանտային մեխանիկայում այսպիսի տարանջատում առկա է նաև տարրական մասնիկների դեպքում: Մյուս ֆիզիկական մեծությունների նման, մոմենտները ևս քվանտային մեխանիկայի մաթեմատիկական ապարատում ներկայանում են օպերատորների միջոցով և ունեն քվանտացված սեփական արժեքներ: Պտտական շարժման անալոգ մոմենտը, սակայն, քվանտային մեխանիկայում առանձին անուն ունի, որը կոչվում է սպին և նշանակվում է S վեկտորով, իսկ համապատասխան օպերատորը՝ $\hat{S}$: Առանձին անվանումը մատնանշում է, որ տարրական մասնիկի, օրինակ՝ էլեկտրոնի, սպինը չենք ընկալվում որպես կենտրոնի շուրջ նրա բաղկացուցիչ մասերի պտույտի արդյունք, քանի որ մասնիկը դիտվում է կառուցվածքից զուրկ գոյ: Այն տարրական մասնիկի ներհատուկ բնութագրիչ է, որն ի հայտ է գալիս որպես «լրացում» մասնիկի տարածական շարժման՝ իմպուլսի, մոմենտին:

Սպինի հանրահաշվական տեսությունը կրկնօրինակում է իմպուլսի մոմենտի տեսությանը՝ սկսելով օպերատորի բաղադրիչների միջև

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x, [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y$$

հիմնարար կոմուտացման առնչություններից: Այստեղից $\hat{S}^2$ և $\hat{S}_z$ պահպանվող մեծությունների $s(s+1)$ և m սեփական արժեքների և $\chi_{s,m}$ սեփական ֆունկցիաների համար հետևում են

$$\begin{aligned}\hat{S}^2 \chi_{s,m} &= \hbar^2 s(s+1) \chi_{s,m}, \quad \hat{S}_z \chi_{s,m} = \hbar m \chi_{s,m}, \\ (\hat{S}_x + i \hat{S}_y) \chi_{s,m} &= \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m+1)} \chi_{s,m+1}, \\ (\hat{S}_x - i \hat{S}_y) \chi_{s,m} &= \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m-1)} \chi_{s,m-1}\end{aligned}$$

հավասարումները: Նկատենք, որ $\chi_{s,m}$ սեփական ֆունկցիաները տարածական (կամ անկյունային) փոփոխականների ֆունկցիաներ չեն, իսկ s և m քվանտային թվերն էլ ընդունում են ամբողջ կամ կիսամբողջ արժեքներ, այն է՝

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad m = -s, -s+1, \dots, s-1, s:$$

Յուրաքանչյուր տարրական մասնիկ (էլեկտրոն, պրոտոն, նեյտրոն, պի մեզոն, ֆոտոն) օժտված է S -ի որոշակի և անփոփոխ արժեքով, որին անվանում ենք մասնիկի սպին: Օրինակ՝ էլեկտրոնի սպինը $1/2$ է, ֆոտոնինը՝ 1 , պի մեզոնինը՝ զրո և այլն: Համեմատության համար նկատենք, որ իմպուլսի մոմենտի քվանտային թիվն ընդունում է միայն ամբողջ արժեքներ, ընդ որում, նույն տարրական մասնիկի մոտ այն կարող է փոխվել արտաքին ազդեցությունների արդյունքում:

Առավել կարևոր է $s = 1/2$ դեպքը, քանի որ այն աստմր կազմող մասնիկների՝ էլեկտրոնների, պրոտոնների և նեյտրոնների, ինչպես նաև բոլոր քվարկների սպինն է: Գոյություն ունեն ընդամենը երկու սեփական վիճակներ՝ $\chi_{1/2,1/2}$ և $\chi_{1/2,-1/2}$, հակիրճ՝ χ_+ և χ_- , որոնց հաճախ անվանում ենք

սպին-վերն և սպին-ներքն վիճակներ: Պայմանական տեսքով դրանք պատկերված են Նկ. 18.1-ում:



Նկ. 18.1

Սպին-1/2 մասնիկի կամայական սպինային վիճակ կարող է ներկայացվել χ_+ և χ_- բազիսային վիճակների օգնությամբ՝

$$\chi = a \chi_+ + b \chi_- \quad (18.1)$$

կամ դրան համարժեք երկելեմենտ մատրիցական աղյուսակի տեսքով՝

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}:$$

Վերջինս բազիսային վիճակների համար թույլ է տալիս մտցնել շատ հարմար

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցական նշանակումներ: Միաժամանակ, սպինային օպերատորներն էլ դառնում են երկրորդ ռանգի (2×2) մատրիցաներ: Դրանք են՝

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}:$$

Բարեհունչ է դուրս հանել $\hbar/2$ ընդհանուր գործակիցը՝

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}},$$

և սպինի բաղադրիչների օպերատորները ներկայացնել

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

մատրիցաների միջոցով, որոնք կոչվում են Պաուլիի մատրիցաներ: Դրանք միավոր մատրիցայի հետ 2×2 մատրիցաների համար կազմում են փակ համակարգ: Նկատենք, որ $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ և $\hat{\mathbf{S}}^2$ օպերատորները հերմիտական են, հետևաբար՝ դրան ներկայացնող մեծությունները դիտելիներ են: $\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ գծային



Վոլֆգանգ Պաուլի
(1900-1958)

կոմբինացիաները, հակառակը, ոչ հերմիտական են, հետևաբար փորձում ոչ ուղղակի չափելի:

Եթե չափվում է մասնիկի սպինի S_z պրոյեկցիան (18.1) ընդհանուր վիճակում, ապա $|a|^2$ հավանականությամբ կգրանցվի $+\hbar/2$ արժեքը և $|b|^2$ հավանականությամբ՝ $-\hbar/2$ արժեքը: Քանի որ դրանք միակ հնարավորներն են, ապա

$$|a|^2 + |b|^2 = 1:$$

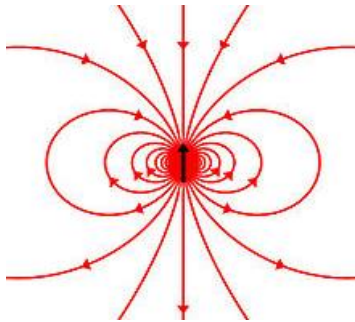
§ 19. Սպինը համասեռ մագնիսական դաշտում

Պատվող լիցքավորված մասնիկը դառնում է մագնիսական դիպոլ, որն իր շուրջը ստեղծում է մագնիսական դաշտ, ինչպես պատկերված է Նկ. 19.1-ում: Մասնիկի μ մագնիսական դիպոլային մոմենտը համեմատական է նրա S սպինին՝

$$\mu = \gamma S:$$

$\gamma \approx e/M$ համեմատականության գործակիցը կոչվում է գիրոմագնիսական հաստատուն:

Երբ մագնիսական մոմենտը տեղադրվում է B մագնիսական դաշտում, այն զգում է ոլորող պտտման մոմենտ, $\mu \times B$ և ջանում ուղղվել մագնիսական դաշտի երկայնքով, ինչպես մենք դա տեսնում ենք կողմնացույցի մագնիսական սլաքի օրինակով:



Նկ. 19.1

Էլեկտրադինամիկայից հայտնի է, որ այդ փոխազդեցության էներգիան տրվում է

$$H = -\mu \cdot B$$

սկալյար արտադրյալով, այնպես որ մագնիսական դաշտում գտնվող սպինի համիլտոնյանը գրվում է

$$\hat{H} = -\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}}$$

տեսքով:

Դիտարկենք $1/2$ սպինով մասնիկի (էլեկտրոնի) սպինային վիճակների էվոլյուցիան, երբ այն համասեռ մագնիսական դաշտում գտնվում է հանգստի վիճակում: Կոորդինատային z առանցքն ուղղելով դաշտի ուղղությամբ համիլտոնյանի համար կունենանք

$$\hat{H} = -\gamma B S_z = -\frac{\hbar}{2} \gamma B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

անկյունագծային տեսքը, ինչը միաժամանակ նշանակում է, որ սպինային χ_+ և χ_- վիճակները $\hat{H}$ -ի համար հանդիսանում են սեփական ֆունկցիաներ համապատասխան

$$E_+ = +\frac{\hbar}{2} \gamma B \text{ և } E_- = -\frac{\hbar}{2} \gamma B$$

սեփական արժեքներով: Քանի որ համիլտոնյանը նաև ժամանակից անկախ է, ապա Շրեդինգերի

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi = \hat{H} \chi$$

հավասարման ընդհանուր լուծումը կտրվի

$$\chi(t) = a \chi_+ e^{-i E_+ t / \hbar} + b \chi_- e^{-i E_- t / \hbar}$$

արտահայտությամբ՝ որի a և b գործակիցները որոշվում են սկզբնական պայմաններից:

Ընկալելու համար լուծման բովանդակությունը, այսինքն՝ սպինի վարքը ստացված քվանտային վիճակում, հաշվենք դեկարտյան պրոյեկցիաների քվանտամեխանիկական միջինները՝

$$\langle \hat{s}_x \rangle \equiv \langle \chi(t) | \hat{s}_x | \chi(t) \rangle = \chi(t)^\dagger \hat{s}_x \chi(t) = \begin{pmatrix} a^* e^{iE_+t/\hbar} & b^* e^{iE_-t/\hbar} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{-iE_+t/\hbar} \\ b e^{-iE_-t/\hbar} \end{pmatrix} = \hbar |a||b| \cos(\gamma B t)$$

և նմանապես

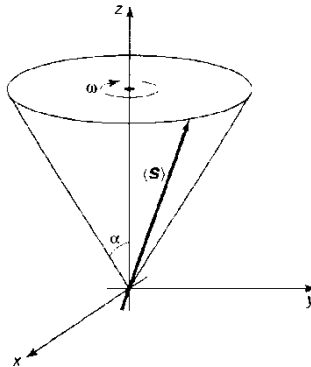
$$\langle \hat{s}_y \rangle = \begin{pmatrix} a^* e^{iE_+t/\hbar} & b^* e^{iE_-t/\hbar} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{-iE_+t/\hbar} \\ b e^{-iE_-t/\hbar} \end{pmatrix} = \hbar |a||b| \sin(\gamma B t),$$

$$\langle \hat{s}_z \rangle = \begin{pmatrix} a^* e^{iE_+t/\hbar} & b^* e^{iE_-t/\hbar} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{-iE_+t/\hbar} \\ b e^{-iE_-t/\hbar} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (|a|^2 - |b|^2),$$

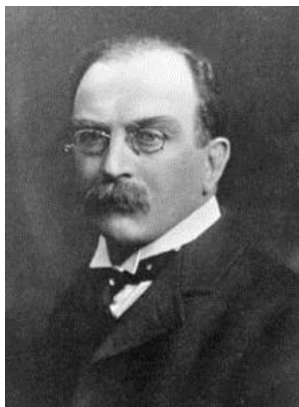
որտեղ $\arg(a^*b)$ -ն առանց ընդհանրությունը կորցնելու ընտրված է հավասար զրոյի: Այստեղից պարզորոշ երևում է, որ սպինի $\langle \mathbf{s} \rangle$ վեկտորը հավասարաչափ $\omega = \gamma B$ անկյունային արագությամբ պտտվում է z -երի առանցքի շուրջ՝ վերջինիս հետ կազմելով

$$\alpha = \arctg \left(\frac{2|a||b|}{|a|^2 - |b|^2} \right)$$

հաստատուն անկյուն (Նկ. 19.2): Այս պտույտն ընդունված է անվանել լարմորյան պրեցեսիա,



Նկ. 19.2



Ժոզեֆ Լարմոր
(1857-1942)

իսկ հաճախությունը՝ լարմորյան հաճախություն:

§ 20. Ֆերմիոններ և բոզոններ

Նույնականության գաղափարը քվանտային մեխանիկայում էականորեն տարբերվում է նույնականության դասական հասկացությունից: Դրա համար դիտարկենք պարզագույն՝ երկու մասնիկներից բաղկացած, համակարգ: Համակարգի ալիքային ֆունկցիան առաջին մասնիկի $\mathbf{r}_1$ և երկրորդի $\mathbf{r}_2$ կոորդինատների և t ժամանակի ֆունկցիա է՝ $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$: Նրա տարածաժամանակային էվոլյուցիան որոշվում է Շրեդինգերի

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

հավասարմամբ, որտեղ $\hat{H}$ -ն ամբողջ համակարգի համիլտոնյանն է՝

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M_1} \frac{d^2}{d\mathbf{r}_1^2} - \frac{\hbar^2}{2M_2} \frac{d^2}{d\mathbf{r}_2^2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t):$$

Ալիքային ֆունկցիայի ստատիստիկական մեկնաբանության համաձայն

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)|^2 d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 -$$

հավանականությունն է նրա, որ ժամանակի t պահին մասնիկը 1-ը գտնելու է $d^3\mathbf{r}_1$ ծավալում և մասնիկ 2-ը՝ $d^3\mathbf{r}_2$ ծավալում:

Եթե պոտենցիալ էներգիան անկախ է ժամանակից, ապա հավասարումը թույլ է տալիս ժամանակային փոփոխականի անջատում՝

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp(-iEt/\hbar),$$

որտեղ ալիքային ֆունկցիայի $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ տարածական մասը բավարարում է Շրեդինգերի

$$-\frac{\hbar^2}{2M_1} \frac{d^2\psi}{d\mathbf{r}_1^2} - \frac{\hbar^2}{2M_2} \frac{d^2\psi}{d\mathbf{r}_2^2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi = E\psi \quad (20.1)$$

ստացիոնար հավասարմանը և E -ն համակարգի ընդհանուր էներգիան է:

Այժմ անդրադառնանք կարևոր այն դեպքին, երբ մասնիկները պատկանում են նույն համակարգին, սակայն իրար հետ չեն փոխազդում, այսինքն, երբ

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U_1(\mathbf{r}_1) + U_2(\mathbf{r}_2), \quad (20.2)$$

որտեղ $U_1(\mathbf{r}_1)$, $U_2(\mathbf{r}_2)$ -ը առանձին մասնիկների պոտենցիալ էներգիաներն են արտաքին ստացիոնար դաշտերում: Տեղադրելով (2)-ը (1)-ի մեջ՝ տեսնում ենք, որ այնտեղ տեղի է ունեցել փոփոխականների անջատում: Հավասարման գծային բնույթը թույլ է տալիս երկու փոփոխականի $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ լուծումը փնտրել առանձին փոփոխականներից կախված ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, այն է՝

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2): \quad (20.3)$$

Այս կառուցվածքը փաստորեն նշանակում է, որ մենք կարող ենք տարբերակել մասնիկներն իրարից, հակառակ դեպքում իմաստագուրկ է (3) տեսքի պնդումը, որ համար 1 մասնիկը a վիճակում է և համար 2 մասնիկը՝ b վիճակում: Եթե մասնիկները տարբեր բնույթի են, օրինակ՝ մեկը էլեկտրոն, մյուսը՝ պրոտոն: Նույն բնույթի մասնիկների դեպքում, սակայն, միկրոաշխարհում հնարավոր չի լինում այդպիսի տարբերակում: Ինչ կարողանում ենք ասել, այն է, որ մասնիկներից մեկը գտնվում է a վիճակում, իսկ մյուսը՝ b վիճակում: Քվանտային մեխանիկայում նույն բնույթի մասնիկները կատարելապես նույնական են, ոչ տարբերակելի: Այս սկզբունքը բավարարելու համար հարկ է նույնական մասնիկների գույգի ալիքային ֆունկցիան (3)-ի փոխարեն ներկայացնել հնարավոր

$$\psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A \left[\psi_a(\mathbf{r}_1) \psi_b(\mathbf{r}_2) + \psi_b(\mathbf{r}_1) \psi_a(\mathbf{r}_2) \right] \quad (20.4a)$$

և

$$\psi_-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A \left[\psi_a(\mathbf{r}_1) \psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_b(\mathbf{r}_1) \psi_a(\mathbf{r}_2) \right] \quad (20.4b)$$

տեսքերից մեկով:

Բնությունը, այսպիսով, թույլ է տալիս երկու տեսակ նույնական մասնիկներ՝ բոզոններ, որոնց համար գործում է սյուրս նշանը և ֆերմիոններ, որոնց համար գործում է մինուս նշանը: Առաջին դեպքում ալիքային ֆունկցիան սիմետրիկ է, իսկ երկրորդ դեպքում անտիսիմետրիկ է մասնիկների փոխատեղման նկատմամբ.

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1):$$

Մեր հետաքրքրության մասնիկներից բոզոններ են ֆոտոնները, ֆերմիոններ են էլեկտրոնները, պրոտոնները և

նեյտրոնները: Առկա է նաև ավելի ընդհանուր կանոն միկրոաշխարհում այս հիմնարար տարանջատման համար.

- ամբողջ սպինով բոլոր մասնիկները բոզոններ են,
- կիսամբողջ սպինով բոլոր մասնիկները ֆերմիոններ են:

Ֆիզիկական հետևությունների համար խիստ կարևոր է, որ բոզոնները և ֆերմիոնները ենթարկվում են տարբեր ստատիստիկաների, որոնց մենք կանդրադառնանք առանձին, հաջորդ պարագրաֆում: Մասնավորապես, երկու նույնական ֆերմիոններ (օրինակ, երկու էլեկտրոններ ատոմում) չեն կարող զբաղեցնել միևնույն վիճակը: Եթե $a = b$ (4p)-ում, ապա

$$\psi_{-}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A \left[\psi_a(\mathbf{r}_1) \psi_a(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_1) \psi_a(\mathbf{r}_2) \right] = 0$$

կամայական $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ -ի համար: Մա հայտնի է որպես արգելման սկզբունք, որը մինչ քվանտային մեխանիկայի ստեղծվելը, բարդ ատոմների ճառագայթման սպեկտրների վրա աշխատելիս բացահայտել է Պաուլին:

§ 21. Ազատ էլեկտրոնային գազ

Դիտարկենք l_x, l_y, l_z չափերի կոշտ պատերով ուղղանկյուն արկղ և ենթադրենք ներսում եղած էլեկտրոնների վրա որևէ ուժեր չեն ազդում՝

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, 0 < z < l_z, \\ \infty, & 0 > x > l_x, 0 > y > l_y, 0 > z > l_z: \end{cases}$$

Պոտենցիալային հորից դուրս, անվերջ բարձր պոտենցիալային տիրույթում էլեկտրոնի ալիքային ֆունկցիան զրո է, իսկ ներսում ազատ շարժման

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2\psi}{dr^2} = E\psi$$

հավասարման լուծումը ֆակտորիզացվում է ըստ դեկարտյան կոորդինատների՝ $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է միաչափ շարժման հավասարման՝

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2X}{dx^2} = E_x X, \quad -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2Y}{dy^2} = E_y Y, \quad -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2Z}{dz^2} = E_z Z,$$

որտեղ $E = E_x + E_y + E_z$, այսինքն՝ ընդհանուր էներգիան առանձին ազատության աստիճաններում էներգիաների գումարն է: Ընդհանուր լուծումները կարող են ներկայացվել եռանկյունաչափական սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների միջոցով՝

$$X(x) = A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x),$$

$$Y(y) = A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y),$$

$$Z(z) = A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z),$$

էներգիան ներկայացնող

$$k_x = \frac{\sqrt{2ME_x}}{\hbar}, \quad k_y = \frac{\sqrt{2ME_y}}{\hbar}, \quad k_z = \frac{\sqrt{2ME_z}}{\hbar}$$

պարամետրերի նշանակումներով: Ձախակողմյան $X(0) = 0$, $Y(0) = 0$, $Z(0) = 0$ եզրային պայմանները պահանջում են զրոյական արժեքներ B_j ($j = x, y, z$) գործակիցների համար, իսկ աջակողմյան $X(l_x) = 0$, $Y(l_y) = 0$, $Z(l_z) = 0$ եզրային պայմանները բավարարվում են, եթե

$$k_x l_x = n_x \pi, \quad k_y l_y = n_y \pi, \quad k_z l_z = n_z \pi,$$

որտեղ յուրաքանչյուր n -ը դրական ամբողջ թիվ է.

$$n_x = 1, 2, 3, \dots, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots:$$

Արդյունքում նորմավորված ալիքային ֆունկցիան լինում է

$$\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right),$$

իսկ թույլատրելի էներգիաները ստանում են միայն դիսկրետ արժեքներ և որոշվում են

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2M} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

արտահայտությամբ, որտեղ k -ն $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ալիքային վեկտորի մոդուլն է:

Պատկերացնենք k_x, k_y, k_z առանցքներով ալիքային վեկտորների եռաչափ տարածություն: Այդ տարածությունում n_x, n_y, n_z ամբողջ թվերով տրվող յուրաքանչյուր կետի համապատասխանում է միամասնիկ ստացիոնար մի վիճակ (առանց սպինի հաշվառման): Հարևան կետերի միջև երեք ուղղություններով հեռավորությունները հավասար են համապատասխանաբար՝ $\pi/l_x, \pi/l_y$ և π/l_z , ինչը նշանակում է, որ յուրաքանչյուր վիճակի համապատասխանում է

$$\frac{\pi}{l_x} \frac{\pi}{l_y} \frac{\pi}{l_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

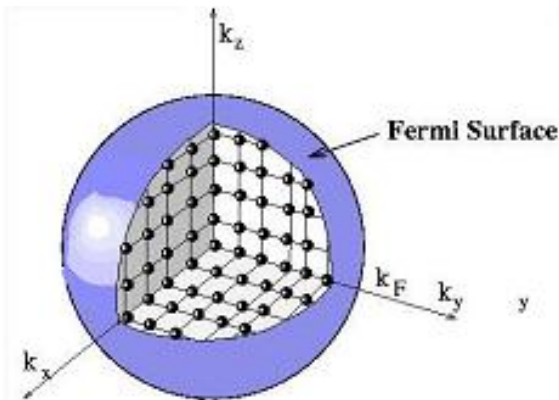
ծավալ ալիքային վեկտորների տարածության մեջ (համապատասխանաբար $\hbar^3 \pi^3 / V$ ծավալ իմպուլսների տարածության մեջ): Այնուամենայնիվ, էլեկտրոնները $1/2$ սպինով նույնա-

կան ֆերմիոններ են և ենթարկվում են Պաուլիի արգելման կանոնին, ինչի հետևանքով դրանցից միայն երկուսը կարող են զբաղեցնել յուրաքանչյուր առանձին ստացիոնար վիճակ:

Ֆերմիի մակերևույթ: Ենթադրենք ազատ էլեկտրոնները քննարկվող տարածական V ծավալում առաջանում են N թվով ատոմներից այնպես, որ յուրաքանչյուրի ներդրումը q թվով է: Այդ Nq թվով էլեկտրոնները $\mathbf{k}$ -տարածության մեջ կգրավեն $(Nq/2)(\pi^3/V)$ ծավալ: Հարմար է պատկերացնել, որ այդ ծավալը $\mathbf{k}$ -տարածության մեջ մի սֆերայի ութերորդ մասն է, ինչպես պատկերված է Նկ. 21.1-ում: Այդ սֆերայի k_F շառավիղը որոշվում է

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \frac{\pi^3}{V}$$

հավասարությունից և տրվում է



Նկ. 21.1

$$k_F = (3\pi^2 \rho)^{1/3}$$

բանաձևով, որտեղ $\rho = Nq/V$ -ն ազատ էլեկտրոնային գազի խտությունն է: Սահմանը, որը բաժանում է բնակեցված և ոչ բնակեցված վիճակները $\mathbf{k}$ -տարածության մեջ կոչվում է Ֆերմիի մակերևույթ: Ամենաբարձր բնակեցված վիճակի (Ֆերմիի) էներգիան է

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2M} = \frac{\hbar^2}{2M} (3\pi^2 \rho)^{2/3} :$$

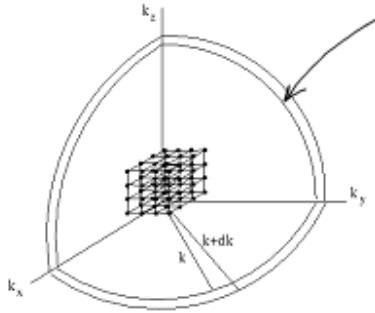
Հաշվենք գազի ունեցած E_{tot} էներգիան և առաջացրած P ճնշումը: Դրա համար ակիքային վեկտորների տարածության առաջին քառորդում դիտարկենք dk հաստության բարակ թաղանթ, ինչպես պատկերված է նկարում: Նրա ծավալը կլինի

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk = \frac{1}{2} \pi k^2 dk :$$



Լև Լանդաու
(1901-1954)

Բաժանելով այն մի վիճակին բաժին ընկնող π^3/V ծավալի վրա, կստանանք վիճակների թիվն այդ թաղանթում, և ապա բազմապատկելով 2-ով (յուրաքանչյուր վիճակ զբաղեցնող էլեկտրոնների թվով)՝ կստանանք թաղանթում էլեկտրոնների



Նկ. 21.2

$$2 \frac{\frac{1}{2} \pi k^2 dk}{\pi^3/V} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

թիվը: Նրանցից յուրաքանչյուրն օժտված է $\hbar^2 k^2 / 2M$ էներգիայով: Հետևաբար, Նկ. 21.2-ում պատկերված կոր թաղանթում էլեկտրոնների էներգիան կլինի

$$dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk = \frac{\hbar^2 V}{2M \pi^2} k^4 dk,$$

իսկ ընդհանուր էներգիան ստանալու համար հարկավոր է այս արտահայտությունն ինտեգրել զրոյից մինչև Ֆերմիի մակերևույթ՝

$$E_{tot} = \int_0^{k_F} dE = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3}}{10} \frac{(Nq)^{5/3} \hbar^2}{M V^{2/3}}:$$

Մասնիկների հաստատուն թվի պայմաններում գազի ծավալը մեծացնելիս նրա էներգիան փոքրանում է: Ծավալը dV չափով մեծացնելիս փոքրացումը կլինի

$$dE_{tot} = \frac{dE_{tot}}{dV} dV = -\frac{2}{3} E_{tot} \frac{dV}{V}:$$

Համարելով, որ այն տեղի է ունեցել գազի ճնշման կողմից կատարված աշխատանքի հաշվին, այսինքն՝ որ $dA = PdV = -dE_{tot}$, փնտրվող քվանտային ճնշման համար կունենանք հետևյալ ամփոփիչ արտահայտությունը՝

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_{tot}}{V} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5M} \rho^{5/3}:$$

Այս ճնշումը երբեմն կոչվում է այլասերման ճնշում:

§ 22. Քվանտային ստատիստիկաներ

Մակրոսկոպիկ համակարգերի նկարագրության համար կարևորագույն դերը պատկանում է վիճակների բնակեցման հավանականությունների բաշխմանը հավասարակշիռ վիճակներում և այն ժամանակային օրինաչափություններին, որոնց ենթարկվում են այդ բաշխումներն այս կամ այն ֆիզիկական իրավիճակներում: Բաշխումների իմացությունը թույլ է տալիս հաշվելու համակարգի հետաքրքրություն ներկայացնող ֆիզիկական-թերմոդինամիկական բոլոր պարամետրերը: Սույն դասընթացի սահմաններում մեր քննարկումը կսահմանափակվի միայն հավասարակշիռ վիճակներով:

Ինչպես դասական, այնպես էլ քվանտային բազմամասնիկ համակարգերի տեսությունում կարևոր դեր է կատարում ֆազային տարածության հասկացությունը: Այն մասնիկների կոորդինատների և իմպուլսների (կամ ալիքային վեկտորների) միացյալ մաթեմատիկական տարածություն է: Մեկ մասնիկի համար այն ունի 3 կոորդինատային և 3 իմպուլսային առանցքներ: N նմանատիպ մասնիկների համար այն N միամասնիկ տարածությունների արտադրյալ է՝ $3N$ կոորդի-

նատային և $3N$ իմպուլսային առանցքներով: Անցյալ պարագրաֆում կատարված քննարկումից ուղղակիորեն հետևում է, որ միամասնիկ մեկ վիճակին բաժին է ընկնում $(2\pi\hbar)^3$ ֆազային ծավալ: Այն մենք կօգտագործենք հետագայում:

Մասնիկների նույնական լինելու իրավիճակում հարց է առաջանում, թե յուրաքանչյուր դիսկրետ վիճակում քանի մասնիկ կարող է գտնվել և ինչպիսի հավանականություններով: Դրանից է կախված լինելու համակարգի թերմոդինամիկական հատկությունները: Ինչքան էլ տարօրինակ թվա առաջին հայացքից, բնությունը տալիս է երկու հնարավորություն: Մեկը՝ որ մեկից ոչ ավելի, մյուսը՝ որ կամայական թվով: Դրանք կոչվում են լրացման (երբեմն՝ բնակեցման) թվեր: Խմբերից որին պատկանելու հարցն էլ կախված է, բնականաբար, մասնիկի ներքին հատկություններից, որոնք ամփոփվում են մասնիկի՝ իր կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջ պտտվելու իմպուլսի մոմենտի՝ սպինի մեջ: Եթե մասնիկները ֆերմիոններ են (օրինակ՝ էլեկտրոն, պրոտոն, նեյտրոն, նատրիումի ատոմ և այլն), այսինքն՝ սպինը կիսաամբողջ թիվ է $\hbar$ Պլանկի հաստատունի միավորներով, ապա լրացման թիվը կարող է լինել զրո կամ մեկ: Համապատասխան ստատիստիկական բաշխումը կոչվում է Ֆերմի-Դիրակի բաշխում: Մյուս հնարավորությունն իրականացվում է բոզոնների դեպքում, երբ սեփական պտույտի իմպուլսի մոմենտը՝ սպինը, ամբողջ թիվ է ($\hbar$ -ի միավորներով): Այն բերում է մի նոր՝ Բոզե-Էյնշտեյնի, ստատիստիկական բաշխման:

• **Ֆերմի-Դիրակի բաշխումը:** Դիտարկենք նույնական ֆերմիոնների իդեալական գազ, որը պարփակված է որևէ անփոփոխ ծավալով անոթում: Բջիջների (ասել է՝ վիճակների) թիվը համապատասխան ֆազային ծավալում նշանակենք Z : Ֆերմիոնների գտնվելը անոթում նշանակում է, որ N թվով մասնիկներ տեղակայված են Z թվով բջիջներում: Ակնհայտ



Փոլ Դիրակ
(1902-1984)

է, որ պետք է պահպանված լինի $N \leq Z$ պայմանը: Համակարգի ստատիստիկական հատկությունների որոշման համար հարկ է հաշվել եղանակների Ω թիվը, որով N ֆերմիոնները կարող են տեղակայվել Z բջիջներում:

Յուրաքանչյուր տեղակայման եղանակ մասնիկների համակարգի համար մեկ միկրովիճակ է: Համակարգի մակրովիճակը նրա միկրովիճակների հանրախումբն է, իսկ Ω թիվը կոչվում է մակրոհամակարգի

ստատիստիկական կշիռ: Այն հաշվելու համար N թվով զբաղեցված և $Z - N$ թվով չզբաղեցված բջիջները համարենք երկու տեսակ էլեմենտներ, որոնք պետք է տեղակայենք Z թվով բջիջներում: Եթե բոլոր Z էլեմենտները համարեինք տարբերակելի, ապա հնարավոր իրարից տարբեր տեղակայումների թիվը կլիներ $Z!$: Սակայն N թվով միտեսակի՝ զբաղեցված էլեմենտները նույնական են, այսինքն դրանց միմյանց միջև հնարավոր տեղափոխումների նկատմամբ արդյունքն անտարբեր է՝ էլի կլինեն N թվով զբաղեցված և $Z - N$ թվով

չգրադեցված էլեմենտներ: Դա նշանակում է, որ դրանց նույնականության հաշվին տարբերակների թիվը կնվազի $N!$ անգամ և կլինի $Z!/N!$: Քննարկվող մոդելում նույնական, ոչ տարբերակելի են նաև $Z - N$ թվով չգրադեցված էլեմենտները: Ուրեմն ֆիզիկորեն տարբերակելի վիճակների թիվը կնվազի ևս $(Z - N)!$ անգամ՝ դառնալով

$$\Omega_{F-D} = \frac{Z!}{N!(Z - N)!}: \quad (22.1)$$

Այժմ նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում բոլոր տարբերակելի կոնֆիգուրացիաների էներգիաները նույնը չեն: Եթե համեմատաբար մեծ է մեծ իմպուլսներով բջիջների լրացման թիվը, ապա մեծ կլինի նաև էներգիան: Էներգիայի հնարավոր արժեքները համարենք դիսկրետ և համարակալենք i տառով: E_i էներգիային բաժին ընկնող բջիջների թիվը նշանակենք Z_i , որից լրացվածների թիվը՝ N_i : Համաձայն (22.1) բանաձևի, E_i էներգիայով տարբերակելի վիճակների թիվը կլինի

$$\Omega_{i,F-D} = \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}: \quad (22.2)$$

Ընդհանուր համակարգի ստատիստիկական կշիռը կլինի՝ այս ենթահամակարգերի ստատիստիկական կշիռների արտադրյալը՝

$$\Omega_{F-D} = \prod_i \Omega_{i,F-D} = \prod_i \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}: \quad (22.2)$$

Մակրոհամակարգի վիճակի ներկայացումը միկրոսկոպիկ վիճակների թվերի հենքի վրա ելնում է նրանից, որ նույն

էներգիայով (ասենք i -րդ՝ E_i) բոլոր միկրովիճակների բնականումը հավասար հավանական է:

Ստացիոնար պայմաններում կարելի է համարել, որ համակարգում մասնիկների N ընդհանուր թիվը և մասնիկների ընդհանուր E էներգիան ունեն որոշակի արժեքներ: Սկզբունքային կարևոր է, թե որն է մասնիկների՝ ըստ հնարավոր վիճակների առավել հավանական բաշխումը: Այն գտնելու համար հարկ է որոշել (22.2) արտահայտության մաքսիմումն ըստ N_i փոփոխականի՝ մասնիկների N ընդհանուր թվի և E էներգիայի տված արժեքների պայմաններում, այսինքն՝ նկատի ունենալով, որ

$$\sum_i N_i = N \text{ և } \sum_i N_i E_i = E: \quad (22.3)$$

Հաշվումների կատարման տեսակետից ավելի հարմար է պահանջել ոչ թե Ω_{F-D} -ի, այլ նրա հետ մոնոտոնության կապված $S_{F-D} = k_B \ln \Omega_{F-D}$ էնտրոպիա կոչվող մեծության մաքսիմումը: (22.2)-ի հաշվառմամբ ունենում ենք

$$S_{F-D} = k_B \sum_i \left[\ln Z_i! - \ln N_i! - \ln (Z_i - N_i)! \right]:$$

Ստիրլինգի $\ln n! \approx n \ln n - n$ (երբ $n \gg 1$) բանաձևը թույլ է տալիս պարզեցնել էնտրոպիայի արտահայտությունը: Պահելով միայն N_i -ից կախված անդամները, ստանում ենք

$$S_{F-D} = -k_B \sum_i \left[N_i \ln N_i + (Z_i - N_i) \ln (Z_i - N_i) \right]: \quad (22.4)$$

(22.4)-ի մաքսիմումի որոշումը (22.3) պայմանների բավարարման սահմանափակումով պայմանական էքստեմումի որոշման խնդիր է, որը լուծվում է Լագրանժի բազմապատկիչ-

ների մեթոդով: Համաձայն վերջինիս, հարկ է (22.3)-ում մտնող արտահայտությունները բազմապատկել անորոշ գործակիցներով (քննարկվող դեպքում a և $-b$) և գումարելով արդյունքները (22.4) -ին, պահանջել գումարի, այսինքն՝

$$F = S_{F-D} + a N - b E$$

արտահայտության բացարձակ մաքսիմումը: Դրա համար մնում է տեղադրել S_{F-D} -ի, N -ի և E -ի վերնում գրված արտահայտությունները՝

$$F = -k_B \sum_i \left[N_i \ln N_i + (Z_i - N_i) \ln (Z_i - N_i) \right] + a \sum_i N_i - b \sum_i N_i E_i$$

և պահանջել գումարի մասնավոր ածանցյալի զրո լինելն ըստ N_i փոփոխականի՝

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial N_i} = -k_B \left[\ln N_i + N_i \frac{1}{N_i} - \ln (Z_i - N_i) - (Z_i - N_i) \frac{1}{(Z_i - N_i)} \right] + a - b E_i = \\ k_B \ln \frac{Z_i - N_i}{N_i} + a - b E_i = 0 \end{aligned}$$

կամ

$$\frac{1 - N_i / Z_i}{N_i / Z_i} = \exp \frac{b E_i - a}{k_B} :$$

N_i / Z_i հարաբերությունը ներկայացնում է E_i ստացիոնար վիճակին բաժին ընկնող միկրովիճակներից յուրաքանչյուրում մասնիկների $\bar{n}_i$ միջին թիվը: Լուծելով, վերջին հավասարումը՝ $\bar{n}_i = N_i / Z_i$ -ի նկատմամբ, ստանում ենք

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[(b E_i - a)/k_B] + 1} :$$

Բանաձևի b պարամետրը գազի T բացարձակ ջերմաստիճանի հակադարձ մեծությունն է՝ $b = 1/T$, իսկ $a = \mu/T$, որտեղ μ -ն կոչվում է քիմիական պոտենցիալ: Այն պարզ ֆիզիկական իմաստ է ձեռք բերում փոփոխական թվով մասնիկներով համակարգերի խնդրում և ներկայացնում է համակարգի էներգիայի փոփոխությունը մասնիկների թիվն առանց աշխատանք կատարելու մեկով ավելացնելիս: Կատարելով այս տեղադրումները ստանում ենք Ֆերմի-Դիրակի բաշխումը՝

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[(E_i - \mu)/k_B T] + 1}, \quad \mu > 0: \quad (22.5)$$

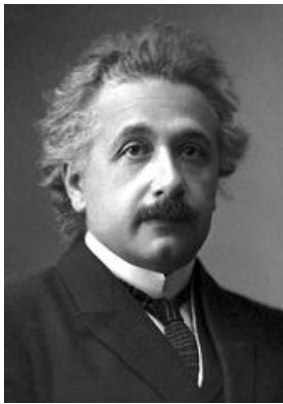
• **Բոզե-էյնշտեյնի բաշխումը:** Դիտարկենք այժմ ազատ բոզոնների դեպքը: N թվով մասնիկներ Z թվով բջիջներում տեղակայելիս հիմա յուրաքանչյուր բջիջում կարող է լինել 0-ից մինչև N մասնիկ (Նկ. 2.13): Ω_{B-E} ստատիստիկական կշռի հաշվումը ելման կետում համակարգի բոլոր էլեմենտները՝ Z թվով բջիջները և N թվով մասնիկները



Նկ. 22.1



Շաթենդրանաթ Բոզե
(1984-1974)



Ալբերտ Էյնշտեյն
(1879-1955)

համարվում են տարբերակելի, այսինքն, եթե դրանցից որևէ զույգ փոխատեղվի, ապա այդ արդյունքը կհամարվի նոր, նախկինից տարբեր: Այս մոտարկմամբ տարբերակելի փոխատեղումների ընդհանուր թիվը կլինի $(Z_i + N_i)!$: Ֆիզիկական իրականության տեսակետից ոչինչ չի փոխվի, եթե բջիջները փոխատեղվեն իրար մեջ, իսկ մասնիկները փոխատեղվեն իրար մեջ: Առաջինների թիվը $Z!$ է, երկրորդիններինը՝ $N!$: Ուրեմն, բոզոնների համակարգի ստատիստիկական կշիռը որոշվում է

$$\Omega_{B-E} = \frac{(Z + N)!}{N! Z!} \quad (22.6)$$

բանաձևով:

Հետագա քայլերի հաջորդականությունը և բովանդակությունը նույնն են, ինչ մանրամասն ներկայացվեց նախորդ Ֆերմի-Դիրակի, ստատիստիկայի դուրսբերման ժամանակ:

Այնպես որ միանգամից ներկայացնենք արդյունքը՝ Բոզե-Էյնշտեյնի ստատիստիկան՝

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[(E_i - \mu)/k_B T] - 1}, \mu \leq 0: \quad (22.7)$$

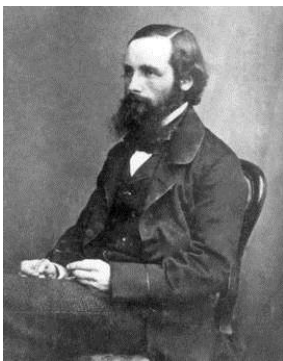
Այս բանաձևը տարբերվում է (22.5)-ից հայտարարում մեկի դիմացի նշանով:



Լյուդվիգ Բոլցման
(1844 – 1906)

• **Բոլցմանի և Մաքսվելի բաշխումները:** Վիճակների բնակեցման փոքր թվերի դեպքում, ինչն իրականանում է համեմատաբար մեծ էներգիաների դեպքում, (22.5) և (22.7) բանաձևերում հայտարարները, և ուրեմն էքսպոնենտային անդամը շատ մեծ է մեկից: Հետևաբար, մեկը հայտարարներում կարելի է արհամարհել, ինչի արդյունքում երկու բաշխումներն էլ կընդունեն

$$\bar{n}_i = \exp[-(E_i - \mu)/k_B T] = A \exp[-E_i / k_B T]$$



Ջեյմս Մաքսվել
(1831-1879)

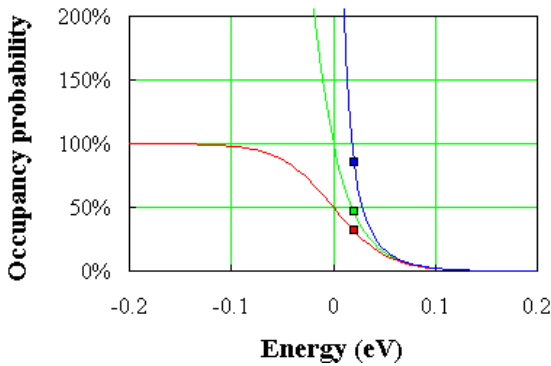
տեսքը: Այն կոչվում է Բոլցմանի բաշխում:

Եթե մասնիկներն ազատ են, ապա $E_i = mv_i^2 / 2$ և համապատասխանաբար

$$\bar{n}_i = A \exp[-m v_i^2 / 2k_B T]:$$

Այն կրում է Մաքսվելի անունը, ով առաջինն է հավանականության հասկացությունը ներառել ֆիզիկայի տեսության մեջ:

Նկ. 22.2-ում վիճակի բնակեցման հավանականությունը (լրացման միջին թիվը) որպես էներգիայի ֆունկցիա ներկայացված է բոլոր երեք՝ Ֆերմի-Դիրակի (ձախակողմյան կորը), Բոզե-Էյնշտեյնի (միջին կորը) և Բոլցման-Մաքսվելի (աջակողմյան կորը) բաշխումների համար:



Նկ. 22.2

§ 23. Ֆոտոնային գազ

Մասնիկների (22.5) և (22.7) բաշխումների ստացման ժամանակ ենթադրվել էր մասնիկների N ընդհանուր թիվը նախապես տրված և անփոփոխ: Եթե մասնիկների թիվը համակարգում հաստատուն չէ, ապա $\sum_i N_i = N$ պայմանը տեղի չի ունենում: Հետևաբար միինմացման ենթակա $F = S + aN - bE$ արտահայտության aN անդամը չի առաջանում, ինչը համարժեք է նախորդ պարագրաֆում առկա արտահայտություններում $a = 0$ և համապատասխանաբար $\mu = 0$ արժեքների ընտրությանը: Դա մասնավորապես նշա-

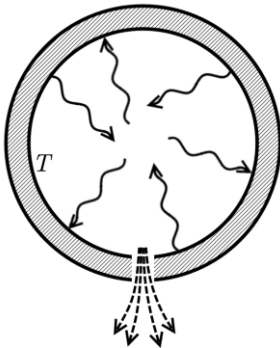
նակում է, որ իդեալական ֆոտոնային գազի, որպես մեկի հավասար սպինով համակարգի քիմիական պոտենցիալը հավասար է զրոյի և նրա ստատիստիկական բաշխումը տրվում է

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[-E_i / k_B T] - 1} \quad (23.1)$$

բանաձևով:

Այսպիսի ֆոտոնային գազ մեծ ճշտությամբ գտնվում է փակ դատարկ խոռոչում, որի պատերն անընդհատ ճառագայթում և կլանում են ֆոտոններ: Ֆոտոնների թիվը որոշվում է խոռոչի ծավալով ու պատերի ջերմաստիճանով և ֆլուկտուացվող մեծությունն է: Լրացումների թվի բաշխումն ըստ վիճակների որոշվում է (23.1) բանաձևով, որտեղ հարկ է տեղադրել ֆոտոնի էներգիայի $E_i = \hbar \omega_i$ արտահայտությունը՝

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[\hbar \omega_i / k_B T] - 1} : \quad (23.2)$$



Փորձում չափվող մեծությունների տեսանկյունից հետաքրքրություն է ներկայացնում միավոր ծավալում հաճախությունների միավոր ինտերվալին բաժին ընկնող էներգիան: Ֆոտոնի էներգիան կախված չէ կոորդինատից և շարժման ուղղությունից: Դա նշանակում է սֆերիկ սիմետրիա, որում իմպուլսի dp_i ինտերվալին բաժին ընկնող ֆազային ծավալը հավասար է

$$d\tau_i = V \cdot 4\pi p_i^2 dp_i :$$

Յուրաքանչյուր վիճակի, ինչպես արդեն նշվել է, համապատասխանում է $(2\pi\hbar)^3$ ֆազային ծավալ: Այնպես որ համապատասխան վիճակների թիվը կլինի

$$dZ_i = 2 \frac{d\tau_i}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{p_i^2 dp_i}{\pi^2 \hbar^3},$$

որտեղ 2 գործակիցը գալիս է ֆոտոնի ներքին ազատության աստիճանի՝ սպինի (բևեռացման) երկու արժեքներ ունենալու հանգամանքի հետ: Ֆոտոնի իմպուլսի և հաճախության կապը տրվում է $p = E/c = \hbar\omega/c$ բանաձևով: Հետևաբար՝ $p^2 dp = \hbar^3 \omega^2 d\omega / c^3$: Տեղադրելուց հետո վիճակների թվի համար ստանում ենք

$$dZ_i = V \frac{\omega_i^2 d\omega_i}{\pi^2 c^3}: \quad (23.3)$$

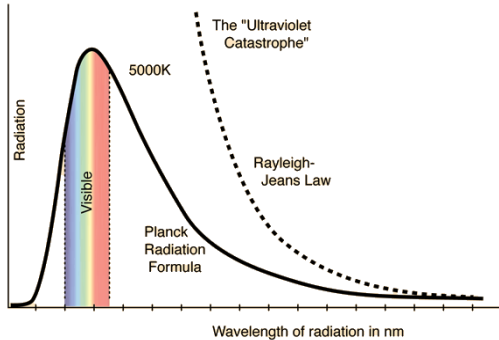
Բազմապատկելով dZ_i -ի արտահայտությունը լրացման $\bar{n}_i$ միջին թվով, կստանանք ֆոտոնների թիվը, որոնք ընկած են հաճախությունների $d\omega_i$ ինտերվալում և բազմապատկելով ֆոտոնի $E_i = \hbar\omega_i$ էներգիայով, ստանում ենք ֆոտոնների էներգիան՝

$$dE_i = dZ_i \bar{n}_i \hbar \omega_i:$$

(23.2) և (23.3) բացահայտ տեսքերի տեղադրումը բերում է հետևյալ բանաձևին՝

$$dE_i = V \frac{\hbar \omega_i^3 d\omega_i}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\hbar \omega_i / k_B T] - 1}:$$

Միավոր ծավալին բաժին ընկնող մեծության արտահայտությունը ստանալու համար մնում է ստացված արտահայտությունը բաժանել V ծավալի և $d\omega$ ինտերվալի լայնության



Նկ. 23.1

վրա: Ոչ անհրաժեշտության պատճառով բաց թողնելով i ինդեքսը, ստանում ենք հետևյալ բանաձևը՝

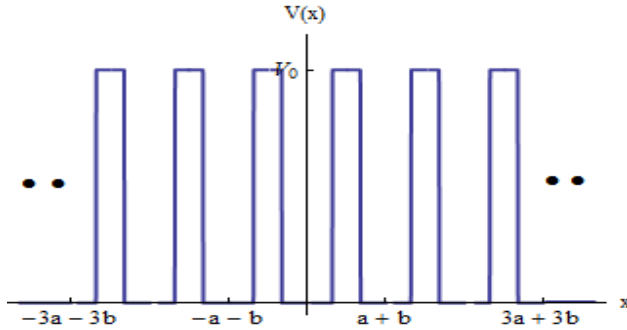
$$u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\hbar \omega / k_B T] - 1}:$$

Վերջինս Պլանկի բանաձևն է սև մարմնի հավասարակշիռ ճառագայթման վերաբերյալ: Հաճախային կախվածությունը պատկերված է Նկ. 2.15-ում:

§ 24. Պարբերական պոտենցիալ

Դիտարկենք մասնիկի ստացիոնար վիճակները պարբերական՝ նույնաբար անվերջ կրկնվող պոտենցիալի դաշտում: Որոշակի կարևոր օրինաչափություններ անկախ են կրկնվող բջիջում պոտենցիալի տեսքից, այնպես որ խնդիրը կքննարկենք պոտենցիալային արգելքների առավել պարզ՝ ուղղանկ-

յուն տեսքի համար (Նկ. 24.1), առավել ևս որ կիրառական կարևոր նշանակություն ունեցող էլեմենտներում այն բավականին լավ մոդելավորում է առկա իրավիճակը: Գրականության մեջ այս պոտենցիալը հայտնի է Կրոնիգ-Պեննի անվամբ:



Նկ. 24.1: Միաչափ ուղղանկյուն պարբերական պոտենցիալի տեսքը

Մասնիկի ստացիոնար վիճակները որոշում է Շրեդինգերի

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

հավասարումը, որի պոտենցիալ էներգիան քննարկվող դեպքում տրվում է

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x_n - a/2 - b \leq x \leq x_n - a/2 \\ 0 & x_n - a/2 \leq x \leq x_n + a/2 \end{cases}$$

արտահայտությամբ, որտեղ $x_n = nl$, $n = \mp 1, \mp 2, \dots$, $l = a + b$ -ն պոտենցիալի պարբերականության քայլն է, a -ն՝ պոտենցիալային արգելքների միջև հեռավորությունը, իսկ b -ն՝ պոտենցիալային արգելքների լայնությունը:

Պոտենցիալ էներգիայի պարբերականության $U(x+l) = U(x)$ պայմանից ուղղակիորեն հետևում է, որ

$|\psi(x+l)| = |\psi(x)|$ կամ որ նույնն է՝ $\Psi(x) = e^{i\varphi} \Psi(x-l)$ կամայական x -ի համար, φ -ն իրական է: Ազատ շարժման դեպքում $U_0 = 0$ և հավասարման լուծումը տրվում է $\Psi(x) = Ae^{ikx}$ տեսքով, որտեղ A -ն նորմավորման հաստատունն է և $k = \sqrt{2ME}/\hbar$: Ուրեմն, պարբերականության պայմանում առկա φ փուլի համար ստացվում է $\varphi = kl$ տեսքը: Դա հուշում է, որ ընդհանուր $U_0 \neq 0$ դեպքում փուլի հարմար է

$$\varphi = \frac{p}{\hbar} l$$

տեսքը, որտեղ p -ն իմպուլսի չափողականություն ունեցող վիճակի պարամետր է՝

$$\psi(x) = e^{ip l/\hbar} \psi(x-l): \quad (24.1)$$



Ֆելիքս Բլոխ (1905-1983)

Համաձայն Ֆլոկեի-Բլոխի թեորեմի՝ այս պայմանին բավարարող ֆունկցիաները կարող են ֆակտորիզացվել

$$\psi(x) = e^{ipx/\hbar} \phi(x)$$

տեսքով, որում $\phi(x)$ ֆունկցիան խիստ պարբերական է՝ $\phi(x) = \phi(x-l)$:

Այժմ անդրադառնանք Շրեդինգերի հավասարման լուծմանը

և դիտարկենք պոտենցիալի առանձին բջիջ, որը ներառում է a լայնության ազատ շարժման տիրույթ և նրան աջից հարող b լայնության պոտենցիալային արգելք:

• $(n-1)l - a/2 \leq x \leq (n-1)l + a/2$, $V(x) = 0$: Ընդհանուր լուծումը՝

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}: \quad (24.2)$$

• $(n-1)l + a/2 \leq x \leq (n-1)l + a/2 + b$, $V(x) = V_0$: Ընդհանուր լուծումը՝

$$\psi(x) = c_3 e^{\kappa x} + c_4 e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{2M(V_0 - E)}/\hbar: \quad (24.3)$$

Աջից եկող հաջորդ ազատ շարժման տիրույթի լուծումը, համաձայն (24.1)-ի, արտահայտվում է նախորդի (24.2) լուծման միջոցով՝

$$\psi(x) = e^{ip l/\hbar} \left(c_1 e^{ik(x-l)} + c_2 e^{-ik(x-l)} \right), \quad (24.4)$$

և անընդհատ կերպով շարունակում է (24.3) լուծմանը երկու միջակայքերի ընդհանուր $x_n = (n-1)l + a/2 + b$ կետում: Բացի դա, միավորման $x_n - b$ կետում պետք է տեղի ունենա (24.2) և (24.3) լուծումների և դրանց ածանցյալների անընդհատություն՝

$$\begin{aligned} c_1 e^{ik(x_n-b)} + c_2 e^{-ik(x_n-b)} &= c_3 e^{\kappa(x_n-b)} + c_4 e^{-\kappa(x_n-b)}, \\ ik c_1 e^{ik(x_n-b)} - ik c_2 e^{-ik(x_n-b)} &= \kappa c_3 e^{\kappa(x_n-b)} - \kappa c_4 e^{-\kappa(x_n-b)}, \\ c_3 e^{\kappa x_n} + c_4 e^{-\kappa x_n} &= e^{ip l/\hbar} \left(c_1 e^{ik(x_n-l)} + c_2 e^{-ik(x_n-l)} \right), \\ \kappa c_3 e^{\kappa x_n} - \kappa c_4 e^{-\kappa x_n} &= e^{ip l/\hbar} \left(ik c_1 e^{ik(x_n-l)} - ik c_2 e^{-ik(x_n-l)} \right): \end{aligned}$$

Սրանք համասեռ հավասարումների համակարգ են c_j ($j=1,2,3,4$) անհայտների նկատմամբ: Նույնաբար գրոյից

տարբեր լուծում ունենալու պահանջը բերում է, ինչպես հայտնի է գծային հանրահաշվից, անհայտների գործակիցներից կազմված դետերմինանտի զրո լինելու պահանջի: Զրոյից տարբեր գործակիցը բաց թողնելուց հետո այն գրվում է

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ ik & -ik & -\kappa & \kappa \\ e^{ip/\hbar} e^{-ika} & e^{ip/\hbar} e^{ika} & -e^{\kappa b} & -e^{-\kappa b} \\ ik e^{ip/\hbar} e^{-ika} & -ik e^{ip/\hbar} e^{ika} & -\kappa e^{\kappa b} & \kappa e^{-\kappa b} \end{vmatrix} = 0,$$

տեսքով, ինչը հնարավոր է լինում պարզեցնել և ներկայացնել

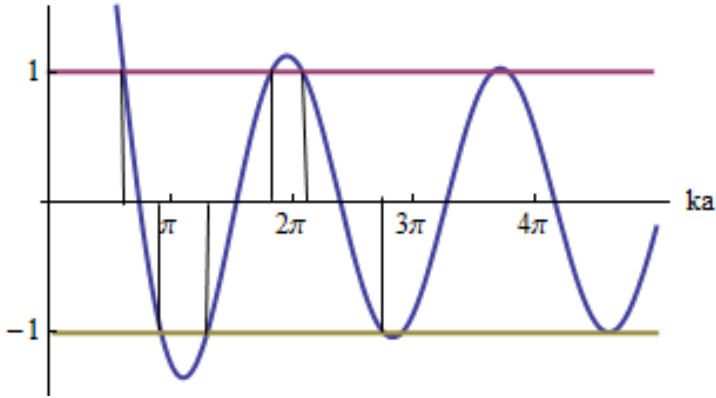
$$\cos\left(\frac{pl}{\hbar}\right) = \cos(ka) \operatorname{ch}(\kappa b) - \frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \sin(ka) \operatorname{sh}(\kappa b) \quad (24.5)$$

հավասարությամբ: Այն կոչվում է դիսպերսիոն առնչություն և կապ է հաստատում p քվադրիմպուլսի և k ու κ պարամետրերի մեջ մտնող E էներգիայի միջև (այլ կերպ՝ որոշում է մասնիկի էներգետիկ սպեկտրը քվադրիմպուլսի ամեն մի տրված արժեքի համար):

• **էներգետիկ սպեկտրի գոտիական կառուցվածքը:**

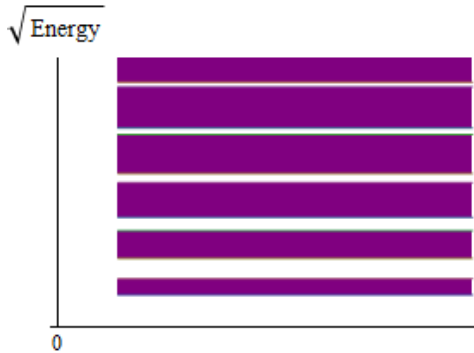
(24.5)-ի ձախ մասում մտնող կոսինուս ֆունկցիայի արժեքները սահմանափակված են $[-1, 1]$ տիրույթում: Իսկ աջ մասը հնարավոր է, որ էներգիայի որոշակի արժեքների տիրույթներում մեծ լինի զրոյից: Ուրեմն այդպիսի էներգիաները թույլատրելի չեն լինի ստացիոնար վիճակների համար: Համոզվելու համար այդպիսի հնարավորությունում կառուցենք (24.5)-ի աջակողմյան մասի գրաֆիկը (Նկ. 24.2), տանելով նաև $+1$, -1 օրդինատներով գծեր: Ինչպես երևում է, որոշ տեղամասեր, որոնցից առաջին մի քանիսը ցուցված են ուղղահայացների միջոցով, իսկապես դուրս են $[-1, 1]$ տիրույթից:

Right Side



Նկ. 24.2: Դիսպերսիոն (24.5) հավասարման աջ մասը որպես էներգիայի ka պարամետրի ֆունկցիա: $b/a = 0.1$, իսկ պոտենցիալի բարձրությունը՝ $v_0 a = 60$:

Էներգիայի համապատասխան արժեքներն արգելված են: Յուրաքանչյուր արգելված գոտու հաջորդում է թույլատրելի գոտի (դրանք կոչվում են նաև զոնաներ), ապա նորից արգելված և այսպես շարունակ: Էներգետիկ սպեկտրի զոնային պատկերը ներկայացված է Նկ. 24.3-ում: Կարևոր օրինաչափություն է, որ էներգիայի թույլատրելի զոնաների լայնությունը դեպի բարձր էներգիաներ աստիճանաբար մեծանում է, արգելված զոնաներինը՝ փոքրանում:



Նկ. 24.3: Պարբերական պոտենցիալում մասնիկի ստացիոնար վիճակների էներգիաների զոնային (գոտիական) կառուցվածքն ըստ Նկ. 24.2-ի

Մասնիկի էներգետիկ սպեկտրի զոնային կառուցվածքը համեմատենք առանձնացված պոտենցիալային հորի էներգետիկ սպեկտրի կառուցվածքի հետ: Վերջինում, եթե E -ն փոքր է պոտենցիալային հորի V_0 խորությունից, սպեկտրը դիսկրետ է, այսինքն՝ թույլատրելի են միայն որոշակի էներգիայով վիճակներ: Դա կարելի է հասկանալ որպես հետևանք այն բանի, որ ստացիոնար վիճակներ ձևավորվում են հորում ալիքային ֆունկցիայի բազմակի անդրադարձումների ինքնինտերֆերենցիայի արդյունքում, ինչը ոչ զրոյական է միայն եթե նույն կողմ տարածվող ալիքների ընթացքների տարբերությունը դե Բրոյլի ալիքի երկարության պատիկ է:

Հորի խորությունը գերազանցող էներգիաների դեպքում, երբ $E > V_0$, ապա էներգետիկ սպեկտրը անընդհատ է, որովհետև հորի պատերից անդրադարձող ալիքները գործնականում բացակայում են և ստացիոնար վիճակ հնարավոր է լինում դե Բրոյլի ալիքի ամեն մի երկարության (մասնիկի էներգիայի) դեպքում:

Պարբերական պոտենցիալն այս իմաստով միջանկյալ տեղ է գրավում: Պարբերական

Պոտենցիալը միաժամանակ և՛ գերող է, և՛ չգերող: Սպեկտրը և դիսկրետ է և անընդհատ միաժամանակ՝ զոնային է: Այստեղ սկզբունքային դեր է կատարում մատերայի ալիքային բնույթից հետևող քվանտային թունելացման երևույթը:

Այժմ ուշադրություն դարձնենք (24.5) դիսպերսիոն առնչության $\cos(pl/\hbar)$ ձախակողմյան մասի՝ որպես p քվազիիմպուլսի ֆունկցիա, պարբերականությանը: Այն թույլ է տալիս արգումենտի փոփոխությունը սահմանափակել $[-\pi, \pi]$ տիրույթով կամ որ նույնն է՝ քվազիիմպուլսի

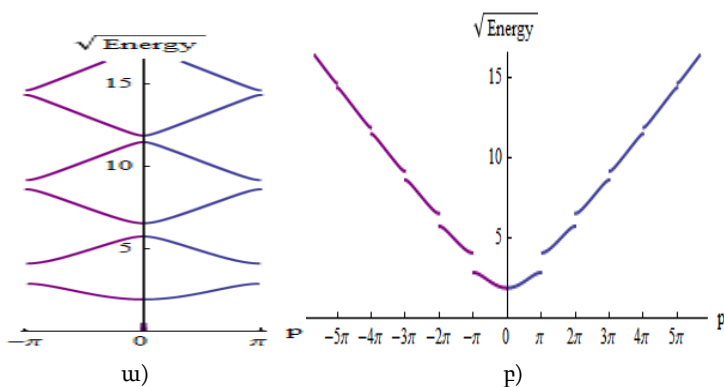
$$-\frac{\pi\hbar}{l} \leq p \leq \frac{\pi\hbar}{l}$$



Լեոն Բրիլյունեն
(1889-1969)

տիրույթով: Այն կոչվում է Բրիլյունենի 1-ին զոնա:

Մասնիկի էներգետիկ սպեկտրը Բրիլյունենի 1-ին զոնայում պատկերված է Նկ. 24.4 ա-ում: Այն կոչվում է բերված գոտիների (զոնաների) ներկայացում:



Նկ. 24.4: Պարբերական պոտենցիալում մասնիկի ստացիոնար վիճակի էներգիա-քվադրիմպուլս (24.5) դիսպերսիոն առնչության գրաֆիկը Բրիլյուենի բերված զոնաների (ա) և ընդլայնված զոնաների (բ) պատկերացումներում:

Քվադրիմպուլսի յուրաքանչյուր ֆիքսված արժեքի դեպքում էներգիայի սպեկտրը դիսկրետ է և դրանով նմանվում է անվերջ խորը հորում մասնիկի էներգետիկ սպեկտրին:

Այնուամենայնիվ, հարկ է նկատի ունենալ մի կարևոր տարբերություն և դա վերաբերում է հավանականության խտության հոսքին: Օգտվելով նրա

$$j = \frac{\hbar}{i2M} \left(\psi^*(x) \frac{d\psi(x)}{dx} - \psi(x) \frac{d\psi^*(x)}{dx} \right)$$

Սահմանումից՝ կարող ենք համոզվել, որ հորում գերված կամայական ստացիոնար վիճակում այն զրո է, իսկ պարբերական պոտենցիալի համար զրոյանում է միայն $p = 0$ և եզրային $p = \pm \pi$ արժեքների դեպքերում: Այլ կերպ ասած, ալիքային ֆունկցիան կոորդինատային սկզբնակետի նկատմամբ օժտված է որոշակի սիմետրիայով միայն քվադրիմպուլսի այս արժեքների դեպքում, ընդ որում, կենտ համարով զոնաների

ներքևի եզրում ալիքային ֆունկցիան սիմետրիկ է, վերին եզրում՝ անտիսիմետրիկ: Ջույգ համարով էներգետիկ զոնաների համար հակառակն է: Քվադրիմպուլսի $p \neq 0, \pm\pi$ կետերում ալիքային ֆունկցիան ոչ սիմետրիկ է, ոչ անտիսիմետրիկ:

Նկ. 24.4 ա-ից տեսնում ենք նաև, որ էներգետիկ զոնաները չեն վերածածկվում: Պետք է ասել, սակայն, որ սա ընդհանուր օրինաչափություն է միայն միաչափ խնդրի համար: Երկչափ և եռաչափ խնդիրներում վերածածկումներ հնարավոր են:

Կոսինուս ֆունկցիայի առկայությունը (24.5)-ում իհարկե չի պարտադրում բերված զոնաների պատկերացումը, առավել ևս որ այն անմիջականորեն չի անցնում ազատ շարժման $V_0 \rightarrow 0$ սահմանային դեպքին: Թույլ տալով, որ քվադրիմպուլսը տարածվի $(-\infty, +\infty)$ ամբողջ տիրույթով՝ դիսպերցիոն կորի համար ստանում ենք Նկ. 24.4 բ-ում բերված պատկերը: Այն կարելի է ընկալել որպես ազատ շարժման դիսպերսիոն կորի որոշակի օրինաչափությամբ դեֆորմացման արդյունք: Պարբերական պոտենցիալի առկայությունը բերել է նրան, որ ռեզոնանսի պայմանին բավարարող $p = \pm n\pi$ ($\hbar/l$ միավորներով, $n = 0, 1, 2, \dots$) արժեքների դեպքում կորն ընդհատվում և շեղվում է ուղղաձիգ ուղղությամբ: Մպեկտրում պարբերաբար առաջանում են էներգիայի արգելված գոտիներ: Դրանց աստիճանական նեղացումը դեպի բարձր էներգիաներ, այսինքն՝ մոտեցումը ազատ շարժման դիսպերսիոն կորին, կարող է մեկնաբանվել որպես քվանտային թունելացման էֆեկտիվության մեծացման արդյունք: Քվանտային թունելացումն ու համընթաց շարժումն ինչ-որ իմաստով համարժեք հասկացություններ են:

Ինչ վերաբերում է ալիքային ֆունկցիային, ապա այն համաձայն (24.2) և (24.3) բանաձևերի և (24.1) պայմանի, պարբերական փուլի ճշտությամբ տարածվում է «հավասարապես» ամբողջ կոորդինատային առանցքով:

• **Եռաչափ պարբերական ցանց:** Իրական բյուրեղային մարմիններում ատոմները կազմում են եռաչափ տարածական ցանցեր: Էլեկտրոնները, գտնվելով պարբերական պոտենցիալի դաշտում, ունենում են էներգետիկ սպեկտրի զոնային կառուցվածք՝ էներգիայի թույլատրելի և արգելված զոնաներ, միայն թե դրանց կառուցվածն ընդհանուր դեպքում զգալիորեն բարդ է: Մասնավորապես՝ դիսպերսիոն առնչությունում միաչափ խնդրի p քվադրիմպուլսի փոխարեն մտնում են $\mathbf{p}$ վեկտորի երեք՝ p_x , p_y և p_z բաղադրիչներ: Դա նշանակում է, որ էներգիայի որևէ տրված արժեքի համապատասխանում է ոչ թե քվադրիմպուլսի մեկ որոշակի արժեք, այլ մակերևույթ քվադրիմպուլսների տարածությունում: Այն կոչվում է իզոմակերևույթ՝ հավասար էներգիայի մակերևույթ: $|l_x| = |l_y| = |l_z| = l$ խորանարդաձև բյուրեղային ցանցի համար (24.5) դիսպերսիոն հավասարումը պարզ ընդհանրանում է

$$\cos\left(\frac{p_x l}{\hbar}\right) + \cos\left(\frac{p_y l}{\hbar}\right) + \cos\left(\frac{p_z l}{\hbar}\right) = f(E)$$

տեսքում, որի աջ մասը որոշակի ֆունկցիա է էներգիայից կախված միջատոմական հեռավորություններից և փոխազդեցություններից:

Խոտորումների առաջին մոտավորությամբ այն էներգիայից կախված է զծային օրենքով և դիսպերսիոն առնչությունը հարմար է լինում գրել

$$E(\vec{p}) = \varepsilon_a - w_0 - 2w_a \left[\cos\left(\frac{p_x l}{\hbar}\right) + \cos\left(\frac{p_y l}{\hbar}\right) + \cos\left(\frac{p_z l}{\hbar}\right) \right] \quad (24.6)$$

տեսքով, որտեղ ε_a -ն առանձնացված պոտենցիալային հորում գերված մասնիկի՝ տվյալ զոնային համապատասխանող էներգետիկ մակարդակի արժեքն է, w_0 -ն պարբերական պոտենցիալի և առանձնացված մեկ հորի պոտենցիալ էներգիաների տարբերության քվանտամեխանիկական միջինն է, իսկ w_a -ն այդ նույն տարբերության քվանտամեխանիկական միջինն է ըստ այդ և հարևան հորերի ալիքային ֆունկցիաների վերածածկվող մասի:

Բրիլյուենի զոնան $p_x = \pm\pi\hbar/l$, $p_y = \pm\pi\hbar/l$ և $p_z = \pm\pi\hbar/l$ հարթություններով սահմանափակված խորանարդ է: Էներգետիկ զոնայի մինիմալ արժեքը $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ կետում է՝ Բրիլյուենի զոնայի կենտրոնում, և հավասար է $E_{\min} = \varepsilon_a - w_0 - 6w_a$ -ի ($w_a > 0$): Մաքսիմալ $E_{\max} = \varepsilon_a - w_0 + 6w_a$ արժեքը ստացվում է, երբ $\mathbf{p} = (\pm\pi\hbar/l, \pm\pi\hbar/l, \pm\pi\hbar/l)$, այսինքն՝ բրիլյուենյան խորանարդի ութ գագաթներից յուրաքանչյուրում: Էներգետիկ զոնայի լայնությունը հավասար է $E_{\max} - E_{\min} = 12w_a$:

Քվադրիմպուլսի փոքր արժեքների կամ որ նույնն է՝ էներգետիկ զոնայի կենտրոնական տիրույթում, երբ $pl \ll 1$, (24.6)-ն ընդունում է

$$E \approx \varepsilon_a - w_0 - 6w_a + w_a \frac{l^2 p^2}{\hbar^2}$$

քառակուսային տեսքը: Ազատ շարժման բանաձևի հետ սրա համեմատումը էլեկտրոնի $m^* = (d^2 E / dp^2)^{-1}$ բանաձևով սահմանվող բերված (էֆեկտիվ) զանգվածի համար տալիս է

$$m^* \approx \frac{\hbar^2}{2l^2 w_a}$$

կոմպակտ տեսքը: Հետաքրքիր է, որ բերված զանգվածի նշանը որոշվում է w_a -ի նշանով ու կարող է լինել նաև բացասական:

§ 25. Պինդ մարմիններ

Էներգետիկ սպեկտրի զոնային կառուցվածքը թույլ է տալիս բացատրելու բյուրեղային պինդ մարմինների էլեկտրահաղորդիչ հատկությունները, որոնց հիման վրա ընդունված է դրանց դասակարգումը հաղորդիչների, կիսահաղորդիչների և դիէլեկտրիկների: Միաէլեկտրոն վիճակների մոտարկմամբ էներգետիկ սպեկտրն ունի զոնային կառուցվածք, ընդ որում, բոլոր զոնաներում քվանտային վիճակների թիվը նույնն է և առանձին բջիջներից (օրինակ՝ ատոմներից) բաղկացած բյուրեղային ցանցերի պատկերացմամբ այն հավասար է քննարկվող ծավալում առկա բջիջների (ատոմների) ընդհանուր թվին: Այս վիճակները լրացվում են բյուրեղական ցանցը կազմող ատոմների վալենտական՝ արտաքին թաղանթի, էլեկտրոնների կողմից: Օրինակ, միավալենտ նատրիումական ցանցի դեպքում դրանք մեկական էլեկտրոններ են:

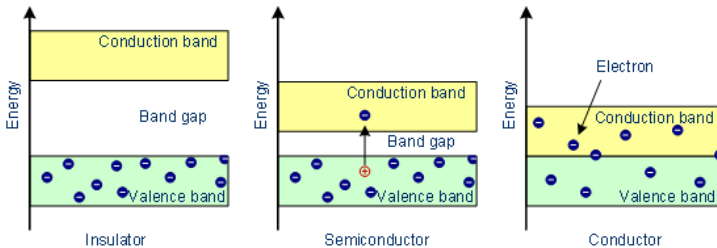
Վիճակների կամ որ նույնն է՝ զոնան կազմող էներգետիկ մակարդակների բնակեցումն էլեկտրոնների կողմից ընթանում է ներքից վերև, Պաուլիի սկզբունքի համաձայն առավելազույնը երկու էլեկտրոն սպինի հակառակ ուղղություններով էներգետիկ մեկ մակարդակում: Շատ ցածր ջերմաստիճաններում, երբ ջերմային զրգռումները բացակայում են, մակարդակների ներքևից վերև լրացումը տեղի է ունենում կիպ դա-

սավորմամբ: Արդյունքում ստացվում է, որ յուրաքանչյուր էներգետիկ զոնա կարող է ներառել առավելագույնը բջիջների (ատոմների) թվի կրկնապատիկի չափով էլեկտրոններ: Էներգետիկ մակարդակը, որից ներքև բոլոր մակարդակները զբաղեցված են, իսկ որից վերև՝ դատարկ, Ֆերմիի մակարդակն է, Ֆերմիի էներգիային համապատասխանող իզոէներգետիկ մակերևույթը քվադրիմպուլսների տարածությունում՝ Ֆերմիի մակերևույթը:

Բյուրեղի էլեկտրական, օպտիկական և շատ այլ հիմնական հատկություններ որոշվում են էներգետիկ զոնաների կառուցվածքով և նրանում Ֆերմիի էներգիայի դիրքով: Միավալենտ ատոմական ցանցի օրինակում բացարձակ զրո ջերմաստիճանում զբաղված են մակարդակների ներքևի կեսը, իսկ վերին կեսն ազատ է: Ֆերմիի մակարդակն անցնում է զոնայի կենտրոնով, ընդ որում մակարդակներն իրար շատ մոտ են տեղակայված: Երբ նմուշի նկատմամբ կիրառվում է էլեկտրական դաշտ, անգամ շատ թույլ, ապա էլեկտրոնները լրացված մակարդակների վերնիններից, սկսած Ֆերմիի մակարդակից, անցնում են ավելի բարձր մակարդակներ, ինչն էլ նշանակում է հոսանքի առաջացում: Միավալենտ ատոմներից կազմված բյուրեղական ցանցը հաղորդիչ է (Նկ. 25.1, աջից):

Եթե ատոմները երկվալենտ են, ապա էներգետիկ զոնան սենյակային և ավելի ցածր ջերմաստիճաններում լրացվում է ամբողջությամբ: Ֆերմիի մակարդակն անցնում է զոնայի վերին եզրով: Հաջորդ, չլրացված վիճակներով զոնան անջատված է ներքև զոնայից արգելված էներգիաների զոնայով, ինչը թույլ չի տալիս էլեկտրական դաշտին տեղափոխելու էլեկտրոններին վերին զոնա և առաջացնելու էլեկտրական հոսանք: Երկվալենտ ատոմական ցանցը դիէլեկտրիկ է (Նկ. 25.1, ձա-

խից): Այստեղից հասկանալի է դառնում, որ եռավալենտ ատոմների դեպքում առաջին զոնան կլինի լրիվ զբաղեցված, իսկ երկրորդ զոնան կլինի զբաղեցված կիսով չափ: Նմուշը կունենա բարձր էլեկտրահաղորդականություն: Ընդհանրացնելով կունենանք, որ կենտ վալենտականությամբ ատոմական ցանց ունեցող նյութերն օժտված են բարձր էլեկտրահաղորդականությամբ, իսկ զույգ վալենտականությամբ օժտվածներինը զուրկ են էլեկտրահաղորդականությունից՝ մեկուսիչներ են:



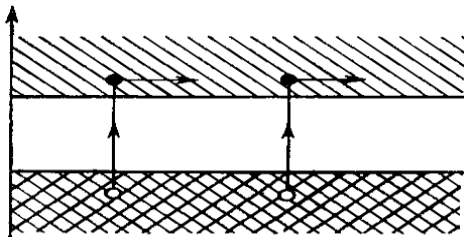
Նկ. 25.1

Բյուրեղային պինդ նյութերի մեծամասնության բյուրեղային ցանցերը, այնուամենայնիվ, պարզ խորանարդային չեն և ոչ էլ ցանցային բջիջներն են միատոմ: Էներգետիկ սպեկտրի զոնային կառուցվածքը պահպանվում է, սակայն ավելի բարդ են դառնում դրանց փոխադարձ դիրքվորումները: Առավել բնութագրականն այն է, որ անգամ ներքններում գտնող էներգետիկ զոնաները կարող են շատ մոտ լինել՝ ավելի քիչ քան էլեկտրոնների ջերմային էներգիաներն են, կարող են հպված լինել միմյանց և անգամ մասնակի չափով վերածածկված: Հպված և մասնակի վերածածկված զոնաներով դեպքերում մենք գործ ենք ունենում լավ արտահայտված հաղորդականությամբ օժտված նյութերի հետ: Հետագայում մեր հետաքրքրու-

թյունը կենտրոնացվելու է հիշյալ հնարավորություններից առաջինի վրա, երբ լրացված վերջին էներգետիկ զոնան, որը կոչվում է վալենտական՝ այսինքն՝ լրացված վալենտական էլեկտրոնների կողմից, ցածր ջերմաստիճաններում լրացված է ամբողջությամբ, իսկ վերին դատարկ զոնան, որը կոչվում է հադորդական, տարանջատված է ոչ մեծ, սենյակային ջերմաստիճանների ջերմային էներգիայի կարգի լայնության արգելված զոնայով: Սրանք կիսահաղորդիչներն են (Նկ. 25.1, մեջտեղում), որոնք անվերապահորեն առկա են ժամանակակից բարձր տեխնոլոգիական սարքերում, ներառյալ բոլոր ինֆորմացիոն սարքավորումները:

§ 26. Կիսահաղորդիչներ

Ունեցած ջերմային էներգիաների հաշվին Ֆերմիի մակարդակի և նրան մոտ գտնվող մակարդակների որոշ էլեկտրոններ հաղթահարում են էներգիայի արգելված զոնան և հայտնվում են հաղորդական զոնայում, ինչպես ցույց է տրված Նկ. 26.1-ում:



Նկ. 26.1: Կիսահաղորդչի վալենտական զոնայի վերին եզրին մոտ էլեկտրոնների մի մասը ջերմային էներգիայի հաշվին անցնում են վերին՝ հաղորդական զոնա՝ վալենտական զոնայում առաջացնելով խոռոչներ: Էլեկտրական դաշտն ազդում է աջից ձախ ուղղությամբ:

Ջերմային հավասարակշիռ վիճակում դրանց թիվը կարելի է որոշել բոլցմանյան բնութագրական

$$N = 2 \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} \exp(-E_{\text{gap}} / 2k_B T)$$

արտահայտությամբ, որտեղ $k_B T$ -ն էլեկտրոնի ջերմային շարժման էներգիան է, m_e -ն և m_h -ը համապատասխանաբար էլեկտրոնի և խոռոչի զանգվածներն են, E_{gap} -ը՝ էներգիայի արգելված գոնայի լայնությունը: Կիրառական լայն դաշտ ունեցող կիսահաղորդիչներ սիլիցիումի (Si) և գերմանիումի (Ge) արգելված գոտիների լայնությունները կազմում են համապատասխանաբար՝ $E_{\text{gap}} = 1.11 \text{ eV}$ և $E_{\text{gap}} = 0.66 \text{ eV}$: Համեմատության համար նկատենք, որ, օրինակ, սիլիցիումի ատոմից մեկ էլեկտրոն պոկելու էներգիան $U_{\text{ionization}} = 8.15 \text{ eV}$ է:

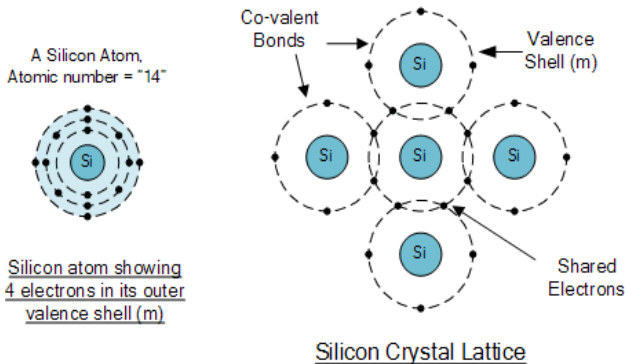
Հաղորդականության զոնայում հայտնված էլեկտրոնները կարող են առաջացնել որոշ էլեկտրական հոսանք: Էլեկտրական հոսանք առաջանում է նաև նրանով, որ վալենտական զոնայից հեռացած էլեկտրոնների տեղում առաջանում են դատարկ վիճակներ, ինչպես պատկերված է Նկ. 26.1-ում: Կիրառված էլեկտրական դաշտի ազդեցությամբ մի կողմի հարևան տեղամասից համապատասխան թվով էլեկտրոններ գալիս և զբաղեցնում են այդ դատարկված վիճակները՝ իրենց տեղերում առաջացնելով նոր դատարկ տեղամասեր: Քանի որ դատարկված տեղերը տեղափոխված կլինեն էլեկտրոնների շարժմանը հակառակ՝ նկարում դեպի ձախ ուղղությամբ, հիմա այդ տեղերը կլրացվեն ավելի ձախից եկող էլեկտրոններով և այսպես շարունակ: Արդյունքում վալենտական զոնայում տեղի կունենա դատարկ տեղամասերի միակողմանի անընդ-

հատ տեղափոխություն: Շարժման օրինաչափությունները, սակայն, հաղորդական և վալենտական զոնաներում նույնը չեն: Այդ պատճառով վալենտական զոնայում տեղափոխվող էլեկտրոնների համար ընդունված է մեկ այլ՝ համարժեք, պատկերացում՝ հիմք ընդունելով էլեկտրոնների կողմից դատարկվող տեղերի շարժումը: Ընթանալով էլեկտրոնների տեղափոխմանը հակառակ ուղղությամբ, այն իրեն պահում է դրական լիցքավորված մասնիկի նման: Այս գոյացումը կոչվում է խոռոչ: Քանի որ մինչ էլեկտրոնի հեռանալը կիսահաղորդչային միջավայրը յուրաքանչյուր կետում էլեկտրաչեզոք է, ապա էլեկտրոնի (որը բացասական է լիցքավորված) հեռանալուց հետո խոռոչը մնում է էլեկտրոնի տարրական լիցքի մեծության չափով դրական լիցքավորված: Կիսահաղորդչում էլեկտրոնային և խոռոչային հոսանքի ուժերն ուղղված են նույն ուղղությամբ և գումարվելով որոշում են կիսահաղորդչում հոսանքի ուժի մեծությունը: Այս հաղորդականությունը կոչվում է նաև սեփական:

Միլիցիումի, որպես օրինակ, առանձին ատոմի և բյուրեղային ցանցի սխեմատիկ պատկերները բերված են Նկ. 26.2-ում:

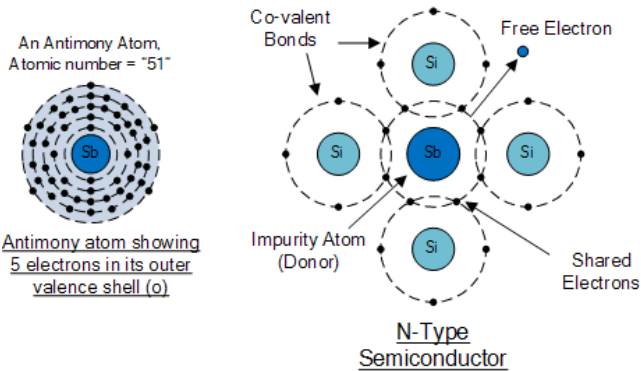
Կիսահաղորդիչների սեփական էլեկտրահաղորդականությունը փոքր է սենյակային ջերմաստիճաններում և կարիք ունի մեծացման: Դրան հասնում են բյուրեղային ցանցում ավելացնելով որոշակի դոնոր կամ ակցեպտոր ատոմներ, որոնք համապատասխանաբար առաջացնում են ավել թվով էլեկտրոններ կամ խոռոչներ: Դրանք կոչվում են լեգիրացված (խառնուրդային) կիսահաղորդիչներ, ընդ որում, խառնուրդացման աստիճանը վերահսկելի է և կարող է փոփոխվել ցանկալի՝

10^{-7} և ավելի փոքր հարաբերական կոնցենտրացիաների սահմաններում:



Նկ. 26.2: Սիլիցիումի բյուրեղում ատոմի արտաքին թաղանթի չորս էլեկտրոնները հարևանների հետ կովալենտ կապերի միջոցով առաջացնում են կայուն կառուցվածք:

- ***n* - տիպի կիսահաղորդիչներ:** Սիլիցիումի բյուրեղում որպես դոնոր խառնուրդներ օգտագործվում են սուրման (Sb), ֆոսֆորը (P) կամ արսենը (As): Այս ատոմները հնգավալենտ են: Չորսն օգտագործվում են հարևան սիլիցիումի ատոմների հետ կովալենտ կապեր ստեղծելու համար, իսկ մեկ էլեկտրոն դառնում է շարժունակ: Սուրմայի ատոմի և սիլիցիումի բյուրեղում նրա կողմից ազատ էլեկտրոնի առաջացման սխեմատիկ պատկերը տրված է Նկ. 26.3-ում: Էլեկտրոնի հեռանալու արդյունքում դոնորային ատոմ-մնացորդը լիցքավորված է դրական տարրական e լիցքով:

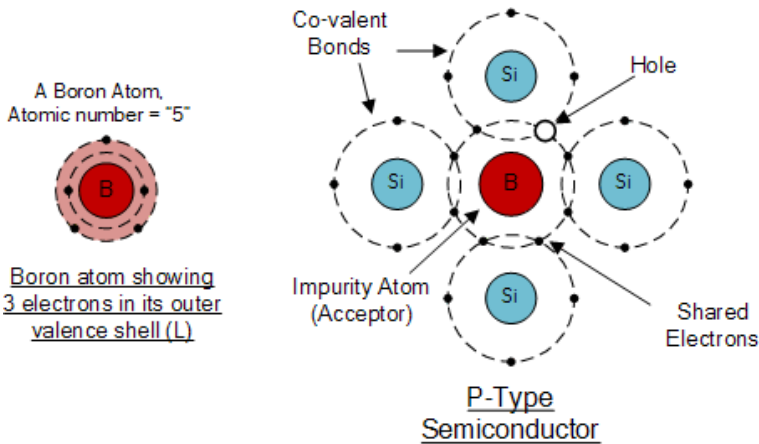


Նկ. 26.3: Սիլիցիումի բյուրեղում սուրմայի դոնորային ատոմի տեղակայումը և ազատ էլեկտրոնի առաջացումը

Դոնորների կողմից բերված էլեկտրոնային հաղորդականությունը նմուշում մեծապես գերազանցում է կիսահաղորդչի սեփական հաղորդականությանը և այսպիսի խառնուրդային կիսահաղորդիչը կոչվում է n - տիպի (ինչը էլեկտրոնի լիցքի բացասական՝ negative բառի հապավումն է): Էլեկտրոնները հիմնական, իսկ խոռոչները երկրորդական հոսանքակիրներն են n - տիպի կիսահաղորդիչներում:

- **p - տիպի կիսահաղորդիչներ:** Հակառակ հնարավորությունն այն է, երբ կատարյալ բյուրեղական ցանց (օրինակ՝ սիլիցիումի կամ գերմանիումի (Ge)) մտցվում են եռավալենտ ալյումինի (Al), բորի (B) կամ ինդիումի (In) ատոմներ: Դրա արդյունքում այդ ատոմների շուրջ քառավալենտ ատոմի քիմիական կովալենտ կապերից մեկը կարողանում է ձևավորվել, ինչը համարժեք է դառնում բյուրեղացանցում խոռոչի՝ էլեկտրոնի պակասի առաջացման: Արտաքին էլեկտրական դաշտի կիրառման դեպքում հարևան էլեկտրոններից մեկը ձգվում է դեպի խոռոչ, շարժում է ու լցնում այն: Լցնելով խոռո-

չը՝ էլեկտրոնն իր նախկին տեղում թողնում է նոր խոռոչ: Այն շարժում է նոր էլեկտրոն դեպի իրեն, ինչպես մաքուր կիսահաղորդիչների սեփական հաղորդականությունում էր: Բյուրեղային ցանցում գոյանում է էլեկտրական հոսանք: Պակասող՝ եռավալենտ ատոմները կիսահաղորդչային նմուշում կոչվում են ակցեպտորներ, իսկ կիսահաղորդիչները՝ *p*-տիպի (այն խոռոչի լիցքի դրական՝ positive բառի հապավումն է): Միլիցիումի բյուրեղում բորի ատոմի ներգրավման և համապատասխան խոռոչի ձևավորման սխեմատիկ պատկերը բերված է Նկ. 26.4-ում:



Նկ. 26.4: Միլիցիումի բյուրեղում բորի՝ որպես ակցեպտորային ատոմի, տեղակայումը և խոռոչի առաջացումը

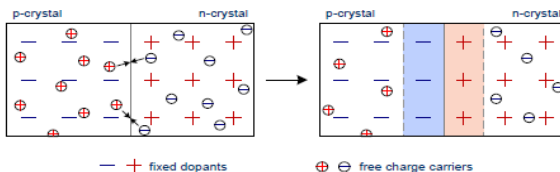
Եթե պատկերացնենք բոլոր կովալենտ կապերը լրացված, ապա մենք պետք է ակցեպտորային ատոմ-կառույցին վերագրենք $-e$ բացասական տարրական լիցք:

Սուրմայի և բորի լայն օգտագործումը որպես խառնուրդներ հիմնականում պայմանավորված է դրանց ավելի հեշտ, քան մյուս նյութերի, ստացման հնարավորություններով:

§ 27. p-n կիսահաղորդչային դիոդ (կոնտակտ)

Կիսահաղորդչային տեխնոլոգիաների կարևոր տարր է p-n կոնտակտը: Մինչ կոնտակտային հպումը կիսահաղորդիչներն ամբողջ ծավալով էլեկտրաչեզոք են, ընդ որում, n-տիպի կիսահաղորդիչներում շարժունակ են էլեկտրոնները (խոռոչներ նույնպես կան, բայց նրանց թիվը շատ փոքր է), իսկ p-տիպի կիսահաղորդիչներում՝ խոռոչները (կան և փոքրաթիվ ազատ էլեկտրոններ): Կոնտակտի դեպքում շարժունակ մասնիկներն իրենց ջերմային էներգիաների հաշվին դիֆուզվում են հարևան կիսահաղորդիչ: Քանի որ դիֆուզող մասնիկները լիցքավորված են, ապա հպման մակերևույթի երկու կողմերում աստիճանաբար տեղի է ունենում հակառակ նշանի լիցքերի կուտակում և որոշ ժամանակ հետո հաստատվում է կայուն հավասարակշռություն, որում դիֆուզիայի և ռեկոմբինացիայի արագությունները իրար հավասար են և հավելյալ լիցքերի բաշխումը հպման մակերևույթի երկու կողմերում մնում է անփոփոխ:

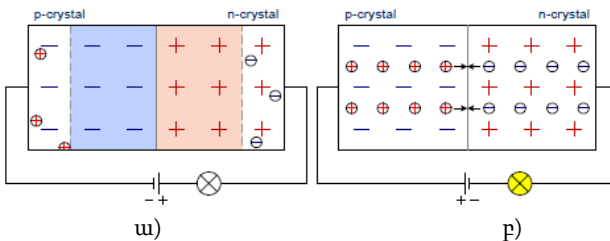
Կոնտակտային այս փոփոխությունները սխեմատիկորեն պատկերված են Նկ. 27.1-ում: Սիլիցիումի օրինակում կոնտակտի երկու կողմերի պոտենցիալների տարբերությունը կազմում է մոտ 0.7 V :



Նկ. 17.1: p-n կիսահաղորդչային կոնտակտի հարևանությամբ ազատ լիցքակիրների դիֆուզիայի շնորհիվ առաջանում է հակառակ նշանի լիցքերի կուտակում, մինչև որ հակառակ ուղղությամբ առաջացող էլեկտրական դաշտը համակշռում է դիֆուզիային:

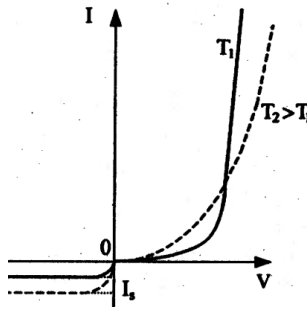
Կոնտակտային էլեկտրական դաշտի (կամ տաքանուն բաժանված լիցքերի) առկայությունը կոնտակտային տիրույթում էապես փոխում է տարրի արձագանքն արտաքինից կիրառված լարումների նկատմամբ և դա առաջին հերթին վերաբերում է կիրառված լարման ուղղությանը: Եթե n -տիպի կիսահաղորդչին միացվում է արտաքին հոսանքաղբյուրի դրական լիցքի սեղմակը, իսկ p -տիպի կիսահաղորդչին՝ բացասական սեղմակը (Նկ. 27.2 ա), ապա աղբյուրի էլեկտրական դաշտն ուղղված է լինում կոնտակտային դաշտի ուղղությամբ և ուժեղացնում է այն: Այն առավել չափով է խանգարում դիֆուզիայի միջոցով հոսանքի անցմանը կոնտակտով և արգելափակում է էլեկտրական լիցքերի հոսքը:

Եթե հոսանքաղբյուրը p -ո կոնտակտին միացվում է հակառակ հերթականությամբ, ինչպես ցույց է տրված Նկ. 27.2 բ-ում, ապա էլեմենտի ներսում էլեկտրական դաշտը թուլանում ու վերանում է: Աղբյուրի ազդեցության տակ կոնտակտով, որպես սովորական հաղորդիչով, հոսում է էլեկտրական հոսանք: Արդյունքում՝ p -ո կիսահաղորդչային կոնտակտն օժտված է լինում միակողմանի հաղորդականությամբ: Այն դիող է և օգտագործվում է, օրինակ, փոփոխական հոսանքի ուղղման, ինչպես նաև տարրական բիթի իրականացման համար:



Նկ. 27.2: n - p կիսահաղորդչային կոնտակտի վարքը արտաքին հոսանքի աղբյուրին ա) հակառակ և բ) ուղիղ միացնելիս:

p-n անցման վոլտամպերային բնութագիծը բերված է Նկ. 27.3-ում:



Նկ. 27.3: p-n կիսահաղորդչային դիոդի վոլտամպերային բնութագիծը: Դիոդի «փակ» վիճակում հոսանքի ուժը փոքր է և մեծանում է ջերմաստիճանի աճին զուգընթաց:

Լարման աղբյուրին ուղիղ միացման (դրական սեղմակը՝ p-ին, բացասականը՝ n-ին) հոսանքի ուժը կախված կիրառված U լարումից և T ջերմաստիճանից որոշվում է

$$I = I_{\text{saturation}} \left(\exp \left(\frac{eU}{k_B T} \right) - 1 \right)$$

բանաձևով, որտեղ հազեցման կոչվող $I_{\text{saturation}}$ հոսանքը փոքր է և նաև համեմատական էլեկտրոն-խոռոչ զույգերի գեներացման արագությանն ու և դրանց դիֆուզիոն երկարությունների գումարին: Լարման աղբյուրի հակառակ միացման հոսանքի համար կարելի է օգտվել վերևի բանաձևից՝ նրանում փոխելով U -ի նշանը:

ԳԼՈՒԽ III

Քվանտային ինֆորմացիա

§ 28. Քվանտային գեյթեր

Քվանտային ինֆորմացիան և քվանտային տեխնոլոգիաները ներկայումս քվանտային մեխանիկայի արագ զարգացող և հետազոտական բովանդակային նորույթ պարունակող ոլորտներից են: Դասական ինֆորմացիան արտահայտվում է բիթերով, որոնք իրականացվում և տեղափոխվում են ֆիզիկական համակարգի իրար բացառող երկու վիճակներով (օրինակի համար բարձր և ցածր լարումներով կամ լազերային օպտիկական իմպուլսի գոյությամբ և բացակայությամբ): Մի վիճակն օգտագործվում է տրամաբանական 0 -ն, մյուս վիճակը՝ տրամաբանական 1-ը ներկայացնելու համար:

Քվանտային ինֆորմացիան և հեռահաղորդակցությունը տարբերվում են դասական նախադեպից նրանով, որ գործառույթներն իրականացվում և հաղորդվում են քվանտային համակարգի միջոցով: Կարելի է 0 -ն և 1-ը ներկայացնելու համար օգտագործել համակարգի երկու օրթոգոնալ վիճակներ: Նշանակենք դրանց ալիքային ֆունկցիաները հակիրճ $|0\rangle$ և $|1\rangle$, ինչպես ընդունված է քվանտային ինֆորմացիայի տեսության մեջ: Դրանք վեկտորներ են Հիլբերտի տարածության մեջ (անվանումը գալիս է ալիքային ֆունկցիա-



Դավիդ Հիլբերտ
(1862-1943)

ների հանրահաշվի կանոններից): Նորմավորման և օրթոգոնալության պայմաններն այս նշանակումներով գրվում են համապատասխանաբար՝

$$\langle 0| \cdot |1\rangle \equiv \langle 0|1\rangle = 0, \langle 1| \cdot |0\rangle \equiv \langle 0|1\rangle = 0, \langle 0| \cdot |0\rangle \equiv \langle 0|0\rangle = 1, \\ \langle 1| \cdot |1\rangle \equiv \langle 1|1\rangle = 1:$$

Քվանտային համակարգի օգտագործման *սկզբունքային* նորույթը այն է, որ մենք կարող ենք նաև նախապատրաստել

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (28.1)$$

սուպերպոզիցիոն վիճակ, որտեղ α -ն և β -ն կոմպլեքս հավանականային ամպլիտուդներ են: Քվանտային բիթը կամ քուբիթը, այսպիսի երկվիճակ քվանտային համակարգ է:

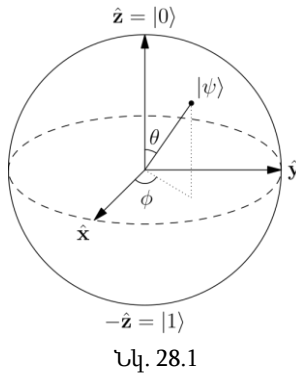
Ամպլիտուդների հավանականային բնույթն ապահովելու համար քուբիթային վեկտորն ընտրվում է նորմավորված՝ $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$: Ավելացնելով վիճակի վեկտորի ընդհանուր փուլի ոչ կարևոր լինելը՝ տեսնում ենք, որ քվանտային վիճակը գործակիցների միայն 0 կամ միայն 1 լինելու փոխարեն նկարագրվում է երկու իրական թվերով: Դա առաջացնում է ինֆորմացիայի անհամեմատ մեծ խտության հնարավորություն:

• **Բլոխի սֆերա:** Երկմակարդակ քուբիթի (28.1) նորմավորված ալիքային ֆունկցիան ընդունված է ներկայացնել

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1\rangle \quad (28.2)$$

տեսքով: Ինֆորմացիան ներառող պարամետրերն են θ -ն և ϕ -ն: Երկրաչափորեն այն պատկերացվում է Հիլբերտի տարածության հենքի վրա կառուցված խտության մատրիցայի տարածության մեջ միավոր երկարության, որը, ելնելով սկզբնակետից, վերջանում է միավոր շառավիղ ունեցող սֆե-

րայի մակերևույթի վրա, ինչպես պատկերված է Նկ. 28.1-ում: Այն կոչվում է Բլոխի սֆերա: $|0\rangle$ վիճակը գտնվում է սֆերայի հյուսիսային բևեռում, իսկ $|1\rangle$ վիճակը՝ հարավային բևեռում: Մյուս բոլոր վեկտորներն այս երկու վիճակների սուպերպոզիցիաներն են: Ի դեպ, եթե սֆերայի վեկտորները մոդելավորեն դասական օբյեկտ, ինչպիսին է, ասենք, սլաքը եռաչափ տարածության մեջ, ապա յուրաքանչյուր քուրբիթի ինֆորմացիա կարող էր մոդելավորվել դասական ճանապարհով:



Քվանտային իրականությունը, սակայն այդպիսին չէ նաև այն պատճառով, որ մենք չենք կարող որոշել քվանտային օբյեկտի դիրքորոշումն այնքան ճշգրիտ, որքան դասական սլաքի դեպքում է: Երկմակարդակ քվանտային համակարգի չափումը, օրինակ՝ $s=1/2$ սպինի վրա որոշում է ընդամենը երկու արդյունք, արդյոք այն օրինատացված է ըստ ընտրված առանցքի՝ դեպի վեր թե դեպի վար: Չափումից հետո մասնիկը պետք է գտնվի համապատասխան օպերատորի սեփական այս երկու վիճակներից մեկում: Քուրբիթի չափումը պետք է տա 0 կամ 1, ինչը տարալուծում է մինչ չափումը եղած սուպերպոզիցիոն վիճակը:

§ 29. Միաքյուրիթ քվանտային գեյթեր

Քուրիթի վիճակը կարող է դեկլարելի փոխվել: Այն համապատասխանում է վիճակի վեկտորի պտույտի Բլոխի սֆերայի վրա և մաթեմատիկորեն նկարագրվում է ունիտար օպերատորի (գործողության) միջոցով: Դրանց անվանում են գեյթեր: Գեյթերի համար ընդունված են ինչպես բրա-քետ, այնպես էլ մատրիցական ներկայացումներ: Ծանոթանանք դրանցից մի քանի կարևորներին:

• **Պաուլիի գեյթեր:** Դրանք երեքն են՝ $X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$, $Y = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|)$ և $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ բրա-քետ նշանակումներով և

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

մատրիցական տեսքերով: Վիճակի վեկտորներն են՝ $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: Այս բանաձևերը թույլ են տալիս ցանկության դեպքում անցում կատարել օպերատորական տեսքից մատրիցական տեսքի և հակառակը:

Պաուլիի մատրիցաները սպինի մատրիցաներն են և ունեն ± 1 սեփական արժեքներ: X , Y , Z -ը էրմիտական են, նորմավորված մեկի և անտիկոմուտատիվ մեկը մյուսի հետ, օրինակ՝ $XY + YX = 0$:

• **X գեյթ:** X գեյթը կոչվում է նաև Ոչ (Not) գեյթ, քանի որ $X|0\rangle = |1\rangle$ և $X|1\rangle = |0\rangle$:

• **Ֆազային շեղման գեյթ** (Phase shift gate R_ϕ). Այն $|0\rangle$ բազիսային վիճակը թողնում է անփոփոխ և $|1\rangle$ -ը վերափոխում է $e^{i\phi}|1\rangle$ -ի՝

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix};$$

Գեյթի ազդեցությունից հետո $|0\rangle$ -ի և $|1\rangle$ -ի իրականացման հավանականությունները մնում են նույնը, սակայն փոխվում է $|1\rangle$ քվանտային վիճակի ֆազը: Այն համարժեք է Բլոխի սֆերայի վրայով հորիզոնական հարթության մեջ վեկտորի ծայրակետի ϕ ռադիանով պտույտի: Հաճախ հանդիպող օրինակներ են $\pi/4$ և $\pi/2$ գեյթերը, իսկ π գեյթը համընկնում է Պաուլիի Z գեյթի հետ:

• **Հադամարդի գեյթը:** Ինչպես կարելի էր նկատել, Պաուլիի և ֆազային շեղման գեյթերը չեն փոխում վիճակների բազիսայնությունը, այսինքն՝ նրանց ազդեցության արդյունքը բազիսային վիճակի վրա նորից բազիսային վիճակ է հաստատուն փուլային գործակցով: Դա նշանակում է, որ դրանց գործառույթներն օժտված են ամբողջական դասական անալոգիայով: Ներհատուկ քվանտային բովանդակությամբ է օժտված Հադամարդի գեյթը: Այն յուրաքանչյուր բազիսային վիճակ ձևափոխում է մոդուլով հավասար ամպլիտուդներով այլ բազիսային գույգի՝ $|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ և $|1\rangle \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ սուպերպոզիցիոն վիճակներով: Դասական անալոգիա ունեցող վիճակներից այն ծնում է ներհատուկ

քվանտային վիճակներ: Լինելով ունիտար՝ այն կարող է իրականացնել նաև հակառակ ձևափոխումը:

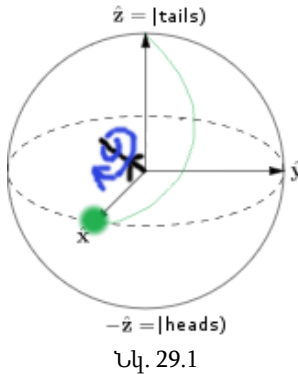


Ժակ Հադամարդ
(1868-1863)

Մատրիցական պատկերացմամբ գեյթը գրվում է

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ունիտար տեսքով: Բլոխի սֆերայի վրա այս գործառնությունն համապատասխանում է $\hat{X} + \hat{Z}$ առանցքի շուրջ π ռադիանով պտույտ, ինչպես պատկերված է Նկ. 29.1-ում:



Նկ. 29.1

§ 30. Քվանտային խճճվածություն

Քվանտային ինֆորմացիայի մշակման և հաղորդման գործառնություններն ինքնին ենթադրում են մեկից ավելի քուրփիթերի ներառում ռեգիստրում: Դա առաջացնում է մեկից ավելի են-

թահամակարգերից բաղկացած քվանտային համակարգերի ալիքային ֆունկցիաների գրառման օրինաչափություններին ծանոթանալու անհրաժեշտություն: Չփոխազդող ենթահամակարգերի քննարկումը լրիվ բավարար է, քանի որ փոխազդեցության առկայությամբ ալիքային ֆունկցիան միշտ կարող է վերլուծվել ըստ չփոխազդող ալիքային ֆունկցիաների բազիսի:

Դիտարկենք երկու՝ A և B , ենթահամակարգերից կազմված (կամ երկու ազատության աստիճան ունեցող) ֆիզիկական որևէ համակարգ: Համակարգի վիճակի որոշ ֆունկցիաներ ունեն ըստ ենթահամակարգերի ֆակտորիզացված տեսք, այն է՝

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle|\varphi\rangle:$$

Եթե համակարգը նախապատրաստված է մի այսպիսի վիճակում, ապա յուրաքանչյուր ենթահամակարգ գտնվում է որոշակի վիճակում, A -ն՝ $|\psi\rangle$ և B -ն՝ $|\varphi\rangle$: Այլ կերպ, դա նշանակում է ենթահամակարգերի անկախություն դասական իմաստով: A -ի $|\psi\rangle$ վիճակի նկատմամբ իրականացվող գործառնություն, ներառյալ չափման, որևէ կերպ չի ազդելու B -ի $|\varphi\rangle$ վիճակի վրա: Այնուամենայնիվ, համակարգի կամայական վիճակի ալիքային ֆունկցիա չի, որ կարող է ֆակտորիզացվել: Շրեդինգերի հավասարման գծային և համասեռ բնույթն այս դեպքում ասում է, որ հավասարման այդպիսի լուծումը կազմված է ֆակտորիզացված (հնարավոր է անվերջ թվով) վիճակների գումարից՝

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |\psi_i\rangle |\varphi_j\rangle:$$

Ֆիզիկական մեկնաբանության տեսանկյունից այն խիստ յուրօրինակ վիճակ է և կոչվում է խճճված: Յուրօրինակությունը գալիս է նրանից, որ, քվանտային չափման պոստուլատի համաձայն, A կամ B ենթահամակարգի նկատմամբ կատարված չափման արդյունքում այդ ենթահամակարգն անցնում է (պրոյեկտվում է) չափվող ֆիզիկական մեծության սեփական վիճակներից որևէ մեկին: Ենթադրենք չափումը կատարվում է B ենթահամակարգի նկատմամբ և այն անցնում է $|\varphi_1\rangle$ վիճակի: Չափումից հետո համակարգի ալիքային ֆունկցիան կլինի

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_{i,1} |\psi_i\rangle |\varphi_1\rangle = \left(\sum_i c_{i,1} |\psi_i\rangle \right) \cdot |\varphi_1\rangle,$$

ինչը ֆակտորիզացված է ըստ ենթահամակարգերի, ընդ որում, A ենթահամակարգը գտնվում է $|\psi_A\rangle = \sum_i c_{i,1} |\psi_i\rangle$ վիճակում: Հիմա ենթադրենք չափման արդյունքում B ենթահամակարգն անցնում է այլ՝ $|\varphi_2\rangle$, վիճակի: A ենթահամակարգն այս դեպքում կհայտնվի $|\psi_A'\rangle = \sum_i c_{i,2} |\psi_i\rangle$ վիճակում, որը տարբեր է $|\psi_A\rangle$ վիճակից՝ $|\psi_A'\rangle \neq |\psi_A\rangle$: Ստացվում է, որ դասական իմաստով իրար հետ չփոխազդող ենթահամակարգերից կազմված քվանտային համակարգը կարող է գտնվել այնպիսի վիճակում, որ ենթահամակարգերից մեկի նկատմամբ կատարվող չափումից հետո մյուսը հայտնվում է վիճակում, որը կախված է առաջինում կատարված չափման արդյունքից: Այսինքն՝ դասականորեն չփոխազդող ենթահամակարգերի վիճակների միջև առկա է կորելացում, փոխադարձ «ներթափանցում», ինչն էլ ընդունված է անվանել խճճվածություն: Սա

ներհատուկ քվանտամեխանիկական հնարավորություն է, դուրս դասական ֆիզիկայի տեսության սահմաններից: Ելնելով ենթահամակարգերից՝ խճճվածությունը համակարգը նկարագրում է որպես ամբողջություն և ներառում է ավելի ինֆորմացիա, քան առկա է առանձին բաղադրիչ մասերով:

Խճճվածությունը և ինֆորմացիան: Ընդհանուր դեպքում բաղկացուցիչ մասերից կազմված քվանտային համակարգի որևէ $|\Psi\rangle$ վիճակ ֆակտորիզացված է, եթե այն ներկայացվում է մասերից յուրաքանչյուրի վիճակը ներկայացնող $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ ալիքային ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով՝

$$|\Psi\rangle = \prod_{i=1}^n |\psi_i\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \dots |\psi_n\rangle:$$

Եթե ոչ, ապա $|\Psi\rangle$ վիճակը կոչվում է խճճված: Հանրահայտ են Էյնշտեյն-Պոդոլսկի-Ռոզենի ու Բելի

$$|\Psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle),$$

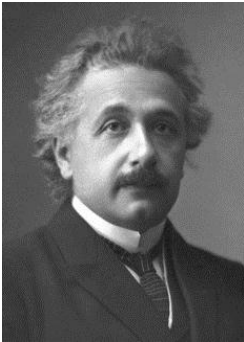
$$|\Psi_{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$$

երկմասնիկ (առավելագույն) խճճված վիճակները և Գրինբերգեր-Հորն-Ջելինգերի եռամասնիկ խճճված վիճակը՝

$$|\Psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle|1\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle):$$

Չնայած սահմանման պարզությանը, խճճվածությունը առաջացնում է մի շարք սկզբունքային նորության տեխնոլոգիական կիրառություններ, որոնց մի մասին կծանոթանանք հետագայում: Առայժմ միայն նկատենք, որ այն դիտվում է որպես քվանտային ինֆորմացիայի ռեսուրս, ինչը կարող է հասանելի

լինել քվանտային ինֆորմացիոն գործառույթների առավելություններն օգտագործելու ճանապարհով:



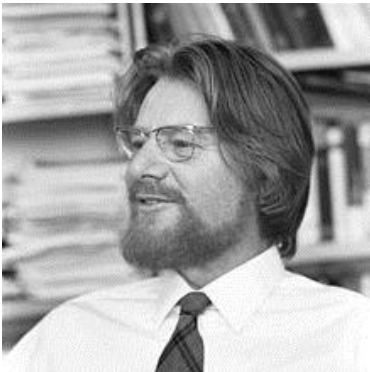
Ալբերտ Էյնշտեյն



Բորիս Պոդոլսկի



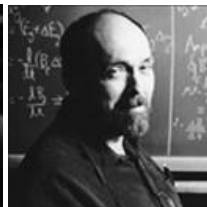
Նաթան Ռոզեն



Ջոն Բեյլ



Դանիել Գրինբերգեր



Միխայիլ Հորն



Անտոն Զելինգեր

Խճճվածությունն և նրա քանական բնութագրումն ընդհանուր դեպքում բարդ հարց է: Այն լավ մշակված է միայն երկու քյուբիթերի՝ երկմաս համակարգերի դեպքում, որին օգնում է Շմիդթի դեկոմպոզիցիայի մասին թեորեմը, համաձայն որի ամեն մի երկմաս համակարգի

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} c_{ij} |a_i\rangle_A |b_j\rangle_B$$

վիճակ, որում $|a_i\rangle_A$ -ն և $|b_j\rangle_B$ -ն առանձին ենթահամակարգերի բազիսային օրթոգոնալ վիճակներն են, հնարավոր է ներկայացնել բիօրթոնորմալ



Էրհարդ Շմիդթ
(1876-1959)

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{k=1}^r \sqrt{w_k} |u_k\rangle_A |v_k\rangle_B, \quad w_k > 0,$$

$$\sum_{k=1}^r w_k = 1 \quad (30.1)$$

տեսքով, որտեղ $r \leq d \equiv \min\{d_A, d_B\}$ -ն, այսպես կոչված, Շմիդթի ռանգն է: Այստեղից անմիջականորեն հետևում է, որ երկմաս կոհերենտ համակարգը խճճված է, եթե նրա Շմիդթի ռանգը մեծ է մեկից՝ $r > 1$:

Խճճվածության առավել տարածված քանակական բնութագիրը ֆոն Նեյմանի էնտրոպիան է: Այն ստանալու համար նախ անցում է կատարվում $|\Psi\rangle_{AB}$ ալիքային ֆունկցիայից համապատասխան $\hat{\rho}_{AB} = |\Psi\rangle_{AB} \langle \Psi|$ խտության մատրիցային, ապա կառուցվում են խտության

բերված (կրճատված) մատրիցաներ համապատասխան ենթահամակարգերի համար.

$$\hat{\rho}_A = Tr_B(|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|), \quad \hat{\rho}_B = Tr_A(|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|): \quad (30.2)$$

Այստեղ Tr_B նշանակում է հետքի հաշվում ըստ B ենթահամակարգի որևէ օրթոնորմավորված



Ջոն Ֆոն Նեյմանը զրուցում է ուսանողների հետ առավոտյան թեյի սեղանի մոտ (1947 թ.):

բազիսային վիճակների: Այն ներառում է միացյալ համակարգի վերաբերյալ ինֆորմացիան, միջինացված ըստ առանձնացված B ենթահամակարգի հնարավոր վիճակների՝ միևնույն ստատիստիկական կշիռներով: Նման նշանակում է նաև Tr_A -ն:

Եթե (30.2)-ի բանաձևերում տեղադրենք Շմիդթի (30.1) բիօրթոնորմալ վերլուծությունները, ապա Tr_B -ի հաշվման դեպքում հետքը հարկ կլինի վերցնել ըստ $|v_k\rangle_B$ բազիսի,

իսկ Tr_A -ի հաշվման դեպքում՝ ըստ $|u_k\rangle_A$ բազիսի: Պարզ գործողությունների արդյունքում կստանանք

$$\hat{\rho}_A = \sum_{k=1}^r w_k |u_k\rangle_A \langle u_k| \text{ և } \hat{\rho}_B = \sum_{k=1}^r w_k |v_k\rangle_B \langle v_k|: \quad (30.3)$$

$\hat{\rho}$ խտության մատրիցայով որոշվող վիճակի ֆոն Նեյմանի էնտրոպիա է

$$S = -Tr(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$$

մեծությունը: Եթե խտության մատրիցան անկյունագծային տեսքի է, ինչպես է ենթահամակարգերի (30.3) բերված խտության մատրիցաների դեպքում, ապա հաշվարկները խիստ բեռնաթափվում են և բերվում անկյունագծային անդամների պարզ գումարի: Արդյունքում երկմաս համակարգի խճճվածության չափի համար ստանում ենք

$$E(|\Psi\rangle_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) = -\sum_{k=1}^r w_k \ln w_k$$

ամփոփ արտահայտությամբ:

Քվանտային ինֆորմատիկայի կիրառական ասպեկտներն էապես ելնում են խճճվածության ընձեռնած հնարավորություններից: Սկզբունքորեն կարևոր է, որ խոսքը գնում է նաև տարածական լոկալիզացման դիրքերով տարբերակելի ենթահամակարգերից կազմված համակարգերի մասին:

§ 31. Երկբուրիթային վիճակներ

Երկու քյուբիթերի համակարգում յուրաքանչյուր քյուբիթի բազիսային վիճակներն են $|0\rangle$ -ն և $|1\rangle$ -ը: Ենթահամակարգերի վիճակներն առանձին-առանձին նախապատրաստելիս յուրաքանչյուրի ալիքային ֆունկցիան ընդհանուր դեպքում կներկայացվի $|0\rangle$ -ի և $|1\rangle$ -ի գծային սուպերպոզիցիայի տեսքով, իսկ համակարգի ալիքային ֆունկցիան՝ այդպիսի սուպերպոզիցիաների արտադրյալի տեսքով.

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)_1 (c|0\rangle + d|1\rangle)_2 :$$

Այն ֆակտորիզացված է, ըստ քյուբիթերի, և խճճվածություն չի պարունակում:

Համակարգի նախապատրաստումը խճճված վիճակում ելնում է համակարգի համար բազիսային վիճակների հանրախմբից: Քննարկվող դեպքում դրանք չորսն են՝ $|0\rangle_1|0\rangle_2$, $|0\rangle_1|1\rangle_2$, $|1\rangle_1|0\rangle_2$, $|1\rangle_1|1\rangle_2$, որոնք հակիրճ կնշանակենք համապատասխանաբար՝ $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ և $|11\rangle$: Երկքուրբիթ համակարգի որևէ վիճակ կարող է ներկայացվել դրանց գծային սուպերպոզիցիայի միջոցով՝

$$|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle:$$

Գործակիցները կամայական կոմպլեքս թվեր են, սահմանափակված միայն նորմավորման պայմանով (երբեմն ակիքային ֆունկցիաները գրվում են և առանց նորմավորման): Առավել հաճախ իրականացվում և կիրառվում են

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

առավելագույն չափով խճճված վիճակները:

Քվանտային ինֆորմացիան խճճված վիճակում շատ նրբազգաց է և հեշտորեն քայքայվում-վերանում է քյուբիթերի հարաբերական փուլերի և ամպլիտուդների պատահական խոտորումների արդյունքում: Փորձարարական սարքերում քուբիթերի միջև փոխադարձ կոհերենտության պահպանումը շատ դժվար լուծելի պրոբլեմ է, հատկապես երբ քուբիթերի թիվը մեծանում է:

§ 32. Ոչ քլոնավորման թեորեմը

Ծանոթանալով հիմնական հասկացություններին, այժմ կարող ենք անդրադառնալ վիճակների քլոնավորման (կրկնորինական) հարցին: Ի տարբերություն դասական համակարգերի՝ քվանտային համակարգի ինֆորմացիան ընդհանուր դեպքում չի կարող կրկնորինակվել առանց ինֆորմացիայում (քվանտային վիճակում) սխալներ մտցնելու: Այս պնդումը, կամ, այլ կերպ ասած, տերմինոլոգիան կարիք ունի որոշ հստակեցման: Քլոնավորման $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle$ պրոցեսը կարող է իրականացվել կատարելապես, այսինքն 1-ի հավասար հավանականությամբ, միայն և միայն այն դեպքում, եթե բազիսը, որին պատկանում է $|\psi\rangle$ -ն, հայտնի է: Հակառակ դեպքում կատարյալ քլոնավորումն անհնար է՝ կամ կրկնորինակները կատարյալ չեն, կամ դրանք կատարյալ են, սակայն երբեմն-երբեմն կրկնորինական պրոցեսը ելքային արդյունք չի տալիս: Հենց վերոհիշյալում է քվանտային ինֆորմացիայի *ոչ-քլոնավորման թեորեմի* բովանդակությունը: Այստեղ խոսքը գնում է ներհատուկ, ոչ լաբորատոր, հնարավորությունների սահմանափակության մասին:

Ենթադրենք $\hat{U}$ -ն որևէ գծային ունիտար օպերատոր է, որն իրականացնում է

$$|\psi\rangle_{orig} |\phi_0\rangle \xrightarrow{\hat{U}} |\psi\rangle_{orig} |\psi\rangle_{copy} \quad (32.1)$$

գործողությունը, որտեղ $|\psi\rangle_{orig}$ -ը բնօրինակի վիճակի վեկտորն է, իսկ $|\phi_0\rangle$ -ն՝ «դատարկ» վիճակ, որտեղ, ըստ ենթադրության, կրկնորինակվել է բնօրինակի վիճակը: Թեորեմի

պնդումն է, որ այսպիսի գործողություն հնարավոր չէ: Տեսնելու համար այն, վերցնենք պարզ օրինակ, երբ կրկնօրինակման ենթակա օբյեկտը մեկ առանձին քուրիթ է, սուպերպոզիցիոն $|\psi\rangle_{orig} = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ վիճակում գտնվող: Օպերատորի գծայնությունից հետևում է, որ նրա ազդեցությունը երկու գումարելիներից յուրաքանչյուրի վրա կարող է վերցվել առանձին: Այս դեպքում, համաձայն (32.1)-ի, ստանում ենք

$$\hat{U}|\psi\rangle_{orig}|\phi_0\rangle = \alpha_0|0\rangle|0\rangle + \alpha_1|1\rangle|1\rangle:$$

Մյուս կողմից, եթե վերոհիշյալ վիճակն ընկալվում է որպես մեկ ամբողջություն, ապա

$$\hat{U}|\psi\rangle_{orig}|\phi_0\rangle = |\psi\rangle_{orig}|\psi\rangle_{orig} = \alpha_0^2|0\rangle|0\rangle + \alpha_0\alpha_1|0\rangle|1\rangle + \alpha_1\alpha_0|1\rangle|0\rangle + \alpha_1^2|1\rangle|1\rangle:$$

Այս երկու ելքերն ընդհանուր դեպքում անհամատեղելի են, ինչն էլ հիմնավորում է թեորեմի պնդումը:

Թեորեմը համարյա նույնքան պարզությամբ հիմնավորվում է նաև շրջակա միջավայրի հաշվառմամբ: (32.1) գործողության ընդհանրացումը կլինի ակներևաբար

$$\hat{U}|\psi\rangle_{orig}|\phi_0\rangle|E_0\rangle = |\psi\rangle_{orig}|\psi\rangle_{copy}|E_\psi\rangle$$

պահանջը, որտեղ $|E_0\rangle$ -ն ներկայացնում է շրջակա միջավայրը մինչ կրկնօրինակումը, իսկ $|E_\psi\rangle$ -ն՝ կրկնօրինակումից հետո: Ապա վերցվում ենք $\hat{U}$ օպերատորի երկու ազդեցություններ՝

$$\hat{U}|\psi_1\rangle_{orig}|\phi_0\rangle|E_0\rangle = |\psi_1\rangle_{orig}|\psi_1\rangle_{copy}|E_{\psi_1}\rangle,$$

$$\hat{U}|\psi_2\rangle_{orig}|\phi_0\rangle|E_0\rangle = |\psi_2\rangle_{orig}|\psi_2\rangle_{copy}|E_{\psi_2}\rangle,$$

և կառուցում դրանց սկալյար արտադրյալը: Արդյունքում, օգտագործելով $\hat{U}$ -ի ունիտարությունը, ստացվում է

$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle^2 \langle E_{\psi_1} | E_{\psi_2} \rangle$ առնչությունը: Քանի որ բոլոր առկա վեկտորների սկալյար արտադրյալներն ըստ մոդուլի փոքր են մեկից կամ հավասար, ապա ստացված առնչությունը կարող է բավարարվել միայն, եթե $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$ կամ 1 , այսինքն՝ երկու տարբեր և ոչ օրթոգոնալ $|\psi_1\rangle$ և $|\psi_2\rangle$ վիճակների քլոնավորումը (միևնույն $\hat{U}$ գործընթացով) հնարավոր չէ:

Ավելացնենք, որ նմանատիպ արդյունք կամայական վիճակի կատարյալ քլոնավորման անհնարինության մասին ստացված է նաև խառը (ոչ մաքուր) վիճակների համար, որոնք վիճակի վեկտորների (ալիքային ֆունկցիաների) փոխարեն ներկայացվում են խտության մատրիցայի օգնությամբ:

Երկու $|\psi\rangle$ և $|\varphi\rangle$ քվանտային վիճակների նմանության քանակական բնութագիրը նրանց

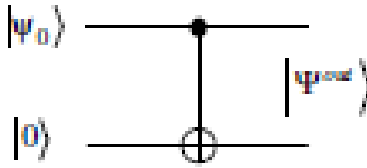
$$F = \langle \psi | \varphi \rangle \langle \varphi | \psi \rangle = |\langle \psi | \varphi \rangle|^2$$

վերաձածկման աստիճանն է: Այն կոչվում է քլոնավորման (քվանտային քլոնավորման հաստոցի՝ ՔՔՀ-ի) ճշտություն կամ վստահելիություն (fidelity):

§ 33. CNOT երկքյուբիթ գեյթը

Որպես երկքյուբիթ գործառույթի հիմնական օրինակ քննարկենք CNOT գեյթը: Այն *մեկ գործառույթային ՔՔՀ* է և, ինչպես կտեսնենք, թույլ է տալիս չխճճված (սուպերպոզիցիոն) վիճակից ստանալ խճճված վիճակ, ինչով էլ կարևորվում է այս գեյթի դերը քվանտամեխանիկական հաշվարկներում: CNOT գեյթի պայմանական նշանը բերված է Նկ. 33.1-ում: Վերին հորիզոնական գիծը ներկայացնում է առաջին, իսկ

ստորին հորիզոնական գիծը՝ երկրորդ քուբիթը: Ուղղաձիգ միացնող հատվածը ներկայացնում է բուն գործառույթը:



Նկ. 33.1

Վերին հոծացված շրջանը նշանակում է, որ առաջին քուբիթը չի փոխվում, սակայն ստուգվում է նրա բովանդակությունը, որպեսզի ըստ դրա որոշվի երկրորդ քուբիթի վրա կատարվելիք ազդեցությունը: Նկարում վերջինս պատկերված է դատարկ և ավելի խոշոր շրջանի տեսքով: Եթե առաջին քուբիթը $|0\rangle$ -ն է, ապա երկրորդ քուբիթը թողնվում է նույնը, իսկ եթե $|1\rangle$ -ն է, ապա երկրորդ քուբիթը փոխարինվում է հակառակով:

Նկատենք, որ մուտքային երկու քուբիթների բազիսային լինելու դեպքում այն դասական CNOT գեյթն է: Նկարում բերված օրինակում մուտքային առաջին քուբիթը

$$|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

սուպերպոզիցիոն վիճակն է, իսկ երկրորդը՝ $|0\rangle$ -ն: Դա նշանակում է, որ երկքուբիթ համակարգի մուտքային (սկզբնական) վիճակը կարելի է գրել

$$|\Psi^{in}\rangle = |\psi_0\rangle|0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle \quad (33.1)$$

տեսքով: CNOT գործընթացի արդյունքում ելքային երկքուբիթի համար կունենանք

$$|\Psi^{out}\rangle = \hat{U}_{CNOT} |\Psi^{in}\rangle = \alpha \hat{U}_{CNOT} |00\rangle + \beta \hat{U}_{CNOT} |10\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle, \quad (33.2)$$

որն ի տարբերություն (33.1)-ի, խճճված վիճակ է: Այն երբեմն անվանում են նաև եբիթ (ebit) վիճակ:

Քվանտային համակարգը խտության մատրիցայի միջոցով քննարկելիս մաքուր վիճակի համապատասխան խտության մատրիցան լինում է

$$\hat{\rho}^{out} = |\Psi^{out}\rangle\langle\Psi^{out}|:$$

Ունենալով նրա արտահայտությունն ըստ (33.2) բանաձևի՝ հաշվենք կրճատված խտության մատրիցաները: Առաջին ելքային քուբիթի համար՝

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1^{out} = {}_2\langle 0|\hat{\rho}^{out}|0\rangle_2 + {}_2\langle 1|\hat{\rho}^{out}|1\rangle_2 = {}_2\langle 0|(\alpha|0\rangle_1|0\rangle_2 + \beta|1\rangle_1|1\rangle_2)(\alpha {}_2\langle 0|_1\langle 0| + \beta {}_2\langle 1|_1\langle 1|)|0\rangle_2 + \\ + {}_2\langle 1|(\alpha|0\rangle_1|0\rangle_2 + \beta|1\rangle_1|1\rangle_2)(\alpha {}_2\langle 0|_1\langle 0| + \beta {}_2\langle 1|_1\langle 1|)|1\rangle_2 = \alpha^2|0\rangle_1\langle 0| + \beta^2|1\rangle_1\langle 1|\end{aligned}$$

Երկրորդ ելքային քուբիթի համար նման գործողություններով ստանում ենք

$$\hat{\rho}_2^{out} = {}_1\langle 0|\hat{\rho}^{out}|0\rangle_1 + {}_1\langle 1|\hat{\rho}^{out}|1\rangle_1 = \alpha^2|0\rangle_2\langle 0| + \beta^2|1\rangle_2\langle 1|:$$

Ինչպես և պետք էր սպասել, գեյթի երկու ելքերում ստացվել են նույն վիճակները:

Հետաքրքրություն ներկայացնող հաջորդ հարցն է, թե որքանով են ելքային վիճակները տարբերվում մուտքային $|\psi_0\rangle$ - քուբիթից, այսինքն՝ թե որքան է արտապատկերման ճշտությունը կամ վստահելիությունը: Համեմատելու համար հիմք կարող է ծառայել նմանության F չափը, վերասահմանված ելքային $\hat{\rho}_1^{out}$ -ի՝ կրճատված խտության մատրիցայի համար.

$$F = \langle\psi_0|\hat{\rho}_1^{out}|\psi_0\rangle = (\alpha\langle 0| + \beta\langle 1|)(\alpha^2|0\rangle\langle 0| + \beta^2|1\rangle\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha^4 + \beta^4:$$

Վերջին արտահայտությունը ցույց է տալիս, որ քլոնի վստահելիությունը կախված է նախնականի մուտքային վիճակից, այսինքն՝ այս քլոնավորման հաստոցն ունի վերսալ չէ: Այն չի կարող միևնույն ճշտությամբ քլոնավորել կամայական, նա-

խապես անհայտ վիճակներ: Ըստ Բրիլի սֆերայի՝ միջօրեական «հետազոծով» միջինի համար ստանում ենք

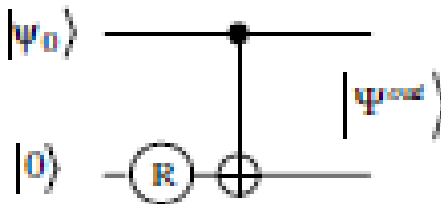
$$\bar{F} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) d\theta = \frac{3}{4} :$$

§ 34. Երկօպերացիոն քլոնավորման հաստոց

Կարելի է CNOT օպերացիային ավելացնել ևս մեկ օպերացիա՝ խնդիր դնելով ավելացնել քլոնավորման հուսալիությունը: Քննարկվելիք քլոնավորման հաստոցում «լրացուցիչ» օպերացիան գործում է երկրորդ քուբիթի վրա և նախորդում է CNOT-ին: Այս երկօպերացիոն քլոնավորման հաստոցի սխեմատիկ պատկերը տրված է Նկ. 34.1-ում: $\hat{R}$ օպերատորը, ազդելով մուտքային $|0\rangle$ վիճակի վրա, ձևափոխում է այն սուպերպոզիցիոնի՝

$$|\psi_R\rangle = \hat{R}(\phi) = \cos \phi |0\rangle + \sin \phi |1\rangle :$$

CNOT գործառույթ մուտք է գործում $|\Psi^{in}\rangle = |\psi_0\rangle |\psi_R\rangle \equiv |\psi_0 \psi_R\rangle$ նոր վիճակ, հաստոցի ելքում տալով $|\Psi^{out}\rangle = \hat{U}_{CNOT} |\Psi^{in}\rangle$ ալիքային վեկտորը:



Նկ. 34.1. Երկօպերացիոն քվանտային քլոնավորման հաստոց:

Առաջին քուբիթի կարճեցված խտության մատրիցայի համար կունենանք՝

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1^{out} &= {}_2\langle 0|\hat{\rho}^{out}|0\rangle_2 + {}_2\langle 1|\hat{\rho}^{out}|1\rangle_2 = {}_2\langle 0|\Psi^{out}\rangle\langle\Psi^{out}||0\rangle_2 + {}_2\langle 1|\Psi^{out}\rangle\langle\Psi^{out}||1\rangle_2 \\ &= {}_2\langle 0|(\alpha\cos\phi|0\rangle_1|0\rangle_2 + \alpha\sin\phi|0\rangle_1|1\rangle_2 + \beta\cos\phi|1\rangle_1|1\rangle_2 + \beta\sin\phi|1\rangle_1|0\rangle_2) \\ &\quad \times (\alpha\cos\phi{}_1\langle 0|{}_2\langle 0| + \alpha\sin\phi{}_1\langle 0|{}_2\langle 1| + \beta\cos\phi{}_1\langle 1|{}_2\langle 1| + \beta\sin\phi{}_1\langle 1|{}_2\langle 0|)|0\rangle_2 \\ &\quad + {}_2\langle 1|(\alpha\cos\phi|0\rangle_1|0\rangle_2 + \alpha\sin\phi|0\rangle_1|1\rangle_2 + \beta\cos\phi|1\rangle_1|1\rangle_2 + \beta\sin\phi|1\rangle_1|0\rangle_2) \times \\ &\quad (\alpha\cos\phi{}_1\langle 0|{}_2\langle 0| + \alpha\sin\phi{}_1\langle 0|{}_2\langle 1| + \beta\cos\phi{}_1\langle 1|{}_2\langle 1| + \beta\sin\phi{}_1\langle 1|{}_2\langle 0|)|1\rangle_2; \\ &= \alpha^2|0\rangle_1{}_1\langle 0| + \beta^2|1\rangle_1{}_1\langle 1| + 2\alpha\beta\cos\phi\sin\phi(|0\rangle_1{}_1\langle 1| + |1\rangle_1{}_1\langle 0|)\end{aligned}$$

Նմանատիպ գործողությունները երկրորդ քուբիթի կարճեցված խտության մատրիցայի համար հանգեցնում են՝

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_2^{out} &= (\alpha^2\cos^2\phi + \beta^2\sin^2\phi)|0\rangle_2{}_2\langle 0| \\ &\quad + \cos\phi\sin\phi(|0\rangle_2{}_2\langle 1| + |1\rangle_2{}_2\langle 0|) + (\alpha^2\sin^2\phi + \beta^2\cos^2\phi)|1\rangle_2{}_2\langle 1|:\end{aligned}$$

Նկատենք, որ այս երկօպերացիոն ՔՔՀ-ում կարճեցված ելքային խտության մատրիցաները ֆունկցիոնալ նույն տեսքը չունեն:

$|\psi_0\rangle$ վիճակի քլոնավորման F_1 ճշտությունը լինում է

$$\begin{aligned}F_1 &= \langle\psi_0|\hat{\rho}_1^{out}|\psi_0\rangle = (\alpha\langle 0| + \beta\langle 1|)\left[\alpha^2|0\rangle\langle 0| + \beta^2|1\rangle\langle 1| + 2\alpha\beta\cos\phi\sin\phi(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)\right], \\ &\quad \times (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2\sin 2\phi\end{aligned}$$

իսկ միջինի համար ստանում ենք

$$\bar{F}_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin 2\phi:$$

Քանի որ քննարկվող գործընթացում առաջին և երկրորդ քուբիթերում կարճեցված խտության մատրիցաների տեսքերն իրարից տարբեր են, ապա հետաքրքրություն կարող է ներկայացնել նաև թե երկրորդ քուբիթում ստացվող վիճակն իր տեսքով որքանով է նման $|\psi_0\rangle$ վիճակին: Դրա համար հարկ է

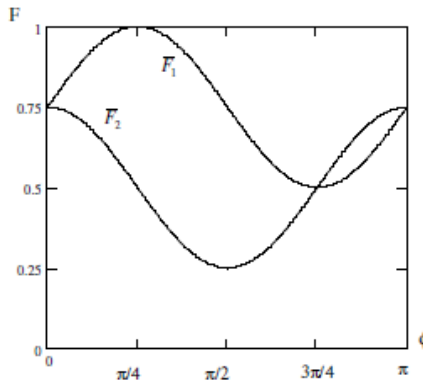
հաշվել $F_2 = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_2^{out} | \psi_0 \rangle$ միջինը, ենթադրելով, որ $|\psi_0\rangle$ -ն ևս վերաբերում է երկրորդ քուբիթին: Պարզ հաշվարկներից հետո ստանում ենք

$$F_2 = \frac{1}{2} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2} \cos 2\phi + \alpha\beta \sin 2\phi:$$

Բլոխի սֆերայի վրայով միջինացումից հետո նմանակման չափը դառնում է

$$\bar{F}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2\phi:$$

Ինչպես տեսնում ենք, երկրորդ քուբիթի վրա նախնական ձևափոխության օգտագործումն արդարացնում է իրեն: Դա երևում է միջինների արտահայտությունից. $\sin 2\phi > 0$ բոլոր արժեքների համար քլոնավորման $\bar{F}_1$ ճշտությունն ավելի բարձր է, քան առանց նախնական ձևափոխությանը: Ճիշտ է, այդ դեպքում մյուս քուբիթում քլոնավորման $\bar{F}_2$ ճշտությունն ընկնում է, սակայն դա արդեն կարևոր չէ:



Նկ. 34.2

Քլոնավորումների առավել մանրամասն վարքերը՝ $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ -ը որպես φ, ϕ անկյունային պարամետրերի ֆունկցիա, պատկերված են Նկ. 34.2-ում: Ավելացնենք նաև, որ դիտելով φ -ն և ϕ -ն պատահական մեծություններ հավասար հավանական բաշխված $[0, 2\pi]$ միջակայքում, կունենանք $\bar{F}_1$ -ը և $\bar{F}_2$ -ը որպես դետերմինիստիկ ֆունկցիաներ այդ պատահական մեծություններից և կարելի է բոլոր ստանդարտ ստատիստիկական բնութագրիչները հաշվել քլոնավորման այդ հավաստիությունների հիման վրա: Դիսպերսիան, օրինակ, որոշվում է $\overline{F^2} - \bar{F}^2$ տարբերությամբ, իսկ առաջին և երկրորդ քուրիթերի ելքերի միջև կորելյացիան՝ $(\overline{F_1 F_2} - \bar{F}_1 \bar{F}_2) / \sqrt{\overline{F_1^2} - \bar{F}_1^2} \sqrt{\overline{F_2^2} - \bar{F}_2^2}$ հարաբերությամբ:

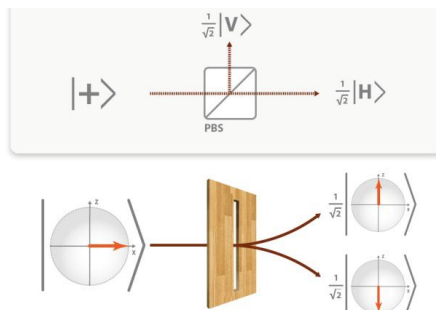
§ 35. Քուրիթի ֆիզիկական իրականացումները

Քուրիթն աբստրակտ օբյեկտ է և մինչ այժմ շեշտադրումը վերաբերում էր նրա քվանտամեխանիկական էությանը: Քուրիթի համար գոյություն ունեն մեծ թվով իրականացումներ, որոնցից մի քանիսը կքննարկենք քիչ ներքևում: Քուրիթերն իրականացվել են լաբորատոր պայմաններում, տարբեր ֆիզիկական համակարգերում, դրանով իսկ փորձնականորեն հիմնավորելով դրանց «տարօրինակ» քվանտային հատկությունները: Որոշներն այդ համակարգերից ցուցաբերում են բարձր վերահսկվելիություն, երբ վիճակները, գործողությունները և չափումները կարող են կատարվել համարյա միավոր հավաստիությամբ:

• **Ֆոտոնի բևեռացումը:** Քյուբիթի իրականացման հնարավորություններից մեկը առանձին ֆոտոններն են, որտեղ կարող է օգտագործվել բևեռացման ազատության աստիճանը: $|0\rangle = |H\rangle$ վիճակը տրվում է ֆոտոնի հորիզոնական բևեռացմամբ, իսկ $|1\rangle = |V\rangle$ վիճակը տրվում է ուղղաձիգ բևեռացմամբ:

$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ սուպերպոզիցիոն վիճակը համապատասխանում է 45° բևեռացմանը: Ֆոտոնային վիճակի փոփոխումները ստացվում են ալիքային թիթեղների (λ -թիթեղների) միջոցով, որոնք բերում են բևեռացման (ալիքի էլեկտրական դաշտի E լարվածության վեկտորի) պտույտի: Չափումը կարող է կատարվել բևեռացված փնջի ճեղքիչի միջոցով, որտեղ հորիզոնական բաղադրիչն անցնում է, իսկ ուղղաձիգ բաղադրիչն անդրադառնում-թեքվում է 90° -ով (տես Նկ. 35.1-ը): Ճեղքիչի երկու ելքերում տեղադրված միաֆոտոն դետեկտորների միջոցով տարբերակում է մտցվում $|V\rangle$ և $|H\rangle$ երկու վիճակների միջև:

Այլ բազիսում չափում կատարելու համար կարելի է նախապես համապատասխան անկյունով պտտել լույսի բևեռացումը ալիքային թիթեղի միջոցով:



Նկ. 35.1

Եթե փնջի բևեռացման ճեղքիչով անցնում է $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ բևեռացված մեկ ֆոտոն, ապա դետեկտորներից միայն մեկը կչխկացնի և կգրանցի ֆոտոն: Ֆոտոնը $1/2$ հավանականությամբ կգրանցվի առաջին դետեկտորում ճեղքիչից անցնելուց հետո և նույնպիսի $1/2$ հավանականությամբ երկրորդ դետեկտորում՝ ճեղքիչից անդրադառնելուց հետո: Նկատենք, որ միայն չափման պրոցեսն է (այսինքն՝ դետեկտորը) քայքայում սուպերպոզիցիոն վիճակը: Սուպերպոզիցիան չի քայքայվում բևեռացման ճեղքիչով անցնելով: Այստեղ ֆոտոնի ալիքային ֆունկցիան ընդամենը բաժանվում է տարածապես տարբերակված մասերի:

Առանձին ֆոտոններով փորձերը շատ մեծ առաջընթաց են ապրել: Առանձին ֆոտոնների գեներացիան, դեկավարումը և հաղորդումը կարող են կատարվել բարձր ճշգրտությամբ՝ դրանով ցուցադրելով առկա քվանտամեխանիկական յուրահատկությունները: Առանձին ֆոտոնների դետեկտորները ևս զգալիորեն կատարելագործվել են վերջին տարիներին, սակայն մեկից փոքր էֆեկտիվությունից հետևող դատարկ տեղերի առկայությունը գրանցումներում դեռևս ստեղծում են պրոբլեմներ որոշակի բնույթի փորձերում, ինչպիսին է Բեյլի անհավասարությունների անառարկելի հաստատումը: Ֆոտոնների միջոցով քուբիթերի իրականացումը քվանտային տեղեկատվության (հաղորդակցությունում) և քվանտային կրիպտոգրաֆիայում (ծածկագրությունում) խաղում է կարևոր դեր, որովհետև լավագույնս հարմարեցված են օպտիկական մանրաթելերով և անգամ ազատ տարածությունով քվանտային ինֆորմացիայի տեղափոխման - անցկացման պայմաններին: Քվանտային հաղորդակցության կամ քվանտային խճճվածու-

թյան հաստատման էքսպերիմենտալ իրականացումներ արդեն կան ավելի քան 100 կմ հեռավորության վրա: Առաջարկություններ են մշակվում դրանք արբանյակային բաց տարածություն դուրս բերելու համար:

• **Մասնիկի սպինը:** Այս դեպքում քյուբիթը կապվում է $1/2$ սպինի հետ, որտեղ $|0\rangle = |\uparrow\rangle$ -ը և $|1\rangle = |\downarrow\rangle$ -ը նշանակում են սպինի երկու բազիսային վիճակները, օրինենտացված ընտրված z առանցքի դրական և բացասական ուղղություններով:

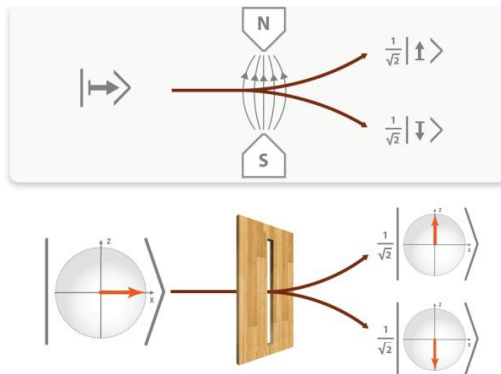
Սպինի վիճակը կարելի է փոխել՝ կիրառելով արտաքին համասեռ մագնիսական դաշտ: Սպինը (կամ նրա հետ կապված մագնիսական մոմենտը) պրեցեսիա է կատարում մագնիսական դաշտի առանցքի շուրջ լարմորյան հաճախությամբ (§ 19): Պտույտի անկյունը կարելի է ղեկավարել՝ փոխելով դաշտի ազդեցության ժամանակը, իսկ չափումը կարելի է կատարել Շտերն-Գերլախի սարքի միջոցով (Նկ. 35.2): Մասնիկներն անցնում են անհամասեռ մագնիսական դաշտով ինչը բերում է տարածական դիսկրետ շեղման՝ կախված մասնիկի սպինի օրինենտացիայից: Դաշտի անհամասեռությունը նրա համար է, որ սպինը պրեցեսիայի հետ միասին նաև օրինենտացվի դաշտի ուղղությամբ: Փորձնականորեն շեղումները ստացվում են միայն դիսկրետ, քանի որ սպինը և նրա պրոյեկցիաները կարող են ընդունել միայն դիսկրետ արժեքներ: Արժաթի ատոմների վրա կատարված փորձի միջոցով են Շտերնը և Գերլախը հայտնաբերել սպինի քվանտացումը:



Օտտո Շտերն (1888-1969)



Վալտեր Գերլախ
(1889-1979)



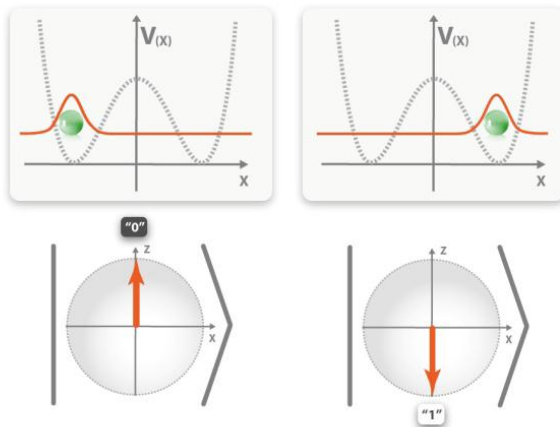
Նկ. 35.2

Քվանտացման առանցքի ուղղությունը (բազիսը) որոշվում է անհամասեռ մագնիսական դաշտի ուղղությամբ: Մայինի վիճակը, օրինատացիան և չափման գործառույթը կարող են պարզորոշ լուսաբանվել Բլոխի սֆերայի պատկերացմամբ:

Մայինը կրող էլեկտրոնները հաճախ կիսահաղորդչային քվանտային կետերի էլեկտրոններն են: Այս տեխնոլոգիայով ձեռք բերված քյուբիթային որակական չափանիշներն առայժմ ցածր են ատոմների և իոնների դեպքերի հետ համեմատած: Միջուկային սպինների դեպքում կոհերենտության ժամանակները շատ երկար են և դրանց կիրառելիության հնարավորու-

թյունների հետազոտությունները հետևողականորեն շարունակվում են: Առայժմ դրանք օգտագործվում են քվանտային ինֆորմացիայի միայն պահպանման համար:

• **Ատոմի տարածական դիրքը:** Քյուբիթի իրականացման մեկ այլ հնարավորություն հիմնված է տարածական ազատության աստիճանի օգտագործման վրա, որտեղ հնարավոր են լինում միայն երկու՝ x_0 և x_1 , տարածական դիրքեր: Դասականորեն կարելի էր պատկերացնել գնդիկ, որը կարող է գտնվել միայն վերևի կամ ներքևի դարակում: Նմանապես, եթե ատոմը գտնվում է x_0 կետում, այն համապատասխանում է $|0\rangle$ վիճակին, իսկ եթե գտնվում է x_1 կետում, ապա համապատասխանում է $|1\rangle$ վիճակին, ինչպես պատկերված է Նկ. 35.3-ում:

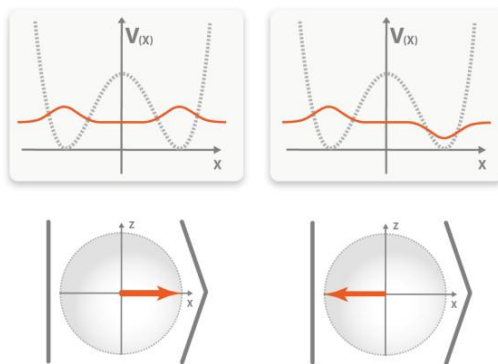


Նկ. 35.3

Նորությունն այստեղ ատոմի սուպերպոզիցիոն վիճակներն են, հատկապես կոնտրինտուիտիվ և դժվար գուգորդվող մեր ամենօրյա դասական փորձառության հետ: Դասական մեխանիկայում ժամանակի յուրաքանչյուր պահի մասնիկը կա-

բող է լինել միայն մեկ դիրքում և ոչ երկուսում միաժամանակ: Չնայած դրան, միկրոաշխարհում այդպիսի սուպերպոզիցիոն վիճակներ հնարավոր է նախապատրաստել, երբ ատոմը գերված է թունելացվող պոտենցիալային արգելքով բաժանված կրկնակի հորերի պոտենցիալում (Նկ. 35.4):

Միջնորմ պոտենցիալ արգելքի փոփոխման միջոցով կարելի է դեկավարել կոհերենտ թունելացման պրոցեսը, դրանով իսկ՝ դեկավարել ատոմի քվանտային վիճակը: z -ի չափումը համապատասխանում է դիրքի որոշմանը, այսինքն՝ ստուգելուն, թե պոտենցիալային հորերից որում է մասնիկը լոկալիզացված: Այս իրավիճակում քվանտային սուպերպոզիցիայի տարօրինակ հատկությունն ի հայտ է գալիս նրանում, որ կոնկրետացված չէ որտեղ է մասնիկը մինչև չափումը: Միայն չափումն է իրականացնում այդ կոնկրետացումը:



Նկ. 35.4

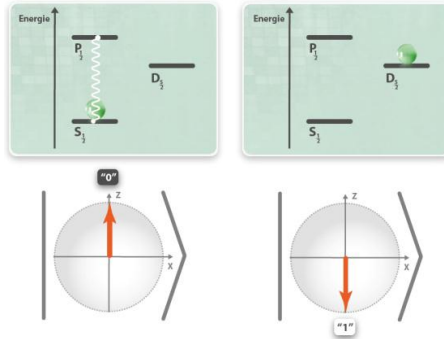
Այս նույն սուպերպոզիցիայի սկզբունքն է ընկած նաև հանրահայտ «Շրեդինգերի կատու» քվանտամեխանիկական պարադոքսի հիմքում:

Մակրոսկոպիկ մարմինների համար այդպիսի սուպերպոզիցիոն վիճակների նախապատրաստումը ծանր խնդիր է և

դժվար է պահպանել, սակայն, քվանտային մեխանիկայի սկզբունքների համաձայն, այն հնարավոր է: Մասնավորապես, դիտված է մեծ մոլեկուլների ցրման ինտերֆերենցիոն պատկերը:

• **Իոնի կամ ատոմի էլեկտրոնային ազատության աստիճանը:** Քուլիթի իրականացման մեկ այլ հնարավորություն հենված է առանձին ատոմների կամ իոնների ներքին երկու էլեկտրոնային վիճակների վրա: Մնացած բոլոր ազատության աստիճանները սառեցված են կամ արհամարհվում են: Օրինակ՝ ատոմի համընթաց շարժումը ճնշվում է լազերային սառեցման մեթոդներով մինչև հիմնական էներգետիկ մակարդակ:

Քվանտային վիճակներն այստեղ դեկավարվում են որոշակի հաճախության և տևողության լազերային իմպուլսների միջոցով, իսկ չափումն իրականացվում է լրացուցիչ մետաստաբիլ էներգետիկ մակարդակի ներառման միջոցով: Լազերային իմպուլսը կապում է ներքին $|0\rangle$ վիճակը լրացուցիչ մակարդակի հետ՝ դրանով գրգռելով ատոմը (կամ իոնը): Լրացուցիչ մակարդակը տրոհվում է ետ, դեպի $|0\rangle$ մակարդակ, ինչի արդյունքում ճառագայթվում է ֆոտոն, որն էլ հաջորդ քայլում գրանցվում է: Ֆոտոնի գրանցումը համապատասխանում է $+1$ արդյունքի և ատոմը (իոնը) մնում է $|0\rangle$ վիճակում: Չափման -1 արդյունք լինում է, եթե ֆոտոն չի գրանցվում՝ թողնելով ատոմը (իոնը) $|1\rangle$ վիճակում: Գրանցման բարձր էֆեկտիվության հասնելու համար լույսը ցրվում է այս օպտիկական անցման վրա, մինչև որ գրանցվում են մի քանի ֆոտոններ (Նկ. 35.5):



Նկ. 35.5

Մեթոդում վիճակները հնարավոր է վերահսկել և ղեկավարել 99.9 % վստահելիությամբ: Չափումները ևս կարող են իրականացվել նման ճշգրտությամբ: Փաստորեն՝ սառն ատոմները և իոնները խոստումնալից հենք են քվանտային ինֆորմացիայի գործառնությունների իրականացման համար: Ներկայումս մինչև մի քանի տասնյակ իոնների համակարգում փորձնականորեն ստեղծվել են խճված վիճակներ, իսկ գերված ատոմներով օպտիկական պարբերական պոտենցիալները բարենպաստ են երկարաժամկետ կոհերենտություն ունենալուն:

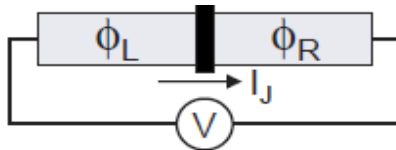
• **Գերհաղորդիչ քուբիթ*:** Գերհաղորդիչ քուբիթները խոստումնալից թեկնածուներ են քվանտային հաշվումների և համակարգիչների իրականացման համար: Նրանք ցուցաբերում են երկար, նանովայրկյանների կարգի կոհերենտության ժամանակներ և բարձր կայունություն: Առավել կարևոր առանձնահատկություններից մեկը, այնուամենայնիվ, որով գերհաղորդիչ քուբիթները տարբերվում են մյուսներից, նրանց չափերի քվադր-մակրոսկոպիկությունն է ու պատրաստման համեմատաբար հեշտությունը: Նրանց չափերը հասնում են միկրոմետրերի և կարող են պատրաստվել էլեկտրոնային լի-

տողրաֆիայի սարքերով, որոնք օգտագործման լավ փորձառություն ունեն ժամանակակից միկրոէլեկտրոնիկայում:

Գերհաղորդիչ քյուբիթները կարող են գործել մի քանի լիցքային, հոսքային և ֆազային ռեժիմներում: Մենք կձանոթանանք միայն առաջինին: Դրանք գործում են Ջոզեֆսոնյան անցման վրա, որում հաստատուն լարում կիրառելիս առաջանում են էլեկտրական հոսանքի տատանումներ, և ուրեմն դրանք կարող են նպատակային դեկավարվել լարման աղբյուրներով, ապահովելով էլեմենտի համար քյուբիթային բովանդակություն:

Էլեմենտի աշխատանքի հիմքում ընկած Ջոզեֆսոնյան անցումն առաջանում է, երբ երկու գերաղորդիչ էլեկտրոդներ բաժանված են լինում մեկուսիչի այնքան բարակ (մի քանի անգստրեմ) շերտով, որ էլեկտրոնները կարող են քվանտայնորեն թունելանալ պոտենցիալային արգելք հանդիսացող այդ մեկուսիչ շերտի միջով: Հասկանալու համար թե ինչ ասել է այս էլեմենտի (Նկ. 35.6) գործողություն, գրենք Շրեդինգերի հավասարումը էլեկտրոնների գերհաղորդիչ վիճակի ψ_1 և ψ_2 ալիքային ֆունկցիաների համար՝ նկատի ունենալով համակարգում քվանտային թունելացման առկայությունը՝

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = E_1 \psi_1 + K \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = E_2 \psi_2 + K \psi_1:$$



Նկ. 35.6

Այստեղ E_1 , E_2 -ը երկու էներգետիկ մակարդակներն են, K -ն՝ երկու վիճակների միջև կապի գործակիցը:



Լեոն Կուպերը կնոջ՝ Քեյ Ալարդի
հետ (1972 թ.)

Գերհաղորդիչ վիճակում էլեկտրոնները հանդես են գալիս կուպերյան զույգերով և համակարգի ալիքային ֆունկցիաները հարմար է լինում արտահայտել էլեկտրոնների կուպերյան զույգերի n_1 , n_2 կոնցենտրացիաների և ֆազային գործակիցների միջոցով, այն է՝

$$\psi_1 = \sqrt{n_1} \exp(i\varphi_1), \quad \psi_2 = \sqrt{n_2} \exp(i\varphi_2):$$

Պարզության համար կենթադրենք նույնական գերհաղորդիչների դեպքը՝ $n_{10} = n_{20} \equiv n_0$: $2e$ լիցքով կուպերյան զույգի E_1 և E_2 էներգիաները մեկուսիշ շերտի երկու կողմերում տարբերվում են կիրառված U_0 պոտենցիալների տարբերությամբ.

$$E_2 = E_1 - 2eU_0:$$

Արդյունքում հավասարումները պարզեցվում են հետևյալ մոտավոր տեսքի՝

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= \frac{2K}{\hbar} n_0 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{dn_2}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\varphi_2 - \varphi_1) &= -\frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1) = \frac{2eU_0}{\hbar}: \end{aligned}$$

Երկրորդ հավասարման ինտեգրումը տալիս է տատանումների Ջոզեֆսոնի հաճախությունը՝

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2eU_0}{\hbar} \cdot t + \varphi_0 = 2\pi f_J \cdot t + \varphi_0 :$$

Կոնտակտի միջով տատանողական հոսանքը համեմատական է $\dot{n}_1$ ածանցյալին.



Բրայան Ջոզեֆսոն
(ծնվ. 1940 թ.)

$$I(t) = I_0 \sin\left(\frac{2eU_0}{\hbar}t + \varphi_0\right):$$

Գերհաղորդիչ հոսանք անցում հնարավոր է նաև զրոյական լարման դեպքում, ընդ որում՝ այն հաստատուն է՝

$$I(t) = I_0 \sin\varphi_0,$$

որն ընկած է $-I_0$ -ից I_0 ինտերվալում: φ_0 -ի կոնկրետ արժեքը կախված է գերհաղորդիչ վիճակների նա-

խապատրաստման ընթացքից:

Խստիվ քվանտամեխանիկական մոտեցման դեպքում n_1 և n_2 -ը հարկ է մեկնաբանել ոչ որպես կոնցենտրացիաներ, այլ հավանականություններ: Համակարգն այս դեպքում անալոգ է քիչ վերնում քննարկված կրկնակի պոտենցիալային հորին, ընդ որում՝ $\psi_1 = |0\rangle$ քյուբիթային բազիսային վիճակին համապատասխանում է կուպերային գույգի բացակայությունը գերհաղորդիչ շղթայում, $|1\rangle$ -ին՝ նրա ներկայությունը:

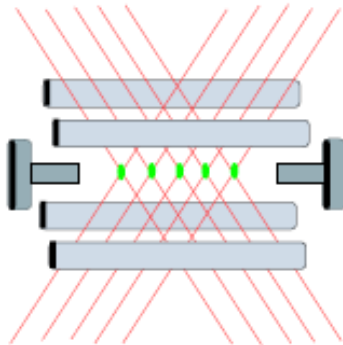
§ 36. Իոն-թակարդային քվանտային համակարգիչ

Որպես քվանտային գործառույթների իրականացման ֆիզիկական համակարգ դիտարկենք իոնային թակարդը: Քվանտային քյուբիթն այստեղ իոնն է, որը լազերային սառեցման մեթոդով բերվում է թակարդի պոտենցիալի հիմնական էներգետիկ մակարդակ, իսկ քվանտային ռեգիստր կազմում է այդ-



Իսադոր Ռաբի (1898-1988)

պիսի իոնների գծային շարքը (Նկ. 36.1): Գործողություններն իրականացվում են լազերային Ռաբի-իմպուլսներով, իսկ ինֆորմացիայի անցումն իրականացվում է իոնների միջև կուլոնյան փոխազդեցությամբ և կոլեկտիվ տատանումների ֆոնոնների փոխանակմամբ:



Նկ. 36.1: Իոնների գերման ռադիո-հաճախային գծային թակարդի երկրաչափությունը: Լազերային ճառագայթները հասցեագրվում են 4 գծային ձողերից և 2 թասակներից կազմված սխեմայի կենտրոնում պահվող իոնների թելիկին:

Իոն-թակարդային առաջարկությունն ունի մի շարք պատեհ կողմեր. այն օգտագործում է քվանտային վիճակներ, որոնք փոխառնված են լավ մշակված և բարձր լուծելիության տեխնիկայից, ունի գրգռված մակարդակների մարման և տաքացմամբ պայմանավորված դեկոհերենսության փոքր արագություններ, ինֆորմացիան համակարգում վերականգնելու բարձր էֆեկտիվության փորձարարական մեթոդներ:

• **Փորձարարական սխեման:** Օգտագործվող ռադիո-հաճախային թակարդում իոնների գերման տիրույթը մի քանի տասնյակ միկրոմետր է: Գերումը ձեռք է բերվում երկու թասակներին տրվող էլեկտրաստատիկ պոտենցիալի միջոցով, իսկ ռադիալ գերումն իրականացվում է գծային 4 ձողերին տրվող ռադիո-հաճախային պոտենցիալի միջոցով (Փոլի թակարդ): Ձողերի երկարությունները մոտ 1 սմ են, իրարից հեռավորությունները՝ 1-2 սմ:



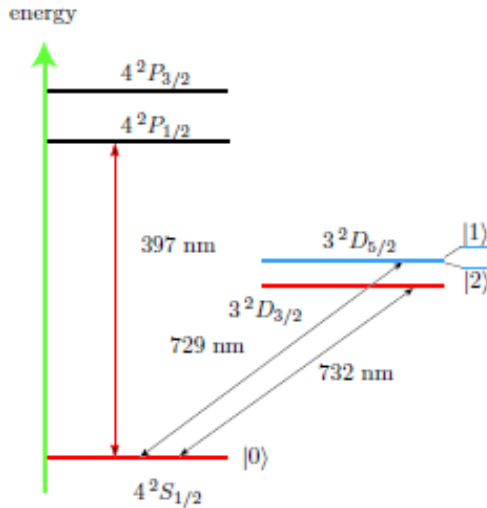
Վլադիմիր Փոլ
(1913-1993)

Ընտրված երկրաչափությունը թույլ է տալիս համեմատաբար հեշտորեն լազերային ճառագայթների օգնությամբ դիմելու իոններից յուրաքանչյուրին առանձին-առանձին կամ խմբերով: Իոնները գտնվում են իրարից այնպիսի հեռավորությունների վրա, ուր միջիոնային վանդակաձև ուժերը համակշռվում են թակարդի պոտենցիալի գերող ուժերով: Փոփոխելով դրանք՝ կարելի է դեկավարել իոնների միջև եղած հեռավորությունը և քվանտային ինֆորմացիա փոխանցել մեկից մյուսը:

Քվանտային քուրիթերի և քվանտային գեյթերի իրականացման համար առաջարկվել են մի շարք իոններ և իրականացվել են բազմաթիվ փոխազդեցության սխեմաներ: Նկ. 36.2-ում պատկերված է, օրինակ, Ca^+ իոնի դեպքը՝ քուրիթային գործողություններին առնչվող էներգետիկ մակարդակներով: Քուրիթային $|0\rangle, |1\rangle$ և չափման պրոցեսին օժանդակող $|2\rangle$ վիճակներն են՝

$$|0\rangle = \left| 4^2S_{1/2}, M_J = \frac{1}{2} \right\rangle, |1\rangle = \left| 3^2D_{5/2}, M_J = \frac{3}{2} \right\rangle, |2\rangle = \left| 3^2S_{1/2}, M_J = -\frac{1}{2} \right\rangle:$$

$4^2S_{1/2}, M_J = 1/2$ էներգետիկ մակարդակը հիմնականն է, իսկ $3^2D_{5/2}, M_J = 3/2$ -ը կյանքի երկար տևողությամբ (1.06 վրկ) մետաստաբիլ մակարդակ է:



Նկ. 36.2

Էլեկտրական դիպոլային $4^2S_{1/2} - 4^2P_{1/2}$ անցումը (397 նմ ալիքի երկարության վրա) և էլեկտրական կվադրուպոլային $4^2S_{1/2} - 3^2D_{3/2}$ անցումը (732 նմ ալիքի երկարության վրա) հարմար են համապատասխանաբար լազերային դոպլերյան սառեցման (Doppler cooling) և ստոքսյան սառեցման (sideband cooling) պրոցեսների համար: Դոպլերյան սառեցումն իջեցնում է իոնների ջերմաստիճանը մինչև մի քանի միլիկելվին: Իսկ հետագա սառեցման համար ընտրված Ստոքսյան մեխանիզմն իջեցնում է այն մինչև մի քանի միկրոկելվին ջերմաստիճան, որի դեպքում ֆոնոններն արդեն իոնների համալարգում բացակայում են:

Քուբիթերի միջև փոխազդեցությունն իրականացվում է՝ օգտագործելով երկու տեսակ ազատության աստիճաններ՝ ներքին (իոնների էլեկտրոնային վիճակները) և արտաքին (իոնների կոլեկտիվ գրգռումների տատանողական վիճակները): Այսպիսով, ինֆորմացիոն գործառնությունների ակտիվ վիճակը էլեկտրոնային և աքսիալ պոտենցիալի քվանտային օսցիլյատորի վիճակների արտադրյալն է, այն է՝

$$|\psi\rangle = |x\rangle|\alpha\rangle, \quad x = 0, 1: \quad \alpha = g, e,$$

որտեղ $|x\rangle$ -ը վերաբերում է էլեկտրոնային մակարդակներին, իսկ $|g\rangle$ -ն և $|e\rangle$ -ն նշանակում են տատանողական շարժման համապատասխանաբար հիմնական և առաջին գրգռված վիճակները: $|g\rangle$ վիճակում ֆոնոնները բացակայում են, իսկ $|e\rangle$ -ում առկա է մեկ ֆոնոն:

• **Լազերային իմպուլսներ:** *Վիճակների* այսպիսի կառուցվածքի պայմաններում քվանտային տրամաբանական գործողություններ ստանալու նպատակով իոնների վրա կա-

րելի է կիրառել երկու տեսակ լազերային Ռաբի-իմպուլսներ, որոնք քննարկվող պայմաններում կոչվում են V և U իմպուլսներ:

V իմպուլս: Այս իմպուլսն իրականացնում է միաքյուրիթ գործողություններ: Դրա հաճախությունը համալարվում է քյուրիթի վիճակների միջև օպտիկական անցման հաճախությանը: Այն փոխանակում է էլեկտրոնային $|0\rangle$ և $|1\rangle$ վիճակները և թողնում է տատանողական մոդը հիմնական $|g\rangle$ վիճակում: Այս իմպուլսի ունիտար օպերատորն է՝

$$V(\theta, \phi) := \exp(-itH_V / \hbar),$$

որտեղ՝

$$H_V = \frac{1}{2} \hbar \Omega [|1\rangle\langle 0| \exp(-i\phi) + |0\rangle\langle 1| \exp(i\phi)]$$

օպերատորը փոխազդեցության համիլտոնյանն է, իսկ $\theta = \Omega t$, ուր Ω -ն Ռաբիի հաճախությունն է: $V(\theta, \phi)$ էվոլյուցիոն օպերատորի ազդեցությունը բազիսային վիճակների վրա հետևյալն է՝

$$V(\theta, \phi): \begin{cases} |0\rangle \mapsto \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle - i \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\phi) |1\rangle, \\ |1\rangle \mapsto \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle - i \sin \frac{\theta}{2} \exp(i\phi) |0\rangle. \end{cases} \quad (36.1)$$

U իմպուլս: Այս իմպուլսն օգտագործվում է երկքյուրիթ գործողություններ իրականացնելու համար: Լազերի հաճախությունն այս դեպքում հարմարեցվում է ինդուկցելու միաժամանակ և՛ էլեկտրոնային, և՛ տատանողական անցումներ: Ցանկալի տրամաբանական գեյթերի իրականացմանն օգնելու

համար սխեմայում առկա է նաև $|2\rangle$ օժանդակ վիճակը (տե՛ս Նկ. 36.2-ը): Այս դեպքում

$$U_{\hat{x}}(k, \phi) := \exp(-it H_U(\hat{x})/\hbar)$$

օպերատորի փոխազդեցության Համիլտոնյանն ունի հետևյալ տեսքը,

$$H_U(\hat{x}) := \frac{1}{2} \hbar \eta \Omega [\exp(-i\phi) |\hat{x}\rangle \langle 0| a + \exp(i\phi) |0\rangle \langle \hat{x}| a^+],$$

որտեղ $\hat{x} = 1, 2$, $k = \eta \Omega t$: η -ն իոնային ռեզիստրի հիմնական տատանողական վիճակում օսցիլյացիաների լայնության և լազերային ալիքի $\lambda_L / 2\pi$ կարճեցված երկարության հարաբերությունն է. $\eta = (\hbar / 2NM_{ion}\omega_z)^{1/2} (2\pi / \lambda_L)$, որտեղ N -ը իոնների թիվն է ռեզիստրում և ω_z -ը՝ ռեզիստրի ծանրության կենտրոնի տատանումների հաճախությունը: Անհրաժեշտ $\eta \ll 1$ պայմանը, որպես կանոն, բավականին լավ բավարարվում է գերսառեցված իոնային թակարդներում: a -ն ու a^+ -ը ֆոնոնի ծնման և չնչացման օպերատորներն են, որոնք համապատասխանաբար բավարարում են՝

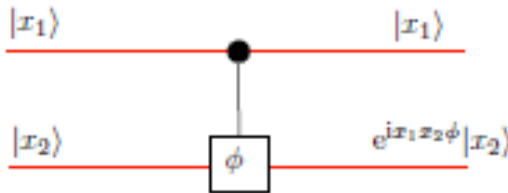
$$a^+ |g\rangle = |e\rangle, a |e\rangle = |g\rangle, [a, a^+] = 1$$

առնչություններին: U -իմպուլսը գործում է հետևյալ օրինաչափությամբ.

$$U_{\hat{x}}(k, \phi) : \begin{cases} |0\rangle |g\rangle \mapsto |0\rangle |g\rangle, \\ |0\rangle |e\rangle \mapsto \cos \frac{k}{2} |0\rangle |e\rangle - i \exp(-i\phi) \sin \frac{k}{2} |\hat{x}\rangle |g\rangle, \\ |\hat{x}\rangle |g\rangle \mapsto \cos \frac{k}{2} |\hat{x}\rangle |g\rangle - i \exp(i\phi) \sin \frac{k}{2} |0\rangle |e\rangle: \end{cases} \quad (36.2)$$

§ 37. Տրամաբանական գեյթերի կառուցումը

Ղեկավարելով V և U լագերային իմպուլսների տևողությունը՝ (36.1) և (36.2) գործառույթներով հնարավոր է լինում նման սպինային քյուբիթերի դեպքին, իրականացնել տրամաբանական գործողություններ: Գեղեցիկը իոն-թակարդային քվանտային համակարգչի դեպքում այն է, որ երբ պրոցեսում ներգրաված են լինում նաև ֆոնոններ, ապա նույն Ռաբի իմպուլսները կարող են առաջացնել պայմանական տրամաբանություն: Այդպիսի օրինակ է երկքյուբիթ CNOT կարևոր գեյթը: Դրա իրականացման համար հարկ է լինում նախ կառուցել *վերահսկվող փուլային (controlled-phase)* գեյթ $\phi = \pi$ փուլային արժեքի դեպքում, որի պայմանական նշանը բերված է Նկ. 37.1-ում:



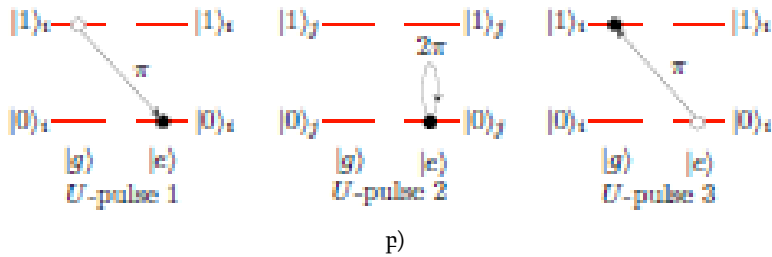
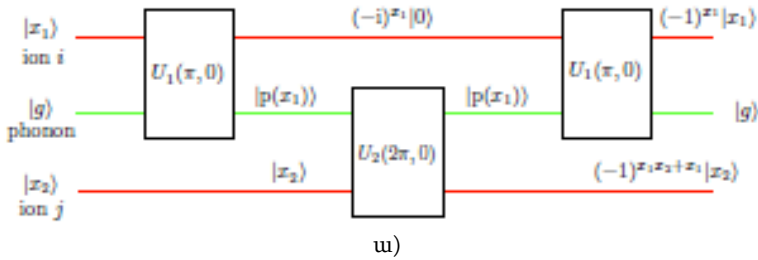
Նկ. 37.1

$$U_{CPh(\phi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i x_1 x_2 \phi} \end{pmatrix},$$

Այս գեյթն իրականացվում է իոնների թելիկի i -րդ և j -րդ քյուբիթերի նկատմամբ հետևյալ կերպ.

$$U_{CPh}^{(i,j)}(\pi) = U_1^{(i)}(\pi, 0) U_2^{(j)}(2\pi, 0) U_1^{(i)}(\pi, 0):$$

U - իմպուլսային գործողությունների հաջորդականությունը պատկերված է Նկ. 37.2-ում:



Նկ. 37.2

ա) CPHASE գեյթի քվանտային գործողությունների շղթան իոն-թակարդային քվանտային համակարգչում: $|p(x_1)\rangle$ -ով նշանակված են ֆոնոնի $p(0) = g$ և $p(1) = e$ վիճակները: Քննարկվող $\phi = \pi$ դեպքում

վերջնական ընդհանուր փուլը հավասար է $(-1)^{x_1 x_2}$:

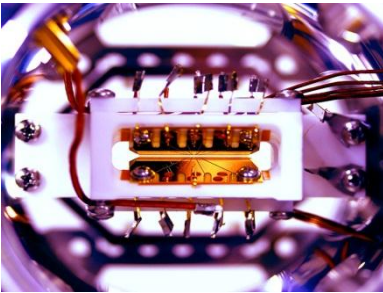
բ) U իմպուլսների հաջորդականության ազդեցության տակ տեղի ունեցող վիճակների էվոլյուցիան:

Ֆազային գեյթի միջոցով CNOT-ը կառուցելու համար հարկ է լինում դիմել V -իմպուլսների օգնությանը, այն է՝

$$U_{CNOT}^{(i,j)} = V^{(j)} \left(\frac{1}{2} \pi, \frac{1}{2} \pi \right) U_{CPh}^{(i,j)} (\pi) V^{(j)} \left(\frac{1}{2} \pi, \frac{1}{2} \pi \right)$$

սխեմային, որտեղ V -իմպուլսները համապատասխանում են Հադամարդի գեյթերին:

Քվանտային գործողությունների ավարտին հարկ է, իհարկե, կարդալ ելքային արդյունքը: Այն կատարվում է՝ չափելով քվանտային ռեգիստրում յուրաքանչյուր քյուբիթի վիճակը, օգտագործելով դրա համար քվանտային թռիչքների տեխնիկան: Օրինակ՝ Ca^+ քյուբիթի դեպքում լազերային ճառագայթի հաճախությունը համալարվում է 397 նմ անցման ալիքի երկարության $4^2S_{1/2} \leftrightarrow 4^2P_{1/2}$ օպտիկական անցման վրա (տե՛ս Նկ. 36.2): Իոնի համար հնարավորությունները երկուսն են: 1) եթե իոնը ճառագայթում է (ֆլուորեսցենցիա է առաջացնում), ապա դա նշանակում է, որ վիճակը եղել է $|0\rangle$ -ն, 2), իսկ եթե իոնը չի ճառագայթում (մնում է մութ), ապա այն եղել է $|1\rangle$ վիճակում: Հետևաբար միայն դիտելով, թե որ իոնն է ֆլուորեսցենտում, և որը՝ մնում մութ, կարող ենք վերականգնել ռեգիստրի բիթային արժեքները: Իրականում պետք է նկատի ունենալ նաև էներգետիկ սպեկտրում «ոչ աշխատանքային» $3^2D_{3/2}$ մետաստաբիլ էներգետիկ մակարդակի գոյությունը (Նկ. 36.2), ինչը կարող է լազերային ճառագայթի ինդուկցած $4^2P_{1/2} \rightarrow 3^2D_{3/2}$ անցումից հետո բնակեցվել ի հաշիվ $4^2P_{1/2} \rightarrow 3^2D_{3/2}$ օպտիկական անցման: Այն կանխելու համար անհրաժեշտ է լինում կիրառել բնակեցվածությունն այդ մակարդակից արտամղող լազերային նոր ճառագայթ:



Հինգ իոններից բաղկացած
իոն-թակարդային
համակարգչի ռեգիստրի
ֆոտոպատկերը

Համակարգչային գնահատական: Անխուսափելի փորձարարական սխալները հաշվողական սահմանափակումներ են դնում իոն-թակարդային քվանտային համակարգիչների վրա: Սահմանափակումների աղբյուրներն են մետաստաբիլ վիճակի տրոհումը, լազերի փուլային դեկոհերենսությունը, իոնի տաքացումը և այլն:

Էվոլյուցիայում դեկոհերենսության ի հայտ գալուն նախորդող լազերային իմպուլսների N_U թվի համար ստացվել է

$$N_U L^{1.84} < \frac{2Z(\tau/1s)}{A^{1/2} F^{3/2} (\lambda/1m)^{3/2}}$$

գնահատականը, որտեղ Z -ը իոնի իոնիզացման աստիճանն է, τ -ն՝ մետաստաբիլ վիճակի կյանքի տևողությունը, L -ը իոնների թիվն է, A -ն՝ դրանց ատոմական զանգվածը, F -ը լազերի ֆոկուսացման ընդունակության պարամետրն է, և λ -ն՝ լազերի ալիքի երկարությունը: Այս պայմանը, կախված իոնի A և τ պարամետրերից, դարձնում է իոնների որոշ տեսակներ ավելի նպատակահարմար, քան մյուսները: Ելնելով բանաձևից՝ կարելի է, որպես օրինակ, գնահատել իոնների թիվը, ինչն անհրաժեշտ է 438 բիթանոց թիվը ըստ Շորի ալգորիթմի ֆակտորիզացնելու համար՝ օգտագործելով դրա համար իտերբիում (որի $4f^{14}6s^2S_{1/2} \leftrightarrow 4f^{13}6s^2F_{1/2}$ 467 նմ ալիքի երկարության օպտիկական անցումն ունի շատ երկար, 1533 օր, կյանքի տևողություն): Այսպիսի իրականացումը կպահանջեր

մոտ 2200 գերված իոններ և $4.5 \cdot 10^{10}$ լազերային իմպուլսներ՝ մոտ 100 ժամ աշխատանքային ժամանակով:

Տեխնիկայի ներկա պայմաններում մի քանի տասնյակ քյուբիթ պարունակող առաջարկները համարվում են լավը և մասշտաբային աճի բարդությունների հաղթահարման խնդիրը հիմնականն է տեսանելի ապագայում դեպի պրակտիկ աշխատանքի քվանտային համակարգիչների զարգացման ճանապարհին:

§ 38. Քվանտային զուգահեռականություն

Դասական համակարգչում ձևափոխության գործողությունն ազդում է մուտքային ռեգիստրի երկուական կոդավորված թվերից յուրաքանչյուրի վրա առանձին: Քվանտային համակարգչում վիճակն այլ է: Ազդդեցությունը մուտքային ռեգիստրի սուպերպոզիցիոն վիճակի քուբիթերի, օրինակ՝ թակարդված իոնների գծային շարքի վրա տեղի է ունենում միաժամանակ: Այս էֆեկտը կոչվում է քվանտային զուգահեռականություն (quantum parallelism): Այսինքն՝ քվանտային ալգորիթմների մեծ մասը հետաքրքրություն ներկայացնող ֆունկցիայի հաշվարկը սկսում է բոլոր արժեքների սուպերպոզիցիայի վրա գործողությունից: Օրինակ՝ $N = 3$ քյուբիթների դեպքում բոլոր հնարավոր վիճակները պարունակող ալիքային ֆունկցիան է՝

$$\Psi = A|000\rangle + B|001\rangle + C|010\rangle + D|011\rangle + E|100\rangle + F|101\rangle + G|110\rangle + H|111\rangle:$$

Քվանտային հաշվարկային ձևափոխությունը ներկայա-
նում է $\hat{U}$ քվանտային օպերատորի միջոցով, որը տալիս է $\Psi' = \hat{U} \Psi$ նոր ալիքային ֆունկցիա, ինչը կարող է ներկայաց-

վել որպես մուտքային բոլոր վիճակների միաժամանակյա ձևափոխությունների սուպերպոզիցիա.

$$\Psi' = A\hat{U}|000\rangle + B\hat{U}|001\rangle + \dots + H\hat{U}|111\rangle:$$

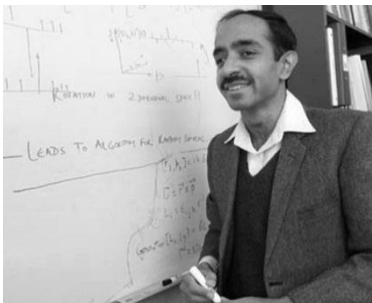
Մուտքային վիճակների կոմբինացիաների թիվը, կախված ռեգիստրում քյուբիթերի թվից, աճում է ցուցչային օրենքով: Օրինակ՝ 100 քյուբիթերի ռեգիստրի դեպքում դա նշանակում է $2^{100} \approx 10^{30}$ մուտքային վիճակների զուգահեռ (միաժամանակյա) ձևափոխություն: Աստղաբաշխական թիվ: Բայց սա ինքնին շատ էլ օգտակար չէ և ավելին չէ, քան դասական քառսայնացումը, քանի որ ելքային սուպերպոզիցիայի պարզ անմիջական դիտումը տալու է *մեկ պատահական* պատասխան, և մնացած ամբողջ ինֆորմացիան կորչելու է: Դասականից լավ արդյունք ստանալու համար քվանտային զուգահեռականությունը կարիք ունի կոմբինացվելու ինտերֆերենցիայի երևույթի և խճճվածության հետ՝ հնարավոր ելքերի բաշխումը խնդրի փնտրվող լուծման շուրջ կենտրոնացնելու համար: Մենք դա կտեսնենք Գրովերի ալգորիթմի հակիրճ շարադրանքում, իսկ ավելի ընդարձակ ներկայացում կարելի է գտնել մասնագիտական գրականությունում:

§ 39. Գրովերի ալգորիթմը. Ընդհանուր նկարագրություն

Գրովերի ալգորիթմը լուծում է համակարգվածությունից գուրկ որոնման խնդիրը: Նրանում տրված է N տարրերից բաղկացած բազմություն՝ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, և բուլյան $\{0,1\}$ բազիսային ֆունկցիան: Նպատակն է այդ բազմությունից գտնել այնպիսի x^* տարր, որը բավարարում է նախապես հայտնի որոշ պայամանների: Օրինակ՝ ձեռքի տակ ունենալով

N անունների տվյալների բազա՝ կարող էք գտնել, թե որտեղ է Ձեր անունը տեղակայված այդ բազայում: Որոնումը ոչ կարգավորված է, քանի առկա չեն երաշխիքային տվյալներ բազայի կարգավորման վերաբերյալ:

Տեսակավորված տվյալների բազայի դեպքում տարրի փնտրման ժամանակը՝ կախված տարրերի թվից, կտրվեր լոգարիթմական օրենքով այն դեպքում, երբ ոչ համակարգվածի դեպքում այն աճում է շատ ավելի արագ՝ զծային օրենքով: Համաձայն Գրովերի՝ ոչ համակարգված որոնման խնդիրը քվանտային ալգորիթմը կարող է լուծել $O(\sqrt{N})$ հարցումների և $O(\sqrt{N} \log N)$ գեյթերի օգտագործման միջոցով: Այն հաստա-



Լով Գրովար Գրովեր
(ծնվ. 1961 թ.)

տուն գործակցի ճշտությամբ լավագույնն է, ինչ կարելի է անել քվանտային հաշվարկային մոդելի սահմաններում:

Կատարենք մի քանի պարզեցումներ և որոշ պարզաբանումներ. առաջին՝ փնտրվող x^* , տարրը միակն է, երկրորդ՝ տվյալների բազայի չափը երկուսի աստիճան է՝ $N = 2^n$: Դրանք

իրականում էական սահմանափակումներ չեն և ցանկության դեպքում միշտ կարող են հաղթահարվել: Մյուսը, որ տվյալների համարակալումը 1-ից N -ի փոխարեն կատարվում է n -բիթանոց բուլյան $\{0,1\}^n$ լարերի միջոցով:

Գրովերի ալգորիթմը հենվում է վիճակների սուպերպոզիցիայի (վերադրման) վրա: Ինչպես շատ քվանտային ալգո-

րիթմներ, այն սկսում է նրանից, որ մեքենան դնում է n -քյու-
 բիթ ռեգիստրի բոլոր հնարավոր 2^n վիճակների հավասար
 սուպերպոզիցիայում: Հիշեք, որ սա նշանակում է $1/\sqrt{2^n}$ -ի
 հավասար ամպլիտուդ՝ կապված համակարգում քյուբիթերի
 յուրաքանչյուր հնարավոր կոնֆիգուրացիայի հետ, և համա-
 պատասխանաբար $1/2^n$ -ի հավասար հավանականություն
 համակարգին լինելու 2^n թվով վիճակներից ցանկացածում:
 Այս բոլոր հնարավոր վիճակները համապատասխանում են
 Գրովերի տվյալների բազայում բոլոր հնարավոր գրառումնե-
 րին, հետևաբար սկսած որոնման տարածքի յուրաքանչյուր
 տարրին տրված հավասար ամպլիտուդից՝ յուրաքանչյուր
 տարր կարելի է դիտարկել անմիջապես քվանտային սուպեր-
 պոզիցիայում, իսկ դրանց ամպլիտուդները կարող են ձևափո-
 խությունների ենթարկվել այնտեղից, որպեսզի տվյալների բա-
 զայում ճիշտ գրառում ստանաք մինչև $2/3$ հավանականու-
 թյամբ:

Վիճակների սուպերպոզիցիային զուգահեռ, Գրովերի ալ-
 գորիթմը, ավելի լայն իմաստով, այսպես կոչված, ամպլիտու-
 դային ուժեղացում օգտագործող քվանտային ալգորիթմների
 ընտանիքը օգտագործում է քվանտային ամպլիտուդների
 հատկությունները՝ տարբերակելով ամպլիտուդները պարզ
 հավանականություններից: Այս ալգորիթմների բանալին
 քվանտային համակարգի որոշակի պայմանի բավարարող
 մեկ վիճակի փուլի ընտրողական տեղաշարժն է բազ-
 մակրկնության (խտերացիայի) յուրաքանչյուր քայլում: π փու-
 լային շեղման կատարումը համարժեք է այս վիճակի ամպլի-
 տուդի բազմապատկմանը -1 -ով. այս վիճակի ամպլիտուդը
 փոխվում է, բայց վիճակում գտնվելու հավանականությունը

մնում է նույնը: Համակարգում կատարվող հետագա վերափոխումներն օգտագործում են ամպլիտուդային այս տարբերությունը, որպեսզի առանձնացնեն փոփոխվող փուլով վիճակը և, ի վերջո, մեծացնեն այդ վիճակում համակարգի գտնվելու հավանականությունը: Գործողությունների նման հաջորդականությունը կլինե՞ր անհնար, եթե ամպլիտուդները չպարունակեին այս լրացուցիչ տեղեկատվությունը վիճակի փուլի վերաբերյալ՝ ի լրումն հավանականության: Ամպլիտուդային ուժեղացման ալգորիթմներն ամպլիտուդների այս որակի շնորհիվ եզակի առանձնաշնորհ են քվանտային հաշվարկների համար:

• **Ալգորիթմի աշխատանքը:** Ալգորիթմի սկզբում ռեգիստրի բոլոր n քյուբիթերը տեղակայված են $|0\rangle$ վիճակում.

$$|0\rangle^{\otimes n} \equiv |0\rangle:$$

Առաջին քայլում համակարգը դրվում է վիճակների հավասար սուպերպոզիցիայում, ինչը ձեռք է բերվում բոլոր n քյուբիթերի վրա Հադամարդի $U_H^{\otimes n}$ ձևափոխության կիրառմամբ,

$$|\Psi\rangle = \hat{U}_H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} \equiv \hat{U}_H |0\rangle_1 \hat{U}_H |0\rangle_2 \cdots \hat{U}_H |0\rangle_n, \quad (39.1)$$

ինչի համար պահանջվում են $O \log N = O \log 2^n = O n$

թվով գործողություններ: Հադամարդի միաքյուբիթ $\hat{U}_H$ գեյթի բացահայտ տեսքը մատրիցական ներկայացմամբ բերված է § 29-ում: Այստեղ հարմար է ներկայացնել այն բրա-քետ դիրակյան տեսքով՝

$$\hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|):$$

Հաշվենք նրա ազդեցությունը որևէ մեկ քյուբիթի $|0\rangle$ վիճակի վրա, նկատի ունենալով վիճակների օրթոնորմավորվածության $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ և $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ պայմանները.

$$\hat{U}_H|0\rangle_j = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \big|_j |0\rangle_j = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_j + |1\rangle_j : (39.2)$$

Տեղադրման արդյունքում $|\Psi\rangle$ վիճակը կներկայացվի 2^n թվով իրարից տարբեր և բոլոր հնարավոր կոմբինացիաները ներառող վիճակների հավասար սուպերպոզիցիոն տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրը, ինչպես նշվել էր վերևում, համարակալում ենք x դիսկրետ փոփոխականով, ինչն ընդունում է 0 -ից մինչև $2^n - 1$ արժեքներ: Առաջին քայլից հետո ռեգիստրի վիճակն ստանում է

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \quad (39.3)$$

արտահայտությունը:

Փոխակերպումների հաջորդ շարքը հաճախ կոչվում է Գրովերի իտերացիա և կատարում է նախկինում նշված ամպլիտուդային իտերացիան, որը կազմում է ալգորիթմի հիմնական մասը: Գրովերը ցույց է տվել, որ օպտիմալ հավանականության հասնելու համար, որ ի վերջո դիտվող վիճակը լինի ճիշտ՝ բավարարող նախապես տրված առանձնահատկություններին, հարկ է, որ վիճակի փուլի ընդհանուր պտույտը լինի $\pi/4$: Այն տեղի է ունենում միջինում $(\pi/4)\sqrt{2^n}$ իտերացիաներից հետո:

Գրովերի յուրաքանչյուր մեկ իտերացիայի առաջին քայլը դիմումն է քվանտային $\mathcal{S}$ կռահմանը, ինչը փոխում է համակարգը՝ կախված այն բանից, գտնվում է արդյոք համակարգը

այն կոնֆիգուրացիայում, որը մենք փնտրում ենք: Քվանտային Ω գործողությունն ընդունենք որպես «սև արկղ», որը կարող է դիտարկել և փոխել համակարգն առանց այն տանելու դասական վիճակի, որը ճանաչում է, թե արդյոք համակարգը գտնվում է ճիշտ (ընդհանուր դեպքում դեռ միջանկյալ) վիճակում: Եթե համակարգն իսկապես լինի է ճիշտ վիճակում, ապա Ω գործողությունը կպտտի փուլը π ռադիանով: Հակառակ դեպքում այն ոչինչ չի անի՝ իր ներդրումը բերելով հետագա ձևափոխությունների և հաջորդական գործողությունների միջոցով ճիշտ վիճակը գտնելուն: Կռահման այս գործողությունը (39.3) արտահայտության յուրաքանչյուր $|x\rangle$ վիճակի համար կարող է պարզապես գրվել

$$|x\rangle \xrightarrow{\Omega} -1^{f(x)} |x\rangle,$$

որտեղ $f(x) = 1$, եթե $|x\rangle$ -ը կոռեկտ վիճակ է, և $f(x) = 0$ հակառակ դեպքում: $f(x)$ ֆունկցիայի ճշգրիտ իրականացումը կախված է կոնկրետ որոնման խնդրից:

Իտերացիայի հաջորդ մասն ընդունված է անվանել դիֆուզիայի ձևափոխություն, որն իրականացնում է միջինի նկատմամբ ինվերսիա, այսինքն՝ յուրաքանչյուր վիճակի ամպլիտուդ ձևափոխում է այնպես, որ այն միջինից ավել դառնա ճիշտ այնքան, որքան այն միջինից պակաս էր մինչև ձևափոխությունը և հակառակը: Դիֆուզիայի այս ձևափոխությունը կազմված է Հադամարդի $U_H^{\otimes n}$ ձևափոխությունից, որին հետևում է փուլի պայմանական շեղումը, որը յուրաքանչյուր վիճակ, բացի $|0\rangle$ -ից, բազմապատկում է -1-ով, ինչին հետևում է ևս մեկ Հադամարդի ձևափոխություն: Պայմանական փուլային

շեղումը կարող է ներկայացվել $2|0\rangle\langle 0| - I$ ունիտար օպերատորով.

$$2|0\rangle\langle 0| - I |0\rangle = 2|0\rangle\langle 0||0\rangle - I|0\rangle = |0\rangle, \quad (39.4a)$$

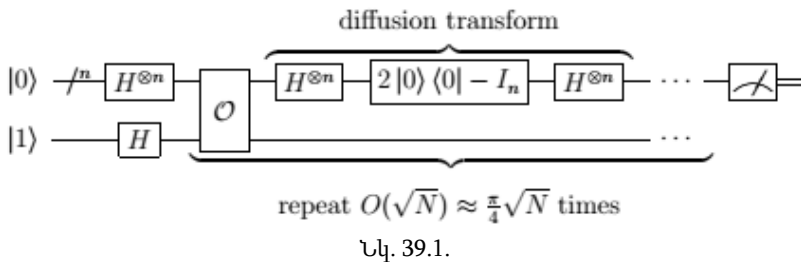
$$2|0\rangle\langle 0| - I |x\rangle = 2|0\rangle\langle 0||x\rangle - I|x\rangle = -|x\rangle: \quad (39.4b)$$

Տանք դիֆուզիոն լրիվ ձևափոխությունը՝ օգտագործելով $|\Psi\rangle$ նշանակումը (39.1) հավասարությունից՝

$$U_H^{\otimes n} 2|0\rangle\langle 0| - I U_H^{\otimes n} = 2U_H^{\otimes n} |0\rangle\langle 0| U_H^{\otimes n} - I = 2|\Psi\rangle\langle \Psi| - I,$$

և Գրովերի մեկ ամբողջական իտերացիան՝

$$2|\Psi\rangle\langle \Psi| - I \hat{O}:$$



Նկարում բերված է Գրովերի ալգորիթմի սկզբունքային սխեման: Ընթացքը գնում է ձախից աջ, իսկ թեք գծիկը մատնանշում է քյուբիթների քանակը: Ալգորիթմի բավարար թվով կրկնումներից հետո կատարվում է արդյունքի որոշման դասական չափում, ինչը ճիշտ արդյունք է $O(1)$ հավանականությամբ՝ ամփոփելով ալգորիթմի իրականացումը:

Ամբողջական ալգորիթմը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ընդհանրացված հաջորդականությամբ՝

1. $|0\rangle^{\otimes n}$ սկզբնական վիճակը,

$$2. \hat{U}_H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle = |\Psi\rangle \text{ կիրառել Հադամարդի}$$

ձևափոխությունը բոլոր քյուբիթերի նկատմամբ,

$$3. 2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I^R |\Psi\rangle \approx |x_0\rangle \text{ կիրառել } \text{Գրովերի իտերա-}$$

ցիան $R \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{2^n}$ անգամ,

4. x_0 չափել ռեգիստրը:

§ 40. Երեք քյուբիթերի ռեգիստրի օրինակը Գրովերի ալգորիթմում

Դիտարկենք $N = 8 = 2^3$ վիճակներից բաղկացած համա-
կարգ և փնտրվող x_0 վիճակը ներկայացվում է քվանտային բի-
թերի 011 տողով: Համակարգը նկարագրելու համար պա-
հանջվում են $n = 3$ քյուբիթեր: Ընդհանուր վիճակը կլինի՝

$$|x\rangle = \alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle + \alpha_2|010\rangle + \alpha_3|011\rangle + \alpha_4|100\rangle + \alpha_5|101\rangle + \alpha_6|110\rangle + \alpha_7|111\rangle,$$

որտեղ α_i -ն $|i\rangle$ վիճակի հավանականային ամպլիտուդն է:
Գրովերի ալգորիթմը սկսվում է համակարգի

$$1|000\rangle \equiv 1|0\rangle|0\rangle|0\rangle \quad (40.1)$$

վիճակին բերմամբ: Ապա նրա նկատմամբ կիրառվում է Հա-
դամարդի ձևափոխությունը, ինչը, համաձայն (39.2)-ի, (40.1)-ի
յուրաքանչյուր $|0\rangle$ վիճակ վեր է ածում հավասար ամպլի-
տուդներով $|0\rangle$ և $|1\rangle$ վիճակների սուպերպոզիցիայի, այն է՝

$$\begin{aligned}\hat{U}_H^3|000\rangle &\equiv \hat{U}_H|0\rangle_1 \hat{U}_H|0\rangle_2 \hat{U}_H|0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + |1\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + |1\rangle_2 \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + |1\rangle_3 \quad (40.2) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|001\rangle + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2}}|111\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{x=0}^7 |x\rangle = |\Psi\rangle\end{aligned}$$

Վիճակի ամպլիտուդների երկրաչափական մեկնաբանությունն օգտակար ուղի է՝ տեսանելի դարձնելու համար, թե ինչպես է ալգորիթմն աշխատում: Քանի որ ամպլիտուդները Գրովերի ալգորիթմի ամբողջ իրականացման ընթացքում մնում են իրական, դրանք կարող են գրվել որևէ առանցքի ուղղահայաց գծիկներով, որոնց երկարությունները համեմատական են դրանցով ներկայացվող ամպլիտուդներին: Հադամարդի առաջին ձևափոխությունից հետո վերևում ստացված հավասար ամպլիտուդներով վիճակը հետևյալն է՝

$$\begin{array}{c} \overline{\text{-----}} \quad \alpha_\psi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ |000\rangle |001\rangle |010\rangle |011\rangle |100\rangle |101\rangle |110\rangle |111\rangle \end{array}$$

Այժմ խնդրի լուծում ստանալու համար հարկ է $R \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{2^3} \approx 2$ անգամ կատարել Գրովերի իտերացիա: Յուրաքանչյուր իտերացիայի առաջին քայլը կոահում կոչվող $\hat{O}$ օպերացիան է, որին հաջորդում է միջինի նկատմամբ ինվերսիան, կամ որ նույնն է՝ դիֆուզիայի ձևափոխությունը: $\hat{O}$ օպերացիան բացասականացնում է $|x_0\rangle$ վիճակի ամպլիտուդը $|011\rangle$ դեպքում՝ տալով

$$|x\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|010\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2}}|111\rangle \quad (40.3)$$

կոնֆիգուրացիան և

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \alpha_\psi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
 \text{---} \alpha_{|011\rangle} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\
 |000\rangle \quad |001\rangle \quad |010\rangle \quad |011\rangle \quad |100\rangle \quad |101\rangle \quad |110\rangle \quad |111\rangle
 \end{array}$$

երկրաչափական ներկայացումը: Հաջորդը կատարենք $2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I$ դիֆուզիայի ձևափոխությունը, ինչը մեծացնելու է ընտրված վիճակի ամպլիտուդը միջինի նկատմամբ եղած տարբերությամբ.

$$\begin{aligned}
 2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I \quad |x\rangle &= 2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I \left(|\Psi\rangle - 2\frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle \right) \\
 &= 2|\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle - |\Psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{2}}|\Psi\rangle\langle\Psi|011\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle
 \end{aligned}$$

Արտահայտությունը բացելու համար օգտվենք (40.2)-ի ներքևի տողում գրված $|\Psi\rangle$ -ի տեսքից,

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 8\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}} = 1, \quad \langle\Psi|011\rangle = \langle 011|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

ապա տեղադրենք սրանք վերևում՝

$$= 2|\Psi\rangle - |\Psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}|\Psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle = \frac{1}{2}|\Psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle$$

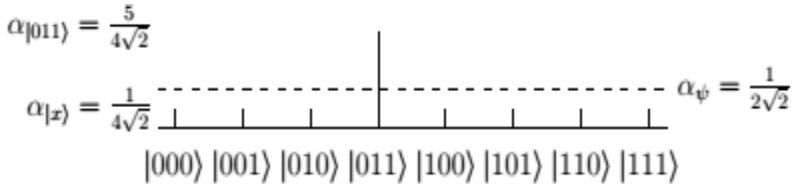
և ապա՝ $|\Psi\rangle$ -ի բացահայտ տեսքը՝

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{x=0}^7 |x\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} |011\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^7 |x\rangle + \frac{5}{4\sqrt{2}} |011\rangle :$$

Այսպիսով, (40.2)-ի փոխարեն կունենանք

$$|x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|010\rangle + \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle + \dots + \frac{1}{4\sqrt{2}}|111\rangle \quad (40.4)$$

արտահայտությունը: Ինչպես տեսնում ենք, փնտրվող վիճակի ամպլիտուդը մեծացել է, մյուսներինը՝ հավասարապես նվազել: Երկրաչափորեն արդյունքը ներկայանում է



տեսքով, ինչով էլ ավարտվում է առաջին խտրացիան:

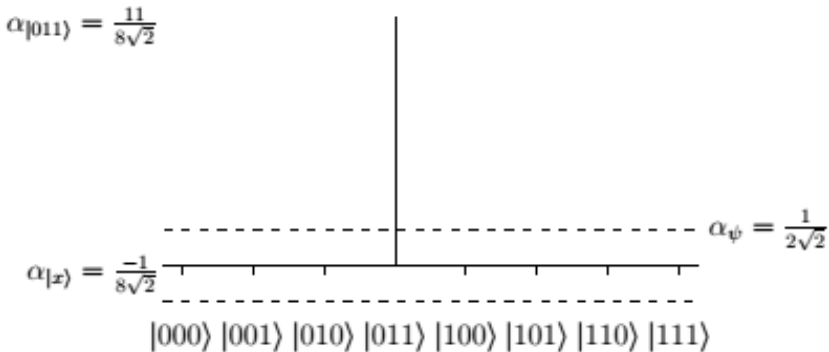
Նույն երկու ձևափոխությունները՝ $\hat{O}$ կռահման և $2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I$ դիֆուզիայի, կիրառվում են ևս մեկ անգամ՝ տալով

$$\begin{aligned}
 |x\rangle &= \frac{1}{4\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|010\rangle - \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle + \dots + \frac{1}{4\sqrt{2}}|111\rangle \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^7 |x\rangle - \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^7 |x\rangle - \frac{6}{4\sqrt{2}}|011\rangle = \frac{1}{2}|\Psi\rangle - \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle
 \end{aligned}$$

արտահայտությունը կռահումից հետո և

$$\begin{aligned}
 2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I \left(\frac{1}{2}|\Psi\rangle - \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle \right) &= |\Psi\rangle - \frac{1}{2}|\Psi\rangle - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}}|\Psi\rangle + \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^7 |x\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle \right) + \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^7 |x\rangle + \frac{11}{8\sqrt{2}}|011\rangle
 \end{aligned}$$

դիֆուզային ձևափոխությունից հետո: Երկրաչափորեն այն ներկայանում է



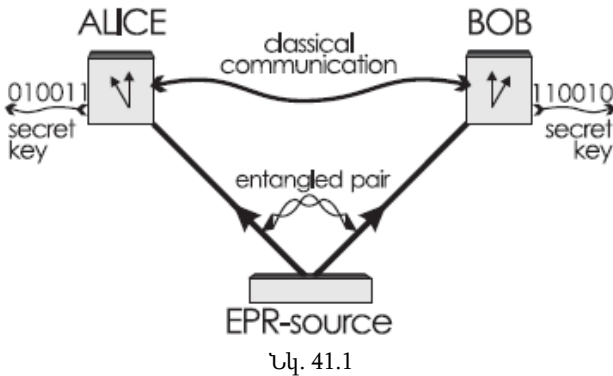
տեսքով, ինչն ակնհայտորեն ցուցադրում է ալգորիթմի հաջողությունը:

§ 41. Քվանտային կրիպտոգրաֆիա (ծածկագրություն)

Կրիպտոգրաֆիայի հիմնարար խնդիրներից մեկը հնարավորությունն է հաղորդակցող կողմերից մեկին (անվանենք Ալիս) հաղորդագրություն ուղարկելու կողմերից մյուսին (անվանենք Բոբ), հանրային կանալի միջոցով այնպես, որ մի երրորդ կողմ (անվանենք Իվ, eavesdropper — գաղտնալսող բառից), ի վիճակի չլինի ստանալու որևէ տեղեկություն հաղորդագրության բովանդակության վերաբերյալ կանալի գաղտնալսման կամ ճյուղավորման ճանապարհով:

Գաղտնալսման հարձակումներից պաշտպանվելու համար անհրաժեշտ է, որ հաղորդագրության կոդավորման և ապակոդավորման բանալին լինի կատարելապես պատահական, և որ առավել կարևոր է, հայտնի լինի միայն Բոբին և Ալիսին: Բայց ինչպե՞ս կարող են նրանք վստահ լինել, որ բանալին բաշխված է միայն երկուսի միջև, և ոչ մի երրորդ անձ չգիտի այն: Քվանտային կրիպտոգրաֆիան տալիս է միջոց այդ խնդիրը լուծելու:

Քննարկենք առաջինը՝ ինչպես է քվանտային կրիպտոգրաֆիան օգտվում քվանտային խճճվածության հրապուրիչ հատկությունից՝ ապահովելու համար բանալու անվտանգությունը: Ենթադրենք Բոբը և Ալիսը ստանում են EPR աղբյուրից (Նկ. 41.1) մասնիկներ, որոնք գտնվում են խճճված զույգի վիճակում: Նախապես, Ալիսը և Բոբը համաձայնում են որևէ նախընտրելի բազիսի վերաբերյալ (անվանենք $|0\rangle/|1\rangle$) որում նրանք սկսում են չափումները: Հնարավոր արդյունքները՝ $+1$ և -1 , համապատասխանում են $|1\rangle$ և $|0\rangle$ վիճակների դիտմանը: Մասնիկների խճճվածության շնորհիվ Ալիսի և Բոբի չափումների արդյունքները կլինեն կատարելապես կորելացված (նույնական), եթե աղբյուրն առաքում է $|\Phi^\pm\rangle = |00\rangle \pm |11\rangle / \sqrt{2}$ վիճակներից մեկում գտնվող զույգեր, կամ դրանք կլինեն կատարելապես անտիկորելացված (հակառակ), եթե առաքվեն $|\Psi^\pm\rangle = |01\rangle \pm |10\rangle / \sqrt{2}$ վիճակներից մեկում գտնվող զույգեր:

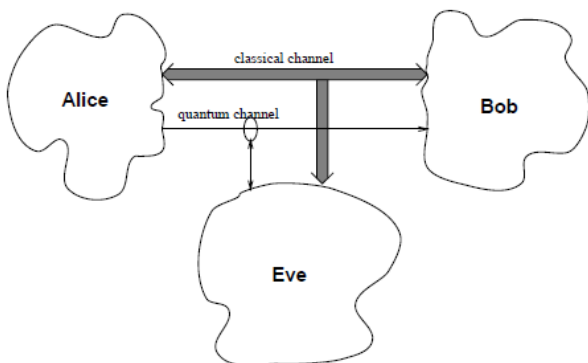


Որոշակիության համար ենթադրելով, որ գույգը գտնվում է $|\Psi^\pm\rangle$ վիճակներից մեկում, կունենանք, որ ամեն անգամ, երբ չափման արդյունքում Ալիսը կստանա $+1$ արժեք, նա վստահաբար կիմանա, որ Բոբը ստացել է -1 արժեքը: Բոբը և Ալիսը կարող են ձևափոխել -1 -ը բիթի 0 արժեքի և $+1$ արժեքը՝ բիթի 1 արժեքի՝ դրանով հետագա հաղորդակցման համար կազմելով պատահական բնույթ ունեցող գաղտնի բանալի:

Եթե կարիք է լինում միաժամանակ տեղեկատվություն ստանալ գաղտնալսման բացակայության կամ առկայության մասին, ապա կողմերը վարվում են, օրինակ, հետևյալ կերպ (Նկ. 41.2): Ալիսն ուղարկում է Բոբին բիթ-մասնիկների հաջորդականություն յուրաքանչյուր հաջորդը կոդավորելով

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow |\uparrow\rangle & & 0 \rightarrow |\nwarrow\rangle \\ & \text{կամ} & \\ 1 \rightarrow |\rightarrow\rangle & & 1 \rightarrow |\nearrow\rangle \end{array}$$

երկու բազիսներից պատահականորեն ընտրված մեկի վրա: Բոբը չափում է ստացված մասնիկների վիճակները բազիսների նորից պատահական ընտրությամբ: Բիթերի ամբողջական փաթեթ ուղարկելուց հետո Բոբը և Ալիսը դասական բաց կանալով հաղորդակցվում են՝ ասելով թե բազիսների ինչ հերթականություն են ընտրել: Այս տեղեկատվության միջոցով երկուսն էլ կարող են որոշել՝ հաղորդման և ընդունման որ բազիսներն են համընկնում, դրանով իսկ՝ որ բիթերն են հաղորդագրությունում կոդեկտ: Այս բիթերի հաջորդականությունը ընտրվում է որպես բանալի, և մյուսները դեն են նետվում: Ալիսի և Բոբի մոտ համընկնումների թիվը բարձր ճշտությամբ պետք է կազմի 50 %:



Նկ. 41.2

Ենթադրենք Ալիսի և Բոբի հաղորդակցման դասական և քվանտային կանալները կարող են գաղտնալսվել Իվի կողմից, որը չափում է Ալիսի կողմից ուղարկված յուրաքանչյուր մասնիկի վիճակը որևէ ընտրված բազիսում և ապա նույն վիճակում գտնվող մասնիկ ուղարկում Բոբին: Այս պրոցեսում մոտ 50 % դեպքերում օգտագործվող բազիսը կհամընկնի Ալիսի օգտագործած բազիսի հետ, ուրեմն այդ մասով Բոբին կփոխանցվի տեղեկատվություն առանց աղավաղումների: Մյուս հիստուն 50 % դեպքերում Իվի օգտագործվող բազիսը չի համընկնի Ալիսի օգտագործած բազիսի հետ՝ պատված լինելով նրա նկատմամբ 45° -ով: Գրանցման արդյունքում դրանց կեսը կդառնա Ալիսի ընտրածի նկատմամբ ճիշտ բազիս, մյուս կեսը՝ սխալ: Արդյունքում կստացվի, որ բիթերը Բոբին են փոխանցվում բազիսների ընտրության 25 % սխալով: Հետևաբար, բաց կանալով բազիսների համեմատման ժամանակ համընկնումների թիվը շեղված կլինի 50 %-ից:

Իհարկե, գոյություն ունեն տեղեկատվության գաղտնալսման ավելի նրբանկատ հնարավորություններ: Բարեբախ-

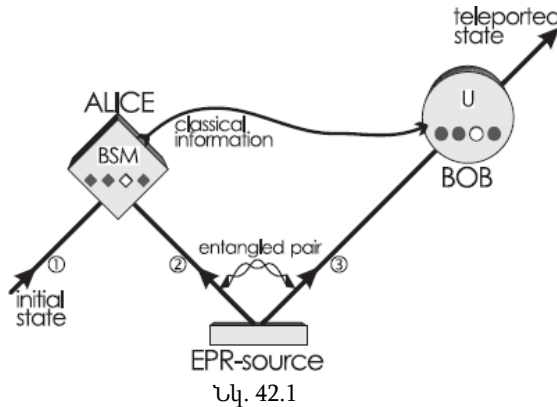
տաքար, հնարավոր է եղել ընդհանուր թեորեմ ապացուցել քվանտային ծածկագրության հնարավորության մասին: Հաջորդ կարևոր պահն այն է, որ քվանտային բանալին բացարձակ վստահելիությամբ կարելի է օգտագործել միայն մեկ անգամ:

§ 42. Քվանտային Տեղեկորտացիա

Թեմայի մեր վերջին քննարկումը կլինի քվանտային տեղեկորտացիան, ինչը խճճվածության կարևոր և ինչ-որ տեղ զարմանալի կիրառություններից է: Հարկ է ի սկզբանե հստակ նկատի ունենալ, որ խոսքը չի վերաբերում մատերիական միջնորդների կողմից տեղեկատվության փոխանցմանը, ինչպիսիք են ատոմները, մոլեկուլները, էլեկտրամագնիսական ալիքները և այլն: Այստեղ գործ ունենք քվանտային տեղեկատվության, ավելի շուտ՝ քվանտային վիճակի, փոխանցման երևույթի հետ և ոչ այն ֆիզիկական օբյեկտի փոխանցման, որում գրանցված է եղել այդ տեղեկատվությունը:

Ենթադրենք Ալիսը ցանկանում է մի քյուբիթ ուղարկել Բոբին, որն ընդհանուր դեպքում անհայտ է, անգամ ոչ ճանաչելի, ինչպես առաքողի, այնպես էլ ընդունողի համար: Քվանտային տեղեկորտացիա իրականացնելու համար Ալիսը և Բոբը երկուական խճճված մասնիկների աղբյուրից (նկարում՝ EPR-source) նախապես ստանում են զույգից մեկական, որոնք Նկ. 42.1-ում համարակալված են 2 և 3 թվերով: Համաձայն քվանտային մեխանիկայի օրինաչափությունների՝ ճառագայթվելիս մասնիկների միջև ինդուկցված խճճվածությունը պահպանվում է նաև մասնիկների՝ Ալիսին և Բոբին հասնելուց հետո:

Դրանք գտնվում են $|\Psi^-\rangle_{2,3} = \frac{1}{2}(|0_21_3\rangle - |1_20_3\rangle)$ վիճակում, ընդ որում՝ այս դերում կարող էր լինել մնացած հնարավոր երեք վիճակներից կամայականը: Ընտրված վիճակի մասին նախապես տեղյակ են լինում Ալիսը և Բոբը: Խճճված վիճակում մասնիկ 2-ը և մասնիկ 3-ը առանձին մաքուր վիճակներում չեն գտնվում: Այնուամենայնիվ, վստահորեն հայտնի է, որ չափման արդյունքում դրանք լինելու են իրար օրթոգոնալ վիճակներում:



Բոբին փոխանցելու համար նախատեսված է $|\psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1$ քյուբիթը, որը 1 թվով համարակալված մասնիկի միջոցով տրվում է Ալիսին (նկարում պատկերված ձախակողմյան սլաքը): Փոխանցումն ընդհանուր գծերով կատարվում է հետևյալ կերպ: Ալիսը զուգավորում է այդ քյուբիթը EPR աղբյուրից իր մոտ եկած 2 քյուբիթի հետ և կատարում ընդհանուր չափում 2-1 համակարգի նկատմամբ: 2-3 խճճվածության հետևանքով այս չափումն ունենում է անմիջական ազդեցություն նաև Բոբի մոտ գտնվող 3-րդ մասնիկի վրա: Ազ-

դեցությունը կայանում է նրանում, որ վիճակը պրոյեկտվում է մի նոր վիճակի վրա, ինչը կախված է լինում 1-ի վիճակից (α , β գործակիցների արժեքներից), ինչպես նաև Ալիսի կողմից արդեն իրականացված չափման արդյունքից: Ապա Ալիսը դասական հաղորդակցման կանալով Բոբին է ուղարկում իր կատարած չափման արդյունքը (դասական երկու բիթի տեսքով), ինչը բավարար է լինում Բոբի համար համապատասխան ունիտար ձևափոխության միջոցով փոխելու իր մոտ եղած 3 մասնիկի վիճակը, եթե դրա կարիքը լինում է, և անցնելու 1 մասնիկի բերած $|\psi\rangle_1$ վիճակին:

Բերենք գործառույթի մաթեմատիկական ոչ բարդ ներկայացումը: 2-3-1 եռամասնիկ համակարգի սկզբնական վիճակը 1 մասնիկի վիճակի և 2-3 մասնիկների խճճված վիճակի թենզորական արտադրյալն է՝ $|\psi\rangle_1 |\Psi^-\rangle_{2,3}$: 1-ի և 2-ի գուգավորումը Ալիսի կողմից նպատակահարմար է դարձնում վերադասավորել անդամները և ընդհանուր արտահայտությունը վերլուծել՝ որպես բազիսային վիճակներ ընտրելով 2-1 երկմասնիկ համակարգի խճճված հնարավոր վիճակներ: Վերլուծության յուրաքանչյուր անդամում առկա կլինի 3 մասնիկի մեկ սուպերպոզիցիոն վիճակ՝

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 |\Psi^-\rangle_{2,3} &= \alpha |0\rangle_1 + \beta |1\rangle_1 \quad |0_2, 1_3\rangle - |1_2, 0_3\rangle / 2 \\ &= |\Psi^-\rangle_{2,1} \quad \alpha |0\rangle_3 + \beta |1\rangle_3 / 2 - |\Psi^+\rangle_{2,1} \quad \alpha |0\rangle_3 - \beta |1\rangle_3 / 2, \\ &+ |\Phi^-\rangle_{2,1} \quad \beta |0\rangle_3 + \alpha |1\rangle_3 / 2 - |\Phi^+\rangle_{2,1} \quad \beta |0\rangle_3 - \alpha |1\rangle_3 / 2 \end{aligned}$$

որտեղ՝

$$|\Psi^-\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |1\rangle_1 - |1\rangle_2 |0\rangle_1 / 2, \quad |\Psi^+\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |1\rangle_1 + |1\rangle_2 |0\rangle_1 / 2,$$

$$|\Phi^-\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |0\rangle_1 - |1\rangle_2 |1\rangle_1 / 2,$$

$$|\Phi^+\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |0\rangle_1 + |1\rangle_2 |1\rangle_1 / 2:$$

Ըստ չորս հնարավոր խճճված վիճակներից պատահականորեն ընտրված մեկի կատարելով քվանտային չափում 2-1 համակարգի նկատմամբ, Ալիսը միաժամանակ հավասար հավանականությամբ պրոյեկտում է մասնիկ 3-ի վիճակը $|0\rangle_3$ -ի և $|1\rangle_3$ -ի չորս գործակից-սուպերպոզիցիոն վիճակներից մեկի վրա: Եթե չափումը գտնում է 2-1 զույգը $|\Psi^-\rangle_{2,1}$ վիճակում, 3-ը կոլապսվում է $\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3$ -ի վրա, այսինքն՝ 1 մասնիկի մինչ Ալիսի չափումը եղած նախնական վիճակին, և տելեպորտացիան ձեռք է բերվում առանց 3-ի նկատմամբ լրացուցիչ գործողության: Եթե Ալիսը հայտնաբերում է $|\Psi^+\rangle_{2,1}$ -ը, ապա 3-ը պրոյեկտված է լինում $\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3$ -ում, և Բոբը պետք է իրականացնի σ_z գործողությունը, որպեսզի պրոյեկտման արդյունքը ձևափոխի ցանկալի $\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3$ վիճակի: Նման ձևով, եթե Ալիսն ստանում է $|\Phi^-\rangle_{2,1}$ կամ $|\Phi^+\rangle_{2,1}$, Բոբի մոտ $|\psi\rangle_3$ վիճակը ստանալու համար պետք է կիրառվեն համապատասխանաբար σ_x կամ $\sigma_z \sigma_x = i\sigma_y$ օպերացիաները:

Այսպիսով, Ալիսի կատարած չափման յուրաքանչյուր արդյունքի համապատասխանում է որոշակի օպերացիա, ինչը թույլ է տալիս Բոբին տեղակայելու 3 մասնիկը ցանկալի քվանտային վիճակում: Իհարկե, Բոբն ինքնին չէր կարող որոշել՝ օպերացիաներից որն է անհրաժեշտ կիրառել 3-ի նկատմամբ: Որոշակիությունը տալիս են Ալիսի կողմից չափումը

կատարելուց հետո Բոբին դասական կանալով ուղարկված երկու դասական բիթերը:

Քվանտային տեղեպորտացիան ներառում է հաղորդակցման երկու կանալներ՝ քվանտային, ինչն իրականացվում է 2-ի և 3-ի միջև ոչ լոկալ խճճվածության միջոցով, և դասական, ինչի միջոցով Ալիսը Բոբին ուղարկում է երկու բիթ տեղեկատվություն այն մասին, թե ինչ արդյունք է ստացել չորս հնարավոր ելքերով իր չափման արդյունքում:

Եվ վերջինը՝ Ալիսի կատարած քվանտային չափման վերաբերյալ: Ի՞նչ և ինչպիսի՞ հաջորդականության քայլեր են կատարվում 2-1 երկմասնիկ համակարգի նկատմամբ՝ այդ չափումն իրականացնելու համար: Այն նախ պարունակում է երկու՝ CNOT և Hadamard գեյթերի հաջորդականություն, որոնցից առաջինը, ինչպես գիտենք, երկքուրբիթ գեյթ է, իսկ երկրորդը՝ միաքուրբիթ: CNOT գեյթում 1-ը հանդիսանում է ստուգվող, 2-ը՝ թիրախ քյուբիթ: Նրա ազդեցության տակ խճճված վիճակները ձևափոխվում են չխճճված արտադրյալ վիճակների՝

$$|\Psi^{-}\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |1\rangle_1 - |1\rangle_2 |0\rangle_1 \quad / 2 \rightarrow -|0\rangle_1 - |1\rangle_1 \cdot |1\rangle_2 / \sqrt{2},$$

$$|\Psi^{+}\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |1\rangle_1 + |1\rangle_2 |0\rangle_1 \quad / 2 \rightarrow |0\rangle_1 + |1\rangle_1 \cdot |1\rangle_2 / \sqrt{2},$$

$$|\Phi^{-}\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |0\rangle_1 - |1\rangle_2 |1\rangle_1 \quad / 2 \rightarrow |0\rangle_1 - |1\rangle_1 \cdot |0\rangle_2 / \sqrt{2},$$

$$|\Phi^{+}\rangle_{2,1} = |0\rangle_2 |0\rangle_1 + |1\rangle_2 |1\rangle_1 \quad / 2 \rightarrow |0\rangle_1 + |1\rangle_1 \cdot |0\rangle_2 / \sqrt{2}:$$

Հաջորդ՝ 1 քյուբիթի նկատմամբ Հադամարդի

$$U_H = \sigma_x + \sigma_z \quad / \sqrt{2}$$

գեյթի կիրառման արդյունքում նրանում վերանում է վիճակների սուպերպոզիցիոն բնույթը, այն է՝

$$|\Psi^{-}\rangle_{2,1} \rightarrow |1\rangle_1 \cdot |1\rangle_2, \quad |\Psi^{+}\rangle_{2,1} \rightarrow |0\rangle_1 \cdot |1\rangle_2,$$

$$|\Phi^-\rangle_{2,1} \rightarrow |1\rangle_1 \cdot |0\rangle_2, \quad |\Phi^+\rangle_{2,1} \rightarrow |0\rangle_1 \cdot |0\rangle_2:$$

CNOT և Հադամարդի օպերացիաների արդյունքում Ալիսը երկու քյուբիթերն ստանում է OZ-OZ բազիսում երկու դասական բիթերի տեսքով, որոնց նկատմամբ էլ կատարված չափման-պրոյեկտման արդյունքում Բոբի 3 քյուբիթը հայտնվում է սուպերպոզիցիոն վիճակում, որի նկատմամբ էլ նա կատարում է իր չափումը Ալիսից դասական կանալով ստացած տեղեկատվությունից հետո:

Մեկ անգամ ևս շեշտենք տելեպորտացիայի որոշ տարօրինակ ասպեկտներ և տարբերությունը, ասենք, դասական ֆաքսի գործողության նկատմամբ.

- Ալիսը և Բոբը փոխանակում են վիճակ, որը նրանցից ոչ մեկը չի կարող որոշել,

- տելեպորտացիայի արդյունքում Բոբի քյուբիթը դառնում է $|\psi\rangle_3 = \alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3$, իսկ Ալիսի քյուբիթը դառնում է մի չորոշված խճճված վիճակի մաս: Տելեպորտացիան չի հանգում քյուբիթի կրկնօրինակի ստացման, հետևաբար չի հակասում ոչ-քլոնավորման թեորեմին,

- սխեմայում ներգրավված չէ մատերիայի կամ էներգիայի տեղափոխում: Ալիսի մասնիկը ֆիզիկական շարժման միջոցով չի տեղափոխվում Բոբի մոտ: Միայն նրա վիճակն է տեղափոխվում: «Տելեպորտացիա» բառը ներառում է նաև քվանտամեխանիկական մասնիկների ոչ տարբերակելիությունը (նույնականությունը),

- միամասնիկ տելեպորտացիայից հետո նրանք որևէ կերպ չեն կարող ստուգել՝ արդյոք գործողությունը հաջողվել է: Նրանք կարող են ստանալ միայն քյուբիթի հաղորդման վստահելիությունը (fidelity)՝ որպես նույն վիճակում նախապատ-

րաստված մեծ թվով մասնիկների նկատմամբ կատարված ստատիստիկական չափումների արդյունք,

- յուրաքանչյուր քյուբիթի տելեպորտացիայի համար Ալիսը կարիք ունի Բոբին ուղարկելու երկու դասական բիթեր: Այդ բիթերը չեն կրում տելեպորտացվող քյուբիթի մասին ամբողջական տեղեկատվություն: Եթե երկու բիթերը բռնվում են որևէ գաղտնալսողի կողմից, նա կարող է իմանալէ ինչ պետք է անի Բոբը ցանկալի վիճակն ի հայտ բերելու համար: Այնուամենայնիվ, այդ տեղեկատվությունը անօգուտ է, եթե գաղտնալսողը չի առնչվում Բոբի տնօրինած խճճված մասնիկին:

- α և β ամպլիտուդներն անընդհատ փոփոխականներ են, և դրանց ճշգրիտ որոշումը կպահանջեր դասական բիթերի անվերջ քանակ այն դեպքում երբ սուպերպոզիցիոն վիճակի փոխանցումը պահանջում է դասական տեղեկատվության ընդամենը երկու բիթի փոխանակում: Ի վերջո ավելացնենք, որ տելեպորտացիայի գործողությունն աղավաղում է օրիգինալը: Դա մատնանշում է մեծ վստահելության անհրաժեշտությունը մինչ գործընթացին ձեռնամուխ լինելը, հատկապես երբ նախնական տեղեկատվությունը տրվում է մեկ օրինակով:

Քվանտային տելեպորտացիայի առաջին փորձարարական աշխատանքները կատարվել են 1990-ական թթ. վերջերին:

ԳԼՈՒԽ IV

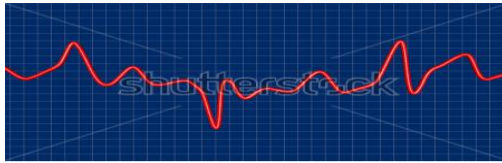
Թերմոդինամիկա և մոլեկուլային ֆիզիկա

§ 43. Մակրոսկոպիկ պարամետրեր

Մակրոսկոպիկ համակարգին վերաբերող քանակական խնդիրների քննարկումն արագորեն դառնում է ոչնչի բերող զբաղմունք, եթե քննարկումը ընթանում է ճշգրիտ հասկացությունների սահմաններում, ինչպիսիք են մարմինը կազմող մասնիկների կոորդինատներն ու արագությունները (կամ իմպուլսները): Մակրոսկոպիկ համակարգերը մենք նկարագրում և ուսումնասիրում ենք մակրոսկոպիկ պարամետրերի միջոցով: Դրանք համակարգը նկարագրում են որպես ամբողջություն և ընտրվում կամ մտցվում են հարցերի հնարավորիս ամբողջական ձևակերպման ու դրանց վերաբերյալ պատասխաններ ստանալու ակնկալիքով:

Որպես օրինակ քննարկենք մարմնի խտությունը: Մտովի առանձնացնենք փոքր V ծավալ, և նրանում առկա նյութի զանգվածը նշանակենք m : Խտություն կոչվում է $\rho = m/V$ հարաբերությունը: Այն, սակայն, նույնը չէ ժամանակի բոլոր պահերին: Նյութը կազմող ատոմների ջերմային անկանոն շարժման հետևանքով տվյալ V ծավալում առկա m զանգվածն անընդհատ և քաոսիկ փոփոխվում է: Մենք ասում ենք՝ ֆլուկտացվում է: Փորձը ցույց է տալիս, սակայն, որ անփոփոխ արտաքին պայմաններում ֆլուկտուացիաները տեղի են ունենում որոշակի արժեքի շուրջ, այլ կերպ ասած՝ ρ -ի ժամանակային միջինը միջինացման ժամանակը մեծացնելիս ձգտում է որոշակի արժեքի: Հավանականությունների տեսությունից հայտ-

նի է, որ N պատահարներում (ատոմների շարժումներում) որևէ մեծության հարաբերական քառակուսային շեղումն իր միջինից մեկի կարգի գործակցով համեմատական է $1/\sqrt{N}$ - ին: Մակրոսկոպիկ մեծությունների համար $N \gg 1$ և ֆենոմենոլոգիկ կառուցված թերմոդինամիկայի տեսությունը, որպես կանոն, հրաժարվում է ֆլուկտուացիաների առկայությունից:



Նման կերպ են իրենց պահում նաև մյուս թերմոդինամիկական պարամետրերը, ճնշումը, թերմոդինամիկ պոտենցիալները, էնտրոպիան և այլն:

Նկատենք նաև, որ եթե չեն կիրառվում հատուկ չափման մեթոդներ, ապա չափիչ սարքերն իներտության շնորհիվ չեն արձագանքում ֆլուկտուացիաներին և ցույց են տալիս հենց միջին արժեքները: Այնպես որ, թերմոդինամիկական պարամետր ասելով՝ մենք նկատի ենք ունենում նրանց միջինացված արժեքները:

Եթե սահմանված են մակրոսկոպիկ պարամետրերը, ապա համակարգի մակրո վիճակը հայտնի է, եթե հայտնի են այդ պարամետրերի արժեքները:

Պարամետրերը լինում են ներքին և արտաքին: Արտաքին պարամետրերը բնութագրում են արտաքին մարմինները և դաշտերը, որոնք ազդում են համակարգի վրա: Հակառակը տեղի չունի. համակարգը չի ազդում արտաքին պարամետրերի վրա: Օրինակ, անոթի ծավալը մեծ ճշտությամբ արտաքին պարամետր է նրանում պարփակված գազի համար: Երկրի մակերևութին մոտ ընթացող բոլոր թերմոդինամիկական պրո-

ցեսների համար արտաքին պարամետրեր են Երկրի գրավիտացիոն դաշտը և Արեգակից եկող լուսային էներգիան:

Թերմոդինամիկ հավասարակշռության վիճակում յուրաքանչյուր ներքին պարամետր միարժեք ֆունկցիա է համակարգի արտաքին պարամետրերից: Հավասարումը, որն արտահայտում է այդ ֆունկցիոնալ կապը, կոչվում է վիճակի հավասարում:

§ 44. Ներքին էներգիա, թերմոդինամիկ աշխատանք և ջերմաքանակ:

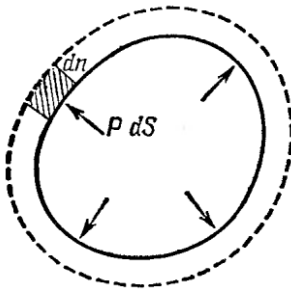
Թերմոդինամիկայի I սկզբունքը

Թերմոդինամիկ համակարգի կարևորագույն բնութագրերից է ներքին էներգիան: Այն, համաձայն մոլեկուլային-կինետիկ տեսության, համակարգը կազմող մասնիկների (ատոմների, մոլեկուլների) կինետիկ էներգիաների և միջմասնիկային փոխազդեցության պոտենցիալ էներգիաների գումարն է: Եթե համակարգը բաղկացած է տարբեր ենթահամակարգերից, օրինակ՝ փակ անոթում գտնվող հեղուկն իր հազեցած գոլորշիներով, ապա ենթահամակարգերի ներքին էներգիաներին գումարում ենք ենթահամակարգերի հարաբերական շարժումների կինետիկ և միմյանց հետ փոխազդեցության պոտենցիալ էներգիաները:

Կարևոր է նաև նշել, որ համակարգի թերմոդինամիկ պարամետրերը բնութագրում են տվյալ վիճակը և որևէ կերպ չեն վկայում դրան նախորդող վիճակների մասին: Համակարգի մի հավասարակշիռ վիճակից մեկ այլ հավասարակշիռ վիճակի անցնելիս համակարգի հատկությունների արդյունարար փոփոխությունը կախված չէ անցման ճանապարհից, այլ որոշ-

վում է միայն, թե ինչպիսին են համակարգի սկզբնական և վերջնական վիճակները, այսինքն՝ այդ վիճակներում թերմոդինամիկական պարամետրերի արժեքները: Մասնավորապես, եթե համակարգը, դուրս գալով որևէ սկզբնական հավասարակշիռ վիճակից, կրել է մի շարք փոփոխություններ այնպես, որ ի վերջո վերադարձել է սկզբնական հավասարակշիռ վիճակ (կատարել է շրջանային պրոցես կամ ցիկլ), ապա պրոցեսի վերջում համակարգը ձեռք է բերում այն նույն հատկությունները, որն ունեցել է ելման վիճակում:

Դիտարկենք որևէ թերմոդինամիկ համակարգ (Նկ. 44.1): Պարզության համար ենթադրենք նյութի ամորֆ կառուցվածք, օրինակ՝ հեղուկ կամ գազային, և ներսում ճնշումը նշանակենք p (այն կարող է և փոփոխվել կետից կետ): Ենթադրենք համակարգն ինչ-ինչ պատճառով ընդարձակվում է: Ակնհայտ է, որ համակարգի ճնշման ուժերն այս դեպքում կատարում են (դրական) աշխատանք. կան ուժեր և տեղափոխություններ: Նկատենք, որ կատարված գումարային աշխատանքը ծավալի ներքին մասերում հավասար է գրոյի, քանի որ ներքին ցանկացած մակերևույթի տարրի վրա երկու կողմերից ազդում են մեծությամբ հավասար ուղղությամբ հակառակ ուժեր:



նարար աշխատանքը կարելի է հաշվել որպես մակերևույթի տեղաշարժման (ընդարձակման) արդյունք: Նկ. 44.1 Դրա համար մակերևույթի վրա առանձնացնենք տարրական dS մակերես, որի տեղաշարժը տարրական ընդարձակման ժամանակ նշանակենք dn , ընդ

որում՝ այն ուղղված է տվյալ տեղամասում $dF = p dS$ ճնշման տարրական ուժի ուղղությամբ: Հետևաբար տվյալ տեղամասում ճնշման ուժերի կատարած տարրական աշխատանքը լինում է $dA = dF dn = p dS dn$: Նկարից տեսնում ենք, որ $dS dn$ արտադրյալը հավասար է շտրիիված dV ընդլայնման տարրական ծավալին: Այնպես որ $dA = p dV$: Կատարված մակրոսկոպիկ աշխատանքը ստանալու համար մնում է ինտեգրել վերջին արտահայտությունն ըստ սկզբնական և վերջնական մակերևույթների միջև ընկած ծավալի՝

$$A = \int_{V_1 \rightarrow V_2} p dV:$$

Եթե համակարգը գտնվում է արտաքին մարմինների (դաշտերի) անմիջական ազդեցության տակ, այնպես որ նրա վրա ազդում է արտաքին p' ճնշում, ապա քննարկվող ընդարձակման պրոցեսում արտաքին ճնշումը կատարում է

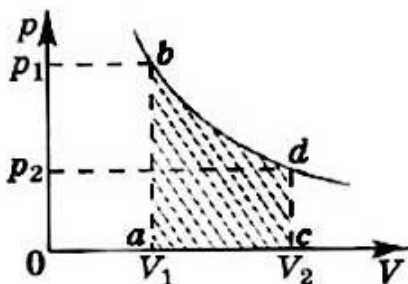
$$A' = - \int_{V_1 \rightarrow V_2} p' dV$$

աշխատանք: Եթե ընդարձակման պրոցեսը քվազիհավասարակշիռ է (մակերեսը շարժվում է ադիաբատիկ դանդաղ), ապա՝ $p' = p$ և համապատասխանաբար $A' = -A$: Արտաքին ճնշման ուժերը կատարում են աշխատանք, որը մեծությամբ հավասար է և նշանով հակառակ ներքին ճնշման ուժերի կատարած աշխատանքին: Պետք է, սակայն, հստակորեն տարբերակել, որ այդ աշխատանքները չեն կարող համակշռել իրար, քանի որ ազդում են տարբեր մարմինների վրա. համակարգի A աշխատանքը կատարվում է արտաքին մարմինների

նկատմամբ, արտաքին մարմինների A' աշխատանքը՝ համակարգի նկատմամբ:

Աշխատանքը համակարգի և արտաքին մարմինների միջև էներգիայի փոխանակման Δ է: Օրինակ՝ արտաքին ուժերի $A' > 0$ աշխատանքը վեր է ածվում համակարգի ներքին էներգիայի՝ իր չափով մեծացնելով նրան:

Թերմոդինամիկական աշխատանքը $p - V$ երկրաչափական հարթության վրա ներկայացվում է պրոցեսի գրաֆիկի տակ ընկած մակերեսով, ինչպես դա մեկնաբանված է Նկ. 44.2-ում: Այստեղից գալիս է հետևություն, որ կատարված աշխատանքը կախված է ոչ միայն սկզբնական և վերջնական ծավալներից, այլև անցման Δ ճից:

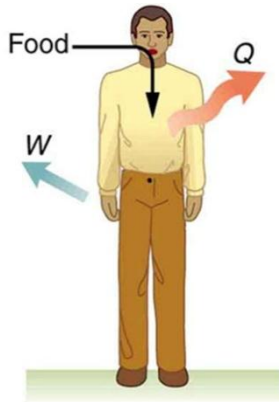


Նկ. 44.2

Թերմոդինամիկական համակարգի ներքին էներգիայի փոփոխության մյուս հնարավորությունը Q ջերմության քանակի (ջերմաքանակի) փոխանցումն է, որը որպես կանոն իրականանում է համակարգի և արտաքին մարմինների անմիջական կոնտակտի դեպքում: Ջերմափոխանակման արդյունքում կողմերից մեկի ներքին էներգիան աճում է, մյուսինը նույն չափով փոքրանում: Ջերմային հոսքն ուղղված է տաք մարմնից դեպի սառը մարմինը:

Արդյունքում՝ աշխատանքի, ջերմաքանակի և ներքին էներգիայի համար ձևակերպվում է թերմոդինամիկայի I սկզբունքը որպես էներգիայի պահպանման և ձևափոխման օրենքի կոնկրետացում թերմոդինամիկական համակարգերի համար. Թերմոդինամիկական համակարգի ΔU ներքին էներգիայի փոփոխությունը հավասար է նրան հաղորդված Q ջերմության քանակի և նրա կատարած A աշխատանքի տարբերությանը՝

$$\Delta U = Q - A:$$



Նկ. 44.3

Այս առնչությունը հաճախ գրվում և մեկնաբանվում է

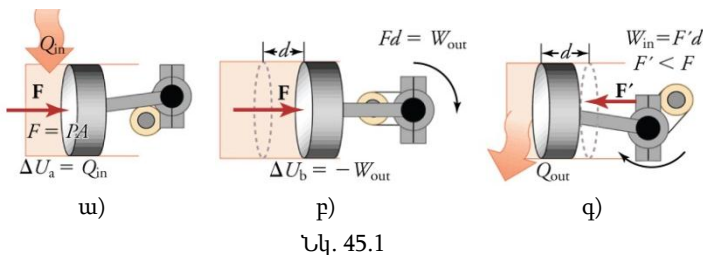
$$Q = \Delta U + A$$

տեսքով, ըստ որի համակարգի ստացած ջերմաքանակը գնում է նրա ներքին էներգիայի փոփոխության և արտաքին մարմինների նկատմամբ նրա կատարված աշխատանքի վրա:

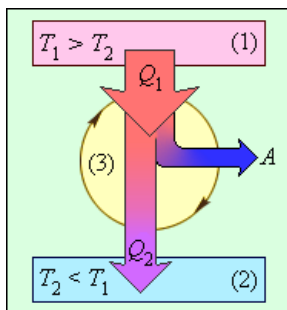
§ 45. Ջերմային մեքենա և սառնարանային մեքենա

Առավել կարևոր բաներից մեկը, ինչ մենք կարող են անել ջերմաքանակի հետ, նրա օգտագործումն է աշխատանք ստանալու համար: Ավտոմեքենաների բենզինային և դիզելային շարժիչները, ռեակտիվ շարժիչը և էլեկտրական հոսանքի գեներացման շոգետուրբինը ջերմային շարժիչների օրինակներ են:

Որպես օրինակ քննարկենք ավտոմեքենայի շարժիչի աշխատանքը: Ցիկլի առաջին տակտում վառելիքի այրումից ազատվում է նրա ներքին քիմիական էներգիայի մի մասը և ջերմային էներգիայի տեսքով հաղորդվում է գլանում եղած գազին (Նկ. 45.1ա): Արդյունքում գլանում կտրուկ բարձրանում է գազի ջերմաստիճանը և համապատասխանաբար ճնշումը: Ազդելով շարժական մխոցի վրա՝ տեղափոխում է այն որոշակի հեռավորությամբ (Նկ. 45.1բ), և այդ շարժումը միջանկյալ մեխանիզմի միջոցով հաղորդվում է անիվներին պտտական շարժման տեսքով: Գազի ճնշումը և ջերմաստիճանը նվազում են ընդարձակման ընթացքում՝ մատնանշելով որ գազի ներքին էներգիան նվազել է կատարած աշխատանքի հետևանքով: Կրկնելու համար պրոցեսը հարկ է վերադարձնել մխոցն իր սկզբնական դիրքին: Ջերմային հոսքն այժմ տեղափոխում է էներգիան գազից շրջակա միջավայր, որի արդյունքում գազի ճնշումն ավելի է իջնում, այնպես որ մխոցն արտաքին ուժերի ազդեցությամբ հնարավորինս հեշտությամբ վերադարձվի նախնական դիրք (Նկ. 45.1գ): Այսպիսով, էներգիայի ջերմափոխանցումը գլանում գտնվող գազին ուղեկցվում է արտաքին մարմինների նկատմամբ կատարված աշխատանքով:



Բոլոր ջերմային մեքենաներն օգտագործում են ցիկլիկ պրոցեսներ, ընդ որում աշխատանքի է վերածվում ազատված քիմիական ներքին էներգիայի միայն մի մասը, ինչպես դա մեկնաբանված է Նկ. 45.2-ում: Բանող զազը տաք աղբյուրից ստանալով Q_1 ջերմության քանակ, Q_2 չօգտագործված մաս հաղորդում է ավելի սառը շրջակա միջավայրին: Կատարված աշխատանքը որոշվում է դրանց տարբերությամբ:

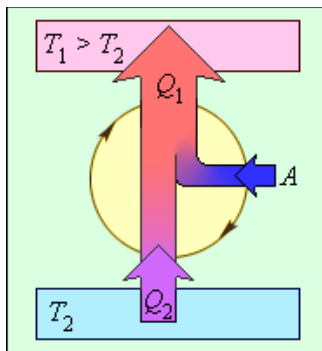


Հիմնական ջերմային շարժիչների օգտակար գործողության գործակիցներն են՝

- շոգեշարժիչ – 8%,
- շոգետուրբին – 40%,
- գազային տուրբին – 25-30%,

- ներքին այրման շարժիչ – 18-24%,
- դիզելային շարժիչ – 40-44%,
- ռեակտիվ շարժիչ – 25%:

Հովացուցիչները, օդորակիչները և սառնարաններն օգտագործում են էներգիայի տեղափոխություն հակառակ ցիկլը, այսինքն՝ ավելի ցածր ջերմաստիճաններից ավելի բարձր ջերմաստիճաններ: Կոնցեպտուալ մակարդակում դրանք աշխատում են, ինչպես պատկերված է Նկ. 45.3-ում: Q_2 էներգիայի ջերմահաղորդումը սառը մարմնից (օրինակ՝ սառնարանում դրված ուտելիքից) տաք մարմնին (բնակարանին) ինքնաբերաբար տեղի ունենալ չի կարող, և այն իրականացվելու համար անհրաժեշտ է լինում կատարել որոշակի A աշխատանք (սառնարանի էլեկտրաշարժիչի կողմից): Արդյունքում՝ $Q_1 = A + Q_2$:



Նկ. 45.3

Ջերմային շարժիչները լուրջ վնաս են հասցնում շրջակա միջավայրին: Դրանց լայնատարած օգտագործումը հանգեցնում է մի շարք բացասական արդյունքների, ինչպես՝

- հսկայական ջերմային էներգիայի ցրումը մթնոլորտում պատճառ է դառնում մեր մոլորակի ջերմաստիճանի բարձրացման, սառցադաշտերի հալման՝ իր աղետալի հետևանքներով,

- կլիմայի ջերմացման է տանում նաև մթնոլորտում ածխաթթու գազի կուտակումը՝ դանդաղեցնելով Երկրի ջերմային ճառագայթման անցումը տիեզերք (ջերմոցային էֆեկտ),

- վառելիքի այրման արգասիքների մեծ կոնցենտրացիաների պատճառով վատանում է շրջակա միջավայի ընդհանուր էկոլոգիական վիճակը:

Սա քաղաքակրթական մասշտաբի խնդիր է: Ջերմային շարժիչների աշխատանքի վնասակար հետևանքների դեմ պայքարում հարկ է մեծացնել նրանց ՕԳԳ-ն, պակասեցնել թունավոր արտանետումները, մշակել վառելիքի նոր տեսակներ և խնայողաբար ծախսել էներգիան:

§ 46. Թերմոդինամիկայի II սկզբունքը

Թերմոդինամիկայի երկրորդ սկզբունքը յուրօրինակ տեղ է գրավում բնության մեզ հայտնի օրենքների ցանկում: Ֆիզիկայի օրենքները, որպես կանոն, սահմանում են ճշգրիտ առնչություններ, որոնց տեղի ունենալու պայմաններում միայն կարող են ընթանալ պրոցեսներ և ձևավորվել վիճակներ: Պատկերավոր ասած՝ դրանք սահմանում են թույլատրելիության կանոններ, ինչպիսիք են Նյուտոնի օրենքները, էներգիայի պահպանման օրենքը և այլն: Փոքր թվով նյութական կետերից (կոշտ մարմիններից) բաղկացած համակարգերի դեպքում ճշգրիտ օրենքների կիրառումը ամբողջական նկարագրում է համակարգը: Սակայն իրավիճակն այդպիսին չէ

մակրոաշխարհի՝ թերմոդինամիկական համակարգերի դեպքում:

Որակական տարբերությունների առավել կարևոր կողմն այստեղ պրոցեսների շրջելիությունն է:

Փոքրաթիվ մասնիկների (մարմինների) մեխանիկական շարժումները շրջելի են: Օրինակ, երբ բեռը տատանվում է՝ կախված է առաձգական զսպանակից, ապա վերև և ներքև շարժումները կրկնում են իրար հակառակ հերթականությամբ:

Թերմոդինամիկական համակարգերում պրոցեսների շրջելի լինելու անհրաժեշտ պայման է նրանց քվադիստացիոնար կամ հավասարակշիռ լինելը: Շրջապատում, սակայն, ամենուրեք են ոչ քվադիստացիոնար պրոցեսները, այսինքն՝ համեմատաբար արագ ընթացող պրոցեսներ, որոնք անշրջելի են, դրանց հակադարձ ընթացքը թեև թվում է թույլատրելի հայտնի օրենքների սահմաններում, սակայն այն երբեք տեղի չի ունենում: Օրինակ, երբ քարն ընկնում է որոշ բարձրությունից և հարվածում գետնին, այն որոշ չափով տաքանում է և տաքացնում գետնի՝ հարվածի տեղամասն ու կանգ առնում: Հակառակ պրոցեսը, երբ քարի և գետնի ներքին էներգիաներն ինքնին ետ հավաքվեն և վերածվեն քարի պոտենցիալ էներգիայի, չի դիտվում: Առավել ևս հնարավոր չէ պատկերացնել, օրինակ, եփած ձվի վերաձևափոխումը թարմ ձվի:

Ինչպես և կարելի էր սպասել խնդրի դրվածքի բարդությունից, գոյություն ունեն ոչ շրջելիության հնարավորության մեկից ավելի ձևակերպումներ, որոնք առաջին հայացքից հնչում են իրարից տարբեր, սակայն ցույց է տված, որ դրանք մաթեմատիկորեն իրար համարժեք են: Դրանք հայտնի են որպես թերմոդինամիկայի երկրորդ սկզբունքի ձևակերպումներ:

Կլաուզիուսի ձևակերպումը: Գոյություն չունի թերմոդինամիկական պրոցես, որի միակ արդյունքը լինի ավելի սառը մարմնից ջերմաքանակի անցումը ավելի տաք մարմնին:

Կելվինի ձևակերպումը: Գոյություն չունի թերմոդինամիկական պրոցես, որի միակ արդյունքը լինի տրված մարմնից (ռեզերվուարից) ներքին էներգիայի վերցնելը և դրա ամբողջական ձևափոխումը աշխատանքի:

Երկու ձևակերպումներում էլ առանցքային բառը «միակ»-ն է: Բերենք մի օրինակ՝ մատնանշելու համար այդ բառի կարևորությունը: Եթե իդեալական գազը դանդաղ և իզոթերմ ընդարձակվում է, ապա գազի կողմից կատարվում է աշխատանք: Քանի որ $\Delta U = 0$ այս պրոցեսում, ապա գազի կատարված աշխատանքը հավասար է ընդարձակման ընթացքում նրա կլանած ջերմաքանակին: Այսպիսով, ջերմային էներգիայի որոշակի քանակն ամբողջապես վեր է ածվում աշխատանքի: Այն, այնուամենայնիվ, ձևափոխության միակ արդյունքը չէ, որովհետև վերջնական վիճակում գազը գրավում է ավելի մեծ ծավալ, քան գրավում էր սկզբում: Թերմոդինամիկայի II սկզբունքը թույլ է տալիս այսպիսի պրոցեսը:

§ 47. Էնտրոպիա

Թերմոդինամիկայի II սկզբունքի մաթեմատիկական ձևակերպման համար Կլաուզիուսի կողմից մտցվել է վիճակի նկարագրության նոր պարամետր (ֆունկցիա), որը կոչվում է էնտրոպիա և նշանակվում է S :

Էնտրոպիայի օգտակարությունը ելնում է Կլաուզիուսի թեորեմից, ըստ որի՝ կամայական ցիկլիկ պրոցեսում, որի ամ-

բողջ ընթացքում ջերմաստիճանը որոշված է, տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0,$$

որի ինտեգրալը տարվում է ըստ որևէ փակ ցիկլի: Հավասարման նշանը տեղի է ունենում շրջելի (քվադիստացիոնար) պրոցեսների դեպքում:

Թերոբեմի հետևանք է, որ շրջելի պրոցեսների համար

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T}$$



Ռուդոլֆ Կլաուզիուս
(1822 – 1888)

ինտեգրալն անկախ է հետագծից և կախված է միայն սկզբնական 1 և վերջնական 2 վիճակներից: Այն հնարավորություն է տալիս էնտրոպիան սահմանելու որպես վիճակի ֆունկցիա: Դրա համար որևէ O վիճակ ընտրվում է որպես հաշվարկման սկիզբ, իսկ քննարկվող A վիճակի էնտրոպիա սահմանվում է

$$S(A) = \int_O^A \frac{dQ}{T}$$

առնչությամբ, որտեղ ինտեգրումը կատարվում է կամայական շրջելի պրոցեսի միջոցով: O վիճակի ազատ ընտրությունից հետևում է, որ էնտրոպիան սահմանվում է կամայական ադիտիվ հաստատունի ճշտությամբ:

Երկու վիճակների էնտրոպիաների տարբերությունը՝

$$S(A) - S(B) = \int_B^A \frac{dQ}{T},$$

այնուամենայնիվ, որոշակի է, որտեղ ինտեգրումը կատարվում է B -ից A -ին անցնող կամայական շրջելի պրոցեսի հետագծով: Հետևաբար կամայական անվերջ փոքր շրջելի պրոցեսի համար S -ի փոփոխությունը տրվում է

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (47.1)$$

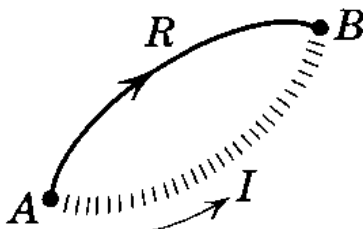
արտահայտությամբ, ինչի մաթեմատիկական բովանդակությունը ճշգրիտ դիֆերենցիալ լինելն է, այսինքն՝ բավարարում է դիֆերենցիալի՝ հետագծի տեսքից անկախ լինելու պայմանին:

Բերենք էնտրոպիայի հիմնական հատկությունները՝

- կամայական պրոցեսի համար՝

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \leq S(B) - S(A): \quad (47.2)$$

Հավասարումը տեղի ունի, եթե պրոցեսը շրջելի է (Նկ. 47.1):



Նկ. 47.1

Համոզվելու համար ընտրենք փակ կոնտուր՝ բաղկացած շրջելի և ոչ շրջելի պրոցեսներից, որոնք A կետը միացնում են

B կետին: Ապա դիտենք փակ հետագիծ՝ բաղկացած I ոչ շրջելի և R շրջելի պրոցեսի հակադարձ պրոցեսից: Կլաուզիուսի թեորեմից ունենում ենք

$$\int_I \frac{dQ}{T} - \int_R \frac{dQ}{T} < 0,$$

կամ՝
$$\int_I \frac{dQ}{T} < \int_R \frac{dQ}{T} = S(B) - S(A):$$

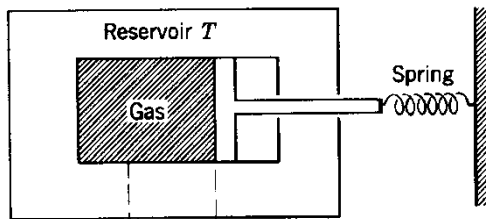
• Ջերմամեկուսացված համակարգի էնտրոպիան երբևէ չի նվազում:

Իսկապես, ջերմամեկուսացված համակարգի համար $dQ = 0$ ցանկացած անվերջ փոքր պրոցեսում և (47.2)-ից ուղղակի հետևում է

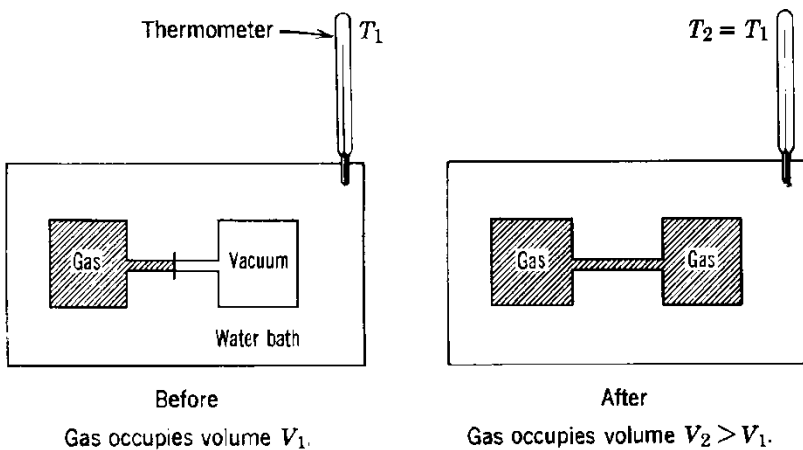
$$S(B) \geq S(A)$$

առնչությունը: Այստեղից էլ կարևոր հետևությունը, ներառյալ համակարգերում պարփակված ինֆորմացիայի կոնտեքստում, որ հավասարակշիռ վիճակը տվյալ արտաքին պայմաններում էնտրոպիայի առավելագույն արժեքով վիճակն է:

Էնտրոպիայի պարզագույն ֆիզիկական բովանդակությունը թեմոդինամիկայի սահմաններում մեկնաբանելու համար սովորաբար դիտարկվում է իդեալական գազի ընդարձակումը V_1 ծավալից V_2 ծավալ երկու որակապես իրարից տարբեր իրավիճակներում՝ իզոթերմ շրջելի, ինչպես պատկերված է Նկ. 47.2-ում, և ազատ ոչ շրջելի, ինչպես պատկերված է Նկ. 47.3-ում:



Նկ. 47.2



Նկ. 47.3

Առաջինի դեպքում՝ $dU = 0$, $dQ = dA = pdV$, $p = RT/V$,
 մեկ մոլ գազի համար, և (47.1)-ի ինտեգրումից կստանանք
 $(\Delta S)_1 = R \ln(V_2/V_1)$: Գազի ջերմաստիճանը հաստատուն
 պահելու համար թերմոստատ-ռեգերվուարը իր ներքին էներ-
 գիայից ջերմափոխանակության մեխանիզմով որոշ քանակու-
 թյուն տալիս է գազին: Ուրեմն էնտրոպիայի փոփոխություն
 տեղի է ունենում նաև թերմոստատ-ռեգերվուարի մոտ, ընդ
 որում, քանի որ $(dQ)_{\text{reservoir}} = -(dQ)_{\text{gas}}$, իսկ

$T_{\text{reservoir}} = T = \text{const}$ ռեզերվուարի մեծ լինելու պայմանից, ապա $(\Delta S)_{\text{reservoir}} = -(\Delta S)_{\text{gas}}$: Ընդհանուր փոփոխությունը՝

$$(\Delta S)_1 = (\Delta S)_{\text{gas}} + (\Delta S)_{\text{reservoir}} = R \ln \frac{V_2}{V_1} - R \ln \frac{V_2}{V_1} = 0,$$

որտեղ R -ը ունիվերսալ գազային հաստատունն է:

Երկրորդ դեպքում պրոցեսն անշրջելի է, և փոփոխությունը հաշվելու համար չենք կարող օգտվել (14.1) բանաձևից: Էնտրոպիան, սակայն, վիճակի ֆունկցիա է, և ուրեմն գազի էնտրոպիայի փոփոխությունը կարելի է հաշվել հավասար առաջին դեպքում նրա ունեցած փոփոխությանը՝

$$(\Delta S)_{\text{gas}} = R \ln \frac{V_2}{V_1},$$

քանի որ սկզբնական և վերջնական վի-

ճակները երկու դեպքում էլ նույնն են: Ինչ վերաբերում է ռեզերվուարի էնտրոպիայի փոփոխությանը, ապա այն հավասար է զրոյի՝ $(\Delta S)_{\text{reservoir}} = 0$, քանի որ բացակայում է ջերմա-

փոխանակումը գազի և ռեզերվուարի միջև: Վերջինս էլ բացատրվում է նրանով, որ գազի մոլեկուլները, դիֆուզիայի չհանդիպելով, ինքնին պահպանում են ունեցած կինետիկ էներգիաներն ու ուրեմն նաև ջերմաստիճանը: Ուրեմն

$$(\Delta S)_2 = (\Delta S)_{\text{gas}} + (\Delta S)_{\text{reservoir}} = R \ln \frac{V_2}{V_1} + 0 = R \ln \frac{V_2}{V_1}:$$

Ստացված տարբերության մեկնաբանությունը բավականին պարզ է: Առաջին դեպքում գազի ընդարձակումն ուղեկցվում է գազանակի սեղմմամբ, ինչի էներգիան հետագայում կարող է ծախսվել՝ աշխատանք կատարելու համար, մասնավորապես շրջելի կերպով գազը ետ սեղմելու ճանա-

պարհով: Երկրորդ դեպքում շրջապատի մարմիններում (ռեզերվուարում) աշխատանք կատարելու ունակ էներգիայի կուտակում տեղի չի ունենում, և ուրեմն անշրջելի պրոցեսում տեղի է ունենում աշխատանք կատարելու ունակ որոշ էներգիայի ($A_{\text{wasted}} = T\Delta S = RT \ln V_2 / V_1$) ծախսում:

§ 48. Էնտրոպիայի հավանականային մեկնաբանությունը

Էնտրոպիային որակապես նոր ֆիզիկական մեկնաբանություն է տվել Բոլցմանը՝ կապելով էնտրոպիան, դրանով իսկ համակարգում առկա քառասյանության աստիճանը միկրովիճակների այն W թվի հետ, որոնց միջոցով կարելի է իրականացնել համակարգի տվյալ մակրովիճակը:

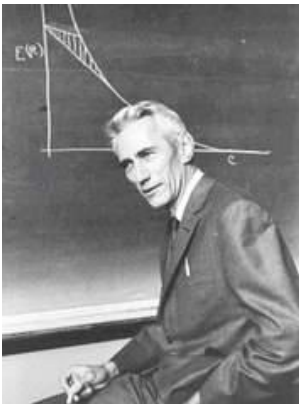
Չփոխազդող ենթահամակարգերի սահմանային դեպքում $W = W_1 \cdot W_2$ և էնտրոպիային ադիտիվության հատկություն ապահովելու համար հարկ էր S -ը ներկայացնել ոչ թե W -ին, այլ նրա լոգարիթմին համեմատական առնչությամբ՝

$$S = k_B \ln W :$$

Ամենավոքը էնտրոպիա ունեն իդեալական ճիշտ կառուցված բյուրեղները բացարձակ զրո ջերմաստիճանում: Բյուրեղը, որի կառուցվածքում կան ինչ-որ խանգարումներ, նույն բացարձակ զրո ջերմաստիճանում ունի որոշ չափով մեծ էնտրոպիա, քանի որ խանգարումներ կարող են իրականացվել ոչ միակ ձևով: Ջերմաստիճանն աճելիս էնտրոպիան միշտ ավելանում է, քանի որ ինտենսիվանում են մասնիկների շարժումները, հետևաբար նաև դրանց դասավորման ձևերի թիվը: Էնտրոպիան աճում է նաև նյութի բյուրեղային վիճակից հեղուկ վիճակի անցման ժամանակ, հատկապես հեղուկից գա-

գային վիճակի անցնելիս: Էնտրոպիան փոխվում է նաև քիմիական ռեակցիաների ժամանակ:

• **Շենոնի Էնտրոպիա:** «Էնտրոպիա» հասկացությունը փոխառնվելով թերմոդինամիկական-վիճակագրական ֆիզիկայից, ներառվել է ինչպես դասական, այնպես էլ քվանտային ինֆորմացիայի տեսությունում: Այստեղ Էնտրոպիան նկարագրում է ազդանշանի կամ պատահարում պարունակված ինֆորմացիայի չափը արդյունքը ստացողի տեսանկյունից: Ինֆորմացիոն Էնտրոպիայի գաղափարը ձևակերպել է Շենոնը 1948 թ. ելնելով ազդանշանի կամ պատահարի մեջ անորոշության (քառսայնության) պարունակման չափից: Ասվածը մեկնաբանելու համար հիշենք հավանականությունների տեսությունում հաճախ օգտագործվող գնդիկներով լցված արկղի օրինակը: Եթե գնդիկները տարբեր գույների են, և գունային առավելություններ չկան, ապա անորոշությունը պատահական դուրս հանված գնդիկի գույնի վերաբերյալ կլինի մաքսիմալ: Մյուս կողմից, եթե արկղը պարունակի համեմատաբար ավելի



Կլոդ Շենոն
(1916 – 2001)

թվով, ասենք, կարմիր գնդիկներ, ապա անորոշությունը գնդիկը հանելու արդյունքի մասին մի փոքր կնվազի. այն ավելի շատ հնարավորություն ունի լինելու կարմիր, քան մնացած գույներից յուրաքանչյուրը: Որևէ մեկին ասելով ամեն մի նոր հանված գնդիկի գույնը՝ առաջին դեպքում մենք նրան միջինում ավելի տեղեկատվություն ենք հաղորդում, քան երկրորդում, քանի որ առաջին դեպ-

քում կար ավելի մեծ անորոշություն, ինչպիսին կարող էր լինել պատահարը, քան կար երկրորդում: Մասնավորապես, եթե մնացած գնդիկները բոլորը նույն գույնն ունեն, ապա հաջորդ գնդիկը հանելիս գույնի ասելը ոչ մի տեղեկատվություն չի պարունակում, քանի որ այդպես էլ պետք է լիներ: Եթե գնդիկները հանելու պատահարն անվանենք ազդանշան, ապա գալիս ենք եզրակացության, որ առաջին դեպքի ազդանշանում էնտրոպիան ավելի է, քան երկրորդ դեպքի ազդանշանում: Շենոնը, փաստորեն, կիրառել է էնտրոպիան որպես տեղեկատվության միջին պարունակություն ազդանշանում, որը կապված է պատահական ելքերի հետ:

Ի դեպ, գիտության պատմությունն ասում է, որ էնտրոպիայի հավանականային մեկնաբանությունը համապատասխան բանաձևով առաջինը դուրս է բերել մեծ ֆիզիկոս Պաուլին դեռևս 1927 թ-ին:

Եթե որևէ X դիսկրետ պատահական փոփոխական ունի $x_1, \dots, x_n$ վիճակներ (կամ ելքեր), ապա Շենոնի էնտրոպիան սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i),$$

որտեղ $p(x_i) = \text{probability}(X = x_i)$ -ը i -րդ ելքի հավանականությունն է:

Տվյալների աղբյուրի համատեքստում էնտրոպիան մեկնաբանվում է որպես միջինում յուրաքանչյուր սիմվոլի (տառի) համար անհրաժեշտ բիթերի թիվ աղբյուրի տվյալների կոդավորում իրականացնելու համար: Անգլերեն տեքստերում յուրաքանչյուր տառի բաժին ընկնող էնտրոպիան ընկած է 0.6-ից մինչև 1.3 միջակայքում: Լրացնենք նաև, որ էնտրոպիան

որպես աղբյուրի տեղեկատվական բովանդակության բնութագրիչ բացարձակ չէ, քանի որ կախված է աղբյուրի հավանականային մոդելից: Վերցնենք պարզագույն օրինակ, երբ աղբյուրի ելքը կազմում է $ABABABAB\cdots$ հաջորդականությունը: Եթե հավանականային մոդելը անկախ է դիտում առանձին տառերը, ապա տեղեկատվական էնտրոպիան՝ աղբյուրից ընդունիչին տեղեկատվության (առանց կորստի) փոխանցման նվազագույն հնարավոր արագությունը, կլինի

$$H = -(p(A)\log_2 p(A) + p(B)\log_2 p(B)) = -\left(\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2}\right) = 1,$$

մեկ բիթ յուրաքանչյուր տառին: Իսկ եթե հաջորդականությունը դիտվի $ABABABAB\cdots$ տեսքով, այսինքն՝ որպես երկտառ բլոկային սիմվոլների շարք, ապա տեղեկատվական էնտրոպիան կլինի զրո՝

$$H = -p(AB)\log_2 p(AB) = -1 \cdot \log_2 1 = 0:$$

Շենոնի էնտրոպիան հնարավորություն է գնահատելու կապի կանալի թողարկման նվազագույն ունակությունը, որն անհրաժեշտ է աղբյուրի տվյալները բինար կոդավորմամբ վստահելիորեն հաղորդելու համար:

§ 49. Ինքնակազմակերպում և քառս

• **Ինքնակազմակերպում:** Ինքնակազմակերպումը կարգավորվածության ի հայտ գալն է ինքնաբերաբար, նրա առաջացումը հիմնականում ներքին ռեսուրսների հաշվին: Ֆիզիկայում դա հաճախ վերաբերում է ձևերին, ինչպիսին են ձյան փաթիլները պատկերներին, ծածանքներն ավազի վրա և այլն:



Մեկ այլ օրինակ: Երբ բրոնզե փոքրիկ (0.165 մմ տրամագծով) գնդիկների շերտով լցված հարթ տաշտակը տատանվում է վեր և վար վակուումում որոշակի հաճախություններով, ապա բրոնզե ավազի մակերևույթը ձևավորում է կայուն դեզեր: Այս, այսպես կոչված, օսցիլոնները նաև ճոճվում են վերև և ներքև, կարող են շարժվել և փոխազդել մեկը մյուսի հետ:

Դիսկրետ համակարգերը՝ օժտված ոչ գծայնություններով, կարող են ցուցաբերել լոկալիզացված օսցիլյացիաներ:

Ինքնակազմակերպման ակնառու, սակայն որակական նոր հարթության մեջ գտնվող երևույթներ են բոլոր աճի պրոցեսները, հիերարխիայի, գունային հարմոնիայի ձևավորումը կենդանական և բուսական աշխարհում, յուրաքանչյուր օրգանիզմի կենսագործունեությունը և այսպես շարունակ: Ինքնակազմակերպում անընդհատ ընթանում է նաև մարդկային հասարակությունում:



Խնդիրը, իհարկե, արխիբարդ է, բայց, այնուամենայնիվ, կարգավորվածության առաջացման և անհետացման պայմանների վերաբերյալ հետազոտությունները թույլ են տվել ձևակերպել մի քանի կոնցեպցիաներ՝ անկախ ֆիզիկական համակարգի մանրամասներից:

Խնդրի արմատները գնում են մինչև այն ակնհայտ դժվարությունը, եթե չասենք կոնֆլիկտը, որն առկա է մեխանիկական-էլեկտրադինամիկական դետերմինիզմի, որի ուղղակի

հետևանքն էր էնտրոպիայի, այսինքն՝ քաոտիկության - անշրջելիորեն աճման միտումը թեմոդինամիկական համակարգերում, մի կողմից, և մյուս կողմից համաչափությունների ու սիմետրիաների շարունակական ձևավորումները շրջապատող աշխարհում, առանձնապես կենսաբանական օրգանիզմներում, որտեղ այն պարզապես օրինաչափություն է:

XX դարի ֆիզիկական գիտությունը նկատելի առաջընթաց է կատարել կոնֆլիկտի մեղմման ուղղությամբ, ինչը պայմանավորված էր քվանտային ֆիզիկայի կողմից միկոաշխարհում տեղի ունեցող ֆիզիկական օրինաչափությունների սկզբունքորեն ոչ դետերմինիստիկ, հավանականային մեկնաբանությամբ: Գաղափարների զարգացման այս նոր տեսակետի համաձայն՝ անգամ անկենդան աշխարհում համակարգի ապագան միարժեք չի որոշվում ներկա և անցյալ վիճակներով: Այսօր մենք ընդունում և ընկալում ենք, որ կարգավորության ի հայտ գալը և քաոսի առանձնահատկությունները համատեղելի են բնական համակարգերի էվոյուցիայի դեկավարման օրենքների հետ: Մենք բացահայտել և ընդունում ենք էվոյուցիայի օրենքների ոչ գծային բնույթը, ինչը ապագան ձևավորող գլխավոր մղող հատկությունն է և գտնվում է համակարգերի ինքնակազմակերպման և քաոտիկ էվոյուցիայի հիմքերում: Կարգը և քաոսը ակունքից ելնում են համատեղ:

Քննարկումները նաև ասում են, որ կենսաբանական համակարգերում կարգավորվածության ձևավորման համար թերմոդինամիկայի օրենքները չէ, որ դնում են գլխավոր սահմանափակումները: Կենդանի օրգանիզմի կառուցումը չի կատարվում էնտրոպիայի զգալի նվազման հաշվին: Էնտրոպիայի նվազումը, ինչը տեղի է ունենում կենդանական և բուսական համակարգերում կարգավորվածությունների ձևավոր-

ման ընթացքում, կարող է հեշտորեն կոմպենսացվել սննդանյութերի քայքայման և այլ առնչվող ֆիզիկական և քիմիական պրոցեսներով՝ բավարարելու համար էնտրոպիայի վրա թերմոդինամիկայից եկող սահմանափակումները: Կենսաբանական համակարգերը ինքնակազմավորվում են թերմոդինամիկական շատ փոքր ծախսով:

Քառս: Մեխանիստական դետերմինիստական գաղափարներին առարկություններն աստիճանաբար ձևավորվել և առաջընթաց են ապրել հատկապես XX դարում՝ սկսած Պուանկարեի պիոներական աշխատանքներից՝ քառսի՝ ոչ գծային համակարգերի յուրահատուկ դինամիկ վարքի վերաբերյալ, մինչև Կոլմոգորովի և հետևորդների աշխատանքները, որոնք մտցրին «սահմանային» ցիկլերի և «ատրակտորների»՝ որպես ոչ գծային համակարգերում կայուն օրբիտաների հասկացությունները և ուսումնասիրեցին դրանց ձևավորման անհրաժեշտ պահանջները, ինչպիսիք են բարձր զգայնությունը սկզբնական պայմանների նկատմամբ, ֆիզիկական մոդելի ոչ հարթ՝ տարածական լինելը, տիրույթների ընդարձակման տոպոլոգիական խառնման հատկությունը և այլն:



Անրի Պուանկարեն և Մարիա-Սկլադովսկայա
Կյուրին Սոլվեյյան առաջին կոնֆերանսում (1911 թ.):

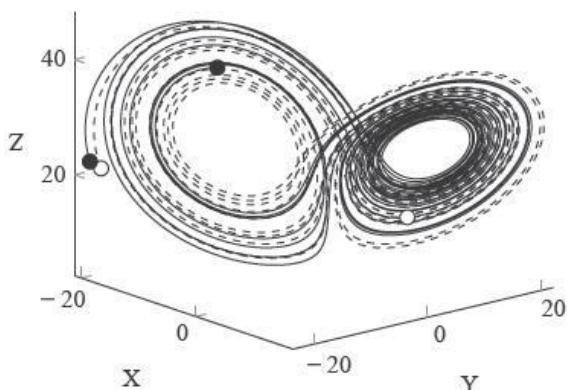


Անդրեյ Կոլմոգորով
(1903-1987)

Գծային համակարգերը երբեք չեն լինում քառտիկ: Դրա ձևավորման համար դինամիկ հավասարումների ոչ գծային բնույթն անհրաժեշտ պայման է:

Հարկ է նաև նշել, որ մակրոսկոպիկ թվով մասնիկների գոյությունն ինքնին չի ապահովում քառաի ի հայտ գալը: Օրինակ, քննելով ներքին երկու տեղից տաքացվող հեղուկի բարակ շերտի պարզեցված մոդելի եռաչափ խնդիրը՝ օդերևութաբան

Լորենցը ցույց է տվել, որ հեղուկի հանգստի վիճակն անկայուն է և անցնում է երկու կոնվեկցիոն բջիջներով կառուցվածքի, եթե հեղուկի տրված ջերմաստիճանների տարբերությունը հորիզոնական վերին և ներքին մակերևույթների միջև գերազանցում է որոշակի տարբերությունը: Համակարգի հետագիծը եռաչափ ֆազային տարածությունում ի հայտ է բերում ոչ պարբերական վարք՝ վերջավոր ժամանակում զուգամիտելով սահմանափակ ենթատարածության մեջ, որը կոչվում է ատրակտոր (Նկ. 49.1): Ի հավելումն, սկզբնապես մոտ հետագծերն աստիճանաբար հեռանում են իրարից, ինչը նշանակում է, որ սկզբնական վիճակի որոշման ամեն մի փոքր սխալ դուրս է թողնում համակարգի դիրքը ֆազային տարածության՝ տվյալ ժամանակամիջոցի համար նախապես որոշված տիրույթից: Շարժման վարքը դետեմինիստիկ է և ոչ պարբերական, բայց, այնուամենայնիվ, ոչ կանխատեսելի՝ ի հաշիվ սկզբնական պայմանների որոշման մեջ առկա անճշտությունների:



Նկ. 49.1

Այսպիսով, կայուն կանոնավոր շարժումը բնության մեջ բացառություն է՝ ի հակադրություն նրա, ինչը մինչ այդ ենթադրվում էր մեխանիկական շարժումների համար: Ոչ կանոնավորությունն աստղի շուրջ պտտվող մոլորակների համար առաջանում է երկնային այլ մարմինների՝ աստղի շուրջ պտտվող մյուս մոլորակների և մոլորակների բնական արբանյակների կողմից մտցվող թույլ խտտորումների հաշվին: Մոլորակների հետագծերի ոչ կանոնավորություններն ի հայտ են գալիս մեծ, հաճախ միլիոնների կարգի տարիների ժամանակահատվածներում:

• **Ժամանակային և տարածական կարգավորվածություններ:** Բնական համակարգերն առանձնանում են ոչ միայն քառտիկությամբ, այլև կոռպերատիվ էֆեկտներով, ռիթմերով և տարածական կարգավորվածություններով: Դրանցից առավել պարզ են երկբաղադրիչ համակարգերը, օրինակ՝ քիմիական երկու տարրերի միջև կատալիտիկ ռեակցիան, երբ ռեակցիայի արագությունը փոփոխվում է երկու կատալիզատոր ռեակտիվների ազդեցությամբ, որոնց քանակությունները

ռեակցիայի ընթացքում մնում են անփոփոխ: Դրանց համար գործող զանգվածների օրենքի կիրառումը հանգեցնում է ոչ գծային երկու հավասարումների,

$$\frac{dX}{dt} = A - (B+1)X + X^2Y,$$

$$\frac{dY}{dt} = BX - X^2Y,$$

որտեղ A -ն և B -ն կատալիզատոր ռեակտիվների կոնցենտրացիաներն են, X -ը և Y -ը՝ քիմիական տարրերի կոնցենտրացիաները:

Համակարգն օժտված է ստացիոնար (անփոփոխ) վիճակով, երբ $X_{\text{steady}} = A$, $Y_{\text{steady}} = B/A$: Դիտարկենք կայունության խնդիրը ստացիոնար վիճակի շուրջ՝ X -ը և Y -ը փնտրելով $X = A + \delta X$ և $Y = B/A + \delta Y$, $\delta X \ll 1$, $\delta Y \ll 1$ տեսքերով, որոնցում $\delta X \propto \exp(\alpha t)$, $\delta Y \propto \exp(\alpha t)$: Տեղադրումից հետո ստանում ենք, որ զրոյից տարբեր լուծումներ ստանալու՝ դետերմինանտի զրո լինելու պայմանը էքսպոնենտային α գործակցի համար տալիս է

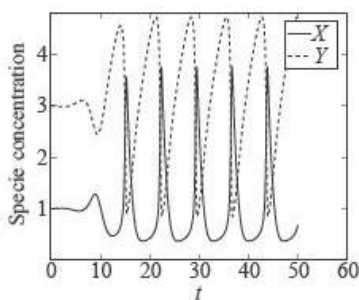
$$\alpha = \frac{1}{2} \left(B - A^2 - 1 \pm \sqrt{(B - A^2 - 1)^2 - 4A^2} \right)$$

արտահայտությունը: Անկայունության (ժամանակի ընթացքում աճելու) համար անհրաժեշտ է $\alpha > 0$ պայմանի բավարարումը, ինչը հնարավոր է միայն, եթե.

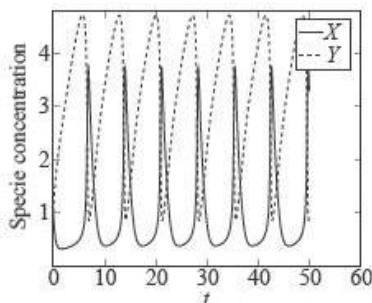
$$B > A^2 + 1:$$

Հետագայում աճը դադարում է՝ վերածվելով ոչ գծային սահմանային ցիկլերի լավ որոշված ամպլիտուդով և հաճախությամբ, ինչպես պատկերված է Նկ. 49.2ա-ում:

Նկ. 49.2բ-ում նման գրաֆիկներ կառուցված են հակառակ՝ $B < A^2 + 1$ դեպքում:



ա)



բ)

Նկ. 49.2

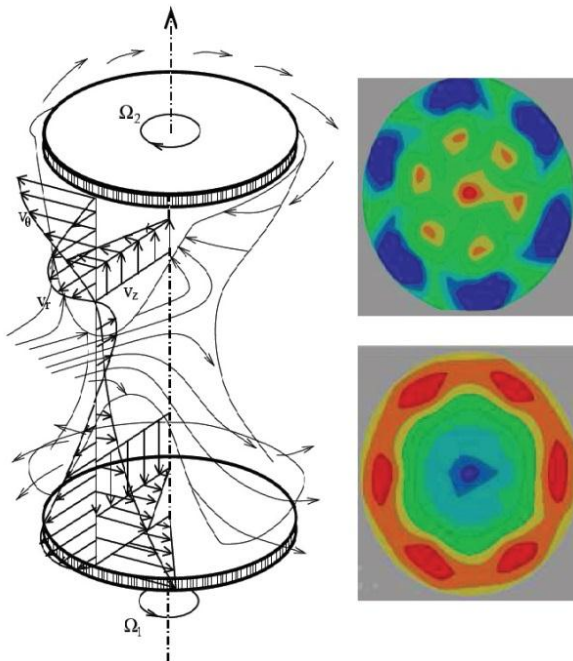
Ինչպես տեսնում ենք, տարածական կախումից (անհամասեռությունից) զուրկ երկչափ ոչ գծային մոդելն ի հայտ չի բերում քաոտիկ բնույթ: Այստեղ առկա է ժամանակային կարգավորվածություն:

Մոդելին տարածական կախում հաղորդելը մոդելին վերագրում է անվերջ թվով ազատության աստիճաններ, ինչի արդյունքում համակարգում ձևավորվում են որոշ տեսակի ստացիոնար պատկերներ և ալիքային երևույթներ, իսկ որոշ դեպքերում նաև տարածաժամանակային քաոտիկություն:

Որպես տարածական կարգավորվածության ձևավորման օրինակ հղում անենք հակառակ ուղղություններով պտտվող երկու տափօղակների արանքում գտնվող հեղուկում ձևավորվող հիդրոդինամիկ հոսքերի դաշտի վրա: Պտույտը տափօղակների մակերևույթներին մոտ առաջացնում է հեղուկի դեպի դուրս հոսք, ինչը կառուցվածքի կենտրոնական տեղամա-

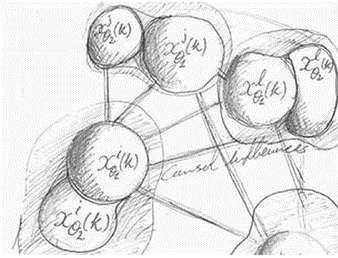
սում փոխվում է ներհոսքի (Նկ. 49.3): Ձախում պատկերված են հոսքագծերը տափօղակների միջև տարածքում:

Խնդիրն ունի որոշ ստացիոնար լուծումներ, որոնք առանցքից փոքր հեռավորությունների վրա անկախ են φ ազիմուտալ անկյունից: Որոշակի հեռավորությունից հետո ստացիոնար լուծումները կորցնում են ազիմուտալ անկախությունը և առաջացնում են տարածական պատկերներ, ինչպիսիք ներկայացված են Նկ. 16.3-ի աջակողմյան պատկերում: Ստացիոնար պատկերների կայունությունը որոշող չափողականությունից զուրկ հեռավորությունը Ռեյնոլդսի թվի անալոգն է այս կառուցվածքի համար:



Նկ. 49.3

• **Բարդ ցանցային համակարգեր:**



Ինֆորմատիկայի ոլորտում գտնում են, որ ոչ հավասարակշիռ ցանցերը շատ հեռու չեն քառսիկ բնույթից: Քանցի ցանուցիր միացված հանգույցների պարագան ձևավորում է կառուցվածք, որի հատկությունները պարունակում

են ավելին, քան են առանձին հանգույցների հատկությունները: Այսպիսի ցանցերին անվանում են բարդ համակարգեր:

Բուլյան հանգույցներով մեծ ցանցերի ամեն մի հանգույց յուրաքանչյուր դիսկրետ քայլում կարող է ակտիվանալ կամ ոչ՝ կախված տեղեկատվությունից, որը նա ստանում է մի քանի այլ հանգույցներից (օրինակ՝ ընդհանուր թվով 50 հանգույցներ, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի միննույն թվով, ասենք երեք, մուտքային միացումներ մյուս հանգույցներից) և հանգույցների վրա պատահականորեն բաշխվող վերահսկման կանոններից: Այսպես կառուցված ցանցերը ցուցաբերում են բազում որակապես տարբեր վարքեր:

Շատ ազատորեն միացված ցանցերը, սկսելով հավասարակշռությունից դուրս սկզբնական վիճակներից, ընթանում են դեպի ստացիոնար վիճակ, որում հանգույցների մի մասը ակտիվացած է, իսկ մնացածը՝ ոչ: Եթե ստացիոնար վիճակում փոխվում է ընդամենը մի քանի հանգույցների վիճակը, ապա ստացիոնար վիճակն արագորեն վերականգնվում է: Համակարգը չափազանց կոշտ է և չի տեղափոխում տեղեկատվությունը:

Ավելորդ չափով միացումներով ցանցն ընթանում է դեպի քառսային վիճակ, որում համարյա բոլոր հանգույցները «թար-

թում են» բուլյան երկու վիճակների միջև: Այս դեպքում մի քանի հանգույցների վիճակների փոփոխումը չի անդրադառնում ցանցի քառտիկ վարքի վրա: Տեղեկատվության անցումը նորից բացակայում է:

Այլ է իրավիճակը ցանցառ միացումների դեպքում: Այս ցանցերը ինքնակազմակերպվում են կայուն պատկերներում, ակտիվացված հանգույցների կլաստերներով, չակտիվացված հանգույցների կլաստերներով և բուլյան երկու վիճակների միջև «թարթող» հանգույցներով: Ոչ շատ մեծ թվով հանգույցների վիճակի փոփոխությունը ժամանակավորապես փոխում է ցանցի մի մասի վիճակը, սակայն կայուն և «թարթող» հանգույցներով կլաստերների նախնական պատկերն աստիճանաբար վերականգնվում է: Ցանցը թույլ է տալիս տեղեկատվության անցումը: Ավելի մեծ խոտորումները կարող են ցանցը մղել ուրիշ ստացիոնար վիճակի: Այնուամենայնիվ, գոյություն ունեն ատրակտորների ավազաններ, որոնց հարևանության վիճակներն աստճանաբար ընթանում են դեպի համակարգի համար թույլատրելի ստացիոնար վիճակների նեղ ենթատարածություն:

Ներկայացված մոդելը թույլ է տալիս նաև քառսի հարևանությամբ վիճակներ՝ կոմպրոմիսային կայունության և դյուրաթեքության միջև՝ ընդդիմանալու համար արտաքին միջավայրի փոփոխություններին:

Հետազոտական փորձեր են արվում պատկերացնելու կայունության կղզյակները՝ ատրակտորները, որպես կենսաբանական բջիջների տարբեր տեսակների մոդելային ներկայացումներ:

§ 50. Բրոունյան շարժում

Թերմոդինամիկական-ստատիստիկական հզոր տեսությունը, որը բխում է «հավանականության բաշխում» հասկացությունից, պատահական երևույթների նկարագրության միակ հնարավոր մեթոդը չէ: Լայնորեն հայտնի է Լանժինի-Սմալտիլտվսկի մոտեցումը, ինչը թույլ է տալիս նյութոսկայան դինամիկային առավել մոտիկ պատկերացումներով մոդելավորել և հետազոտել խնդրո առարկան պատահական երևույթների դասից՝ սկսած ֆիզիկայից մինչև քիմիա, բիոլոգիա, տեխնոլոգիաներ և մարկետինգային շուկա: Մոտարկումը հատկապես հարմարեցված է առանձին օբյեկտի՝ արտաքին պատահական պայմաններում դրսևորող օրինաչափություններն ուսումնասիրելու համար:



Փոլ Լանժին (1872-1946)



Մարիան Սմոլտիլտվսկի (1872-1917)

Մեթոդի մոտեցման տարրերը քննարկենք բրոունյան շարժման օրինակի վրա: Երևույթն այն է, որ հեղուկում կամ գազում կախության վիճակում գտնվող փոքրագույն մասնիկը կատարում է ստոխաստիկ (քառտիկ) շարժում: Շարժումը

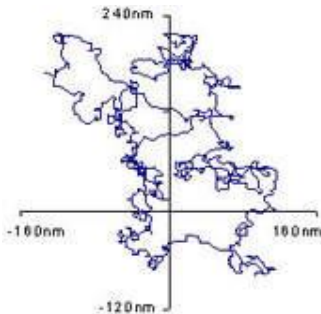
թվում է ինքնակամ ու մշտական, այնքան ավելի ակտիվ է, որքան փոքր է հեղուկի մածուցիկությունը: Դիտումներից մեկում բրոունյան մասնիկի հետագիծը ներկայացված է Նկ. 2.16 ա-ում:



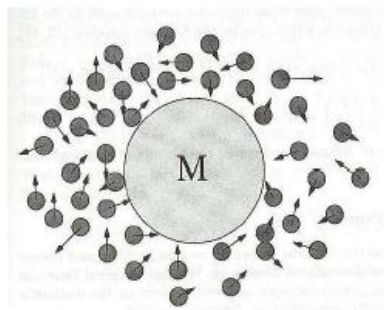
Ալբերտ Բրոուն
(1879-1955)

Երևույթը երկար ժամանակ մնում էր անբացատրելի մինչև նյութի կազմության մոլեկուլային-կինետիկ տեսության ընդունումը և հիմնավորումը: Բրոունյան մասնիկն ինքնաբերաբար չի շարժվում: Նրա շարժումն առաջանում է շրջապատում շարժվող ատոմների (մոլեկուլների) կողմից մասնիկին հասցված հարվածներով, որոնց արդյունաբար ազդեցությունը մասնիկի վրա անընդհատ ան-

կանոն կերպով փոփոխվում է ուղղությամբ և մեծությամբ: Բրոունյան մասնիկի շարժման ստոխաստիկ բնույթը պայմանավորված է բոլոր կողմերից իր ստացած հարվածների ստոխաստիկ բնույթով:



ա)



բ)

Նկ. 50.1

Բրոունյան մասնիկի չափերը ընկած են մոտ 10^{-7} -ից ինչև $5 \cdot 10^{-5}$ սմ սահմաններում:

Բրոունյան մասնիկը պետք է նկարագրելի լինի նույն շարժման հավասարումներով, ինչ ամեն մի այլ դինամիկ մեխանիկական համակարգ: Դասական մեխանիկայում դրանք Նյուտոնի հավասարումներն են կամ դրանց համարժեք Համիլտոնի կամ Լագրանժի հավասարումները: Պարզության համար դիտարկենք միաչափ շարժման դեպքը: Նյուտոնի II օրենքն ասում է.

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t),$$

որտեղ $v(t)$ -ն մասնիկի արագությունն է ժամանակի որևէ t պահի, $F(t)$ -ն մասնիկի վրա ազդող ակնթաթային համագորուծն է, m -ը՝ մասնիկի զանգվածը: Եթե մասնիկի շրջակա ատոմների (մոլեկուլների) դիրքերը հայտնի լինեին ժամանակի կամայական պահին, ապա շարժումը որոշող $F(t)$ ուժը սկզբունքորեն ժամանակի հայտնի ֆունկցիա կլիներ: Այդ իմաստով այն բոլորովին էյ պատահական ուժ չէ:

Բնորոշ բոլոր դեպքերում հնարավոր և անգամ ցանկալի չէ փնտրել $F(t)$ -ի ճշգրիտ արտահայտությունը: Փորձերն ասում են մեզ, որ ուժում գերակա դեր է կատարում միջին ուժը, քննարկվող դեպքում՝ հեղուկ շփման կամ դիմադրության $-\gamma v(t)$ ուժը, որը ուղիղ համեմատական է բրոունյան մասնիկի արագությանը: Ազդող ուժի մեջ մնացած, պատահական, արագորեն փոփոխվող մասը նշանակենք $\xi(t)$ -ով:

Այս տարանջատումից հետո բրոունյան մասնիկի շարժման հավասարումը կլինի

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v(t) + \frac{1}{m}\xi(t): \quad (50.1)$$

Սա Լանժմիրի հավասարումն է բրոունյան մասնիկի շարժման համար: $\xi(t)$ ուժն անհայտ է, սակայն ելնելով ֆիզիկական ինտուիցիայից՝ նրա վերաբերյալ կատարվում են հետևյալ ենթադրությունները՝ $\xi(t)$ -ի ստոխաստիկ հատկություններն անկախ են v -ից, այնպես որ այն գործում է որպես արտաքին ուժ: Ստոխաստիկ ուժի միջինը զրո է.

$$\langle \xi(t) \rangle = 0: \quad (50.2)$$

Ստոխաստիկ ուժի ավտոկորելյացման ֆունկցիան կարող է մոտարկվել դելտա-ֆունկցիայի միջոցով.

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = g\delta(t-t'), \quad (50.3)$$

որտեղ g -ն հաստատուն է, $\delta(\cdot)$ -ն՝ Դիրակի դելտա ֆունկցիան: Սահմանման համաձայն՝

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \text{ և համապատասխանաբար՝}$$

$$\int_{-a}^{+b} f(x)dx = f(0)$$

կամայական $a, b > 0$ -ի և անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար: (50.3) ավտոկորելյացիան նշանակում է, որ մասնիկի յուրաքանչյուր բախման պրոցես շատ կարճ է համակարգում առկա բնութագրական ժամանակների համեմատ, և այն կարելի է համարել ակնթարթային: Ի լրումն սրան, ամեն բախում տեղի

է ունենում «ինքնին», չի կանխորոշում ապագա բախումը, և կանխորոշված չէ նախկինում տեղի ունեցած բախումներով (մարկովյան պրոցես):

Հարկ է հատուկ ավելացնել, որ կատարված ենթադրություններն ամբողջությամբ չէ, որ կոնկրետացնում են ստոխաստիկ ուժը: Դրանք տալիս են միայն առաջին երկու մոմենտները: Ստոխաստիկ մեծության մոմենտների մասին թեորեմի համաձայն՝ այդ մեծությունն ամբողջությամբ տրվում է նրա բոլոր մոմենտների հանրախմբով:

• **Բրոունյան մասնիկի արագությունը:** Ընդունված ենթադրություններով (50.1) ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումը մասնիկի արագությունը որոշում է որպես պատահական պրոցես, երբ մասնիկի արագությունը ժամանակի ընտրված սկզբնականից հայտնի մեծություն է՝ $v(t=0) = v_0$: Այսպիսի ձևակերպմամբ հավասարման լուծումն արագության համար կարող է գրվել բացահայտ տեսքով՝

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{m} e^{-t/\tau} \int_0^t e^{t'/\tau} \xi(t') dt', \quad (50.4)$$

որտեղ՝ $\tau = m/\gamma$:

Այս հավասարման միջինացումը նշանակում է միջինացում՝ ըստ դեպքերի, որոնց բոլորի համար v_0 -ն նույնն է: Համաձայն (50.2) հատկության՝ կունենանք

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-t/\tau}: \quad (50.5)$$

Մասնիկի արագության պրոյեկցիայի միջինի համար արտաքին պայմանների ստոխաստիկությունն ի հայտ չի գալիս: Գրենք քառակուսու միջինը.

$$\begin{aligned}\langle v^2(t) \rangle &= v_0^2 e^{-2t/\tau} + \frac{e^{-2t/\tau}}{m^2} \int_0^t e^{t'/\tau} dt' \int_0^t e^{t''/\tau} \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle dt'' \\ &= v_0^2 e^{-2t/\tau} + \frac{g}{m^2} e^{-2t/\tau} \int_0^t e^{2t'/\tau} dt' \int_{-t'}^{t-t'} e^{\eta/\tau} \delta(\eta) d\eta\end{aligned}$$

որտեղ հաշվի են առնված (50.2) և (50.3) առնչությունները, և ներքին ինտեգրալում կատարված է փոփոխականի $t'' - t' = \eta$ փոխարինում: Նկատի ունենալով առաջին ինտեգրալի սահմաններից հետևող t' -ի փոփոխման $[0, t]$ սահմանները, տեսնում ենք, որ երկրորդ ինտեգրալում $\eta = 0$ կետն ընկած է ինտեգրալի սահմանների միջև և ուրեմն այդ ինտեգրալը հավասար է մեկի: Դրանից հետո մնացած ինտեգրալն արագորեն հաշվվում է, և ստանում ենք

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2t/\tau} + \frac{1}{2m^2} g \tau (1 - e^{-2t/\tau}): \quad (50.6)$$

Այն աստիճանաբար, անկախ սկզբնական արագությունից, մոտենում է $g \tau / 2 = g m / 2 \gamma$ արժեքին: Վերջինս թույլ է տալիս ստոխաստկության g պարամետրը կապել ռելաքսացման τ ժամանակի (կամ γ մածուցիկության գործակցի) հետ՝ օգտագործելով ընդամենը ջերմաստիճանի սահմանումը որպես մասնիկի միջին կինետիկ էներգիայի չափ՝ $k_B T / 2 = m \langle v^2(\infty) \rangle / 2$: Տեղադրելով ստացված $\langle v^2(\infty) \rangle = g \tau / 2m^2$ տեսքը՝ ստանում ենք

$$g \tau = 2m k_B T \quad \text{կամ} \quad \frac{g}{\gamma} = 2k_B T: \quad (50.7)$$

Իրավիճակի ֆիզիկական մեկնաբանության համար դիտարկենք՝ ինչպիսին կլինեն (50.6) լուծումը հեղուկի մածուցի-

կության բացակայության պայմաններում, $\gamma \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow \infty$) սահմանում: Պարզ գործողությունների արդյունքում ստանում ենք

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 + \frac{g}{m^2} t,$$

այսինքն՝ մասնիկի արագության ֆլուկտուացիաները (դիսպերսիան) անընդհատ կաճեին ժամանակի ընթացքում:

(50.7)-ը ցույց է տալիս, որ հաստատուն ջերմաստիճանում հավասարակշիռ վիճակում գտնվող համակարգում արագության մեծության ֆլուկտուացիաներ առաջացնող ուժի g մեծությունը և այդ արագության ֆլուկտուացիաների մարման γ կամ $1/\tau$ տեմպը պետք է լինեն իրար համեմատական: Շրջապատող ատոմների (մոլեկուլների) անընդհատ բախումները բրոունյան մասնիկին մշտապես ջանում են մեծացնել վերջինիս արագության մեծությունը, իսկ միջինացված դիմադրության ուժը, համեմատական լինելով արագության մեծությանը և ուղղված լինելով դրան հակառակ, անընդհատ ջանում է փոքրացնել արագության մեծությունը: Դա էլ պատճառ է դիսամիկ հավասարակշիռ վիճակի հաստատման:

• **Բրոունյան մասնիկի կոորդինատը:** Բրոունյան մասնիկի արագությունների վերջավոր դիսպերսիան (տես (50.6)-ը) ժամանակի կամայական պահին, ներառյալ $t \rightarrow +\infty$ սահմանը, բոլորովին չի նշանակում, որ նույնպիսի հատկությամբ օժտված է նաև նրա կոորդինատը: Հարցում պարզություն մտցնելու նպատակով վերադառնանք արագության (50.1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և ինտեգրելով այն $x(t=0) = x_0$ պայմանով՝ ստանանք կոորդինատի բացահայտ կախումը ժամանակից.

$$x(t) = x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{1}{m_0} \int_0^t e^{-t'/\tau} dt' \int_0^{t'} e^{t''/\tau} \xi(t'') dt'' :$$

Կոորդինատի միջին արժեքը՝

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}), \quad \langle x(\infty) \rangle = x_0 + v_0 \tau :$$

Երկրորդ առնչությունն ասում է, որ սկզբնական արագությունը կորցնելիս մասնիկը միջինում անցնում է $v_0 \tau$ ճանապարհը, որից հետո ստոխաստիկ շարժումների միջին շեղումը զրո է:

Հաշվենք դիսպերսիան՝ միջին քառակուսային շեղումը:

$$\begin{aligned} \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle &= v_0^2 \tau^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 + \frac{1}{m^2} \int_0^t e^{-t'/\tau} dt' \int_0^{t'} e^{t''/\tau} dt'' \int_0^{t_1} e^{-t_1/\tau} dt_1 \int_0^{t_1} e^{t_2/\tau} \langle \xi(t'') \xi(t_2) \rangle dt_2 : \\ &= v_0^2 \tau^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 + \frac{g}{m^2} \int_0^t e^{-t'/\tau} dt' \int_0^{t'} e^{t''/\tau} dt'' \int_0^{t_1} e^{-t_1/\tau} dt_1 \int_0^{t_1} e^{t_2/\tau} \delta(t'' - t_2) dt_2 \end{aligned}$$

Ներքին ինտեգրալում կատարենք $t_2 - t'' = \eta$ նշանակում՝

$$\int_0^{t_1} e^{t_2/\tau} \delta(t'' - t_2) dt_2 = e^{t''/\tau} \int_{-t''}^{t_1 - t''} e^{\eta/\tau} \delta(\eta) d\eta,$$

որից հետո

$$\begin{aligned} \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle &= v_0^2 \tau^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 + \\ &+ \frac{g}{m^2} \int_0^t e^{-t'/\tau} dt' \int_0^{t'} e^{2t''/\tau} dt'' \int_0^t e^{-t_1/\tau} dt_1 \int_{-t''}^{t_1 - t''} e^{\eta/\tau} \delta(\eta) d\eta : \end{aligned}$$

Վերջին ներքին ինտեգրալի ներքևի սահմանը բացասական է, հետևաբար ինտեգրալը զրոյից տարբեր է և հավասար է մեկի, եթե նրա վերին սահմանը դրական է, այսինքն, եթե $t_1 - t'' > 0$: Այս պայմանը կարելի է բավարարել, եթե վերջին ներքին ինտեգրալի նախորդող ինտեգրալում ներքևի զրո

սահմանը փոխարինենք վերոհիշյալ պայմանից բխող t'' արժեքով: Կունենանք

$$\left\langle \left(x(t) - x_0 \right)^2 \right\rangle = v_0^2 \tau^2 \left(1 - e^{-t/\tau} \right)^2 + \frac{g}{m^2} \int_0^t e^{-t'/\tau} dt' \int_0^{t'} e^{2t''/\tau} dt'' \int_{t''}^t e^{-t_1/\tau} dt_1 :$$

Դրանից հետո մնում են տարրական ինտեգրալներ, որոնց հաշվվումից հետո տարածական վարքի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\begin{aligned} \left\langle \left(x(t) - x_0 \right)^2 \right\rangle = & \left(v_0^2 + \frac{g \tau}{2m^2} \right) \tau^2 \left(1 - e^{-t/\tau} \right)^2 + \\ & + \frac{g \tau^2}{m^2} \left(t + \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \tau \right) \end{aligned} \quad : (50.8)$$

Բավականին ժամանակ անց, $t > \tau$, (50.8)-ից հերթականությամբ հետևում է

$$\left\langle \left(x(t) - x_0 \right)^2 \right\rangle = \left(v_0^2 + \frac{g \tau}{2m^2} \right) \tau^2 + \frac{g \tau^2}{m^2} t \approx \frac{g \tau^2}{m^2} t ,$$

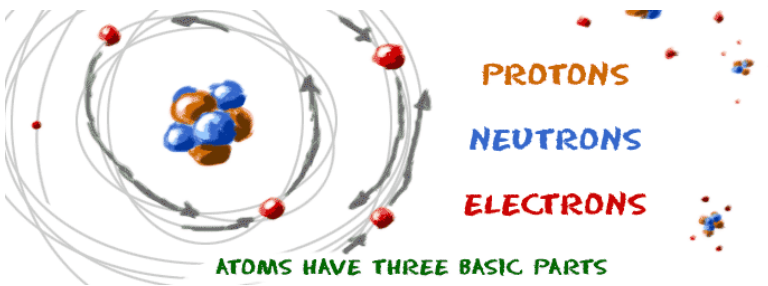
այսինքն՝ բրոունյան մասնիկի կոորդինատի դիսպերսիան ժամանակի ընթացքում աճում է գծային օրենքով: Վերջինս խիստ կարևոր արդյունք է և գործնականում վերաբերում է բոլոր մարկովյան պատահական երևույթներին:

ԳԼՈՒԽ V

Էլեկտրականություն և մագնիսականություն

§ 51. Էլեկտրական և մագնիսական դաշտեր

Մեզ շրջապատող մարմինները, որպես կանոն, կազմված են ատոմներից և մոլեկուլներից, որոնք պարունակում են լիցքավորված տարրական մասնիկներ՝ դրական լիցքավորված պրոտոններ ատոմների միջուկներում և բացասական լիցքավորված էլեկտրոններ, որոնք պտտվում են միջուկի շուրջը (Նկ. 51.1):



Նկ. 51.1

Էլեկտրական լիցքերի ներհատուկ բովանդակությունը մենք տեսնում ենք շրջապատում էլեկտրամագնիսական դաշտերի ստեղծման մեջ: Եթե լիցքերն անշարժ են դիտորդի (գրանցող սարքի) նկատմամբ, ապա դաշտը դառնում է պոտենցիալային, և մենք նրան անվանում ենք էլեկտրաստատիկ կամ էլեկտրական դաշտ: Եթե լիցքավորված մասնիկը շարժվում է հավասարաչափ, ապա էլեկտրաստատիկ դաշտին հավելվում է նոր բաղադրիչ, որն ունենում է արդեն մրրկային բնույթ, և որին անվանում ենք մագնիսաստատիկ կամ մագնի-

սական դաշտ: Առանձնահատկությունն այստեղ այն է, որ հավասարաչափ շարժվող լիցքն ամբողջությամբ իր հետ տանում է իր ստեղծած էլեկտրական և մագնիսական դաշտերը:

Իրավիճակն ամբողջական բովանդակություն է ստանում այն դեպքում, երբ լիցքը շարժվում է արագացումով: Էլեկտրական դաշտը նոր, մրրկային բաղադրիչ է ձեռք բերում և էլեկտրական ու մագնիսական դաշտերը փոխկապակցվելով կազմում են միասնական էլեկտրամագնիսական դաշտ:

Արագացող լիցքերի դեպքում սկզբունքային կարևոր է դառնում այն, որ դաշտի մի մասն անվերադարձ հեռանում է լիցքից էլեկտրամագնիսական ալիքի տեսքով: Էլեկտրական լիցքերը ճառագայթում են էլեկտրամագնիսական ալիքներ:

§ 52. Էլեկտրական դաշտի հավասարումները

Էլեկտրամագնիսական երևույթների ուսումնասիրությունն անցել է երկար ճանապարհ և ուղեկցվել է մեծագույն հայտագործություններով: Նշենք դրանցից ուղենիշային կարևորություն ունեցածները դիֆերենցիալ և ինտեգրալ ձևակերպումներով:

Էլեկտրաստատիկ դաշտի վերաբերյալ: Էլեկտրաստատիկ դաշտն առաջանում է էլեկտրական լիցքերից

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (52.1)$$

օրինաչափությամբ, որտեղ Δ ախի էլեկտրական դաշտի դիվերգենցիան սահմանվում է վեկտորների սկալյար արտա-

դրյալի անալոգիայով. վեկտորական $\nabla = \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x} \right\}$

օպերատորի սկալյար արտադրյալային ազդեցությունն է
 էլեկտրական դաշտի $\mathbf{E}$ լարվածության վրա՝

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} :$$

(52.1)-ի աջում ρ -ն էլեկտրական լիցքերի խտությունն է,
 ε_0 -ն՝ էլեկտրական հաստատունը՝ հավասար $8.85 \cdot 10^{-12}$ Ֆ/մ:
 էլեկտրական լիցքերի տրված բաշխման պայմաններում այս
 մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումը թույլ
 է տալիս որոշել էլեկտրաստատիկ դաշտի բաշխումը տարա-
 ծության մեջ:

Ուղղակի տեղադրումով կարելի է համոզվել, որ կամայա-
 կան $\mathbf{F}$ վեկտորական ֆունկցիայի համար
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ նույնաբար, որտեղ ռոտոր (մրրիկ)
 օպերատորական գործողությունը սահմանվում է վեկտորա-
 կան արտադրյալի անալոգիայով՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(\nabla_y B_z - \nabla_z B_y) + \mathbf{j}(\nabla_z B_x - \nabla_x B_z) + \mathbf{k}(\nabla_x B_y - \nabla_y B_x) =$$

$$\mathbf{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) :$$

Այստեղից հետևում է, որ էլեկտրաստատիկ դաշտի $\mathbf{E}$
 լարվածությունը (կամ նրա մի որոշակի մասը) չի կարող ար-
 տահայտվել որևէ ֆունկցիայի ռոտորի միջոցով: Ասում ենք, որ
 էլեկտրաստատիկ դաշտը զուրկ է մրրիկներից, այն պոտեն-
 ցիալային է:

Այժմ (52.1)-ի երկու մասերն ինտեգրենք որևէ V ծավալով
 և ձախակողմյան ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք Գաուսի

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

բանաձևը, որը որևէ $\mathbf{F}$ վեկտորական ֆունկցիայի դիվերգենցիայի ծավալային ինտեգրալն արտահայտում է այդ ծավալը պարփակող մակերևույթի միջով նույն ֆունկցիայի հոսքի միջոցով: (52.1)-ի փոխարեն կունենանք

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (52.2)$$

ինտեգրալ հավասարությունը: Այն պնդում է, որ փակ մակերևույթից ներս էլեկտրական լիցքերի առկայության դեպքում



Վառլ Գաուս
(1777-1855)

այդ մակերևույթով առաջանում է էլեկտրական դաշտի հոսք դեպի դուրս դրական լիցքերի դեպքում, դեպի ներս՝ բացասական լիցքերի դեպքում: Վերջինս հիմք է տալիս երկրաչափական մեկնաբանության, որ էլեկտրաստատիկ դաշտի ուժագծերը դուրս են գալիս դրական լիցքերից և մտնում-վերջանում են բացասական լիցքերի մեջ:

§ 53. Մագնիսական դաշտի հավասարումները

Մագնիսաստատիկ դաշտն առաջանում է շարժվող էլեկտրական լիցքերից (էլեկտրական հոսանքներից)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (53.1)$$

օրինաչափությամբ, որտեղ $\mathbf{B}$ -ն մագնիսական դաշտի ուժային բնութագրիչն է՝ ինդուկցիան, $\mathbf{j}$ -ն հոսանքի ուժի խտու-

թյունն է, μ_0 -ն՝ մագնիսական հաստատունը (հավասար $1.26 \cdot 10^{-6}$ Ն/մ): Կոորդինատների դեկարտյան համակարգում՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right):$$

(53.1) մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումը թույլ է տալիս որոշելու մագնիսական դաշտի բաշխումն էլեկտրական հոսանքի հայտնի խտության բաշխման պայմաններում:

Քանի որ $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ նույնաբար կամայական $\varphi(\mathbf{r})$ ֆունկցիայի դեպքում, ապա $\mathbf{B}$ ինդուկցիան կամ նրա որոշակի մասը չեն կարող ներկայացվել որևէ սկալյար ֆունկցիայի գրադիենտի միջոցով: Մագնիսական դաշտը մրրկային է:

Ինտեգրենք (53.1)-ը որևէ S մակերեսով և ձախակողմյան ինտեգրալի համար օգտագործենք Ստոքսի թեորեմը.

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l},$$



Գեորգ Ստոքս
(1819-1903)

որն էլ վեկտորական ֆունկցիայի ռոտորի մակերևութային ինտեգրալը կապում է այդ մակերևութի եզրագծով կոնտուրային ինտեգրալի հետ: Արդյունքում (53.1)-ի փոխարեն կստանանք հետևյալ ինտեգրալային առնչությունը՝

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}: \quad (53.2)$$

Այն ասում է, որ որևէ մակերևույ-

թով անցնող հոսանքի ուժը ստեղծում է այնպիսի մագնիսական դաշտ, որի ինդուկցիայի վեկտորի ցիրկուլյացիան այդ մակերևույթի եզրագծով հավասար է այդ հոսանքի ուժին: Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ մագնիսական ինդուկցիայի գծերը փակ են, փակվում են իրենք իրենց վրա: Բոլորովին պարտադիր չէ, որ ուժագիծը գտնվի մեկ հարթության մեջ:

(52.2) և (53.2) ինտեգրալային տեսքերը թույլ են տալիս խնդրում համաչափությունների առկայության պայմաններում հեշտորեն լուծելու էլեկտրաստատիկ և մագնիսաստատիկ դաշտերի որոշման խնդիրները լիցքերի և հոսանքների խտությունների տրված բաշխումների դեպքում:

Ի դեպ, վեկտորական դաշտի դիվերգենտային և ռոտորային հայտանիշերը լրիվությամբ ամփոփում են նրա հատկություններն այն իմաստով, որ համաձայն Հելմհոլցի վերլուծության մասին թեորեմի, եթե $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ վեկտորական դաշտի դիվերգենցիան և ռոտորը որոշված են բաց V տիրույթի յուրաքանչյուր կետում, ապա V -ում ամենուրեք $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ֆունկցիան կարող է ներկայացվել մրրիկներից գուրկ $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ պոտենցիալային և պոտենցիալայինից գուրկ $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$ մրրկային (սուլենոիդալ) դաշտերի գումարի տեսքով՝

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}),$$

որտեղ՝ $\operatorname{rot} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = 0$ նույնաբար: Սրանցից առաջինը թույլ է տալիս մրրիկներից գուրկ էլեկտրաստատիկ բաղադրիչը գրել որևէ $-\varphi(\mathbf{r})$ սկալյար ֆունկցիայի գրադիենտի տեսքով, իսկ երկրորդը՝ մագնիսաստատիկ բաղադրիչը՝ գրել որևէ $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ վեկտորական ֆունկցիայի ռոտորի տեսքով.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) + \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}):$$

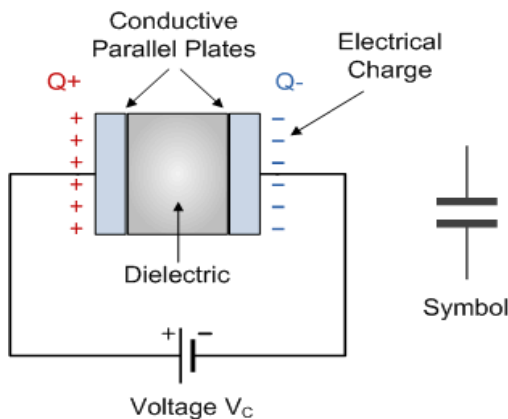
Ստատիկ էլեկտրամագնիսական դաշտի համար φ -ն և $\mathbf{A}$ -ն կոչվում են համապատասխանաբար սկալյար և վեկտորական պոտենցիալներ, ընդ որում վերլուծության առաջին անդամը ներկայացնում է էլեկտրական, երկրորդը՝ մագնիսական դաշտը: Սկալյար և վեկտորական պոտենցիալների ընտրությունը միարժեք չէ. սկալյար պոտենցիալը որոշվում է կամայական հաստատունի ճշտությամբ, վեկտորականը՝ կամայական $\chi(\mathbf{r})$ ֆունկցիայի գրադիենտի ճշտությամբ:

§ 54. Կոնդենսատորներ

Գիտահետազոտական և կիրառական տեխնիկական խնդիրները պահանջում են էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի կուտակիչներ, որոնք թույլ են տալիս համեմատաբար փոքր ծավալներում հավաքել և ապա օգտագործել էլեկտրամագնիսական դաշտի մեծ քանակի էներգիաներ: Էլեկտրական դաշտի դեպքում դրանք կոնդենսատորներն են, որոնց որոշ տեսակներ պատկերված են Նկ. 54.1-ում:



Նկ. 54.1



Նկ. 54.2

Կոնդենսատորի միացման սկզբունքային սխեման և պայմանական նշանը բերված են Նկ. 54.2-ում: Էլեկտրական էներգիան կոնդենսատորին տրվում է հաստատուն լարման աղբյուրից երկու զուգահեռ հաղորդիչ թիթեղների վրա հակառակ նշանի լիցքերի կուտակմամբ: Հարթ կոնդենսատորի լիցքեր կուտակելու հատկությունը որոշող պարամետրը C ունակությունն է, որը որոշվում է

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

բանաձևով, որտեղ ε_0 -ն էլեկտրական հաստատունն է, ε -ը՝ թիթեղների միջև դիէլեկտրիկ միջավայրի դիէլեկտրիկ թափանցելիության գործակիցը, S -ը՝ հաղորդիչ թիթեղների միմյանց ծածկող մակերեսը, d -ն՝ թիթեղների միջև հեռավորությունը: Ունակության միավորը 1 Ֆարադն է: Կուտակված էներգիայի մեծությունը որոշվում է

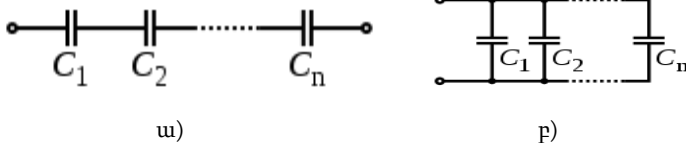
$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

բանաձևով, որտեղ U -ն կոնդենսատորի թիթեղների մեջ եղած լարումն է, Q -ն՝ թիթեղներից մեկի վրա եղած լիցքի մեծությունը: Ընդունելով այն որպես կոնդենսատորի ներքում էլեկտրական դաշտի էներգիա՝ նրա խտության համար ստանում ենք

$$w_E = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2$$

բանաձևը, որտեղ E -ն էլեկտրական դաշտի լարվածությունն է կոնդենսատորի ներքում:

Առկա կոնդենսատորների միջոցով նոր ունակություններ ստանալու համար դրանք կարող են միացվել իրար: Պարզագույն դեպքերը հաջորդական և զուգահեռ միացումներն են, բերված Նկ. 54.3 ա), բ)-ում համապատասխանաբար: Հաջորդականի դեպքում համարժեք ունակությունը որոշվում է հակադարձ մեծությունների գումարման կանոնով՝ $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$: Զուգահեռ միացման ժամանակ գումարվում են իրենք՝ ունակությունները՝ $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$:



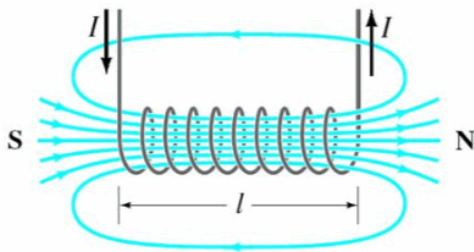
Նկ. 3.4

§ 55. Ինդուկտիվության կոճեր

Ուժող մագնիսական դաշտ ստեղծվում է հոսանքի մեծաթիվ գալարներ պարունակող սոլենոիդի (ինդուկտիվության կոճի) միջոցով, որի արտադրական տարբեր տեսակներ պատկերված են Նկ. 55.1-ում:



Նկ. 55.1



Նկ. 55.2

Առանձին սոլենոիդի սխեմատիկ պատկերը բերված է Նկ. 55.2-ում: Կոճի բնութագրական մեծությունը L ինդուկտիվությունն է, որի միջոցով կոճի էներգիան արտահայտվում է

$$W = \frac{L I^2}{2}$$

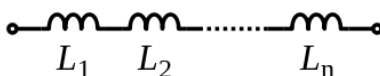
բանաձևով, որտեղ I -ն սուլենոիդով անցնող հոսանքի ուժն է: Ինդուկտիվության միավորը 1 Հենրին է:

Դաշտն ինտենսիվ է և համեմատաբար համասեռ սուլենոիդի ներսում և նմանակում է հաստատուն մագնիսի դաշտի տեսքը: Էներգիայի խտությունը համեմատական է դաշտի B ինդուկցիայի քառակուսուն՝

$$w_B = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu B^2,$$

որտեղ μ_0 -ն մագնիսական հաստատունն է, μ -ն՝ սուլենոիդի ներսում միջավայրի՝ միջուկի, մագնիսական թափանցելիությունը: Միջուկը, որպես կանոն, պատրաստվում է փափուկ երկաթից, որի թափանցելիությունը հատկապես մեծ է:

Ինդուկտիվության կոճերի հաջորդական միացման դեպքում (Նկ. 55.3)



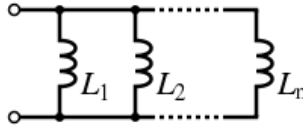
յուրաքանչյուր կոճով անցնում է միևնույն հոսանքը, իսկ նրանց վրա ընդհանուր լարումը լինում է առանձինների վրա լարումների գումարը: Կոճերի հաջորդականությունը կարելի է փոխարինել մեկ համարժեք կոճով, որի ինդուկտիվությունը որոշվում է

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

բանաձևով, որտեղ n -ը կոճերի ընդհանուր թիվն է:

Ինդուկտիվության կոճերի գուգահեռ միացման դեպքում (Նկ. 55.4) բոլոր կոճերի մի ծայրերը միացվում են մի կետում,

մյուս բոլոր ծայրերը՝ մեկ այլ կետում: Արդյունքում բոլոր կոճերը գտնվում են միևնույն լարման տակ, իսկ յուրաքանչյուրով հոսում է իր հոսանքը:



Նկ. 55.4

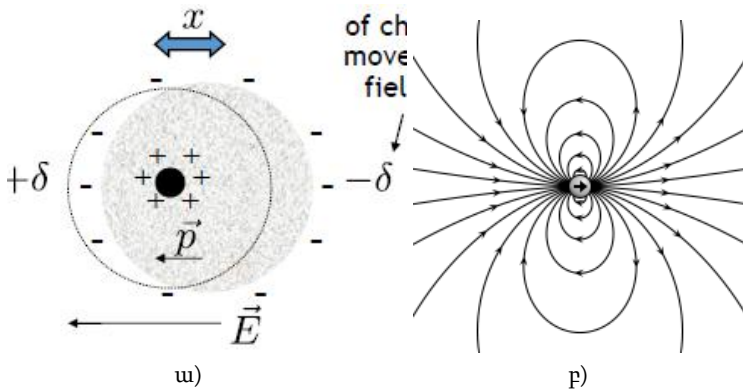
Զուգահեռ միացված կոճերի համակարգը կարելի է փոխարինել մեկ էֆեկտիվ կոճով, որի ինդուկտիվությունը որոշվում է

$$L_{\text{total}}^{-1} = L_2^{-1} + L_1^{-1} + \dots + L_n^{-1}$$

բանաձևով:

§ 56. Էլեկտրական դաշտը միջավայրում

Էլեկտրական դաշտը, անցնելով վակուումից միջավայր, նկատելիորեն փոխվում է: Առավել ընդհանուր օրինաչափությունն այստեղ այն է, որ միջավայրը կազմող ատոմների դրական լիցքերի կենտրոնի (միջուկի) և բացասական լիցքերի (էլեկտրոնային թաղանթների) կենտրոնի միջև առաջանում է շեղում, ատոմը (մոլեկուլը) դառնում է էլեկտրական դիպոլ (Նկ. 56.1ա) և իր շուրջն ստեղծում ուղղորդված էլեկտրական դաշտ (Նկ. 56.1բ): Վերադրվելով միմյանց՝ արտաքին դաշտի հետ միասին դիպոլային դաշտերը միջավայրում ձևավորում են նոր՝ ներքին դաշտ, ինչը տարբերվում է արտաքին դաշտից:



Նկ. 56.1

Լիցքերի շեղման արդյունքում միջավայրի անհամասեռությունների, հատկապես բաժանման մակերևույթների վրա առաջանում են կապված լիցքեր, որոնք միջավայրերի սահմանին դիէլեկտրիկ թափանցելիությունների տարբերությունների հետ միասին խախտում են դաշտի $\vec{E}$ լարվածության վեկտորի անընդհատությունը՝ խնդիրներ ստեղծելով ֆիզիկական խնդիրների քննարկման ժամանակ: Հարցի ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ իրավիճակը համեմատաբար պարզ է

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (56.1)$$

ինդուկցիայի վեկտորի համար, որի ընդհատությունները պայմանավարված են բացառապես կապված լիցքերի առկայությամբ: Էլեկտրական դաշտի լարվածությունը որոշվում է վոլտ-մետր (Վ/մ), իսկ ինդուկցիան՝ կուլոն-մետր² (Կլ/մ²) միավորներով:

(56.1) բանաձևում $\vec{P}$ -ն միջավայրի միավոր ծավալի բևեռացման վեկտորն է և քանի որ առաջանում է էլեկտրական դաշտի ազդեցության տակ, ապա համեմատական է լինում վերջինիս՝

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E} ,$$

որտեղ միջավայրը բնութագրող α հաստատունը կոչվում է էլեկտրական ընկալունակություն կամ բևեռացվելիություն: Օգտագործելով այս արտահայտությունը՝ ինդուկցիայի վեկտորը գրում ենք

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad (56.2)$$

որտեղ

$$\varepsilon = 1 + \alpha$$

հաստատունը կոչվում է միջավայրի դիէլեկտրիկ հաստատուն կամ դիէլեկտրիկ թափանցելիություն: Այն հատկապես մեծ է ջրի մոտ՝ 81, ինչը խոսում է ջրի ֆիզիկաքիմիական և դրանից բխող կենսաբանական ընդգծված ակտիվության մասին:

§ 57. Պիեզոէլեկտրիկներ

Արտաքին դաշտերի միջոցով ներքին զգալի էլեկտրական դաշտերի առաջացման վերնում բերված մեխանիզմը, խիստ ասած, վերաբերում է ատոմներից կազմված նյութերին: Մոլեկուլային, հատկապես իոնային կառուցվածք ունեցող բյուրեղային պինդ նյութերի մոտ իրավիճակն ավելի բարդ է և, դրանով իսկ, ավելի հարուստ: Նորությունն առաջին հերթին այն է, որ դրանց մոլեկուլային մակարդակում դիպոլային կառուցվածք ունենալու համար բոլորովին պարտադիր չէ արտաքին դաշտի կիրառումը: Յուրաքանչյուրում դրական և բացասական լիցքերի կենտրոններն արդեն շեղված են ըստ կառուցվածքի: Մնացածը կախված է դրանց փոխադարձ կարգավորվածությունից: Կիրառական տեսանկյունից հատկապես կա-

րևոր են պիեզոէլեկտրիկները (պիեզոէլեկտրականության երևույթը հայտնագործել են Ժակ և Պիեռ Կյուրի եղբայրները):



Ժակ և Պիեռ Կյուրի եղբայրները ծնողների հետ

Պիեզոէլեկտրիկները նյութեր են, որոնց նկատմամբ մեխանիկական ուժեր (լարումներ) կիրառելիս նրանց մակերևութային հակադիր նիստերի վրա ի հայտ են գալիս հակառակ նշանի լիցքեր: Ներսում առաջանում է էլեկտրական դաշտ, որի լարվածությունը համեմատական է կիրառված մեխանիկական լարմանը: Հակադարձ պիեզոէլեկտրական էֆեկտն այն է նրանում, որ պիեզոէլեկտրիկի վրա արտաքին

էլեկտրական դաշտ կիրառելիս նմուշի գծային չափերը փոխվում են: Այսինքն՝ պիեզոէլեկտրիկները իդեալական փոխարկիչներ են էլեկտրական և մեխանիկական երևույթների միջև, ինչն էլ ընկած է նրանց կիրառությունների հիմքում:

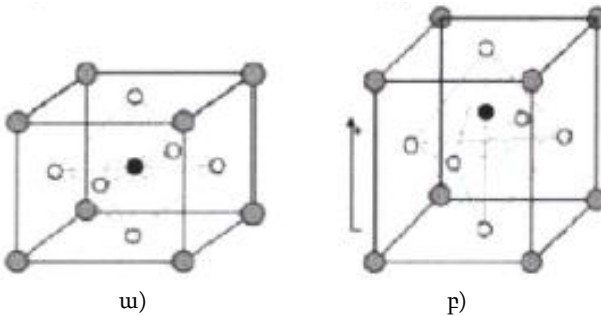
Պիեզոէլեմենտներ օգտագործվում են ձայնային վերարտադրիչներում, միկրոֆոններում, բժշկական ուլտրաձայնային պատկերների ստացման սարքերում, հիդրոլոկատորներում և այլն: Օրինակ՝ ավտոմեքենաների օդային բարձերը բացելու էլեկտրական ազդանշանն սկզբնավորվում է պիեզոէլեմենտում, որը կտրուկ արգելակման ժամանակ առաջացած արագացումների ստեղծած իներցիոն ուժերի շնորհիվ դեֆորմացվում է, ստեղծում լարումներ և համապատասխան հոսանքներ: Ռեակտիվ ինքնաթիռների վրա պիեզո-ձևափոխիչների տեղադրումը թույլ է տալիս մեկ երրորդի չափով տնտեսել էլեկտրաէներգիայի ստեղծման համար ծախսվող վառելի-

քի չափը: Այստեղ անմիջականորեն էլեկտրաէներգիայի են վերածվում ինքնաթիռի կմախքի և թևերի տատանումները: Ստեղծված են լուսաֆորներ, որոնց սնուցումը լիցքավորվում է խաչմերուկում մեքենաների աղմուկից: Նույն գաղափարը մշակվում է նաև բազմաբնակարան շենքերում օգտագործելու համար:

Ինչ վերաբերում է համակարգիչների կառուցվածքում դրանց օգտագործմանը, ապա այստեղ հեռանկարային համարվում են դիսփլեյները:

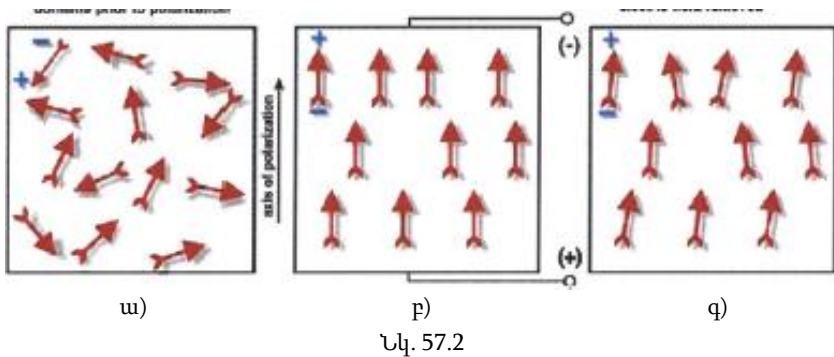
Պիեզոէլեկտրականության բնույթը սերտորեն առնչվում է նրանց ներսում էլեկտրական դիպոլների զգալի մեծ լինելուն: Դրանք առաջանում են բյուրեղային ցանցի բջիջներում իոնների անհամաչափ տեղակայման արդյունքում կամ կարող են ինդուկցվել էլեկտադիպոլային հատկություններով օժտված որոշ մոլեկուլային խմբերի կողմից:

Բյուրեղային ցանցի տարրական բջիջի օրինակ բերված է Նկ. 57.1-ում: Առաջին ա) դեպքում բոլոր իոնները դասավորված են համաչափ և ազատ վիճակում դիպոլային մոմենտը բջիջում բացակայում է: Երկրորդ բ) դեպքում երկու տեսակ իոնները (չներկած և թույլ ներկած

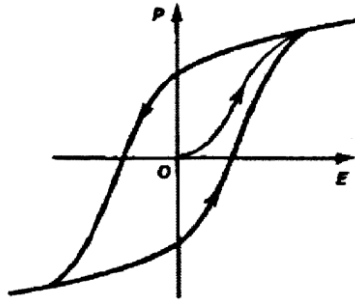


Նկ. 57.1

գնդիկները) դասավորված են համաչափ, սակայն երրորդ տեսակ իոնը (մուգ ներկած գնդիկը) ազատ վիճակում շեղված է համաչափ վիճակից: Բջիջի դիպոլային մոմենտը տարբեր է զրոյից: Այս դիպոլները, փոխազդելով միմյանց հետ, ձգտում են ունենալ նույն ուղղությունը: Արդյունքում ձևավորվում են նույն ուղղությամբ դիպոլների մեծաթիվ տարածական տիրույթներ, որոնք կոչվում են դոմեններ: Դոմենների մակրոսկոպիկ դիպոլային մոմենտներն ի սկզբանե օրիենտացված են պատահականորեն (Նկ. 57.2ա), և միջավայրի միավոր ծավալի դիպոլային մոմենտը զրո է: Սակայն դրանք կարող են ուղղորդվել արտաքին ուժեղ էլեկտրական դաշտի կիրառմամբ (Նկ. 57.2բ): Արտաքին դաշտի անջատումից հետո դոմենները բավականին մեծ



չափով մնում են ուղղորդված (Նկ. 57.2գ), այսինքն՝ տեղի է ունենում հիստերեզիսյան վարք, ինչը գրաֆիկակորեն պատկերված է Նկ. 57.3-ում:



Նկ. 57.3

Հարկ է նկատել, սակայն, որ ամեն պիեզոէլեկտրիկ նյութ չէ, որ կարող է մնացորդային բևեռացվել: Ավելացնենք նաև, որ պիեզոէլեկտրիկներում էլեկտրական դաշտի լարվածության և ինդուկցիայի վեկտորներն ընդհանուր դեպքում համուղված չեն: Դա նշանակում է, որ միջավայրի բնութագիր էլեկտրական ընկալունակությունը սկալյար բնույթի փոխարեն ձեռք է բերում թենզորական (երկրորդ ռանգի) բնույթ, և (56.2) կապը վեկտորական տեսքի փոխարեն ընդունում է

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j, \quad i, j = x, y, z,$$

թենզորական տեսք:

Պիեզոէլեկտրիկների մոտ էլեկտրական լիցքերի (լարումների) առաջացման պատճառը դեֆորմացիաների արդյունքում ներքին կառուցվածքի խախտումներն են, որոնք փոխում են էլեկտրական ներքին դիպոլների ուղղությունները: Կախված դիպոլների բնույթից՝ արդյոք նրանք առաջանում են իոնային, թե մոլեկուլյար խմբերի կողմից, բևեռացման այս փոփոխությունը կարող է պայմանավորված լինել բյուրեղացանցում իոնների վերակազմավորմամբ կամ մոլեկուլյար խմբերի վերակողմնորոշմամբ: Որպես քանակական օրինակ նշենք, որ

1 սմ³ խորանարդաձև կվարցի բյուրեղի վրա 2 կՆ ուժ կիրառելու դեպքում կարելի ստանալ մինչև 12.5 կՎ լարում:

§ 58. Մագնիսական դաշտը միջավայրում

Բոլոր նյութերը շատ կամ քիչ չափով օժտված են մագնիսական հատկություններով, այսինքն՝ մագնիսական դաշտը միջավայրում տարբերվում է մագնիսական դաշտից վակուումում: Պատճառը, իհարկե, այն է, որ ատոմներն ունեն միկրոմագնիսական դաշտեր, որոնք, վերադրվելով միմյանց, հավելվում են արտաքին վակուումային մագնիսական դաշտին: Ատոմների մագնիսական հատկությունները որոշվում են նրանց կազմող էլեկտրոնների և միջուկների մագնիսական հատկություններով: Միջուկների մագնիսական հատկությունները մոտ 1000 անգամ թույլ են էլեկտրոնների մագնիսական հատկություններից: Այդ պատճառով նյութերի մագնիսական հատկությունները հիմնականում որոշվում են ատոմների կազմության մեջ մտնող էլեկտրոններով:

Էլեկտրոնների սեփական մագնիսական դաշտն անվանում են սպինային, ինչը, պատկերավոր ասած, պայմանավորված է էլեկտրոնի՝ իր զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջ սեփական պտույտով: Էլեկտրոնը մագնիսական դաշտ ստեղծում է նաև միջուկի շուրջ օրբիտալ շարժման շնորհիվ, ինչը կարելի է նմանեցնել շրջանային միկրոհոսանքի: Էլեկտրոնների մագնիսական դաշտերի այս երկու բաղադրիչներն էլ որոշում են միջավայրերի մագնիսական հատկությունները:

Ինչպես և էլեկտրական դաշտի դեպքում, միջավայրերում մագնիսական դաշտի համար հարմար է երկու վեկտորական

բնութագրիչների՝ H լարվածության և B ինդուկցիայի ներգրավումը: Առաջինը ներառում է արտաքին հոսանքների ստեղծած մագնիսական դաշտը, երկրորդում հավելվում է միջավայրի կողմից ինդուկցված բաղադրիչ: Նրանք կապված են

$$B = \mu_0 (H + M)$$

առնչությամբ, որտեղ M -ը մագնիսացման վեկտորն է՝ միավոր ծավալի մագնիսական մոմենտը, իսկ համեմատականության μ_0 գործակիցը կոչվում է մագնիսական հաստատուն: Մագնիսական իզոտրոպ միջավայրերում մագնիսացումը համեմատական է կիրառված մագնիսական դաշտի լարվածությանը,

$$M = \chi H,$$

որտեղ համեմատականության χ գործակիցը կոչվում է միջավայրի մագնիսական ընկալունակություն: Տեղադրելուց հետո կապը ներկայանում է

$$B = \mu_0 \mu H$$

տեսքով, որտեղ

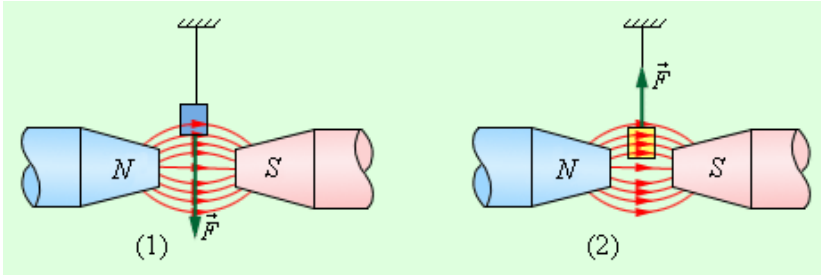
$$\mu = 1 + \chi$$

մեծությունը միջավայրի հիմնական բնութագրական մեծությունն է և կոչվում է մագնիսական թափանցելիություն:

Մագնիսական ինդուկցիան չափվում է տեսլաներով (Տլ), լարվածությունը՝ ամպեր-մետրերով (Ա/մ):

Նյութերը խիստ բազմազան են ըստ իրենց մագնիսական հատկությունների: Մեծամասնության մոտ դրանք թույլ են արտահայտված: Թույլ մագնիսականությամբ նյութերը բաժանվում են երկու մեծ խմբերի, պարամագնիսների և դիամագնիսների: Նրանք իրարից տարբերվում են նրանով, որ

պարամագնիսական նմուշները մագնիսական դաշտ մտցնելիս նրանց սեփական մագնիսական դաշտն ուղղված է լինում ըստ արտաքին դաշտի, իսկ դիամագնիս նմուշները մագնիսանում են արտաքին դաշտին հակառակ:



Նկ. 58.1

Այդ պատճառով պարամագնիսների համար $\mu > 1$, իսկ դիամագնիսների համար՝ $\mu < 1$: Պարամագնիսական և դիամագնիսական նմուշները մագնիսի բևեռների միջև անհամասեռ դաշտ մտցնելիս իրենց պահում են տարբեր կերպ. պարամագնիսը ձգվում է դեպի մեծ դաշտերի տիրույթ, դիամագնիսը՝ դեպի թույլ դաշտերի տիրույթ (Նկ. 58.1):

§ 59. Դիամագնիսներ

Դիամագնիսները մագնիսանում են միայն արտաքին դաշտի առկայության դեպքում: Դաշտի վերացմամբ վերանում է նաև նմուշի մագնիսացումը:

Էլեկտրոնների օրբիտալ շարժման ներդրումը միջավայրի մագնիսացման մեջ բացատրվում է հետևյալ կերպ: m_e զանգվածով և $-e$ լիցքով էլեկտրոնը v արագությամբ պտտվում է

ատոմի միջուկի շուրջ r շառավղով շրջանագծով: Այդ շարժումը փակ հոսանք է, որն ստեղծում է մագնիսական դաշտ, և որի մագնիսական մոմենտը կապված է $l = m_e v r$ մեծությամբ իմպուլսի մոմենտի հետ

$$m = \frac{e}{m_e c} l$$

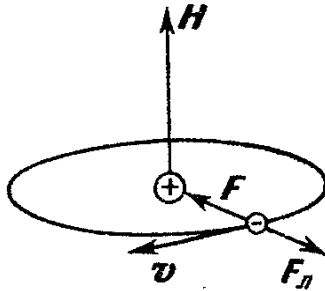
ընդհանուր բնույթ ունեցող բանաձևով:

Հայտնվելով մագնիսական դաշտում՝ օրբիտալ շարժման մագնիսական մոմենտը պրեցեսիա է կատարում մագնիսական դաշտի շուրջ, ինչպես պատկերված է Նկ. 59.1-ում: Պրեցեսիայի արդյունքում ներդրում է տալիս մոմենտի միայն պրոյեկցիան մագնիսական դաշտի ուղղության վրա, ինչը համարժեք է նրան, որ էլեկտրոնը պտտվի մագնիսական դաշտի դաշտին ուղղահայաց հարթության մեջ որոշ չափով փոքրացված շառավղով:



Նկ. 59.1

Դաշտի ազդեցությունն էլեկտրոնի պտտման հաճախությունը փոխելու մեջ է: Հաշվենք այդ փոփոխությունը՝ օգտվելով Նկ. 59.2 նկարում բերված պատկերից:



Նկ. 59.2

Էլեկտրոնի շրջանագծային շարժում ապահովող կենտրոնաձիգ ուժը բաղադրվում է դեպի միջուկ ուղղված $\mathbf{F}$ Կուլոնի և շառավղով դուրս ուղղված $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ Լորենցի ուժերից: Մեխանիկական մոմենտն ու մագնիսական մոմենտն ուղղված են մագնիսական դաշտի ուղղությամբ:

Պրոյեկտենք Նյուտոնի II օրենքը արագացման՝ շառավղով դեպի կենտրոն ուղղության վրա՝

$$\frac{m_e v^2}{r} = F - \frac{e}{c} v B:$$

Նկատի ունենալով v գծային և ω անկյունային արագությունների $v = \omega r$ կապը՝ գրենք շարժման հավասարումը ω -ի նկատմամբ քառակուսի հավասարման տեսքով՝

$$\omega^2 + \frac{eB}{m_e c} \omega - \omega_0^2 = 0,$$

որտեղ մտցված է $\omega_0 = \sqrt{F/m_e r}$ նշանակումը: Հավասարման դրական արմատը, նկատի ունենալով

$$\langle \mathbf{v}_x(t) \rangle = \mathbf{v}_0 + \frac{q E_{0x}}{m \omega} \cos \varphi$$

պայմանը, կլինի

$$\omega = \omega_0 - \frac{eB}{2m_e c} : \quad (59.1)$$

Քանի որ ω -ն փոքրանում է, ապա փոքրանում է նաև ատոմական ներքին հոսանքի ստեղծած մագնիսական դաշտը ազատ պտույտի դեպքի համեմատ:



Շառլ Կուլոն (1736-1806)



Հենդրիկ Լորենց (1853-1928)

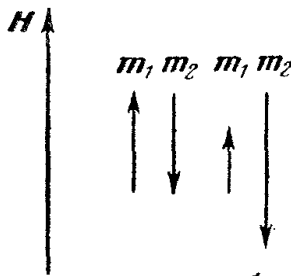
Ատոմներում կան նաև հակառակ ուղղությամբ պտտվող էլեկտրոններ: Դրանց մագնիսական մոմենտներն ուղղված են դաշտին հակառակ ուղղությամբ: Նմանատիպ քննարկումն այս դեպքում հաճախության համար տալիս է

$$\omega = \omega_0 + \frac{eB}{2m_e c} : \quad (59.2)$$

Դա նշանակում է, որ արտաքին դաշտին հակառակ ուղղված ատոմի մագնիսական մոմենտի մեծությունն աճում է ազատ պտույտի դեպքի համեմատ:

Իրար հակառակ պտտվող էլեկտրոնների թվերն ատոմներում գործնականում իրար հավասար են: Ուրեմն եթե չլիներ արտաքին մագնիսական դաշտի ազդեցությունն այդ էլեկտ-

րոնների պտույտների հաճախությունների վրա, ապա ատոմի ստեղծած մագնիսական մոմենտը կլինե՞ր զրո: Իրականում դաշտին հակառակ մոմենտն աճում է, դաշտի ուղղությամբ մոմենտը՝ նվազում: Միավորելով այս երկու դեպքերը՝ ստանում ենք, որ էլեկտրոնների օրբիտալ շարժման՝ մագնիսական դաշտի նկատմամբ արձագանքով պայմանավորված մագնիսական մոմենտը (համապատասխան մագնիսական դաշտը) ուղղված է արտաքին մագնիսական դաշտին հակառակ: Մագնիսական դաշտը միջավայրում թուլանում է արտաքին դաշտի նկատմամբ: Մենք գործ ունենք դիամագնիսականության երևույթի հետ (*բացատրել 59.3 նկարը*): Ինչպես տեսնում ենք, սա ընդհանուր մեխանիզմ է և պետք է տեղի ունենա բոլոր միջավայրերում, որոնք պարունակում են ատոմական օրբիտալների վրա պտտվող էլեկտրոններ:



Նկ. 59.3

Պարամագնիսականությունը, ուրեմն, պայմանավորված է այլ մեխանիզմով, որը, լինելով ավելի ուժեղ և գործող դիամագնիսականությանը հակառակ ուղղությամբ, մեծացնում է միջավայրի արդյունաբար մագնիսական դաշտը:

§ 60. Պարամագնիսներ

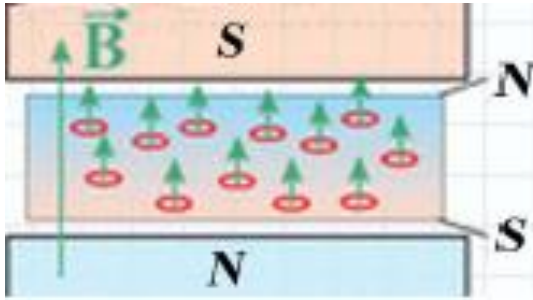
Պարամագնիսականությամբ օժտված են այն նյութերը, որոնց ատոմներում (կառուցվածքային միավորներում) մագնիսական մոմենտն առանց արտաքին մագնիսական դաշտի ազդեցության արդեն զրոյից տարբեր է: Այն հիմնականում պայմանավորված է լինում չլրացված ատոմական թաղանթներում և քվադրազատ վիճակում գտնվող էլեկտրոնների սեփական մոմենտներով՝ սպիններով: Ամբողջական նմուշում մագնիսական դաշտի բացակայությունը բացատրվում է ջերմային բախումներով պայմանավորված այդ մոմենտների պատահական, սֆերիկ համաչափ ուղղորդվածությամբ (Նկ. 60.1): Արտաքին մագնիսական դաշտը ջանում է պտտել մագնիսական մոմենտները և ուղղորդել դրանք դաշտի ուղղությամբ: Էլեկտրոնային մագնիսիկների գումարային դաշտն ուղղվում է արտաքին դաշտի ուղղությամբ (Նկ. 60.2):



Նկ. 60.1

Դիամագնիսականության և պարամագնիսականության հիմնական մեխանիզմների քննարկումից ակնհայտ է χ_{dia} դիամագնիսական ընկալունակության գործնականում անտարբեր լինելը նմուշի ջերմաստիճանի նկատմամբ: Պարա-

մագնիսականության դեպքում ջերմային քաոտիկ շարժումները խանգարում են մագնիսական մոմենտների համուղմանը, և



Նկ. 60.2

միջավայրի χ_{para} պարամագնիսական ընկալունակությունն ունենում է բացահայտ ջերմաստիճանային կախվածություն՝

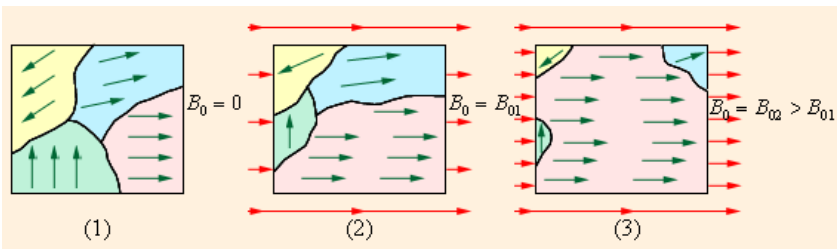
$$\chi_{\text{para}} = \frac{\mu_0 n m_{\text{mag}}^2}{T},$$

որտեղ n -ը էլեկտրոնային մագնիսիկների կոնցենտրացիան է, m_{mag} -ը՝ նրանցից յուրաքանչյուրի մագնիսական մոմենտը: Ինչպես և պետք էր սպասել, ջերմաստիճանի բարձրացումն ուղեկցվում է մագնիսացման ունակության թուլացմամբ:

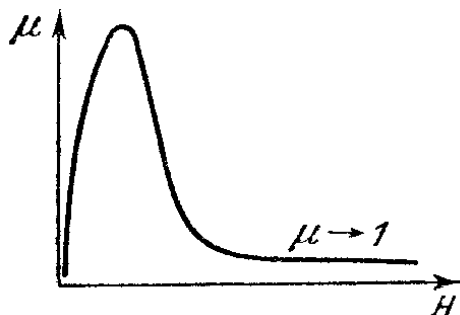
• **Ֆերոմագնիսներ և ֆերիտներ.** Ֆերոմագնիսների և նրանց ենթադաս հանդիսացող ֆերիտներերի կառուցվածքային տարրերը՝ ատոմները (իոնները), ունեն տարածական կանոնավոր կառուցվածք, ինչը փաստում է միջմասնիկային ուժեղ փոխազդեցությունների առկայության մասին: Հարևան ատոմների միջև փոխազդեցության արդյունքում ֆերոմագնիսների ատոմների սպինային մագնիսական մոմենտները մակրոսկոպիկ ծավալներում ուղղորդվում են մեկ ուղղությամբ: Այդ փոխազդեցության մեջ կարևոր դեր կատարում են,

այսպես կոչված, փոխանակային փոխազդեցությունները, որոնք, կապված լինելով մասնիկների նույնականության հետ, զուտ քվանտային բնույթի են: Նույն ուղղորդվածությամբ մակրոսկոպիկ ծավալները, ինչպես պիեզոէլեկտրիկների դեպքում, կոչվում են դոմեններ:

Արտաքին դաշտի բացակայության պայմաններում (Նկ. 60.3(1)) դոմենների ուղղորդվածությունները հավասար հավանական բաշխված են բոլոր ուղղություններով, և ներքին արդյունաբար դաշտը հավասար է զրոյի: Արտաքին մագնիսական դաշտ կիրառելիս համուղղված մոմենտներով դոմենների ծավալները հարևաններից ծավալներ խլելու ճանապարհով մեծանում են, և նմուշի ներքին մագնիսական դաշտը լինում է զրոյից տարբեր ու զուգահեռ արտաքին դաշտին (Նկ. 60.3 (2) և (3)): Արտաքին դաշտի մեծությունից կախված՝ այն սկզբում մեծանում է ոչ գծային օրենքով, այնպես որ համեմատականության μ գործակիցը հաստատուն չէ, այլ փոքր արտաքին դաշտերի տիրույթում արագորեն աճում է, իսկ հետո, երբ դոմենները դառնում են մեծապես համուղղված, ձգտում է մեկի: Փոփոխության որակական պատկերը ներկայացված է Նկ. 60.4-ի գրաֆիկում:



Նկ. 60.3



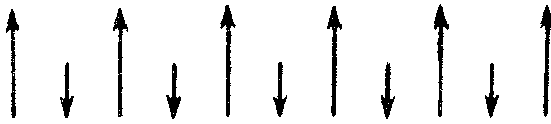
Նկ. 60.4

Իրականում մագնիսական մոմենտների համուղման գործընթացը տեղի է ունենում ոչ միայն դաշտին զուգահեռ դոմենների ծավալը մեծանալու հաշվին: Տեղի են ունենում նաև ամբողջական դոմենների հարկադրական պտույտ և ուղղորդում արտաքին դաշտի ուղղությամբ: Դոմենային կառուցվածքով է պայմանավորված հիստերեզիսային վարքի առկայությունը $B(H)$ կախվածությունում:

Ֆերոմագնիսականությամբ են օժտված երկաթը, նիկելը, կոբալտը, հազվագյուտ հողերի մետաղները և դրանց շատ միացություններ:

Գոյություն ունեն նաև ավելի բարդ կառուցվածքի նյութեր՝ ֆերիտներ, որոնք օժտված են նշանակալի սեփական մագնիսական մոմենտով, ինչը մոտ է ֆերոմագնիսների մոմենտին: Կառուցվածքային տարբերությունն այն է, որ ֆերիտի բյուրեղային ցանցը կարելի է պատկերացնել որպես երկու ենթացանցերի համադրում միմյանց մեջ այնպես, որ երկու ցանցերն էլ ունեն միակողմանի սպինային կառուցվածքներ, սակայն մոմենտների ուղղությունները հակադիր են և մեծություններով տարբեր (Նկ. 60.5):

Ֆերիտների գոյությունը տեսականորեն կանխատեսել է
Լանդաուն:



Նկ. 60.5

Ֆերիտներում մեծ մագնիսացման ունակությունը գու-
գորդվում է կիսահաղորդչային կամ դիէլեկտրիկ հատկու-
թյուններով: Դրա հաշվին նրանք կիրառությունների լայն
դաշտ ունեն ժամանակակից ռադիոտեխնիկայում և ռադիո-
էլեկտրոնիկայում (ֆերիտային անտենաներ, կոնտուրների
միջուկներ և այլն):



Լև Լանդաու
(1908-1968)

Օգտագործվում են նաև հաշվողա-
կան և իմպուլսային տեխնիկայի մագ-
նիսական հիշողական տարրերում,
տրամաբանական և ղեկավարման հա-
մակարգերում: Նրանք գործնականում
անփոխարինելի տարր են մնում
բարձր ռադիացիայի միջավայրերում
աշխատանքի համար, ինչպիսին է,
օրինակ, բաց տիեզերական տարածու-
թյունը:

§ 61. Մագնիսական դաշտը գերհաղորդիչներում

Հաղորդիչների դիմադրությունը սովորաբար կախված չէ
հոսանքի ուժից, բայց կախված է ջերմաստիճանից: Ստանա-
լով հեղուկ հելիում (եռալու ջերմաստիճանը՝ 4.2 K), Կամեր-

լինգ-Օնեսը չափեց հելիումում խորասուզված մաքուր սնդիկի դիմադրությունը և հայտնաբերեց, որ այն հավասար է գրոյի, ընդ որում՝ դիմադրությունը գրոյանում է ոչ թե աստիճանաբար, այլ թռիչքաձև, մոտավորապես 4.12 K ջերմաստիճանում: Հետագայում հաստատվեց, որ շատ այլ մետաղներ և համաձուլվածքներ նույնպես գերցածր ջերմաստիճաններում դառնում են գերհաղորդիչներ: T_c ջերմաստիճանը, որի դեպքում տեղի է ունենում դիմադրության թռիչքաձև անհետացումը, կոչվում է կրիտիկական ջերմաստիճան:



Հեյկե Կամերլինգ-Օնես
(1853-1926)

Գերհաղորդիչ հատկություններն առավել հետևողական և ամբողջական բացատրվում են երկբաղադրիչ մոդելի հիման վրա, ըստ որի՝ կրիտիկական ջերմաստիճանում ոչ բոլոր հաղորդական էլեկտրոններն են անցնում գերհաղորդիչ վիճակի: Մի մասը մնում է նորմալ վիճակում, ենթարկվում նույն օրինաչափություններին, ինչ սովորական մետաղներում: Հաստատուն լարումների դեպքում գերհաղորդչի ներսում էլեկտրական դաշտի լարվածությունը հավասար է լինում գրոյի, նորմալ էլեկտրոնները չեն շարժվում և չեն մասնակցում էլեկտրական հոսանքի առաջացմանը: Գերհաղորդիչ վիճակի էլեկտրոնները շարժվում են իներցիայով և միայնակ պայմանավորում էլեկտրական հոսանքը: Մոդելը թույլ է տալիս հիմնավորել գերհաղորդչի ցուցաբերած դիմադրությունը փոփոխական հոսանքին, որը մեծանում է հաճախության մեծացմանը զուգըն-

թաց, ինչպես նաև սովորական վարքագիծը օպտիկական երևույթների նկատմամբ:

Նորմալ բաղադրիչն աստիճանաբար նվազում է ջերմաստիճանը կրիտիկականից նվազեցնելիս, սակայն ամբողջովին չի վերանում անգամ բացարձակ զրո ջերմաստիճանին ընդհուպ: Մնացորդային մասը համեմատական է էլեկտրոն-ցանց փոխազդեցության հաստատունին:

Վերաքննման կարիք են ունենում գերհաղորդիչների նաև մագնիսական հատկությունները: Հարցի հետևողական քննարկումը սկսվում է Մաքսվելի

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Հավասարումից՝ դիտարկելով այն դանդաղ փոփոխվող դաշտերի սահմանում: Փակագծում գրված երկրորդ անդամը նկարագրում է ալիքային պրոցեսները, որոնք դուրս են սույն խնդրի հետաքրքրության շրջանակներից: Այն նաև շատ փոքր է, կարելի է արհամարհել և հավասարումը գրել ավելի պարզ տեսքով՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}: \quad (61.1)$$

Ստացիոնար պայմաններում, ինչպես նշվեց քիչ վերևում, հոսանքի ուժը պայմանավորված է բացառապես գերհաղորդիչ էլեկտրոններով: Կհամարենք, որ դանդաղ փոփոխական դաշտում ևս այս պայմանը բավարարվում է,

$$\mathbf{j} = -en_s \mathbf{v}_s, \quad (61.2)$$

իսկ դաշտի առկայությունն ի հայտ է գալիս այդ էլեկտրոնների համար արագացում ստեղծելու մեջ՝ $m \dot{\mathbf{v}}_s = -e \mathbf{E}$: Այս առնչությունն օգտագործելու համար հարկ է ածանցել (61.2) հավասարումը՝

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -en_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{e^2 n_s}{m} \mathbf{E} : \quad (61.3)$$

Այժմ ածանցենք (61.1)-ը և օգտագործելով (61.3)-ը՝ կապ հաստատենք մագնիսական ու էլեկտրական դաշտերի միջև՝

$$\operatorname{rot} \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \mathbf{E} :$$

Նրանք կապված են նաև Մաքսվելի մյուս մրրկային հավասարումով՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} :$$

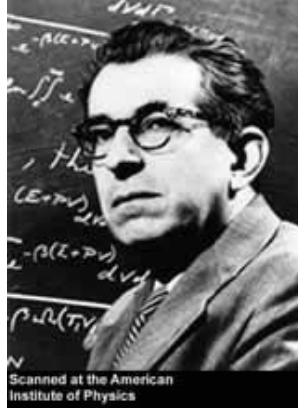
Վերջին հավասարումներից արտաքսելով էլեկտրական դաշտի լարվածությունը՝ կստանանք՝

$$\frac{d}{dt} \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \mathbf{B} \right) = 0 :$$

Այստեղից հետևում է, որ փակագծում եղած արտահայտությունը կարող է կամայական հաստատուն լինել: Ելնելով Մեյսների հայտնագործությունից, որ արտաքին մագնիսական դաշտը դուրս է մղվում գերհաղորդիչ վիճակի անցնող, օրինակ, կապարի ծավալից, Լոնդոն



Վաղտեր Մեյսյան (1882-1974)



Ֆրից Լոնդոն (1900-1954)

եղբայրները ենթադրեցին, որ այդ հաստատունը նույնաբար հավասար է զրոյի: Այսինքն՝

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \mathbf{B} = 0 :$$

Քանի որ $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$, իսկ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ մագնիսական լիցքերի բացակայության պատճառով, ապա վերին հավասարումը կարելի է գրել

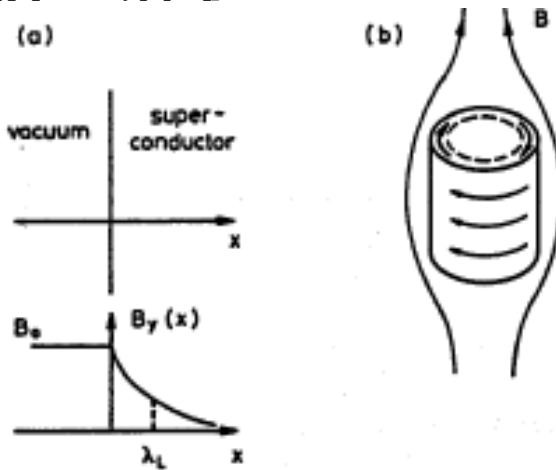
$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \mathbf{B} = 0 \quad (61.4)$$

տեսքով: Կարևոր է նշել, որ այն տեղի չունի նորմալ հաղորդչի համար:

§ 62. Առաջին և երկրորդ սեռի գերհաղորդիչներ

Մագնիսական դաշտի (61.4) հավասարման բովանդակությունն ընկալելու համար դիտարկենք պարզեցված միաչափ խնդիր, որում գերհաղորդիչը լցնում է հարթ մակերևույթով

կիսատարածություն, ինչպես պատկերված է Նկ. 62.1ա-ի վերին գրաֆիկում: Այդ դեպքում



Նկ. 62.1

մակերևույթին զուգահեռ մագնիսական դաշտի բաղադրիչի

$$\frac{d^2 B_y}{dx^2} - \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} B_y = 0$$

հավասարումն ունի հետևյալ լուծումը՝

$$B_y(x) = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right),$$

որտեղ

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}} \quad (62.1)$$

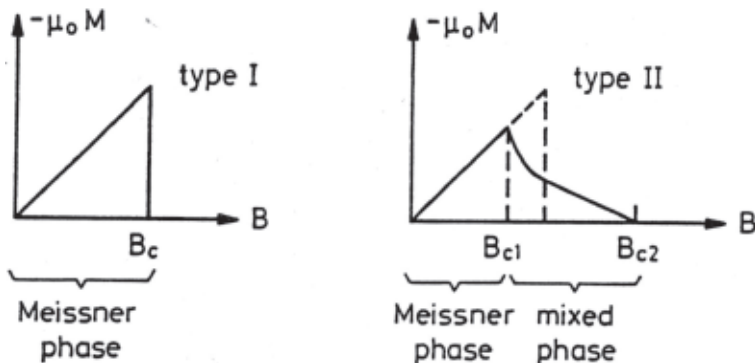
երկարության չափողականությունն ունեցող պարամետրը մագնիսական դաշտի՝ գերհաղորդչի մակերևույթից ներս ներթափանցման բնութագրական չափն է: Լուծման տարածական վարքը մեկնաբանված է Նկ. 62.1ա-ի ներքևի գրաֆիկում: Ներ-

թափանցման խորությունը բնութագրական նյութերի համար կազմում է 20-50 նանոմետր: Դա նշանակում է, որ գերհաղորդչում էլեկտրական հոսանքի գոյությունը ևս սահմանափակված է նույն բարակ շերտով: Մագնիսական դաշտը և ինդուկցված էլեկտրական հոսանքը զլանաձև հաղորդչում պատկերված են Նկ. 62.1բ-ում: Ինդուկցված հոսանքի մագնիսական դաշտը հաղորդչի ներսում հակառակ է ուղղված արտաքին մագնիսական դաշտին և մեծությամբ լինելով վերջինիս հավասար՝ զրոյացնում է համագոր դաշտը հաղորդչում:

Հասկանալի է, որ հիշյալ հատկությամբ օժտված գերհաղորդիչ նյութերը չեն կարող անցկացնել մեծ հոսանքներ և հետաքրքրություն ներկայացնել, ասենք, մագնիսական սուլենոիդներ պատրաստելու համար:

Գերհաղորդականության երևույթում կարևոր առանձնահատկություն է, որ որոշակի (կրիտիկական) արժեքից բարձր լարվածության մագնիսական դաշտը քայքայում է նմուշի գերհաղորդիչ հատկությունը՝ վերածելով այն սովորական հաղորդչի: Նյութերը, որոնցում այս անցումը տեղի է ունենում կտրուկ, ինչպես պատկերված է Նկ. 62.2-ի ձախի գրաֆիկում, կոչվում են I սեռի գերհաղորդիչներ: Մյուս սովորական պայմաններում բարձր հաղորդականությամբ օժտված, խառնուրդներից զուրկ հաղորդիչներ են:

Սովորական պայմաններում վերջավոր փոքր հաղորդականությամբ օժտված խառնուրդային որոշ նյութերում անցումը միանգամից տեղի չի ունենում, և դրանք կոչվում են II սեռի գերհաղորդիչներ: Այստեղ գոյություն ունեն մագնիսական դաշտի երկու կրիտիկական արժեքներ՝ B_{C1} ու B_{C2} (Նկ. 62.2-ի գրաֆիկն աջից), և ֆիզիկական էլ նկատելիորեն բարդ է:



Նկ. 62.2

II սեռի գերհաղորդիչներում B_{C1} կրիտիկական դաշտի արժեքը, ինչից սկսվում է գերհաղորդիչ հատկությունների նվազումը, անհամեմատ մեծ է, քան I սեռի գերհաղորդիչներում: $B_{C1} \leq B \leq B_{C2}$ միջանկյալ տիրույթում նմուշը գտնվում է միջանկյալ փուլում, ուր մագնիսական հոսքը մասնակիորեն շրջանցում է և մասնակիորեն անցնում է միջավայրի միջով: Այս վարքագիծը պայմանավորված է գերհաղորդչում քվանտային մրրիկների առաջացմամբ, որոնցից յուրաքանչյուրի առանցք-միջուկի երկայնքով նյութն անցնում է նորմալ վիճակի և դաշտի որոշակի փոքր քանակության թույլ է տալիս թափանցել և անցնել միջուկով: $B \geq B_{C2}$ արժեքների դեպքում միջավայրը գերհաղորդիչ վիճակից լրիվությամբ անցնում է նորմալ վիճակի:

Առաջին արդյունաբերական կիրառությունը գերհաղորդիչների (II սեռի) եղել է բարձր կրիտիկական դաշտերով գերհաղորդիչ մագնիսների պատրաստումը: Հասանելի մագնիսական դաշտերը կազմում են 100 և ավելի կԳաուս (Երկրի մագնիսական դաշտը միջինում 0.5 Գաուս է): Այսպիսի հզոր

դաշտերի ստեղծումը սովորական էլեկտրամագնիսներով կպահանջեր էլեկտրաէներգիայի շատ մեծ ծախս և ջրի հսկայական շրջապտույտ փաթույթների հովացման համար:

Հաջորդը չափիչ սարքերի լայն ոլորտն է՝ գերզգայուն վոլտմետրեր, վատտմետրեր, մագնիսաչափեր, ուժաչափեր, ռադիոհաճախային ազդանշանների կլանման գործակիցների չափիչներ և այլն:

Առավել հետաքրքիր հեռանկարներից է բարձր ջերմաստիճանային գերհաղորդիչ նյութերի ստացումը և դրանց արդյունաբերական կիրառությունը, մասնավորապես էլեկտրաէներգիայի ստացման, փոխանցման և կիրառության նպատակներով: Վերջինից նշենք մագնիսական բարձիկների վրա աշխատող գնացքները, որոնց փորձնական նմուշները զարգացնում են մինչև 500 կմ/ժ և ավելի արագություններ:

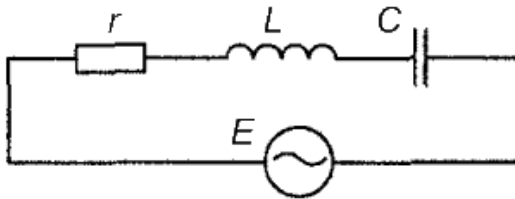
Գերհաղորդիչներին մեծ ապագա է վերագրվում նաև համակարգչային տեխնոլոգիաներում: Այստեղ գերհաղորդիչ էլեմենտները կարող են ապահովել միացում-անջատումների շատ կարճ ժամանակներ, հզորության չնչին կորուստներ բարակ թաղանթային էլեմենտների օգտագործման դեպքում և մոնոաժման սխեմաների մեծ ծավալային խտություններ: Մշակվում են լաբորատոր նմուշներ, որոնք պարունակում են հարյուրավոր տրամաբանական և հիշողության էլեմենտներ:

§ 63. Տատանողական կոնտուրը փոփոխական լարման շղթայում

Ժամանակակից կապի միջոցների, ներառյալ ճառագայթիչների և ընդունիչների, աշխատանքի կարևորագույն տարրը տատանողական կոնտուրն է իր սուր արտահայտված ռե-

գոնանսային վարքով աշխատանքային հաճախության կամ ալիքի երկարության նկատմամբ:

Տատանողական կոնտուրը բաղկացած է որևէ C ունակության կոնդենսատորից, L ինդուկտիվության կոճից և էներգետիկ կորուստները լոկալիզացված հաշվի առնող r դիմադրությունից: Նրանց հաջորդական միացման տատանողական կոնտուրի սխեման պատկերված է Նկ. 63.1-ում, որտեղ E -ն փոփոխական լարման աղբյուրի էլշու-ն է:



Նկ. 63.1

Ըստ Կիրխոֆի երկրորդ կանոնի (կամ Օհմի օրենքի)՝ լարումների և լարման անկումների գումարը հավասար է արտաքին E և ինքնինդուկցիայի $-L \cdot dL / dt$ էլշու-ների գումարին.



Գուստավ Կիրխոֆ (1824-1887)



Գեորգ Օհմ (1789-1854)

$$Ir + \frac{q}{C} = E - L \frac{dI}{dt},$$

որտեղ I -ն հոսանքի ուժն է շղթայում, q -ն՝ կոնդենսատորի լիցքը: Օգտագործելով $I = dq/dt$ սահմանումը՝ $q(t)$ անհայտ ֆունկցիայի համար ստանում ենք հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում՝

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U_0 \cos \omega t, \quad (63.1)$$

որտեղ տեղադրել ենք էլշու-ի $E = U_0 \cos \omega t$ բացահայտ տեսքը:

Շղթայի միացումից որոշ ժամանակ անց շղթայում կայունանում են լիցքի ստիպողական տատանումներ, որոնք պայմանավորված են հավասարման աջ մասով: Դրանք տեղի են ունենում ստիպող էլշու-ի ω հաճախությամբ, սակայն ընդհանուր դեպքում առկա է լինում փուլային շեղում էլշու-ի տատանումների նկատմամբ: Այդ նկատառումով (63.1)-ի անհամասեռ-կայունացած լուծումը փնտրենք $q = q_0 \sin(\omega t - \varphi)$ տեսքով: Տեղադրման արդյունքում հոսանքի ուժի համար կունենանք

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (63.2)$$

արտահայտությունը, որտեղ

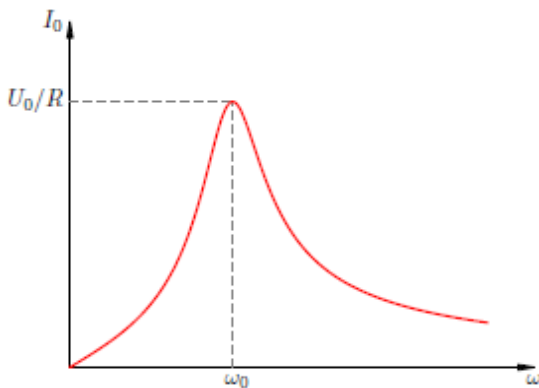
$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (63.3)$$

և համապատասխանաբար $q_0 = I_0 / \omega$, $tg \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{r}$:

Ինչպես տեսնում ենք (63.3)-ից, շղթայում փոփոխական լարման և փոփոխական հոսանքի ուժի լայնության շղթային արժեքները համեմատական են իրար, ինչպես հաստատուն հոսանքի դեպքում էր՝ $I = U / R$, իսկ դիմադրության դերը կատարում է

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (3.29)$$

մեծությունը, որում օհմական r դիմադրության հետ միասին ներդրում են տալիս C ունակությունը և L ինդուկտիվությունը, ընդ որում՝ նրանց ներդրումները փոխկապակցվում են հակափոփոխորդ: Սա չափազանց կարևոր օրինաչափություն է, քանի որ հանգեցնում է հոսանքի ուժի I_0 լայնության լարման աղբյուրի ω հաճախությունից ռեզոնանսային կախվածության: Եթե ω -ն հավասարվում է տատանողական կոնտուրի ազատ (սեփական) տատանումների $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ հաճախությանը, ապա I_0 լայնությամբ ստանում է հնարավոր առավելագույն $I_{0,\max} = U_0 / r$ արժեքը և կարող է շատ մեծացվել r օհմական դիմադրության



Նկ. 63.2

փոքրացման հաշվին (Նկ. 63.2): Ռեզոնանսի դեպքում վերանում է հոսանքադրյուրի և շղթայում հոսանքի տատանումների միջև ֆազային φ շեղումը, ինչը բարձրացնում է հոսանքադրյուրի կողմից աշխատանք կատարելու արդյունավետությունը և մեծացնում կոնտուրի էլեկտրամագնիսական ակտիվության հզորությունը:

Հաճախությունից հոսանքի ուժի սուր արտահայտված ռեզոնանսային կախվածությունը թույլ է տալիս ճառագայթային անտենաներում տատանողական կոնտուրի օգտագործման միջոցով նույնականացնել կայաններն ըստ իրենց ճառագայթման հաճախության կամ ալիքի երկարության: Իսկ ընդունման անտենայում օգտագործումը հնարավորություն է տալիս եթերում առկա մեծաթիվ կայանների ճառագայթած էլեկտրամագնիսական ալիքներից առանձնացնել մեզ հետաքրքրող կայանի հեռարձակումը: Այս մասին ավելի հանգամանորեն կխոսենք հետագա շարադրանքում:

§ 64. Մաքսվելի հավասարումները

Երբ լիցքերն անշարժ են կամ շարժվում են ուղղագիծ և հավասարաչափ, ապա տարածությունում առաջանում են էլեկտրական և մագնիսական դաշտեր՝ ըստ

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}: \quad (64.1)$$

առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների: Փորձական արդյունքների ընդհանրացումը ցույց է տալիս, որ ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող էլեկտրական և մագնիսական դաշտերը բավարարում են նաև

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (64.2)$$

հավասարումներին, որոնցից առաջինը ներկայացնում է էլեկտրաստատիկ դաշտի ոչ մրրկային բնույթը, երկրորդը՝ բնության մեջ մագնիսական լիցքերի բացակայությունը:

Հավասարումները ցույց են տալիս քննարկվող պայմաններում էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի անկախությունը. յուրաքանչյուրն առաջանալով լիցքերից չի ազդում մյուսի առաջացման վրա: Սակայն իրավիճակն էապես փոխվում է, երբ համակարգում ի հայտ են գալիս ժամանակային փոփոխություններ: Առաջին լրացումը գալիս է Ֆարադեյի հայտնագործած էլեկտրամագնիսական ինդուկցիայի երևույթից, համաձայն որի՝ փոփոխվող մագնիսական դաշտն իր շուրջն ստեղծում է մրրկային բնույթի էլեկտրական դաշտ: Արդյունքը ներկայացվում է հետևյալ հավասարման տեսքով՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}: \quad (64.3)$$



Մայքլ Ֆարադեյ
(1791-1867)

Էլեկտրական դաշտն ունի երկու աղբյուր՝ էլեկտրական լիցքերը և փոփոխվող մագնիսական դաշտը: Առաջինն ստեղծում է ոչ մրրկային կամ պոտենցիալային դաշտ, երկրորդը՝ մրրկային:

Հաջորդ լրացումը վերաբերում է մագնիսական դաշտի մրրկին, այսինքն՝ (64.1)-ի երկրորդ հավասարմանը: Մաքսվելը ենթադրեց, որ հարկ է, որ որոշակի համաչափություն առկա լինի էլեկտրամագնիսական երևույթներում, և փոփոխվող էլեկտրական դաշտն էլ ունակ լինի իր շուրջն ստեղծելու մագնիսական դաշտ: Արդյունքում ստացվում է՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right): \quad (64.4)$$



Ջեյմս և Գաուսերին
Մաքսվելները

Այսպիսով, մագնիսական դաշտը ևս ունի առաջացման երկու աղբյուր՝ լիցքերի շարժումը և փոփոխվող էլեկտրական դաշտը:

Դաշտի դիվերգենցիոն հավասարումների տեսքերը ժամանակի ընթացքում փոփոխվող դաշտերի դեպքում մնում են նույնը, ինչը մասնավորապես նշանակում է, որ մագնիսական դաշտն ամբողջովին մրրկային է:

Ներկայացված հավասարումները կազմում են ամփոփ համակարգ էլեկտրամագնիսական դաշտի որոշման համար լիցքերի խտության և արագությունների տարածաժամանակային տրված (հայտնի) կախվածությունների պայմաններում: Դրանք կոչվում են Մաքսվելի հավասարումներ: Ներկայացնենք դրանք միասին, դիֆերենցիալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho / \varepsilon_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \right): \end{aligned} \quad (64.5)$$

Այս հավասարումներն են ղեկավարում մեր մեջ և շրջակա տարածությունում տեղի ունեցող բոլոր էլեկտրամագնիսական պրոցեսները:

Էլեկտրամագնիսական դաշտի էներգիայի խտությունը որոշվում է

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)$$

բանաձևով, իսկ շարժման քանակի (իմպուլսի) խտությունը՝

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

բանաձևով:

§ 65. Էլեկտրամագնիսական ալիքներ

Քննարկենք էլեկտրամագնիսական դաշտը նրան ստեղծող լիցքերից դուրս տարածության մեջ, որտեղ $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$: Մեզ հետաքրքրում են Մաքսվելի հավասարումների լուծումները, որոնք պայմանավորված են էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի միջև փոխկապակցությունների առկայությամբ:

Դրանք տրվում են (64.5)-ի երկրորդ և չորրորդ հավասարումներով՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t: \quad (65.1)$$

Ազդենք առաջին հավասարման վրա rot օպերատորով և ապա օգտագործենք երկրորդ հավասարումը՝

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}:$$

Վեկտորական անալիզից հայտնի է $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$ հավասարությունը (ինչում կարելի է հեշտորեն համոզվել՝ երկու կողմերն ըստ բաղադրիչների բացելով դեկարտյան կոորդինատների համակարգում): Քանի որ քննարկվող ազատ տարածությունում $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, ապա՝

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}:$$

Սա հավասարում է դաշտի էլեկտրական բաղադրիչի համար, որը կապ է հաստատում դաշտի տարածական և ժամանակային փոփոխությունների միջև: Աջում մտնող հաստատունի համար օգտվենք $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ ներկայացումից, որտեղ c -ն լույսի արագությունն է դատարկությունում՝

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}: \quad (65.2)$$

Մագնիսական դաշտը բավարարում է անալոգ հավասարումների, այնպես որ նրա համար ևս ստացվում է (63.2)-ի տեսքի հավասարում՝

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}: \quad (65.3)$$

Դեկարտյան կոորդինատային համակարգում դրանք ստանում են

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

և համապատասխանաբար

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} :$$

տեսքերը:

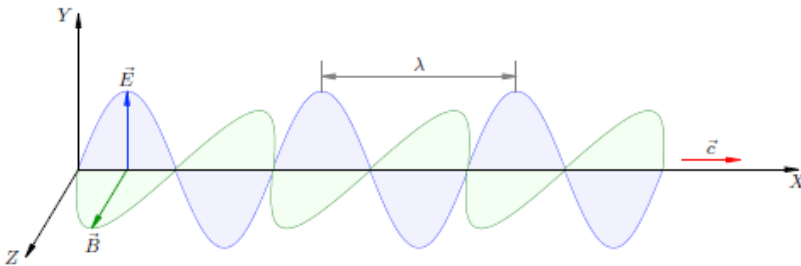
(65.2) և (65.3)-ը կոչվում են ալիքային հավասարումներ դաշտի էլեկտրական և մագնիսական բաղադրիչների համար: Ըմբռնելու համար անվանման բովանդակությունը նկատենք, որ այդ տեսքի հավասարումների բավարարում են կամայական $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)$ կամ $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ ֆունկցիաներ (կամ դրանց վերադրումներ), որտեղ ω -ն կոչվում է ցիկլիկ հաճախություն, իսկ $|\mathbf{k}| = \omega/c$: Ուղղակի տեղադրումով տեսնում ենք, որևէ Δt ժամանակ հետո ֆունկցիայի արգումենտի, ուրեմն նաև ֆունկցիայի արժեքը կրկնվում է $\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r} = \pm \omega \Delta t$ պայմանով որոշվող $\Delta \mathbf{r}$ չափով հետացված կետում: Այսպիսի վարքը բնորոշ է ալիքային պրոցեսի համար, ինչը $\mathbf{k}$ վեկտորի ուղղությամբ շարժվում է $\mathbf{c} = \omega/k$ արագությամբ:

x առանցքի երկայնքով տարածվող միաչափ և գծային բևեռացած մոնոքրոմատիկ էլեկտրամագնիսական ալիքի դեպքում առկա են էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի մեկական բաղադրիչներ՝

$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t + \alpha), \quad E_x = E_z = 0, \quad (65.4a)$$

$$B_z = B_0 \cos(kx - \omega t + \alpha), \quad B_x = B_y = 0, \quad (65.4b)$$

որտեղ $B_0 = E_0 / c$: Միաչափ ալիքի ակնթարթային գրաֆիկական պատկերը ներկայացված է Նկ. 65.1-ում: Ինչպես տեսնում ենք $\vec{E}$ և $\vec{B}$ վեկտորները կազմում են աջ խցանահանի համակարգ: Տարածության ամրագրված կետում $\vec{E}$ և $\vec{B}$ վեկտորները ժամանակի ընթացքում տատանվում են ներդաշնակության օրենքով, ընդ որում՝ միասին մեծանում են, ապա՝ փոքրանում, դառնում զրո, փոխում ուղղությունը և այսպես անընդհատ:



Նկ. 65.1

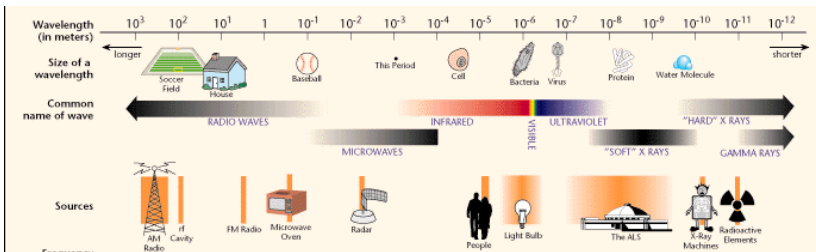
Սրանք հնարավոր պարզագույն տատանումներն են վեկտորական բնույթի դաշտերի համար, որոնք բավարարում են Մաքսվելի (65.1) հավասարումներին:

§ 66. Էլեկտրամագնիսական ալիքների սպեկտրը

Մոնոքրոմատիկ էլեկտրամագնիսական ալիքը, որը նկարագրվում է (65.4) արտահայտություններով, օժտված է տատանումների որոշակի ω հաճախությամբ և $\lambda = 2\pi c / \omega$ ալիքի երկարությամբ: Մենք շրջապատված ենք էլեկտրամագնիսական ալիքներով, որոնք նաև օգտագործում ենք բազմազան նպատակներով: Դրանց ալիքի երկարությունները փոխվում

են շատ լայն դիապագոնում. կարող է չափվել հարյուրավոր կիլոմետրերով, իսկ կարող է և փոքր լինել պիկոմետրից ($1 \text{ պիկո} = 10^{-12}$): Այս ամբողջ սպեկտրն ընդունված է բաժանել մի քանի բնութագրական դիապագոնների, որոնցից յուրաքանչյուրում էլ եկտրամագնիսական ալիքներն ունեն համեմատաբար նման հատկություններ և ճառագայթման միջոցներ: Ասվածի սխեմատիկ մեկնաբանությունը բերված է Նկ. 66.1-ում: Սանդղակում ալիքների երկարությունները ներկայացված են մետրերով:

Անմիջապես ներքևում պատկերված են առարկաներ՝ ստադիոն, տուն, բեյսբոլի գնդակ և այլն՝ պատկերացում կազմելու համար ալիքի երկարության չափերի մասին: Ներքևի շարքում պատկերված են համապատասխան ալիքի երկարությունների ճառագայթման աղբյուրները:



Նկ. 61.1

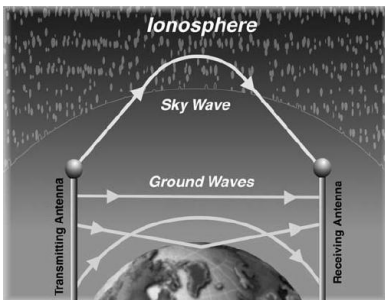
1. *Ռադիոալիքներ* ($\lambda > 1 \text{ մ}$): Ռադիոալիքների աղբյուրներ ծառայում են լիցքերի տատանումները հաղորդալարերում, անտենաներում, տատանողական կոնտուրներում: Ռադիոալիքներ ճառագայթվում են նաև ամպրոպների ժամանակ:

- Գերերկար ալիքներ ($\lambda > 10$ կմ): Լավ տարածվում են ջրում, այդ պատճառով օգտագործվում են սուզանավերի կապի համար:

- Երկար ալիքներ ($1 \text{ կմ} < \lambda < 10 \text{ կմ}$): Օգտագործվում է ռադիոկապում, ռադիոհաղորդումներում, ռադիոնավիգացիայում:

- Միջին ալիքներ ($100 \text{ մ} < \lambda < 1 \text{ կմ}$): Ռադիոհաղորդումներ և ռադիոկապ 1500 կմ-ից ոչ ավելի հեռավորությունների վրա:

- Կարճ ալիքներ ($10 \text{ մ} < \lambda < 100 \text{ մ}$): Ռադիոհաղորդումներ: Լավ անդրադառնում են իոնոսֆերայից: Իոնոսֆերայից և Երկրի մակերևույթից բազմակի անդրադարձումների շնորհիվ կարող են տարածվել Երկրագնդի շուրջը: Այդ պատճառով կարճ ալիքների վրա կարելի է բռնել այլ երկրների ռադիոկայաններ:



- Մետրային ալիքներ ($1 \text{ մ} < \lambda < 10 \text{ մ}$): Տեղական ռադիոհաղորդումներ գերկարճ դիապազոնում: Օգտագործվում է նաև հեռուստատեսությունում (ֆեդերալ կանալներ):

- Դեցիմետրային ալիքներ ($10 \text{ սմ} < \lambda < 1 \text{ մ}$): Հեռուստատեսություն (դեցիմետրային կանալներ): Նաև մոբիլային կապի դիապազոնն է: Լավ հայտնի կիրառություններից է նաև միկրոալիքային վառարանը: Նրա ստանդարտ հաճախությունը 2450 ՄՀց է, ինչը ջրի մոլեկուլների ռեզոնանսային կլանման հաճախությունն է: Համապատասխան ալիքի երկարությունը 12 սմ է:

• Սանտիսետրային ալիքներ ($1 \text{ սմ} < \lambda < 10 \text{ սմ}$): Սա ռադիոլուկացիայի և արբանյակային հեռուստակապի տիրույթն է:

• Միլիմետրային ալիքներ ($1 \text{ մմ} < \lambda < 1 \text{ սմ}$): Ռադիոլուկացիա, տիեզերական կապի կանալներ: Այն հարում է ինֆրակարմիր ճառագայթման երկարալիքային սահմանին:

2. *Ինֆրակարմիր ճառագայթում* ($780 \text{ նմ} < \lambda < 1 \text{ մմ}$): Արձակվում է տաք մարմինների մոլեկուլների և ատոմների կողմից: Ինֆրակարմիր ճառագայթումը կոչվում է նաև ջերմային: Կլանվելով մեր մաշկում՝ այն առաջացնում է ջերմության զգացում: Մարդկային աչքն այն չի տարբերակում: Կիրառվում է ինֆրակարմիր տաքացուցիչներում, հեռադեկավարման վահանակներում, գիշերային տեսանելիության սարքերում, լաբաներկային մակերևութների չորացուցիչներում և այլն:

Ջերմաստիճանը բարձրացնելիս մարմնի ինֆրակարմիր ճառագայթման ալիքի երկարությունը փոքրանում է՝ տեղաշարժվելով տեսանելի լույսի կողմ: Շիկանալիս մարմինն արդեն արձակում է տեսանելի լույս:

3. *Տեսանելի լույս* ($380 \text{ նմ} < \lambda < 780 \text{ նմ}$): Տեսանելի լույսի դիապագոնն ընդունված է բաժանել յոթ ինտերվալների՝ սպեկտրալ գույների.

- կարմիր՝ $625 \text{ նմ}-780 \text{ նմ}$,
- նարնջագույն՝ $590 \text{ նմ}-625 \text{ նմ}$,
- դեղին՝ $565 \text{ նմ}-590 \text{ նմ}$,
- կանաչ՝ $500 \text{ նմ}-565 \text{ նմ}$,
- երկնագույն՝ $485 \text{ նմ}-500 \text{ նմ}$,
- կապույտ՝ $440 \text{ նմ}-485$,
- մանուշակագույն՝ $380 \text{ նմ}-440 \text{ նմ}$:

Մարդու աչքն առավել զգայուն է կանաչի շուրջ լույսի նկատմամբ:

4. *Ուլտրամանուշակագույն ճառագայթում* ($10 \text{ նմ} < \lambda < 380 \text{ նմ}$): Ուլտրամանուշակագույն ճառագայթման հիմնական աղբյուրը մեր շրջապատում Արեգակն է: Արևի տակ մնալիս մեր մաշկի մուգացումը և այրվածքները հենց այս ճառագայթմամբ են պայմանավորված: Փոքր չափաբաժնով այն օգտակար է մարդու օրգանիզմին. բարձրացնում է իմունիտետը, լավացնում է նյութափոխանակումը, օժտված է բակտերիաները ոչնչացնելու հատկությամբ, սակայն շատ վտանգավոր է աչքի ցանցաթաղանթի համար:

5. *Ռենտգենյան ճառագայթում* ($5 \text{ պմ} < \lambda < 10 \text{ նմ}$): Առաջանում է անոդին բախվելիս արագ էլեկտրոնների կտրուկ արգելակման ժամանակ (արգելակային ճառագայթում), ինչպես նաև որոշ ատոմներում էներգետիկ մի մակարդակից մյուսն անցումների արդյունքում: Անցնելով մարդու և կեղանիների մարմնի միջով, ռենտգենյան ճառագայթումը կլանվում է կալցիումի ատոմների կողմից, ինչն էլ հնարավորություն է տալիս ստանալու մեզ լավ հայտնի ռենտգենյան պատկերները:

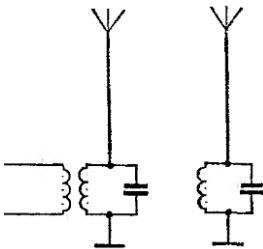
Ռենտգենյան ճառագայթումը նյութագիտության մեջ առանցքային դեր է կատարում կառուցվածքային համաչափությունների և բարդ մոլեկուլների, օրինակ՝ հեմոգլոբինի կամ ԴՆԹ-ի ատոմական բաղադրությունը որոշելու համար: Օդանավակայաններում այն օգտագործվում է պայուսակների պարունակությունը ստուգելու համար և այլն: Մեծ դոզաներով ռենտգենյան ճառագայթումը վտանգավոր է մարդու համար. կարող է առաջացնել ուռուցքներ և ճառագայթային հիվանդություն:

6. *Գամմա ճառագայթում* ($10 \text{ նմ} < \lambda < 380 \text{ նմ}$): Սա ամենաբարձր էներգիաներով էլեկտրամագնիսական ճառագայթումն է: Նրա թափանցման ունակությունը շատ ավելի բարձր

է, քան ռենտգենյան ճառագայթներինը: Գամմա ճառագայթումն առաջանում է ատոմական միջուկներում մի էներգետիկ մակարդակից մյուսին անցման արդյունքում, նաև որոշ միջուկային ռեակցիաներում: Այն կարող է առաջանալ լույսի արագությանը մոտիկ արագություններով շարժվող լիցքերից, եթե նրա հետագիծը կորացած է, ասենք, մագնիսական դաշտում (սինխրոտրոն ճառագայթում): Խիստ վտանգավոր լինելով հանդերձ մարդու առողջության համար՝ թույլ չափաբաժնով այն օգտագործվում է ճառագայթային թերապիայում:

Գյուղատնտեսական արտադրանքի պահպանման և սննդի արդյունաբերությունում օգտագործվում է գամմա ճառագայթման միկրոբասպան հատկությունը:

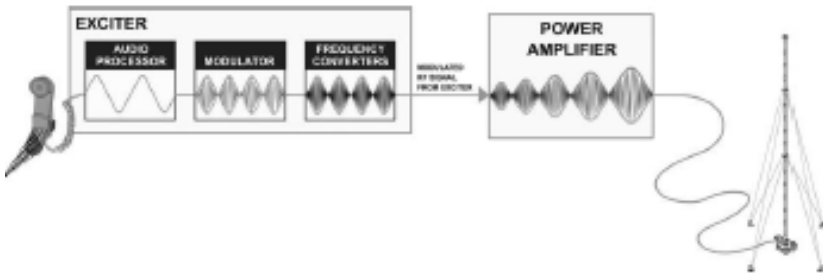
§ 67. Ռադիոկապի և ինֆորմացիայի փոխանցման սկզբունքները



Ռադիոկապի ստեղծման հիմնական սկզբունքը բավականին պարզ է: Հաղորդող ռադիոկայանի գեներատորի հաճախությանը զուգահեռ ռեզոնանսային համալարված անտենայում գրգռվում են բարձրհաճախային ուժեղ հոսանքներ:

Այդ անտենայի ճառագայթած էլեկտրամագնիսական ալիքները, հասնելով ընդունիչ անտենային, որը նույնպես համալարված է գեներատորի ռեզոնանսային հաճախության վրա, նրանում գրգռում են նույն հաճախության հոսանքներ: Դրանք էլ հետագայում ուժեղացվում են և օգտագործվում:

Էլեկտրամագնիսական ալիքների միջոցով տեղեկատվության փոխանցման, օրինակ՝ մարդկային ձայնի, երաժշտության կամ թվային հաջորդականության համար, դրանք նախ վեր են ածվում համապատասխան հաճախությունների ազդանշանի, որոնք վերադրվում են գեներատորի կրող ռադիոալիքի վրա: Այս մոդուլացումը այն է, որ կրող ալիքի որոշ բնութագրիչ՝ ամպլիտուդը, հաճախությունը կամ փուլը, փոփոխվում են ուղարկվող տեղեկատվությունը ներառող օրինաչափությամբ: Նկ. 67.1-ում պատկերված է մոդուլյատորի գործառույթների հերթականությունը:

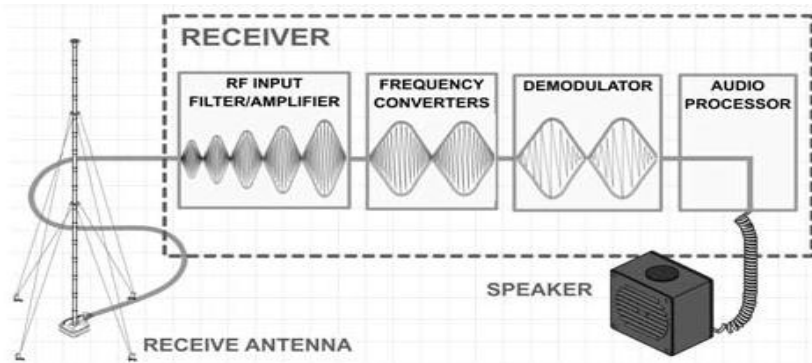


Նկ. 67.1

Բոլոր մոդուլյատորները կազմված են գրգռիչի և ուժեղացուցիչի բլոկներից: Գրգռիչում տեղեկատվություն կրող ազդանշանը, կոնկրետ դեպքում մարդու ձայնը, հեռախոսային ապարատի միջոցով վեր է ածվում ցածր հաճախային ազդանշանի (էլեկտրական հոսանքի), ինչը տրվում է մոդուլյատորին և վերադրվում կրող ալիքի վրա: Պատկերված դեպքում դա ամպլիտուդային մոդուլյացիա է: Եթե անհրաժեշտություն կա, ապա մոդուլացված ազդանշանը ձևափոխվում է այնպիսի հաճախության, որը պետք է ճառագայթվի: Ուժեղացուցիչը մեծացնում է տատանումների ամպլիտուդը (հնարավոր է մի քանի

էտապներով), դրանով իսկ՝ անտենայի ճառագայթման հզորությունը:

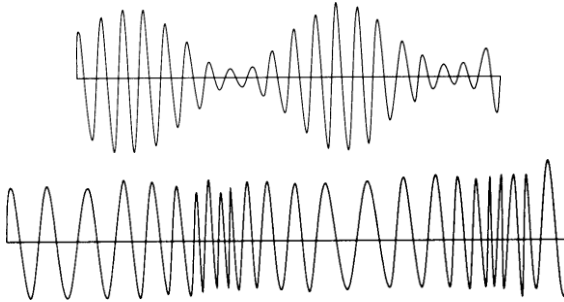
Բոլոր բարձրհաճախային ընդունիչ համակարգերը պարունակում են անտենա, անտենայից հետո՝ ռադիոհաճախային ֆիլտր/ուժեղացուցիչ, հաճախության ձևափոխիչ, դեմոդուլյատոր, որում նախնական մոդուլացնող ազդանշանն առանձնացվում է մոդուլացված կրողից: Այն տրվելով բարձրախոսին՝ էլեկտրական հոսանքից վեր է ածվում ձայնային հաղորդագրության:



Նկ. 67.2

Եթե տեղեկատվության տեղակայումը տեղի է ունենում համեմատականության անընդհատ ռեժիմում, ապա մենք գործ ունենք, այսպես կոչված, անալոգային կապի հետ:

• **Անալոգային ռադիոկապ:** Ամպլիտուդային և հաճախային մոդուլացիաները երկու հիմնական ձևաչափն են անալոգային հաղորդակցությունում (Նկ. 67.3):



Նկ. 67.3

Նկատենք, որ տեղեկատվությունը հաղորդող ալիքը խաստիվ մոնոքրոմատիկ չէ, այլ լցնում է ցածր հաճախությունների որոշակի տիրույթ: Մոդուլացիայի արդյունքում սկզբնական մոնոքրոմատիկ ռադիոալիքը վերածվում է որոշակի սպեկտրալ լայնություն ունեցող ոչ մոնոքրոմատիկ ալիքի, որի սպեկտրալ լայնությունը, այնուամենայնիվ, շատ փոքր է լինում կրող հաճախությունից:

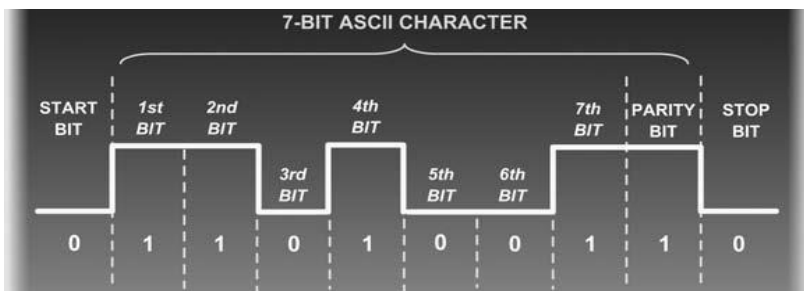
• **Թվային ռադիոկապ:** Բարձր թողունակության և աղմուկների նկատմամբ բարձր կայունության շնորհիվ 1990-ական թթ. վերջերից լայն տարածում են ստացել թվային հաղորդակցության մեթոդները, որոնք կոչվում են նաև մոդեմ (ՄՈդուլյատոր/ԴԵՄոդուլյատոր հապավումից) տեխնոլոգիաներ: Հասկանալու համար թվային հաղորդակցության սկզբունքները հարկ է ծանոթանալ որոշ ընդհանուր թվային տերմինաբանությանը և բացատրել մոդեմի գործողությունը:

Թվային հաղորդակցությունում օգտագործում է գրավոր խոսքի փոխանցման սկզբունքը, ըստ որի՝ օգտագործվում են սիմվոլներ (տառեր)՝ կոդավորելու համար տեղեկատվությունը կոդային խմբերի (բառերի) հաջորդականության մեջ կանալի (տպագրված էջի) միջոցով փոխանցելու այն ընդունողին

(ընթերցողին): Այս սկզբունքի կիրառումը թվային հաղորդակցության համար սկսվում է ուղարկվող ազդանշանը դիսկրետ քայլերով թվերի հաջորդականության վերածումից: Ապա որոշակի ստենոգրաֆիական հապավում օգտագործվում է թվերը կոդային բառերի (երկուական թվերի կամ բիթերի) ձևափոխելու համար, ինչը կանալի (բարձրհաճախային ռադիոալիքի) միջոցով փոխանցվում է ընդունողին (օպերատորին): Բիթերը թվային համակարգի մասեր են՝ կազմված երկու՝ 0 և 1, թվերի բազիսի վրա: Այսպիսով՝ բիթը որևէ փոփոխական է, որը ենթադրում է երկու տարբեր վիճակներ: Օրինակ՝ անջատիչը միացված է կամ բաց, լարումը դրական է կամ բացասական և այլն:

Թվային փոխանցման արագությունը սովորաբար չափվում է մեկ վայրկյանում բիթերի թվով: Ռադիոկանալի բիթային առավելագույն արագությունը կախված է նրա թողունակության գոտու լայնությունից՝ մեծ լայնությանը համապատասխանում է բիթային մեծ արագություն:

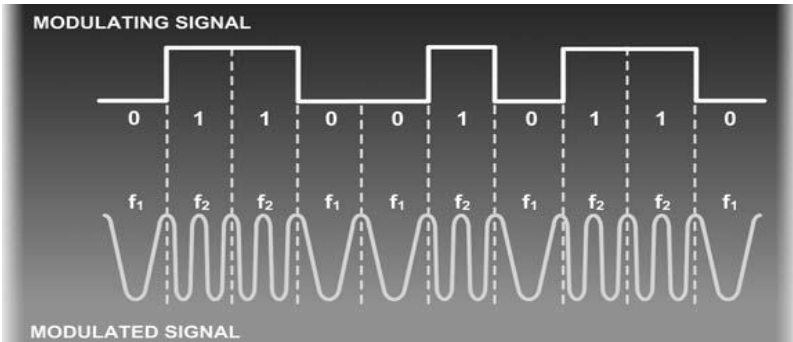
Թվերի փոխանցումը տեղի է ունենում ասինխրոն կամ սինխրոն մոդերի միջոցով: Ասինխրոն փոխանցման դեպքում յուրաքանչյուր որոշյալ (թիվը ներկայացնող, օրինակ՝ 8 բիթերի հերթականություն) ունի նախնական և եզրափակող բիթեր (Նկ. 67.4): Նախնական բիթը նախապատրաստում է ընդունողին ընդունելու որոշյալը: Եզրափակող բիթը հանգեցնում է ընդունիչը ելման վիճակի:



Նկ. 67.4

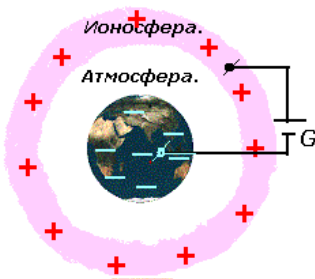
Թվերի սինխրոն փոխանցման սխեմայում նախնական և եզրափակող բիթերը բացակայում են: Այս սխեմային բնորոշ է նախաբանի (բիթերի հայտնի հերթականության, որն ուղարկվում է հաղորդագրության սկզբում, ինչն ընդունողն օգտագործում է՝ սինխրոնիզացվելու համար ներքին ժամանակացույցի հետ) գոյությունը, որը զգուշացնում է ընդունողին, որ հաղորդագրություն է գալիս: Ասինխրոն համակարգերը կարիք չունեն բարդ սինխրոնիզացման ցիկլերի, բայց դա տեղի է ունենում ավելի բարձր հավելավճարով, քան սինխրոն համակարգերում է: Սկզբնական և եզրափակող բիթերը ավելացնում են որոշյալի երկարությունը 25 տոկոսով՝ 8-ից դարձնելով 10:

Թվային՝ բիթային հերթականության տեղեկատվության փոխանցումը ռադիոալիքին (կրող ազդանշանին) տեղի է ունենում մոդեմի միջոցով, որի գործողության բովանդակությունը ամպլիտուդային մոդուլյացիայի օրինակով մեկնաբանված է Նկ. 67.5-ում: Նկատենք, որ դիսկրետ տեղեկատվության փոխանցման դեպքում «մոդուլյացիա» տերմինի փոխարեն երբեմն կիրառվում է «մանիպուլյացիան»:



Նկ. 67.5

§ 68. Երկրի էլեկտրական դաշտը



Երկիրը և արեգակնային համակարգի մյուս մոլորակներն ունեն էլեկտրական և մագնիսական դաշտեր: Մեր մոլորակը էլեկտրական տեսանկյունից կարելի է նմանեցնել սֆերիկ կոնդենսատորի: Ներքին սֆերան՝ Երկրի մակերևույթը, լիցքավորված է բացասական, արտաքին սֆերան՝ իոնոսֆերան, որը լայն շերտով տարածվում է Երկրի մակերևույթից մի քանի տասնյակ կիլոմետր բարձրությունների վրա, լիցքավորված է դրական: Պոտենցիալների տարբերությունը նրանց միջև կազմում է մոտ 300 000 վոլտ:

Մթնոլորտը իդեալական մեկուսիչ չէ, և նրանով անընդհատ հոսում են իոնային ու կոնվեկտիվ հոսանքներ, որոնք ամբողջ մոլորակի մակերևույթի հաշվով հասնում են հազարավոր ամպերների: Չնայած դրան՝ երկրային կոնդենսատորի թիթեղների միջև պոտենցիալների տարբերությունը չի նվա-

գում: Դա նշանակում է, որ բնության մեջ գոյություն ունի գեներատոր, որը մշտապես վերականգնում է լիցքերի կորուստը կոնդենսատորի թիթեղներից: Այդպիսի մեխանիզմներից մեկը Երկրի մագնիսական դաշտն է, որը մեր մոլորակի հետ պտտվում է արեգակնային քամու լիցքավորված մասնիկների հոսքի մեջ:

Մեր շրջակայքում գոյություն ունի էլեկտրական դաշտ: Էլեկտրական դաշտի լարվածությունը շատ անհավասարաչափ է բաշխված ըստ բարձրության: Այն առավելագույնն է Երկրի մակերևույթի մոտ և կազմում է մոտավորապես 150 Վ/մ: Բարձրությանը զուգահեռ այն նվազում է էքսպոնենտալին մոտ օրինաչափությամբ և 10 կմ բարձրության վրա կազմում է Երկրի մակերևույթին ունեցած արժեքի ընդամենը 3 տոկոսը: Այսպիսով, համարյա ամբողջ էլեկտրական դաշտը կենտրոնացված է մթնոլորտի ներքևի շերտում՝ Երկրի մակերևույթին մոտ: Էլեկտրական դաշտի լարվածության վեկտորն ընդհանուր դեպքում ուղղված է դեպի ներքև:

Երկրի էլեկտրական դաշտը, ինչպես ամեն մի էլեկտրական դաշտ, լիցքերի վրա ազդում է որոշակի ուժով, որը դրական լիցքերին հրում է ներքև՝ դեպի Երկիր, իսկ բացասականներին՝ վերև՝ դեպի ամպերը: Այդ ամենն իր ներդրումն է ունե-



նում բնական երևույթներում, ինչին մենք մշտապես ականատես ենք հողմերի, փոթորիկների, մրրկահողմերի, տեղատարափ անձրևների ու ձյան, հյուսիսափայլի, կայծակների ու ամպրոպների

տեսքով և այլն: Օրինակ՝ օդի բարձրացումը պտտահողմերի ժամանակ տեղի է ունենում հիմնականում ծառամասերում և կենտրոնական տեղամասում՝ ջերմային աշտարակում, օդի խտությունների տարբերության հաշվին, բայց ոչ միայն: Վերամբարձ ուժի մի մասը (մոտ մեկ երրորդը) ապահովում է Երկրի էլեկտրական դաշտը Կուլոնի օրենքի համաձայն: Օվկիանոսը փոթորկի ժամանակ ահռելի դաշտ է, որի եզրային մասերում կուտակվում են բացասական լիցքեր և համապատասխան էլեկտրական դաշտի լարվածություն: Գոլորշացող ջրի մոլեկուլներն այս պայմաններում հեշտորեն գերում են բացասական լիցքեր և տանում դրանց իրենց հետ: Իսկ Երկրի էլեկտրական դաշտը, համաձայն Կուլոնի օրենքի, ավելացնում է օդին վերամբարձ ուժ:

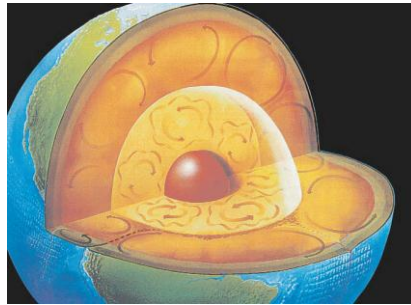
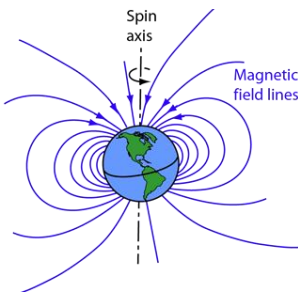
Այսպիսով, Երկրի ընդհանուր էլեկտրական համակարգն իր հզորության մի մասը ծախսում է մոլորակում մթնոլորտային մրրիկների՝ փոթորիկների, ցիկլոնների և այլնի ուժեղացման վրա: Հզորության այսպիսի կորուստը դինամոյի մեխանիզմով լրացվում է և չի անդրադառնում Երկրի էլեկտրական դաշտի մեծության վրա:

Երկրի էլեկտրական դաշտը ենթակա է գլոբալ տատանումների: Ձմռանն այն ավելի ուժեղ է, քան ամռանը: Օրվա ընթացքում դաշտը հասնում է առավելագույնի՝ Գրինվիչի ժամանակով ժամը 19-ին, իսկ տատանումները, որպես կանոն, չեն գերազանցում միջին արժեքի 30 տոկոսը:

§ 69. Երկրի մագնիսական դաշտը

Երկրի մագնիսական դաշտը, ինչպես նշվեց, միջինում նման է Երկրի պտտման առանցքից 11 աստիճանով շեղված

երկարավուն մագնիսի մագնիսական դաշտին: Մագնիսական դաշտի բացատրության համար հաստատուն մագնիսի մոդելը, այնուամենայնիվ, չի կարող հիմք ընդունվել, քանի որ հիմնական էլեմենտի՝ երկաթի համար Կյուրիի մագնիսաթափման ջերմաստիճանը 770 K է, իսկ մանտիայի և միջուկի ջերմաստիճաններն ավելի բարձր են: Մագնիսական դաշտը միջոցառաջապատում է



հոսանքներին: Հետևաբար բնական է ենթադրել, որ մագնիսական դաշտի առաջացման պատճառ են Երկրի հեղուկ երկաթի (նկատենք, որ ծանր, ռադիոակտիվ էլեմենտների կողմից դիտարկելիս այն ամենակայուն քիմիական էլեմենտն է) միջուկում և իոնասֆերայում ցիրկուլացվող էլեկտրական հոսանքները: Հիմնական բաղադրիչը հեղուկ միջուկում գործող գեոդինամոյի մեխանիզմի ներդրումն է: Կոնվեկցիան հիմնականում գալիս է միջուկի բաղադրության շառավղային գրադիենտից, բայց նաև ջերմաստիճանային գրադիենտից, որը հանգեցնում է հեղուկ երկաթի 30 կմ/ժ գնահատված արագությամբ շարժման: Կորիոլիսի ուժը ուժեղ ներագրում է այդ շարժումների վրա: Կոնվեկցիայի, պտույտի և Կորիոլիսի ուժի համատեղ ազդեցությամբ հեղուկի միջին շարժումը ներքին միջուկին մոտ դառնում է սպիրալաձև, իսկ տուրբուլենտությունների, ոչ գծայնությունների և քառսի ազդեցությունները դարձ-

նում են պատկերը եռաչափ և ավելի բարդ: Հեղուկի միջով բարդ ուղիներով հոսում են հսկայական էլեկտրական հոսանքներ: Այդ շարժումն էլ արդեն գոյություն ունեցող մագնիսական դաշտում, ինչպես դինամոյում, գեներացնում է լրացուցիչ մագնիսական դաշտ: Ներկայումս, Երկրի մակերևույթին մոտ մագնիսական դաշտի լարվածությունը տարբեր աշխարհագրական լայնություններում 0.3-0.6 գաուս է: Նկատենք, որ նման պրոցեսներ ընթանում են նաև այլ մոլորակներում և աստղերում:

Երկրի մագնիսական էներգիան, այսպիսով, գալիս է արտաքին միջուկի կինետիկ էներգիայից, որն էլ իր հերթին գալիս է արտամղող ուժի գոյությունից: Կոնվեկցիան ի վերջո ռադիոակտիվ տրոհումից է, ինչը պահում է միջուկը տաք: Հեղուկն արտաքին միջուկում պտտվում է Երկրի մակերևույթի նկատմամբ, սակայն այն չափել առայժմ հնարավոր չի եղել: Ինչ վերաբերում է ներքին միջուկին, ապա հաշվարկներն առաջարկում են երկրակեղևից մի փոքր ավելի արագ պտույտ՝ կես աստիճան տարում:

Երկրի մագնիսական դաշտը վերակողմնորոշում է իր ուղղությունը (բևեռները) անկանոն՝ մի քանի տասնյակ հազարից մի քանի միլիոն տարի ինտերվալներով: Այս պրոցեսը ընկալելը երկրաֆիզիկայի կենտրոնական առարկաներից մեկն է: Խնդիրը հեշտ չէ, փորձերի անցկացում հնարավոր չէ, իսկ բևեռների վերջին անցումը տեղի է ունեցել մոտ 730 000 տարի առաջ: Վերջին 150-160 տարիների չափումները ցույց են տալիս, որ մագնիսական դիպոլային մոմենտը աստիճանաբար նվազում է, իսկ կվադրոպոլային մոմենտը՝ աճում: Գուցե մեզ անակնկալ է սպասում:

Աստղերում, նաև Արեգակում, մագնիսական դաշտը պայմանավորված է կոնվեկցիայով, միայն թե ներկայումս այն տեղի է ունենում պլազմայում, ինչն օժտված է համեմատաբար փոքր մածուցիկությամբ: Դրա արդյունքում արեգակնային դինամոն տարբերվում է երկրադինամոյից: Օրինակ՝ Արեգակի մակերևույթի պտտման պարբերությունը կախված է լայնությունից. Հասարակածի վրա այն 24.5 օր է և բևեռներում 38 օր: Արեգակի մագնիսական դաշտը վերաառաջանում է արագորեն և կանոնավոր կերպով՝ ամեն 11 տարին մեկ: Այն նկատելիորեն ազդում է արեգակնային բծերի, Երկիր հասնող արեգակնային քամիների ինտենսիվության վրա: Արեգակի մակերևույթին մագնիսական դաշտի լարվածությունը մի քանի անգամ մեծ է Երկրի մակերևույթին մագնիսական դաշտի լարվածությունից:

Գալակտիկական մագնիսական դաշտերի ուսումնասիրությունն էլ ավելի բարդ խնդիր է և գտնվում է սաղմնային վիճակում: Դիտողական արդյունքները մեկնաբանում են որպես 0.0001 գաուս կարգի մագնիսական դաշտեր: Գալակտիկական դաշտերի առաջացման մեխանիզմը դեռևս հասկացված չէ:

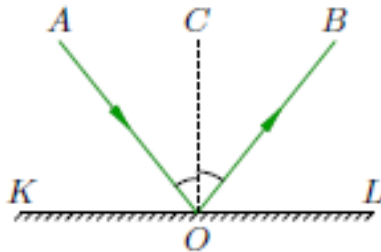
ԳԼՈՒԽ VI

Օպտիկա

§ 70. Լուսի անդրադարձման և բեկման օրենքները

Դատարկությունում կամ թափանցիկ համասեռ միջավայրում լուսային ճառագայթը տարածվում է ուղղագիծ: Անհամասեռ միջավայրի յուրաքանչյուր անհամասեռությունից լուսային ճառագայթը մասնակի անդրադառնում, մասնակի անցնում է առաջ: Դա տեղի է ունենում որոշակի օրինաչափություններով, որոնց պարզագույն դեպքերին արդեն ծանոթ ենք ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից: Դիտարկենք դրանք:

- **Լուսի անդրադարձումը:** Ընկնող ճառագայթը, անդրադարձող ճառագայթը և անկման կետում անդրադարձնող մակերևույթին տարված ուղղահայացը գտնվում են մեկ հարթությունում: Անդրադարձման անկյունը հավասար է անկման անկյանը:



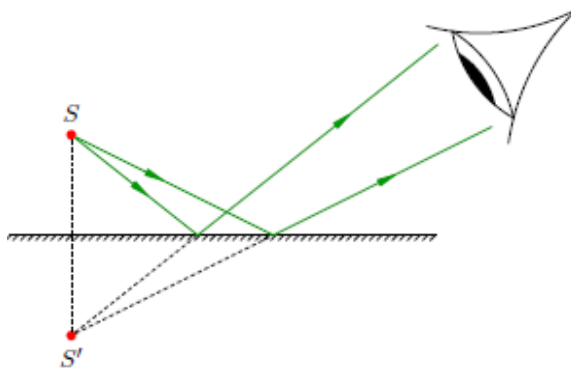
Նկ. 70.1

Նկ. 70.1-ում բերված պատկերում այս օրինաչափությունները նշանակում են, որ AO , CO և BO գծերը գտնվում են նույն հարթության մեջ, և որ անկյուն AOC -ն հավասար է անկյուն COB -

ին: Այստեղ խոսքը որոշակի կետից տեղի ունեցող անդրադարձման մասին է:

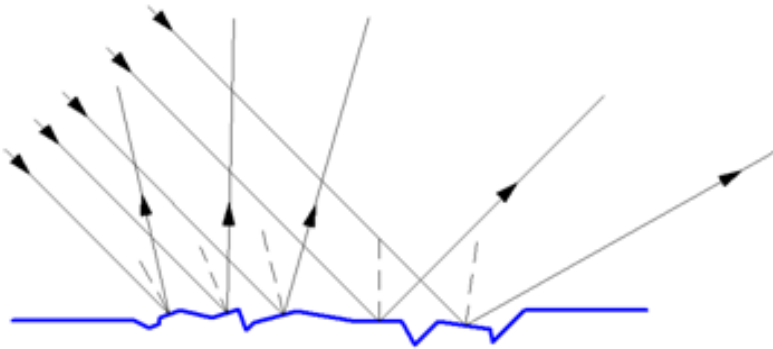
Ամբողջական մակերևույթների համար առանձնացվում են երկու եզրային դեպքեր՝ հայելային և ցրիվ:

Հայելիները (հարթ մակերևույթները) թույլ են տալիս ստանալ կետի (Նկ. 70.2), դրանով իսկ՝ որևէ առարկայի, տեսանելի պատկերը: Մեզ թվում է, որ մեր աչքի մեջ ընկնող տարամետ ճառագայթների փունջը գալիս է շարունակությունների հատման S' կետից: ճառագայթների դիմաց ոչ թե հայելի, այլ էկրան տեղադրելիս մենք կետի պատկեր, իհարկե, չէինք ստանա:



Նկ. 70.2

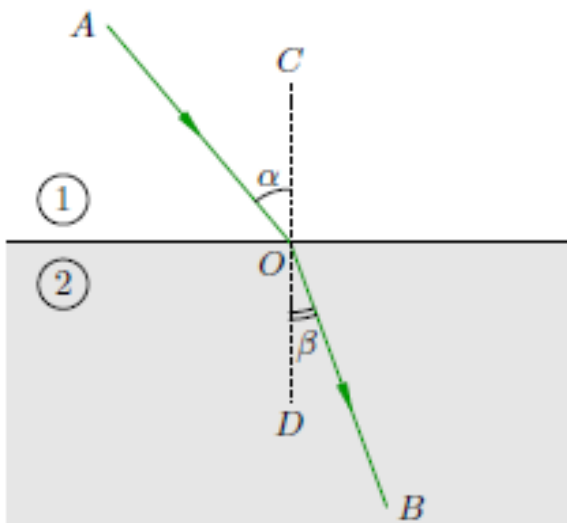
Եթե լուսային ճառագայթների կանոնավոր փունջն ընկնում է անհարթ, քառտիկ խորդուրդորություններով մակերևույթի վրա, ապա անդրադարձող ճառագայթները վերադառնում են անկման կիսատարածություն բոլոր հնարավոր ուղղություններով, ինչպես մեկնաբանված է Նկ. 70.3-ում: Այսպիսի անդրադարձումը կոչվում է ցրիվ կամ դիֆուզային:



Նկ. 70.3

• **Լուսի բեկումը:** Եթե միջավայրի օպտիկական հատկությունները անընդհատ փոխվում են, ապա փոփոխվում է նաև լուսային ճառագայթի տարածման ուղղությունը: Օրինաչափությունները, սակայն, առավել պարզ են սահմանվում թափանցիկ միջավայրի հատկությունների կտրուկ-թռիչքաձև փոփոխության՝ երկու միջավայրերի սահմանի դեպքում: Ընկնող ճառագայթը, բեկված ճառագայթը և անկման կետում բաժանման սահմանին տարված ուղղահայացը գտնվում են նույն հարթության մեջ (Նկ. 70.4): Անկման անկյան սինուսի հարաբերությունը բեկման անկյան սինուսին հավասար երկրորդ և առաջին միջավայրերի բեկման ցուցիչների հարաբերությանը.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} : \quad (70.1)$$



Նկ. 70.4

Միջավայրի բեկման ցուցիչը դատարկությունում լույսի արագության հարաբերությունն է տվյալ միջավայրում լույսի արագությանը՝ $n = c/v$: Գազային, հեղուկ և պինդ միջավայրերում լույսը, որպես կանոն, ավելի դանդաղ է տարածվում, քան դատարկությունում: Ֆիզիկայում տարբերակվում են ֆազային և խմբային արագություններ:

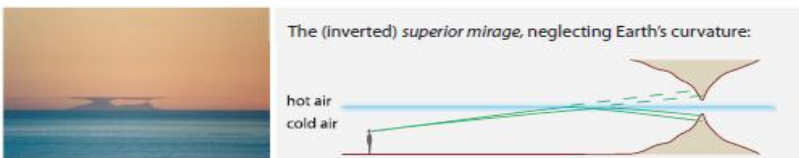
Բեկման ցուցիչը միջավայրի կարևոր օպտիկական բնութագիր է և իրականում կախված է նաև տարածվող լույսի ալիքի երկարությունից: Լույսի բեկումը շատ տարածված երևույթ է, քանի որ շատ հազվադեպ են կցորդված պինդ ու հեղուկ նյութերն ունենում նույն բեկման ցուցիչը:

Լույսի բեկման երևույթով են բացատրվում մի շարք արտառոց պատկերների առաջացում: Այդպիսի մի փորձնական օրինակ բերված է Նկ. 70.5-ում, ինչը հեշտորեն կարելի է կրկնել:



Նկ. 70.5

Եթե լույսն օդում տարածվում է մեծ հեռավորություններ, ապա բեկումը կարող է լինել զգալի: Երբ մենք նայում ենք հեռվում գտնվող լեռներին, ապա եկող լույսը ուղղագիծ չի տարածվում մինչև մեզ հասնելը: Առկա անկյունային շեղումը հասնում է մի քանի բույսերի, ինչը լուրջ խնդիրներ է առաջացնում ցամաքային երկրաբանությունում: Անտարակույս այստեղ առավել հայտնի երևույթը միրաժների առաջացումն է, ինչը օպտիկական մեկնաբանության հետ միասին տրված է Նկ. 70.6-ում: Միրաժներն առաջանում են օդի տաք շերտում շոշափողին մոտ անկյունների տակ տարածվող լուսային ճառագայթների՝ դեպի ներքև բեկման շնորհիվ: Միրաժները միշտ երևում են հորիզոնին մոտ, առաջ ձգված ձեռքի բացված բթամատի կազմած անկյունից փոքր անկյունների տակ:



Նկ. 70.6

Եթե օդի տաք շերտը գտնվում է դիտորդից ներքև, ապա նույն օրինաչափություններով միրաժային պատկերներն

առաջանում են ուղիղ պատկերների ներքևում, որպես դրա շրջված կրկնօրինակներ (Նկ. 70.7):



Նկ. 70.7

Աստղերից եկող լույսը ևս բեկվում է՝ անցնելով երկրային մթնոլորտով: Օրինակ՝ իջնող արեգակի սկավառակն իր վերին եզրով հորիզոնը շոշափելու պահին տեսնելիս իրականում արդեն իջած է լինում հորիզոնից: Ճառագայթի կորացման արժեքը կախված է օդի ջերմաստիճանային և խտության գրադիենտներից: Դրանք հաճախ հատկապես մեծ են լինում բարձր լայնություններում և կարող են հասնել մինչև 2 աստիճանի (Նոր Երկիր էֆեկտը):

Աստղերն առկայծում են երկնքում և այդ առկայծումը բացատրվում է օդի տուրբուլենտությունների հետևանքով դիտվող ճառագայթի ճանապարհի տարբեր տեղամասերում բեկման ցուցչի (բեկումների) անկանոն փոփոխություններով (Նկ. 70.8): Ի դեպ, այստեղ կարևոր է նաև, որ աստղերը, գտնվելով մեզանից մեծ հեռավորությունների վրա, երևում են որպես լույսի համարյա կետային աղբյուրներ և մեր բիբից ներս է մտնում լույսի շատ նեղ ճառագայթ՝ Ժամանակի ամեն պահին մեկ որոշակի ուղղությամբ: Մոլորակներն ավելի կայուն են լուսարձակում երկնքում, որովհետև, մեզ անհամեմատ մոտ լինելով, երևում են ոչ որպես կետեր, այլ որպես փոքր սկավառակներ:

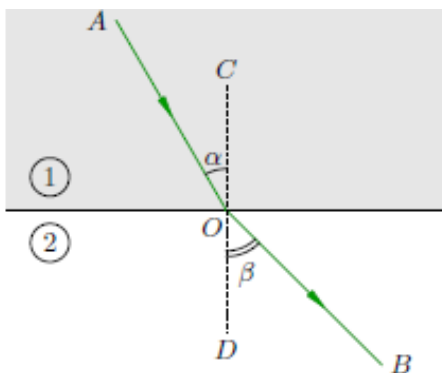


Նկ. 70.8

Մոլորակի դիտվող մակերևույթի տարբեր տեղամասերից եկող զիգագաձև հետագծերը միախառնվում են մեր աչքում և ստեղծում միջին կայուն պատկեր: Անգամ աստղագիտական դիտակով դիտելիս աստղերը մնում են կետանման:

§ 71. Լրիվ ներքին անդրադարձում

Փոխելով տարածման միջավայրը՝ լուսային ճառագայթը փոխում է նաև տարածման ուղղությունը՝ համաձայն (70.1) օրենքի: Գրենք այն $\sin \beta = (n_1 / n_2) \sin \alpha$ տեսքով, որտեղից պարզորոշ երևում է, որ եթե $n_2 < n_1$, ապա $\beta > \alpha$, այսինքն՝ բեկված ճառագայթը հեռանում է ուղղահայացից ընկնողի համեմատ և մոտենում բաժանման սահմանին, ինչպես պատկերված է Նկ. 71.1-ում:



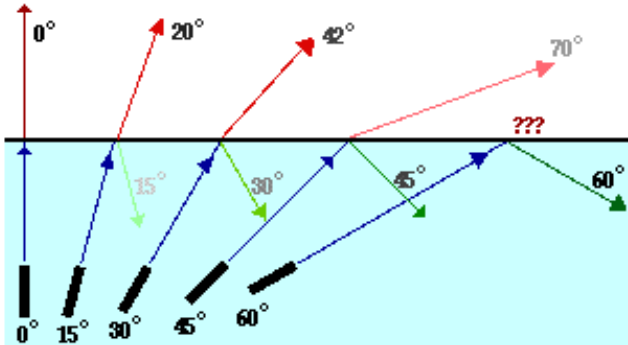
Նկ. 71.1

Յուրօրինակ իրավիճակ է առաջանում, եթե անկման α անկյունն այնպիսին է, որ տեղի է ունենում նաև

$$n_2 \leq n_1 \sin \alpha \quad (71.1)$$

պայմանը: Քանի որ (70.1)-ը չի բավարարվում β -ի իրական արժեքների դեպքում, ուրեմն այդպիսի β գոյություն ունենալ չի կարող: Դա կարող է միայն նշանակել, որ բեկվող ճառագայթը չպետք է մտնի երկրորդ միջավայր և կարող է միայն սահել բաժանման սահմանի երկայնքով: Մյուս օրինաչափությունն այն է, որ անկման α անկյան մեծացումը մեծացնում է անդրադարձող ճառագայթի ինտենսիվության չափաբաժինը, համապատասխան փոքրացնելով բեկվածի չափաբաժինը: α_0 անկյունը, որի դեպքում (71.1)-ում տեղի է ունենում հավասարման նշանը կոչվում է սահմանային անկյուն: Բեկված և բաժանման սահմանով սահող ճառագայթն արդեն ունենում է չնչին ինտենսիվություն, իսկ լուսային ճառագայթի ամբողջ էներգիան գործնականում անցնում է անդրադարձող ճառագայթի մեջ: Ասում ենք, որ տեղի է ունենում ներքին լրիվ անդրադարձում: Անկման անկյան մեծացմամբ անդրադարձող և բեկվող ճառա-

գայթերի փոփոխության օրինաչափությունը պատկերված է Նկ. 71.2-ում:

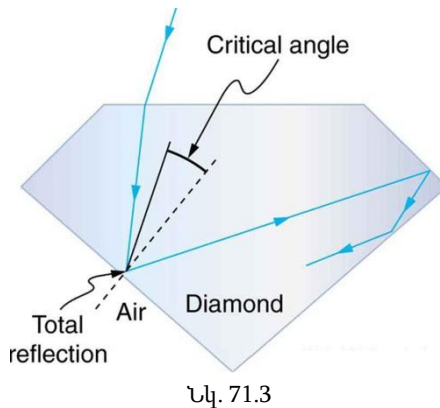


Նկ. 71.2

Գործնական կիրառությունների համար կարևոր է, որ $n_2 < n_1$ պայմանը հեշտորեն իրականացվում է, մասնավորապես՝ միջավայրից օդ անցման դեպքում: Զուր-օդ անցման դեպքում α_0 անկյունը կազմում է 48.6° :

Ներքին անդրադարձման երևույթի առկայությամբ է պայմանավորված ադամանդի մեծ փայլ ունենալը թափանցիկ այլ մարմինների համեմատ: Բեկման ցուցչի մեծ լինելու հետևանքով ադամանդի ներքին լրիվ անդրադարձման սահմանային անկյունը փոքր է՝ 24.4° : Լուսային ճառագայթն ազատորեն ներս մտնելով միջավայր՝ կարող է այնտեղից դուրս գալ, միայն եթե անկման անկյունը փոքր է 24.4° -ից (Նկ. 71.3): Ադամանդի նիստերը հատուկ տաշվում են այնպես, որ դա քիչ հավանական լինի, այնպես որ լույսը կարող է դուրս գալ միայն որոշակի տեղերում: Լավ ադամանդները շատ թափանցիկ են, այնպես որ լույսը կատարում է շատ ներքին անդրադարձում-

ներ և կուտակվում է այնպիսի տեղերում, որտեղից նա կարող է դուրս գալ: Այստեղից էլ փայլը:



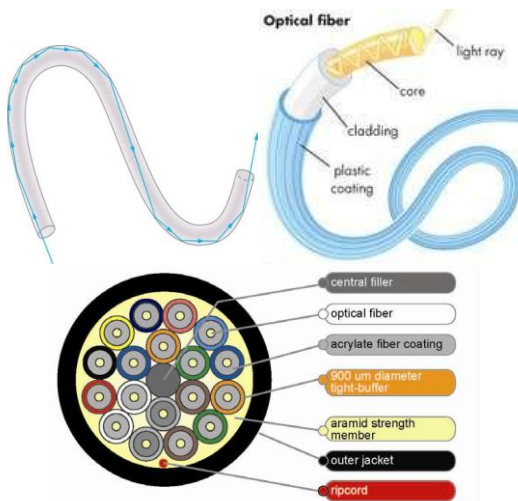
Նկ. 71.3

Ցիրկոնը բնական թանկարժեք միներալ է, որն ունի մեծ՝ $n \approx 1.8 - 2$ բեկման ցուցիչ, բայց ոչ այնքան մեծ, որքան ադամանդինն է, հավասար 2.4-ի: Գույները, որոնք ի հայտ են գալիս շողացող ադամանդում, կապված չեն ալմաստի գույնի հետ: Այն համարյա անգույն է: Շողացող գույները արդյունք են դիսպերսիայի երևույթի, երբ սպիտակ լույսը միջավայրում տրոհվում է բաղկացուցիչ գույների՝ հաճախությունների տեսանելի սպեկտրի: Ադամանդի մեծ փայլը զուգորդվում է նրա բացառիկ կարծրության հետ և ձևավորում է շուկայական առանձնահատուկ զին նրա համար:

§ 72. Օպտիկական մանրաթելային կապ և այլ կիրառություններ

Լրիվ ներքին անդրադարձման կարևորագույն տեխնիկական կիրառությունը մանրաթելային օպտիկան է (fiber optics):

Լուսային ճառագայթը, մտցվելով օպտիկական մանրաթելային կաբել, առանցքին համարյա զուգահեռ կողմնային մակերևույթին ընկնում է նորմալի նկատմամբ մեծ անկյունների տակ և ամբողջովին, առանց էներգիայի կորուստների, անդրադառնում է ետ՝ մանրաթելի ներս: Բազմակի անդրադառնալով՝ ճառագայթները ավելի և ավելի հեռուն են գնում (Նկ. 72.1), տեղափոխելով լուսային էներգիան և ներառված տվյալներն անհրաժեշտ հեռավորությունների վրա, ներառյալ սովորական պայմաններում ոչ հասանելի տեղամասեր:



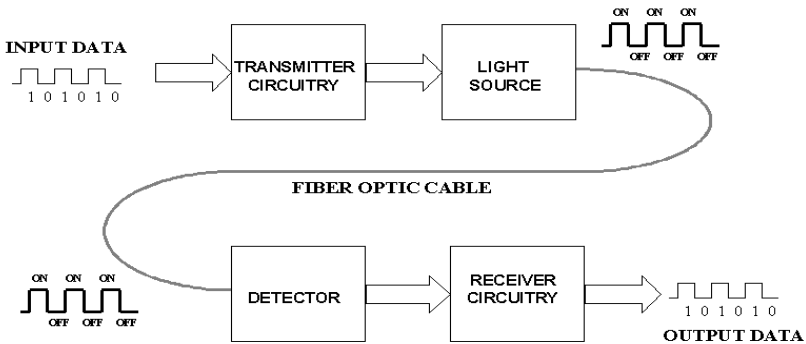
Նկ. 72.1

Կաբելը կազմված է բարձր որակի ապակու կամ կվարցի մանրաթելից, որը ծածկված է ավելի փոքր բեկման ցուցիչ ունեցող նյութի բարակ շերտով: Վերին ձկուն ծածկույթը նաև պաշտպանում է մանրաթելն արտաքին պատահական ազդեցություններից: Որպես կանոն, կաբելներն ունենում են բազմամանրաթելային կազմություն (Նկ. 72.1, աջից):

Օպտիկական մանրաթելերն օգտագործվում են հեռախոսային, ինտերնետային և TV կապում: Լույսը որպես ինֆորմացիայի կրող շատ ավելի արագ է և էֆեկտիվ, քան էլեկտրոնները էլեկտրական հոսանքում: Նաև, քանի որ լուսային ճառագայթները չեն փոխազդում անմիջականորեն միմյանց հետ, իսկ էլեկտրոնները փոխազդում են ի հաշիվ ունեցած էլեկտրական լիցքերի, ապա նույն օպտիկական մանրաթելով հնարավոր է տեղակայել մեծ թվով տարբեր լուսային ազդանշաններ առանց դրանց խտտորումների:

Մանրաթելային կապի առավելություններից է նաև ապակու դիէլեկտրիկ բնույթը: Չունենալով մետաղական բաղադրիչ՝ այն կարող է տեղակայվել էլեկտրամագնիսական, ներառյալ ռադիո հեռարձակման համակարգի կամայական տեղամասերում: Ամբողջական դիէլեկտրիկ կաբելներն իդեալական են նաև կայծակներով ակտիվ աշխարհագրական վայրերում աշխատելու համար: Կարևոր է տվյալների անվտանգ տեղափոխության պահը: Ի տարբերություն մետաղական հենքով համակարգերի, օպտիկական մանրաթելի դիէլեկտրիկ բնույթն անհնար է դարձնում հեռավորության վրա՝ կաբելից դուրս, ազդանշանների գաղտնագրումը: Միակ հնարավորությունը կաբելին միանալն է: Մանրաթելին միացումն էլ ենթադրում է գործառույթներ, որոնք առկա տեխնիկական միջոցներով հեշտորեն գրանցվում են անվտանգության ծառայության կողմից: Այս հանգամանքները դարձրել են օպտիկական մանրաթելային կապը առավելագույն չափով նպատակահարմար կառավարական մարմինների, բանկերի և մյուսների համար, որոնք ունեն անվտանգության բարձրացված պահանջներ: Ծախսատարության ծավալները մոտավորապես նույն մակարդակի են:

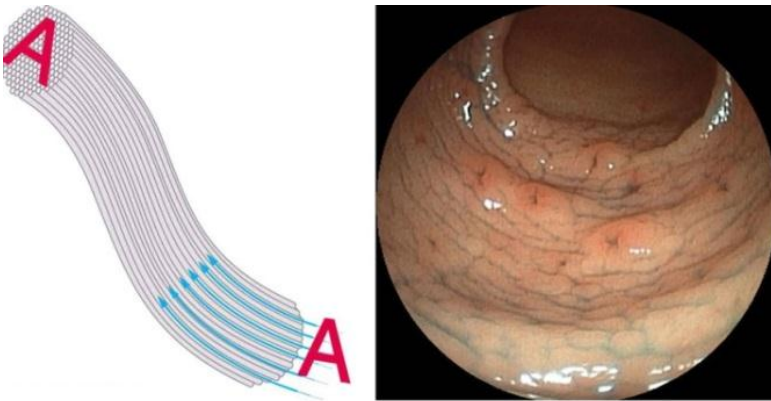
Օպտիկական կապի սխեմատիկ պատկերը ներկայացված է Նկ. 71.2-ում: Այն անալոգ է մի քանի պարագրաֆ առաջ քննարկված ռադիոկապի սկզբունքային սխեմային: Բաղկացած է հաղորդիչ սխեմատեխնիկայից (transmitter circuitry → light source), ինչը էլեկտրական ազդանշանը ձևափոխում է լուսային ազդանշանի, օպտիկական մանրաթելային կաբելից, որը տեղափոխում է լույսը, ապա ընդունիչից (detector → receiver circuitry), ինչը ստանում է լուսային ազդանշանը և ետ ձևափոխում այն էլեկտրական ազդանշանի: Պարզագույն այսպիսի գործող սխեմայի արժեքը կարող է, օրինակ, պակաս լինել 20 ամերիկյան դոլարից:



Նկ. 71.2

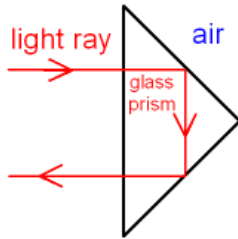
Այլ կիրառություններ: Օպտիկական մանրաթելերի համույթը թույլ է տալիս առանց ոսպնյակների համակարգի օգտագործման մեծ հեռավորությունների վրա տեղափոխելու առարկայի հստակ պատկերը, ինչպես լուսաբանված է Նկ. 71.3-ում: Արժեքավոր են նաև օպտիկական դիագնոստիկ սարքերը, իսկ էնդոսկոպները թույլ են տալիս առկա փոքր անցքերի կամ բարակ կտրվածքների միջոցով նայելու մարմնի ներսը:

Լույսը մանրաթելերի խրցի մի մասով ուղարկվում է հետագոտվող տիրույթը լուսավորելու, իսկ անդրադարձած լույսը մյուս մասով տեղափոխվում է ետ և ցուցադրվում համապատասխան էկրանի վրա: Դրանք հեղաշրջող շունչ են բերել հետագոտական և կիրառական բժշկություն, որտեղ պատկերի ստացումը կարելի է տրցակին ամրացված միկրոսարքի միջոցով զուգակցել վիրաբուժական միջամտությամբ:



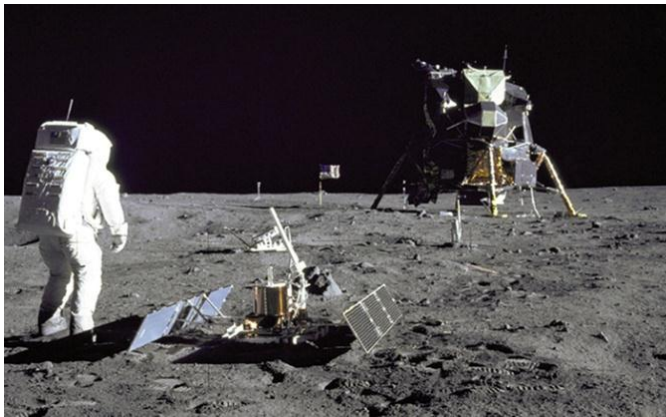
Նկ. 71.3

Արժե նշել նաև լուսային անդրադարձիչների (ռեֆլեկտորների) մասին, որոնց աշխատանքի սկզբունքը մեկնաբանված է Նկ. 71.4-ում: Անդրադարձիչները ամրացվում են ճանապարհների եզրերին և անդրադարձնելով մեքենայի առաջային լուսավորման լամպերի լույսը անկմանը ճիշտ հակառակ ուղղությամբ, գիշերային ժամերին զգուշացնում են ճանապարհային վտանգավոր տեղամասերի մասին, ինչպիսիք են՝ կտրուկ պտույտները, շինարարական աշխատանքները և այլն:

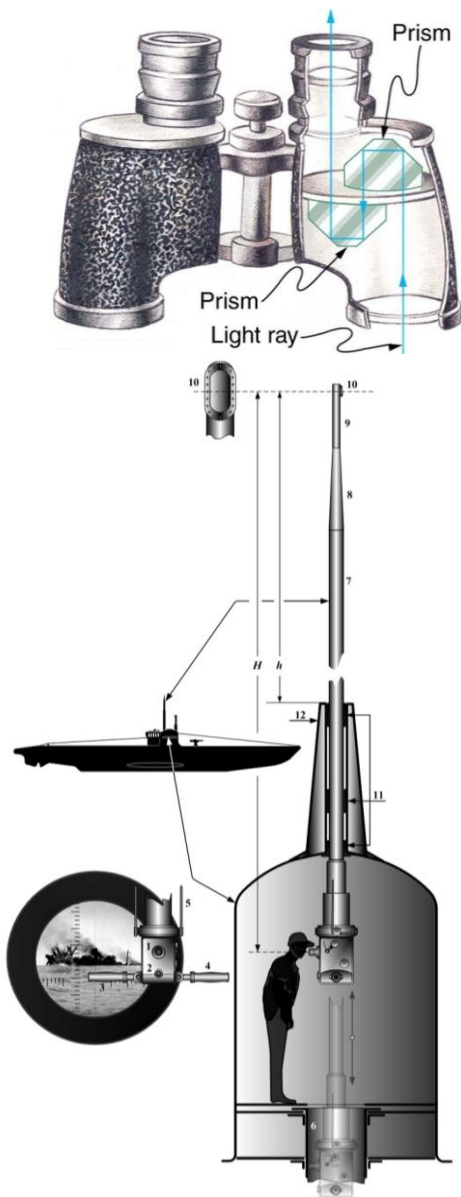


Նկ. 71.4

Շատ անդրադարձիչ կոճակներ դրված են հեծանիվների և մեքենաների վրա (Նկ. 71.5, ձախից): Հետաքրքիր է, որ նման անդրադարձիչ հասցված և տեղակայված է նաև Լուսնի մակերևույթի վրա:



Նկ. 71.5



Երկօկույթար հեռադիտակ (քինոկլ) Միասկույթար սուզանավային պերիսկոպ
Նկ. 71.6

Երկրից ուղարկված լազերային ազդանշանները նրանից անդրադառնում են և վերադառնալով ու գրանցվելով ընդունիչում՝ թույլ են տալիս չափելու մինչև Լուսին աստիճանաբար մեծացող հեռավորությունը մեծ ճշտությամբ:

Պրիզմային անդրադարձիչների կարևոր առավելությունը այն է, որ ի տարբերություն մետաղյա հայելիների, խիստ պասսիվ են քիմիական ռեկցիաների նկատմամբ (կոռոզիայի չեն ենթարկվում), իսկ պատահական առաջացած մեխանիկական քերծվածքները հեշտությամբ հարթեցվում են:

Ուղղանկյուն պրիզմային անդրադարձիչները հիմնարար տարր են նաև երկօկույար հեռադիտակում (բինոկլում) և միաօկույար սուզանավային պերիսկոպում, որոնց աշխատանքային սխեմաները բերված են Նկ. 71.6-ում:

§ 73. Ինտերֆերենցիա

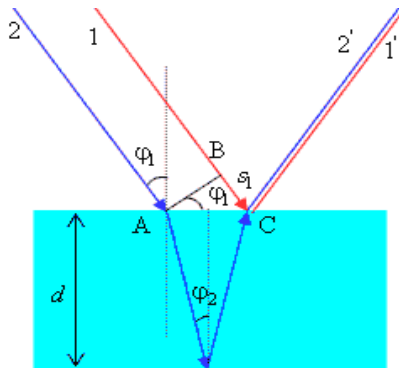
Լույսն էլեկտրամագնիսական ալիք է, որի տատանումների ամպլիտուդն առնչվում է լույսի պայծառության հետ, իսկ հաճախությունը մենք ընկալում ենք գույնի տեսքով: Մեր շրջապատում նկատվող որոշ ցայտուն օպտիկական երևույթներ պայմանավորված են լույսի ալիքային հատկություններով և դրա հետ անխզելիորեն կապված ալիքների վերադրման՝ ինտերֆերենցիայի, երևույթով: Այդպիսի հանրահայտ օրինակներ են ջրի մակերևույթին հայտնված նավթի բարակ շերտի կամ օդում լողացող օձառի պղպջակի գունային հարուստ և հարափոփոխ գամման Արեգակի ճառագայթներով լուսավորվելիս (Նկ. 73.1): Բարակ թաղանթի լուսավորման ժամանակ տեղի է ունենում թաղանթի առջևի և ետին մակերևույթներից անդրադարձած ալիքների վերադրում (ինտերֆերենցիա), ին-

չի արդյունքում էլ ձևավորվում են գունային տարբեր երանգները:



Նկ. 73.1

Քննարկենք ինտերֆերենցիոն պատկերների առաջացման օրինաչափությունները պարզեցված՝ հարթ զուգահեռ շերտի (թիթեղի) օրինակի վրա: Շերտի հաստությունը նշանակենք d , բեկման ցուցիչը՝ n (Նկ. 73.2): Ենթադրենք թիթեղի վրա ընկնում է հարթ ճակատով ալիք, ինչը կարող ենք դիտարկել որպես զուգահեռ ճառագայթների ընդհանրություն:



Նկ. 73.2

Թիթեղն անդրադարձնում է լույսի երկու զուգահեռ փնջեր, որոնցից մեկը՝ 1', ձևավորվում է թիթեղի վերին մակերևույթից անդրադառնալով, մյուսը՝ 2', ներքևի մակերևույթից անդրադառնալով: Նկարում դրանցից յուրաքանչյուրը ներկայացված է միայն մեկ ճառագայթով: Թիթեղ մտնելիս և թիթեղից դուրս գալիս 2 փունջը ենթարկվում է բեկման:

Բացի 1' և 2' փնջերից, թիթեղն անդրադարձնում է փնջեր, որոնք առաջանում են թիթեղի մակերևույթներից եռակի, հնգակի, յոթակի և այլն անդրադարձումների արդյունքում: Սակայն փոքր ինտենսիվությունների պատճառով դրանց ներդրումը փոքր է, այն չենք քննարկելու:

Ընկնող ալիքի հարթ ճակատը, այսինքն՝ միևնույն փուլով տատանվող կետերի կազմած մակերևույթը կազմում է 1 և 2 ճառագայթներին ուղղահայաց հարթություն: AB գիծը (Նկ. 73.2) ալիքային ճակատի հատման գիծն է նկարի հարթության հետ: Ճառագայթների օպտիկական ընթացքների միջև ձեռք բերված հեռավորությունը մինչև C կետում հանդիպելը կլինի

$$\Delta = n s_2 - s_1,$$

որտեղ s_1 -ը BC հատվածի երկարությունն է, s_2 -ը՝ AO և OC հատվածների գումար երկարությունը: Օդի բեկման ցուցիչը համարվել է հավասար մեկի: Նկարից երևում է, որ $s_1 = 2d \operatorname{tg} \varphi_2 \sin \varphi_1$, $s_2 = 2d / \cos \varphi_2$: Այս արտահայտությունների տեղադրումը տալիս $\Delta = n 2d / \cos \varphi_2 - 2d \operatorname{tg} \varphi_2 \sin \varphi_1$, որտեղ φ_1 և φ_2 անկյունների միջև առկա է բեկման օրենքից բխող $\sin \varphi_1 = n \sin \varphi_2$ հավասարությունը, ինչը թույլ է տալիս Δ -ի արտահայտությունում ազատվել φ_2 անկյունից: Եռան-

կյունաչափական պարզ գործողությունների արդյունքում ստանում ենք

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi_1} :$$

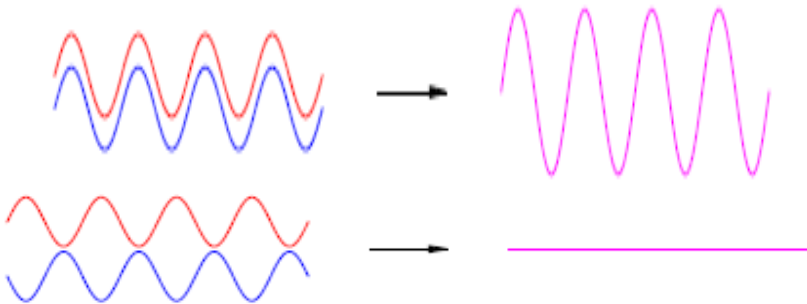
1' և 2' ճառագայթներում տատանումների փուլերի միջև տարբերությունը ստանալու համար հարկ է բացի օպտիկական ճանապարհների Δ տարբերությունից, հաշվի առնել նաև անդրադարձումների ժամանակ փուլերի հնարավոր փոփոխությունները: Վերին մակերևույթի վրա C կետում ալիքի անդրադարձումը տեղի է ունենում օպտիկապես նոսր միջավայրից օպտիկապես խիտ միջավայր բաժանման սահմանին: Այս դեպքում տեղի է ունենում ալիքի փուլի π չափով փոփոխություն: Ներքևի O կետում անդրադարձումը տեղի է ունենում օպտիկապես խիտ միջավայրից օպտիկապես նոսր միջավայր անցման սահմանին և փուլի թռիչք այս դեպքում տեղի չի ունենում: Նկատենք, որ այս օրինաչափությունը համահունչ է այն պահանջի հետ, որ թաղանթի d հաստությունը զրոյի ձգտեցնելիս անդրադարձող ալիքի ինտենսիվությունը պետք է ձգտի զրոյի (հակափուլային ինտերֆերենցիայի արդյունքում): π փուլին համապատասխանում է օպտիկական ընթացքի $\lambda_0 / 2$ կեսալիք տարբերություն, որտեղ λ_0 -ն լույսի ալիքի երկարությունն է օդում (դատարկության մեջ): Այդ պատճառով Δ -ի նախկին արտահայտությունը հարկ է ավելացնել կամ պակասեցնել $\lambda_0 / 2$ չափով: Արդյունքում ստանում ենք

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi_1} - \frac{\lambda_0}{2} :$$

Այսպիսով, թիթեղի վրա հարթ ալիքի անկման ժամանակ ձևավորվում են երկու ալիքներ, որոնք ինտերֆերենցում են՝

ունենալով օպտիկական ընթացքների միջև վերին բանաձևով որոշվող տարբերություն:

Երկու ալիքների վերադրումից առաջացած արդյունաբար ալիքի ինտենսիվությունը (անդրդարձած լույսի պայծառությունը) կլինի առավելագույնը, եթե ալիքների գագաթները տարածապես համընկնեն իրար հետ ($\Delta = m\lambda_0, m = 1, 2, 3, \dots$), ինչպես մեկնաբանված է Նկ. 73.3-ի վերին պատկերում: Եթե հակառակն է, այսինքն՝ ալիքներից մեկի մաքսիմումները համընկնում են մյուսի մինիմումների հետ ($\Delta = (m - 1/2)\lambda_0$), ապա արդյունաբար ալիքի ինտենսիվությունը կլինի առավելագույնը ճնշված: Վերադրվող ալիքների հավասար ամպլիտուդների դեպքում այն ընդհանրապես կլինի զրո (Նկ. 73.3):



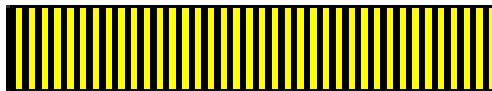
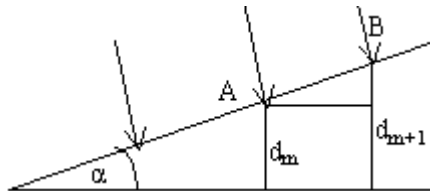
Նկ. 73.3

Իրական պայմաններում ալիքները կարող են ինտերֆերենցել, եթե ընթացքների տարբերությունը չի գերազանցում ալիքի կոհերենստության երկարությանը: Իրականացման այս պահանջը Արեգակի լույսով լուսավորելիս բերում է նրան, որ ինտերֆերենցիա դիտվում է միայն, եթե թաղանթի հաստությունը չի գերազանցում միլիմետրի մի քանի հարյուրերորդական մասերը: Բերված բացատրությունից նաև պարզ է դառ-

նում, որ բաժանման մակերևույթների անհարթությունները պետք է շատ փոքր լինեն լույսի ալիքի երկարությունից:

§ 74. Ինտերֆերենցիայի կիրառական ասպեկտները

Եթե հարթ զուգահեռ թիթեղի փոխարեն օգտագործվի սեպաձև թիթեղ (Նկ. 74.1, ձախից), ապա մինիմումի և մաքսիմումի պայմանները հաջորդաբար կկրկնվեն և էկրանի վրա կստացվի պայծառ և մութ շերտերի հավասարահեռ հերթականության տեսքով ինտերֆերենցիոն պատկեր: Նկ. 74.1-ի ինտերֆերենցիոն պատկերը բերված է ընկնող մոնոքրոմատիկ լույսի համար:



Նկ. 74.1

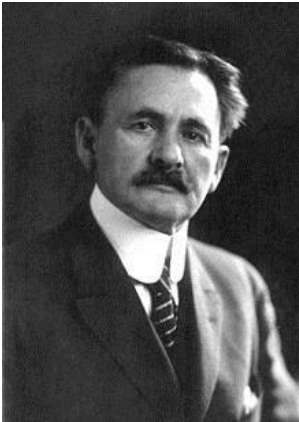
Այս մեթոդով որոշում են, օրինակ, ապակե մակերևույթի անհարթվածության աստիճանը և տեղաբաշխումը, սեպաձև օդային շերտը համակցելով էտալոնային մակերևույթի հետ:

Ինտերֆերենցիան թաղանթներում օգտագործվում է թափանցիկ օպտիկայի պատրաստման ժամանակ: Ապակին ծածկվում է թափանցիկ բարակ այնպիսի հաստության թաղանթով, որ անդրադարձած լույսը տա մինիմում: Այդ դեպ-

քում լույսը համարյա ամբողջությամբ կանցնի ապակով: Ծածկույթի շերտի հաստությունը, այնուամենայնիվ, կախված է ալիքի երկարությունից և հասնել անդրադարձման լրիվ մարման տեսանելի սպեկտրի ամբողջ դիապազոնի համար հնարավոր չի: Սովորաբար ջանում են, որ օբյեկտիվի միջով առանց կորուստների անցնի տեսանելի սպեկտրի կենտրոնական դեղնականաչ մասը, որտեղ ընկած է արևի ճառագայթման ինտենսիվության մաքսիմումը: Այս դեպքում անդրադարձած ճառագայթներում գերակշռում են սպեկտրի եզրային մասերը՝ կարմիրը և մանուշակագույնը: Ֆոտոապարատի օբյեկտիվի յասամանագույն ցուլանքը դրանց խառնուրդի արդյունքն է:

Ինտերֆերենցիայի երևույթն ընկած է շատ բարձր զգայնության սարքերի՝ ինտերֆերոմետրերի, մասնավորապես՝ Մայքելսոնի ինտերֆերոմետրի աշխատանքի հիմքում:

Ճառագայթների ընթացքը նրանում պատկերված է Նկ.

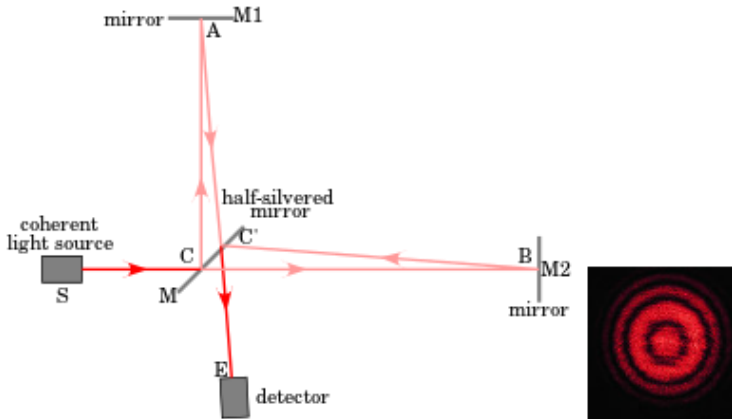


Ալբերթ Մայքելսոն
(1852-1931)

74.2-ում: ՄԸ-ն կիսաթափանցիկ հայելի է, իսկ աջից պատկերված է ստանդարտ կիրառություններից մեկում ստացվող ինտերֆերենցիոն պատկերը:

Մայքելսոնի ինտերֆերոմետրն ունի կարևոր աստղաֆիզիկական կիրառություններ: Աստղերի տրամագծերն առաջինը չափվել են հենց այս ինտերֆերոմետրի միջոցով: Լազերային ինտերֆերոմետրը հիմնական տարրն է այն գիտասարքի, որի միջո-

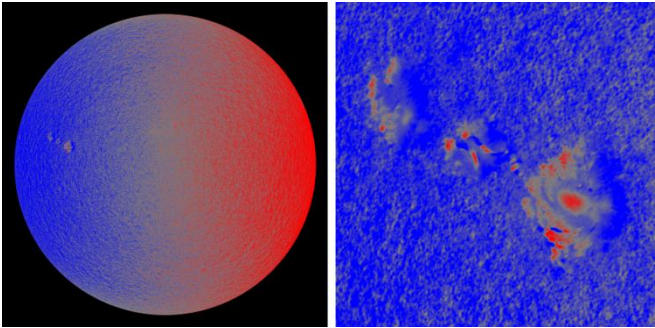
ցով 2015 թ. գրանցվել են տիեզերքից եկող գրավիտացիոն ալիքները, փաստելով ի օգուտ Էյնշտեյնի ընդհանուր հարաբերականության տեսության՝ իր առեղծվածային եզրահանգումներով: Այս ինտերֆերոմետրի բազուկներից յուրաքանչյուրի երկարությունը եղել է 4 կմ:



Նկ. 74.2

Նկ. 74.3-ում պատկերված է Մայքելսոնի ինտերֆերոմետրի օգնությամբ ստացված Արեգակի պատկերը (աջից պատկերված է դրանից մի փոքր տեղամաս): Պատկերի ստացման հիմքում ընկած է ֆիքսված երկրաչափության պայմաններում սարքի գերբարձր զգայնությունը լուսային ալիքի երկարության (գույնի) նկատմամբ: Քանի որ դիտվող ալիքի երկարությունն իր հերթին կախված է դիտորդի նկատմամբ ճառագայթող մասնիկի արագությունից (մասնիկի մոտենալիս ալիքի երկարությունը արագությանը համեմատական փոքրանում է և գույնը գնում է դեպի կապույտն ու հակառակը՝ մասնիկի հեռանալիս ալիքի երկարությունը մեծանում և գույնը շեղվում է

դեպի կարմիրը), ապա ինտերֆերոմետրն աշխատում է որպես դոպլերագրամ:



Նկ. 74.3

Արեգակի պատկերում ևս գույների տարբերությունը պայմանավորված է ուղղաձիգ առանցքի շուրջ Արեգակի պտույտով:

§ 75. Լույսի ցրումը

Քիչ են դեպքերը, երբ լույսը մեզ հասնում է ուղղակի աղբյուրից: Այն նախապես անցնում է որոշ մարմինների միջով, մասնակի բեկվելով և մասնակի կլանվելով նրանցում: Իսկ շրջապատող մարմինները մենք տեսնում ենք նրանց մակերևույթներից ցրված (անդրադարձած) լույսի միջոցով: Այսպիսով, մեզ հասած լույսի սպեկտրալ կազմությունը կարող է եսպես փոխված լինել այդ պրոցեսների հետևանքով: Որպես հիմնական օրինաչափություն, այդ պրոցեսները նոր հաճախություններ չեն ավելացնում աղբյուրից եկող լույսի կազմությանը՝ որոշ տեղամասեր համեմատաբար ավելի են թուլանում և կարող են անգամ ամբողջովին վերանալ: Միայն քիչ դեպքերում է, օրինակ՝ լյումինեսցենցիայի ժամանակ, ավելա-

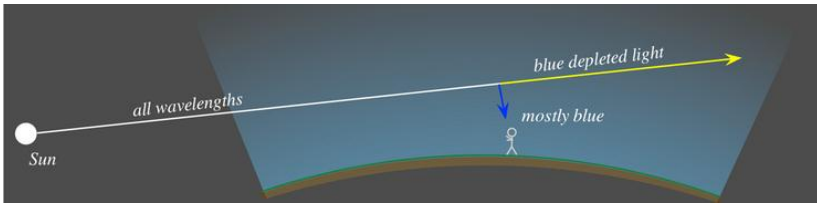
նում սպեկտրի կազմությունը մյուս տեղամասերի էներգիաների հաշվին:

Սպիտակ լույսը պարունակում է տեսանելի սպեկտրի բոլոր գույները, սկսած կարմիրից մինչև մանուշակագույն: Մարմնի գույնը որոշվում է այն հաճախությունների շերտով, որոնք էֆեկտիվ անդրադառնում են նյութի մակերևութային: Մյուս գույները հակառակը՝ կլանվում են այդ շերտում: Այստեղից հասկանալի է դառնում, որ արևի լույսով լուսավորված առարկայի գույները որոշ տարբերություն կունենան սենյակում ցերեկային կամ շիկացման լամպերով լուսավորելու դեպքում, քանի որ վերջիններս ճշտորեն չեն կրկնում արեգակնային լույսի գունային կազմությունը: Իսկ եթե լուսավորման աղբյուրը միագույն է, ասենք դեղին, ապա նրանով լուսավորելիս դեղին կերևան միայն այն մարմինները, որոնք դեղին են սպիտակ լույսով լուսավորելիս: Մյուսները, ասենք ցերեկը կապույտ երևացող մարմինը, դեղին լույսի տակ կերևա գորշ, քանի որ դեղին ճառագայթները նրանում գործնականում ամբողջովին կկլանվեն:

Անցած կամ անդրադարձած լույսի ընտրողական սպեկտրալ փոփոխություններով է պայմանավորված նաև երկնքի կապույտ գույնը: Երբ լույսը բախվելով մթնոլորտը կազմող մասնիկներին (օրինակ՝ մոլեկուլներին)՝ ցրվում է, ապա ցրման չափը և անկյունը կախված են ալիքի երկարությունից և մասնիկների չափերից: Եթե ցրող մասնիկների չափերը նշանակալի են ալիքի երկարության նկատմամբ, ապա մասնիկների ձևը ևս դառնում է կարևոր:

Մոլեկուլներն ամենափոքր ցրող մասնիկներն են, որոնք մոտ 1000 անգամ փոքր են, քան տեսանելի լույսի ալիքի երկարությունը: Այսպիսի մոլեկուլների համար լույսի ցրման ին-

տենսիվությունը հակադարձ համեմատական է ալիքի երկարության չորրորդ աստիճանին: Համեմատելու համար կապույտը կարմիրի հետ, մենք վերցնում ենք 650/450 հարաբերությունը և այն բարձրացնում չորրորդ աստիճան: Այն ցույց է տալիս, որ կապույտը մոտ 4.5 անգամ ավելի է ցրվում, քան կարմիրը: Եթե մենք նայում ենք Արեգակից հեռու ուղղությամբ, ապա մթնոլորտով տարածվող Արևի ճառագայթներից կապույտ լույսը ցրվում է մոլեկուլների կողմից և հասնում մեզ, ինչպես դա պատկերված է Նկ. 75.1-ում:



Նկ. 75.1

Այսինքն, երկինքը կապույտ է երևում, որովհետև մթնոլորտը կազմող մոլեկուլներից լույսի ցրումն ավելի հավանական է կապույտ լույսի համար, քան կարմիրի համար: Երկրի մթնոլորտից դուրս գալիս երկինքը դառնում է սև (Նկ. 75.2), քանի որ վերևում ոչինչ չկա Արեգակից դուրս եկող լույսը մասնակիորեն դեպի մեզ ցրելու համար:



Նկ. 75.2

Ամպերի կազմության ջրային կաթիլները և սառցաբյուրեղիկները նկատելիորեն գերազանցում են տեսանելի լույսի ալիքի երկարությունը: Այս դեպքում լույսի ցրումն ուժեղ է և մոտավորապես անկախ տեսանելի լույսի տիրույթում: Այդ է պատճառը, որ ամպերը երևում են սպիտակ կամ բնական մոխրագույնի երանգներով, եթե գտնվում են այլ ամպերի ստվերում:

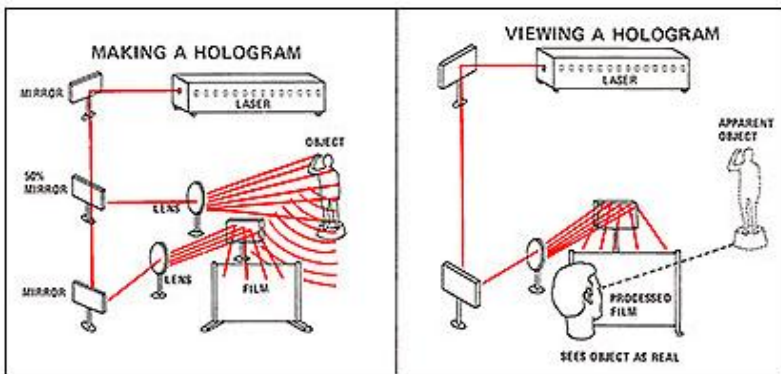
§ 76. Հոլոգրաֆիա

Հոլոգրաֆիան օպտիկական պատկերների ստացման մեթոդ է, այսպես կոչված, ալիքային ճակատի վերականգնման միջոցով: Հոլոգրամների ստացման և ընթերցման համար անհրաժեշտ է լույսի կոհերենտ աղբյուր, ինչի պատճառով ակտիվ գործունեություն այստեղ ձևավորվել է 1960-ականներին լազերների հայտնագործումից հետո:

Առարկայի լուսավորման ժամանակ նրանից տարածվում են ցրված և անցած ալիքներ: Որոշակիության համար հետագայում կենթադրենք առաջինը: Անջատվելով աղբյուրից, ցրված ալիքը կրում է առարկայի ձևի և մյուս հատկություններ-

րի մասին լրիվ ինֆորմացիա, ինչը հնարավոր է ստանալ լուսավորման ճանապարհով: Ընկնելով աչքի մեջ՝ ցրված ալիքը աչքի ցանցաթաղանթի կամ ֆոտոթիթեղի վրա ստեղծում է առարկայի տարածական պատկերը: Եթե որևէ ճանապարհով հնարավոր է վերարտադրել ճիշտ այդպիսի ալիք, ապա ակնհայտ է, որ այն ևս կառաջացնի ճիշտ նույն տարածական պատկերը, ինչ և առարկայից ցրված նախնական ալիքը: Այս դիտարկման վրա էլ հիմնված է հոլոգրաֆիայի գաղափարը:

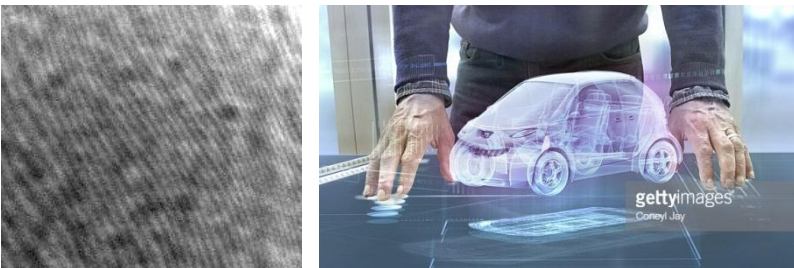
Հոլոգրաֆիկ պատկերի ստացման պրոցեսը բաղկացած է երկու փուլերից (Նկ. 76.1): Առաջինում պատրաստվում է հոլոգրամը, այսինքն՝ ֆոտոթիթեղ, որի միջոցով հնարավոր է լինելու հետագայում վերականգնելու առարկայից ցրված լուսային ալիքը, իսկ երկրորդը ալիքի վերականգնումն ու օպտիկական պատկերի ստացումն է:



Նկ. 76.1

Առարկան (նկարում՝ արձանիկը) լուսավորվում է լազերի լուսային փնջի մի կեսով: Անդրադարձած ալիքները վերադառնում են և վերադրվելով լազերային ճառագայթման մյուս կեսի հետ՝ ընկնում են ֆոտոթիթեղի վրա (FILM): Վերադրման

արդյունքն իր մեջ ինֆորմացիա է պարունակում լազերից ուղղակիորեն եկող ալիքի նկատմամբ արձանիկից անդրադարձած ալիքի ունեցած ինտենսիվության և փուլերի տարածական բաշխման մասին: Ֆոտոթիթեղի սևացումները ֆիքսում են այդ ինֆորմացիան, իսկ ստացված լուսանկարը կոչվում է հոլոգրամ: Խաղալիք մեքենայի հոլոգրամը ներկայացված է Նկ. 76.2-ում՝ ձախից: Նկատենք, որ հոլոգրամը նկարագրվում է ավելի բժային ու պուտային պատկերներով, քան ալիքավոր գծերի պատկերով: Վերջիններս հաճախ առաջանում են լույսի տարածման ճանապարհին հանդիպող պատահական փոշեհատկների վրա տեղի ունեցող դիֆրակցիայից: Հոլոգրաֆում առկա են նաև շատ մանր դետալներ, որոնք հնարավոր չէ տարբերակել աչքով: Ինտենսիտետների միջոցով կոդավորված հոլոգրամը պարունակում է ամբողջական ինֆորմացիան առարկայից հեռացող ալիքի մասին:



Նկ. 76.2

Ծանոթանանք հոլոգրաֆիայի տեսության տարրերին: Առարկայից ցրված ալիքը ներկայացնենք

$$u = a(\mathbf{r}) \exp i(\omega t - \Phi(\mathbf{r}))$$

տեսքով, իսկ կիսաթափանցիկ հայելուց անցած լազերային ճառագայթի հարթ ալիքը՝

$$\mathbf{v} = b \exp i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})$$

տեսքով, որում b -ն և $\mathbf{k}$ -ն հաստատուններ են: Ալիքների բևեռացումները քննարկվող պրոցեսներում նկատելի դեր չեն կատարում և հաշվի չեն առնվելու: Այսպիսի պարզեցմամբ $a(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ և b մեծությունները կարելի է համարել իրական: Արդյունաբար դաշտի ինտենսիվությունը լուսանկարչական թիթեղի վրա ներկայանում է

$$I = (u^* + v^*)(u + v) = u^* v + v^* u + u^* u + v^* v$$

արտահայտությամբ:

Կոորդինատների հաշվարկման սկզբնակետը տեղադրենք թիթեղի հարթության որևէ կետում: Նույն հարթության մեջ ընտրենք նաև կոորդինատային X և Y առանցքները: Լուսային դաշտի I_0 ինտենսիվությունն այդ հարթության վրա կորոշվի նախորդ արտահայտությամբ, նրանում մտնող ֆունկցիաները փոխարինելով $z = 0$ -ում արժեքներով.

$$I_0 = b a(x, y, 0) \exp i(k_x x - \Phi(x, y, 0)) + b a(x, y, 0) \exp -i(k_x x - \Phi(x, y, 0)) + b^2 + a^2(x, y, 0)$$

Լուսաեմուլսիայի շերտի մգացման բաշխումը՝ պատկերի *նեգատիվը*, ձևավորվում է նույն այս օրինաչափությամբ:

Այժմ ենթադրենք, որ հոլոգրամի *պոզիտիվը* պատրաստված է կոնտակտային մեթոդով, այնպիսի որ պոզիտիվի D թափանցելիությունը (թողունակությունը) համեմատական լինի I_0 -ին: Համեմատականության գործակիցը հակիրճության համար կարելի է վերցնել մեկ: Այդպիսի պոզիտիվ հոլոգրամն օգտագործվում է առարկայից ցրված $u(\mathbf{r}, t)$ ալիքի վերականգնման համար: Դրա համար Նկ. 76.1-ի ձախ կողմում պատկերված սարքից իր օժանդակ տարրերի հետ հեռացվում

է առարկան և պոզիտիվ հոլոգրամը լուսավորվում է միայն լազերային ճառագայթման $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ դաշտով (Նկ. 76.1, աջից), որն օգտագործվել էր հոլոգրամի պատրաստման ժամանակ: Այդ փունջը կոիֆրակտիվ հոլոգրամի վրա, ինչպես լույսը դիֆրակտվում է դիֆրակցիոն ցանցի վրա:

Հոլոգրամից հեռացող մոնոքրոմատիկ դաշտի լարվածությունը նշանակենք $E(\mathbf{r}, t)$: Տարածվելով ազատ տարածությունում՝ այն բավարարում է

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0$$

ալիքային հավասարմանը, որի համար պետք է գտնել

$$E_{\text{out}} = D\mathbf{v}(x, y, 0) = I_0 b \exp i(\omega t - k_x x - k_y y)$$

եզրային պայմանին բավարարող լուծում, որտեղ I_0 -ն քիչ վերևում բերված չորս գումարելիներից կազմված ֆունկցիան է, որում ֆազային ինֆորմացիա ցրված ալիքի մասին առկա է առաջին երկու գումարելիներում: Ի հավելումն, հնարավոր երկու լուծումներից պետք է պահել հոլոգրամից հեռացող լուծումը:

Խնդիրը պատկանում է մաթեմատիկական ֆիզիկայում լավ ուսումնասիրված հավասարումների դասին և լուծվում է ստանդարտ մեթոդներով: Պարամետրերը, բնականաբար, հարկ է լինում ընտրել այնպես, որ ճնշվեն առարկայից ցրված ալիքի մասին ինֆորմացիա չպարունակող անդամները:

Հոլոգրաֆիկ նկարներն ունեն այն սկզբունքային առավելությունը, որ եռաչափ են: Եթե դիտման ժամանակ որոշ մարմիններ կամ մասեր ծածկված են այլ մարմինների կողմից, ապա փոխելով դիտակետը, կարող ենք տեսնել դրանք, ինչպես

լինում է իրական առարկաների դիտման դեպքում: Հոլոգրամի մասը գործում է որպես ամբողջական հոլոգրամ: Չափերի փոքրացման ժամանակ թուլանում են միայն պատկերի հստակությունը և տարածականության զգացումը: Այս առանձնահատկությունը կապված է նրա հետ, որ հոլոգրամի ձևավորման ժամանակ ֆոտոթիթեղի բոլոր մասերը ենթարկվում են առարկայի բոլոր կետերից ցրված լույսի ազդեցությանը: Հոլոգրամի յուրաքանչյուր տեղամասում ինտերֆերենցիոն կողավորում առկա է ամբողջ առարկայի պատկերը:

Հոլոգրաֆիկ հիշողություն: 300 գեգաբայթ ինֆորմացիան գրում է 10 անգամ ավելի արագ, քան սովորական DVD-ների վրա, 160 մեգաբայթ/վրկ արագությամբ: Հեռանկարում՝ 1.6 տերաբայթ/վրկ արագությամբ: Գրելու խտությունը կազմում է ավելի քան 250 գեգաբայթ 1 քառակուսի դյույմի (2.54 սմ) վրա:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **L. I. Schiff.** Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1968.
2. **А. К. Кикоин, И. К. Кикоин.** Молекулярная физика, Наука, Москва, 1976.
3. **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.** Теоретическая физика, том I, Механика, Москва, Главная Редакция Физико-Математических Наук, 1988.
4. **Д. Дж. Стерлинг.** Волоконная оптика, ЛОРИ, Москва, 1998.
5. **E. Riaffel, W. Polak.** An introduction to quantum computing for non-physicists, arXiv:quant-ph/9809016, 2000.
6. **J.-L. Basdevant, J. Dalibard.** Quantum mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
7. **Д. В. Сивухин.** Общий курс физики, том IV, Оптика, Физматлит, Москва, 2002.
8. **Д. В. Сивухин.** Общий курс физики, том III, Электричество, Физматлит, Москва, 2004.
9. **C. J. Foot.** Atomic Physics, Oxford University Press, New York, 2005.
10. **Ch. Schiller.** Motion Mountain. The adventure of physics – vol. III: Light, charges and brains, 2018.
11. **D. J. Griffiths.** Introduction to quantum mechanics, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2018.
12. **R. de Wolf.** Quantum Computing: Lecture Notes, Amsterdam, 2018.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ I. Դասական մեխանիկա.....	3
§ 1. Գալիլեյի հարաբերականության սկզբունքը	3
§ 2. Նյուտոնի օրենքները	5
§ 3. Ուժերը մեխանիկայում	8
§ 4. Լիցքավորված մասնիկի շարժումը էլեկտրական և մագնիսական դաշտերում	9
§ 5. Վիճակի հասկացությունը դասական մեխանիկայում: Ընդհանրացված կոորդինատներ	14
§ 6. Ամենափոքր գործողության սկզբունքը: Լագրանժի ֆունկցիան և Լագրանժի հավասարումները	17
§ 7. Լագրանժի ֆունկցիայի կառուցումը: Նյութերի թեորեմը	21
§ 8. Լագրանժի հավասարումների լուսաբանումը չձգվող անկշիռ թելից կախված գնդիկի օրինակով	25
§ 9. Պահպանվող մեծություններ	29
§ 10. Նյութական կետի շարժումը կենտրոնական դաշտում.....	37
ԳԼՈՒԽ II. Քվանտային մեխանիկա	43
§ 11. Քվանտային մեխանիկայի պոստուլատները.....	44
§ 12. Շրեդինգերի հավասարումը: Ազատ ալիքային փաթեթ.....	45
§ 13. Կապը դասական մեխանիկայի հետ: Էրենֆեստի թեորեմը	49
§ 14. Ստացիոնար վիճակներ.....	53
§ 15. Մասնիկը պոտենցիալային հորում	55
§ 16. Պոտենցիալային հորում մասնիկի վիճակի դասական անալոգիան	60
§ 17. Քվանտային թունելացում կրկնակի պոտենցիալային հորում	62
§ 18. Սպին	68
§ 19. Սպինը համասեռ մագնիսական դաշտում.....	72

§ 20. Ֆերմիոններ և բոզոններ	75
§ 21. Ազատ էլեկտրոնային գազ	78
§ 22. Քվանտային ստատիստիկաներ	84
§ 23. Ֆոտոնային գազ	93
§ 24. Պարբերական պոտենցիալ	96
§ 25. Պինդ մարմիններ	108
§ 26. Կիսահաղորդիչներ	111
§ 27. p-n կիսահաղորդչային դիոդ (կոնտակտ)	117
ԳԼՈՒԽ III. Քվանտային ինֆորմացիա	120
§ 28. Քվանտային գեյթեր	120
§ 29. Միաքյուբիթ քվանտային գեյթեր	123
§ 30. Քվանտային խճճվածություն	125
§ 31. Երկքուբիթային վիճակներ	132
§ 32. Ոչ քլոնավորման թեորեմը	134
§ 33. CNOT երկքուբիթ գեյթը	136
§ 34. Երկօպերացիոն քլոնավորման հաստոց	139
§ 35. Քուբիթի ֆիզիկական իրականացումները	142
§ 36. Իոն-թակարդային քվանտային համակարգիչ	154
§ 37. Տրամաբանական գեյթերի կառուցումը	160
§ 38. Քվանտային զուգահեռականություն	164
§ 39. Գրովերի ալգորիթմը. Ընդհանուր նկարագրություն	165
§ 40. Երեք քուբիթերի ռեգիստրի օրինակը Գրովերի ալգորիթմում	172
§ 41. Քվանտային կրիպտոգրաֆիա (ծածկագրություն)	176
§ 42. Քվանտային Տելեպորտացիա	180
ԳԼՈՒԽ IV. Թերմոդինամիկա և մոլեկուլային ֆիզիկա	187
§ 43. Մակրոսկոպիկ պարամետրեր	187
§ 44. Ներքին էներգիա, թերմոդինամիկ աշխատանք և ջերմաքանակ: Թերմոդինամիկայի I սկզբունքը	189
§ 45. Ջերմային մեքենա և սառնարանային մեքենա	194

§ 46. Թերմոդինամիկայի II սկզբունքը	197
§ 47. Էնտրոպիա	199
§ 48. Էնտրոպիայի հավանականային մեկնաբանությունը	205
§ 49. Ինքնակազմակերպում և քաոս	208
§ 50. Բրոունյան շարժում	219
ԳԼՈՒԽ V. Էլեկտրականություն և մագնիսականություն	228
§ 51. Էլեկտրական և մագնիսական դաշտեր	228
§ 52. Էլեկտրական դաշտի հավասարումները	229
§ 53. Մագնիսական դաշտի հավասարումները	231
§ 54. Կոնդենսատորներ	234
§ 55. Ինդուկիվության կոճեր	237
§ 56. Էլեկտրական դաշտը միջավայրում	239
§ 57. Պիեզոէլեկտրիկներ	241
§ 58. Մագնիսական դաշտը միջավայրում	246
§ 59. Դիամագնիսներ	248
§ 60. Պարամագնիսներ	253
§ 61. Մագնիսական դաշտը գերհաղորդիչներում	257
§ 62. Առաջին և երկրորդ սեռի գերհաղորդիչներ	261
§ 63. Տատանողական կոնտուրը փոփոխական լարման շղթայում	265
§ 64. Մաքսվելի հավասարումները	270
§ 65. Էլեկտրամագնիսական ալիքներ	272
§ 66. Էլեկտրամագնիսական ալիքների սպեկտրը	275
§ 67. Ռադիոկապի և ինֆորմացիայի փոխանցման սկզբունքները	280
§ 68. Երկրի էլեկտրական դաշտը	286
§ 69. Երկրի մագնիսական դաշտը	288
ԳԼՈՒԽ VI. Օպտիկա	292
§ 70. Լույսի անդրադարձման և բեկման օրենքները	292
§ 71. Լրիվ ներքին անդրադարձում	298

§ 72. Օպտիկական մանրաթելային կապ և այլ կիրառություններ	301
§ 73. Ինտերֆերենցիա	308
§ 74. Ինտերֆերենցիայի կիրառական ասպեկտները.....	313
§ 75. Լույսի ցրումը	316
§ 76. Հոլոգրաֆիա.....	319
ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ	325

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՏՈՄ ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, ԳԵՎՈՐԳ ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

ՖԻԶԻԿԱ

Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի,
Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետների
համար

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Ա. Գույումջյանի

Տպագրված է «ԶՈՓԻ ՓՐԻՆԹ» ՍՊԸ-ում:
Ք. Երևան, Խոբենացի 4-րդ նրբ., 69 տուն

Ստորագրված է տպագրության՝ 06.04.2022:
Չափեր՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 20.625:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.y su.am



ՄԱՍՏԱՐԱԿՅՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2022
publishing.ysu.am