ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՇՏՈՒՐՄ-ԼԻՈՒՎԻԼԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

ՄԱՍ I

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ
2014

ՀՏԴ 517.956.223
ԳՄԴ 22.143
Հ 422

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի
գիտական խորհուրդը
Գրախոս՝ Գ. Հակոբյան

Հարությունյան Տ. Ն.
Հ 422 Շտուրմ-Լիուվիլի եզրային խնդիրը.- Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2014.
Մաս I.- 44 էջ:

ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի «Դիֆերենցիալ հավասարումներ» ամբիոնում արդեն երկար տարիներ կարդացվում է «Շտուրմ-Լիուվիլի եզրային խնդիրը» դասընթացը, որի ծրագրին համապատասխանող գրականությունը կարելի է գտնել տարբեր գրքերում (տես, օրինակ, [6]-[14]) և գիտական ամսագրերում (հիմնա-կանում ռուսերենով և անգլերենով): Այս գրքում փորձ է կատարվել միավորել ծրագրին համապատասխանող վերջին արդյունքները:

Գիրքը կարող է հետաքրքրել ոչ միայն մաթեմատիկոսներին, այլ նաև ֆիզիկոսներին և այն մասնագետներին, ովքեր ուսումնասիրում են տատանողական երևույթներ:

ՀՏԴ 517.956.223
ԳՄԴ 22.143

ISBN 978-5-8084-1843-1

Բովանդակություն

Ներածություն

Շտուրմ-Լիուվիլի $-y'' + q(x)y = \mu y$ հավասարման համար եզրային խնդիրը առաջին անգամ դիտարկվել է 1756թ. Դանիիլ Բեռնուլիի կողմից, ամրացված ծայրակետերով լարի տատանման խնդիրը լուծելու ընթացքում[1]: Այն ժամանակից այդ խնդիրը մեծ դեր է խաղում տատանումների տեսությունում և ընդհանրապես դասական մեխանիկայում, որի հիմքում ընկած է Իսահակ Նյուտոնի երկրորդ օրենքը, համաձայն որի ժամանակի t պահին $y(t)$ կոորդինատ (պարզագույն միաչափ շարժման դեպքում) ունեցող մարմնի շարժումը նկարագրվում է ($' = \frac{d}{dt}$)

$$y'' = F(t, y, y''),$$
$$y(0) = y_0,$$
$$y'(0) = y_1,$$

Կոշու խնդրի միջոցով և որը կարելի է կարդալ հետևյալ կերպ՝

եթե մեզ հայտնի են բոլոր ուժերը (F), որոնք ազդում են մարմնի վրա, մարմնի սկզբնական դիրքը (y_0) և մարմնի սկզբնական արագությունը (y_1), ապա մենք գիտենք այդ մարմնի շարժումը: Մաթեմատիկայի լեզվով դա նշանակում է, որ վերը բերված Կոշու խնդիրը ունի $y(t)$ լուծում և այդ լուծումը միակն է:

1927թ. Վերներ Հայզենբերգը ձևակերպեց այսպես կոչված «անորոշության սկզբունքը», որը (կոպիտ ասած) պնդում է, որ հնարավոր չէ միաժամանակ իմանալ մասնիկի դիրքը (y_0) և արագությունը (y_1): Այս պատճառով ստացվում է, որ մենք չենք կարող կիրառել Կոշու խնդիրը մասնիկի դինամիկան (շարժումը) նկարագրելու համար:

Էրվին Շրեդինգերը առաջարկեց մասնիկի դինամիկան նկարագրելու համար հրաժարվել կոորդինատը որպես անհայտ ֆունկցիա օգտագործելուց, այլ որպես անհայտ ֆունկցիա օգտագործել այսպես կոչված «ալիքային ֆունկցիան» (այս առիթով առաջարկում ենք կարդալ [2] գրքի §24.6-ը): Պարզվեց, որ ալիքային ֆունկցիան (կրկին կոպիտ ասած) պետք է բավարարի ($' = \frac{d}{dx}$) $-y'' + q(x)y = \mu y$ տեսքի հավասարմանը, որտեղ x արգումենտը փոփոխվում է ոչ թե վերջավոր հատվածում (ինչպես դասական մեխանիկայում), այլ անվերջ միջակայքում: Այսպիսով Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարումը կրկին եղավ պահանջարկված, բայց արդեն ոչ թե կլասիկ (դասական) մեխանիկայում, այլ ոչ ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկայում, որտեղ նա կոչվում է Շրեդինգերի հավասարում:

1929թ. Վիկտոր Համբարձումյանը (տես [3]) ձևակերպեց այսպես կոչված «հակադարձ խնդիրը», որում պետք էր վերականգնել Շրեդինգերի (Շտուրմ-Լիուվիլի) հավասարման $q(\cdot)$ գործակիցը (պոտենցիալը) որոշ «դիտարկվող» ֆիզիկական մեծություններով: Վ. Համբարձումյանը լուծեց այդ խնդիրը մի մասնավոր դեպքում:

[1] Լարի տատանման խնդրի լուծման պատմությունը և դրա հետ կապված մաթեմատիկայի զարգացումը հիանալի կերպով շարադրված է Բ. Ռիմանի [1] աշխատությունում:

Հետագայում պարզվեց, որ հակադարձ խնդիրները գրավում են կենտրոնական դիրքը ֆիզիկական հետազոտություններում, նվիրված նյութի կառուցվածքի և ճառագայթման ցրման տեսություններում (տես, օրինակ, [4] գիրքը): Հակադարձ խնդիրները, կապված Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման հետ, ակտիվորեն հետազոտվում են XX դարի 40 թվականների վերջից մինչ այսօր:

Հաջորդ դարաշրջիկ քայլը Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման պատմությունում դա մի ոչ գծային մասնակի ածանցյալներով հավասարման (որը հայտնի է Կորտեվեգ – դե Ֆրիզի հավասարում անվան տակ) համար Կոշու խնդրի լուծումն է (1967թ.) «հակադարձ խնդրի եղանակով» (տես [5]): Այս անգամ հետազոտվում էր ամբողջ իրական առանցքի վրա դիտարկվող Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի համար հակադարձ խնդիրը:

Նշենք, որ Կորտեվեգ – դե Ֆրիզի հավասարման համար Կոշու խնդրի լուծումը սերտորեն կապված էր ջերմամիջուկային ռեակտորի կառուցման հետազոտություն-ների հետ: Այդ հանգամանքը խթանեց մեծ քանակությամբ հետազոտություններ մի բնագավառում, որը կարելի է անվանել «մասնակի ածանցյալներով ոչ գծային էվոլյուցիոն հավասարումների լուծումը հակադարձ խնդրի եղանակով»: Եվ այդ տեսության հիմքում ընկած են Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման համար հակադարձ խնդիրները (տարբեր դրվածքներով):

Այսպիսով՝ կլասիկ մեխանիկա, քվանտային մեխանիկա, ցրման տեսության և սպեկտրալ անալիզի հակադարձ խնդիրներ, մասնակի ածանցյալներով ոչ գծային էվոլյուցիոն հավասարումների լուծման մեթոդներ հակադարձ խնդրի եղանակով – ահա այն բնագավառների կրճատ ցուցակը, որոնցում Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարումը խաղում է կարևորագույն դեր:

Ավելացնենք բուն դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունը, որտեղ արդյունքները, ստացված Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման համար, «մոդելային» են շատ ուրիշ հավասարումների համար և մաթեմատիկայի այլ բնագավառների համար (օրինակ՝ Ֆուրյեի շարքերի և ամբողջ հարմոնիկ անալիզի համար):

Գրքի առաջին մասում ընդգրկված են Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման տեսության միայն որոշ հիմնական հարցերը (տես բովանդակությունը):

Հեղինակը հուսով է, որ այս տեսության իր շարադրանքը կլրացնի Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարմանը նվիրված բազմաթիվ գրքերում ներկայացված նյութը:

Տ. Հարությունյան, Երևան, 11 դեկտեմբերի 2013 թ.

ՄԱՍ I

§1. Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման լուծումների մասին

1.1. Ներածություն և արդյունքների ձևակերպում

Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարում կոչվում է

$$-y'' + q(x)y = \mu y \tag{1.1}$$

երկրորդ կարգի, գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $q(\cdot)$ գործակիցը x անկախ փոփոխականի ֆունկցիա է, որոշված (a, b) (վերջավոր կամ անվերջ) միջակայքում, μ-ն կոմպլեքս պարամետր է (մենք գրում ենք $\mu \in \mathbb{C}$), իսկ y-ը անհայտ ֆունկցիան է: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների դասընթացներում գծային հավասարումները ուսումնասիրվում են գործակիցների անընդհատության պայմանով ($q \in C(a, b)$) և հավասարման լուծում կոչվում է այնպիսի ֆունկցիա, որոշված որևէ (c, d) միջակայքում, $(c, d) \subseteq (a, b)$, որը տեղադրելով հավասարման մեջ, ստանում ենք նույնություն (c, d)-ում: Օրինակ, եթե $q(x) \equiv 0$, (1.1) հավասարման լուծում է հանդիսանում $y(x) = \sin\sqrt{\mu}\, x$ ֆունկցիան, որը եթե տեղադրենք (1.1) հավասարման մեջ, կստանանք $\mu \sin\sqrt{\mu}\, x \equiv \mu \sin\sqrt{\mu}\, x$ նույնությունը: Շատ անգամ, որպեսզի խուսափենք $\sqrt{\mu}$ գրելուց, (1.1) հավասարման μ պարամետրի տեղը գրում ենք $\mu = \lambda^2$ և այդ դեպքում $-y'' = \lambda^2 y$ հավասարման լուծումներն են, օրինակ, $\sin \lambda x$ և $\cos \lambda x$ ֆունկցիաները:

Սակայն, եթե մենք ուզում ենք դիտարկել ավելի ընդհանուր դեպք, օրինակ եթե $q \in L^1(a, b)$ դասին, այսինքն q-ն չափելի, ըստ Լեբեգի ինտեգրելի (այս դեպքում ասում ենք հանրագումարելի) ֆունկցիա է (տես [15]), ապա մեր բերված լուծման հասկացությունը դառնում է անիմաստ, քանի որ որքան էլ ողորկ լինի y ֆունկցիան $q(\cdot) \cdot y(\cdot)$ ֆունկցիան որոշված կլինի միայն համարյա ամենուրեք, ինչպես և q ֆունկցիան (ինչպես գիտենք, [15], եթե $q \in L^p(a, b)$ դասի ֆունկցիան փոխում ենք զրո չափի բազմության վրա, ապա ստացված ֆունկցիան և q-ն համարվում են համարժեք, այսինքն նույն ֆունկցիաներն են Լեբեգի $L^p(a, b)$ դասի իմաստով): Այսպիսով, $q \in L^p$ դեպքում հավասարման ձախ մասը $(-y''(x) + q(x)y(x))$ որոշված է միայն համարյա ամենուրեք, իսկ աջ մասը $(\mu y(x))$ ամենուրեք (քանի որ y լուծումը պետք է լինի առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի և, հետևաբար, անընդհատ, այսինքն որոշված է ամենուրեք (c, d)-ում): Այսինքն, $q \in L^p$ դեպքում նույնությունը կարող է տեղի չունենալ: Այդ պատճառով, մենք, այսուհետ,կընդհանրացնենք լուծման հասկացությունը՝

Սահմանում: Դիցուք $q \in L^1_{\mathbb{C}}(a, b)$: (a, b) միջակայքում դիտարկվող (1.1) հավասարման լուծում կոչվում է այն ֆունկցիան, որն որոշված է (a, b)-ում ընկած (c, d) միջակայքում, բացարձակ անընդհատ է իր առաջին կարգի ածանցյալի հետ

(c,d)-ի կամայական փակ ենթահատվածում և բավարարում է (1.1) հավասարմանը համարյա ամենուրեք (c,d)-ում:

Դիտողություն: Գրելով $q \in L^1_{\mathbb{C}}(a,b)$ մենք ուզում ենք ընդգծել, որ q-ն կարող է լինել կոմպլեքսարժեք ֆունկցիա, իսկ գրելով $q \in L^1_{\mathbb{R}}$ ընդգծում ենք, որ նա պարտադիր իրականարժեք է:

Այսպիսով, ընդհանրացումը կայանում է նրանում, որ լուծում կոչվում է ֆունկցիա, որը հավասարումը դարձնում է ոչ թե նույնություն, այլ հավասարություն, որը տեղի ունի համարյա ամենուրեք:

Մյուս ճշտումը կայանում է նրանում, որ լուծում լինելու համար ֆունկցիայից պահանջվում է «մինիմալ» ողորկություն, մեր դեպքում պահանջվում է, որ y' առաջին կարգի ածանցյալը լինի բացարձակ անընդհատ, ինչը ապահովում է y'' երկրորդ կարգի ածանցյալի գոյությունը համարյա ամենուրեք (այսինքն այն կարելի է տեղադրել հավասարման մեջ):

Հիշեցնենք նաև (տես [15]), որ $[a,b]$ հատվածում բացարձակ անընդհատ u ֆունկցիան (մենք գրում ենք $u \in AC[a,b]$) ունի u' ածանցյալ, որը $L^1[a,b]$ դասից է և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt \,:$$

Հակառակ, եթե $v \in L^1[a,b]$, ապա

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt$$

ֆունկցիան բացարձակ անընդհատ է և $u'(x) = v(x)$ համարյա ամենուրեք $[a,b]$-ում:

Վերը սահմանված լուծման գոյությունը և հատկությունները չեն ուսումնասիրվում «Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ» դասընթացում և այդ պատճառով մենք այստեղ դրանք կուսումնասիրենք: Մինչ մեր թեորեմները ձևակերպելը և ապացուցելը նշենք, որ $q \in L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$ դեպքում այս հարցերը բավականին մանրամասն ուսումնասիրվել են [12] գրքում: $q \in L^1_{\mathbb{C}}[a,b]$ դեպքում լուծումների որոշ հատկությունները ուսումնասիրվել են [2], [8], [16], [17] և որոշ այլ աշխատություններում:

Հետագայում $-y'' + q(x) = \lambda^2 y$ հավասարման լուծումների համար կօգտագործենք $y = y(x) = y(x,\lambda) = y(x,\lambda,q)$ նշանակումները, որոնց իմաստը նրանում է, որ (երբ պետք է) ընդգծենք լուծումների կախվածությունը ոչ միայն x անկախ փոփոխականից, այլ նաև λ պարամետրից և q գործակցից:

Նշանակենք $y_i(x,\lambda,q)$-ով, $i = 1,2,3,4$, (1.1) հավասարման այն լուծումները, որոնք բավարարում են

$$\begin{cases} y_1(0,\lambda,q) = 1, \\ y_1'(0,\lambda,q) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0,\lambda,q) = 0, \\ y_2'(0,\lambda,q) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_3(\pi,\lambda,q) = 1, \\ y_3'(\pi,\lambda,q) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_4(\pi,\lambda,q) = 0, \\ y_4'(\pi,\lambda,q) = 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

սկզբնական պայմաններին:

Հեշտ է տեսնել (դա հետևում է Լիուվիլի բանաձևերից վրոնսկիանի համար, տես [18]), որ y_1 և y_2 լուծումները (եթե դրանք գոյություն ունեն) գծորեն անկախ են, այսինքն կազմում են (1.1) հավասարման լուծումների հիմնարար համակարգ: Նույնը վերաբերվում է y_3 և y_4 զույգին: Այստեղից հետևում է, որ (1.1)-ի կամայական y լուծում կարելի է ներկայացնել

$$y(x) = y(0)y_1(x,\lambda,q) + y'(0)y_2(x,\lambda,q) = y(\pi)y_3(x,\lambda,q) + y'(\pi)y_4(x,\lambda,q) \tag{1.3}$$

տեսքով: Այսպիսով, կամայական լուծման հատկությունների ուսումնասիրությունը հանգում է y_1 և y_2 (կամ y_3 և y_4) զույգի ուսումնասիրությանը:

Թեորեմ 1.1. Դիցուք $q \in L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$: Այդ դեպքում (1.1) հավասարման y_i, $i = 1, 2, 3, 4$, լուծումները գոյություն ունեն և միակն են: Բացի այդ, դրանք հանդիսանում են համապատասխան ինտեգրալ հավասարումների լուծումներ՝

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\lambda x + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, q(t)\, y_1(t,\lambda,q)\, dt\,, \tag{1.4}$$

$$y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, q(t)\, y_2(t,\lambda,q)\, dt\,, \tag{1.5}$$

$$y_3(x,\lambda,q) = \cos\lambda(\pi - x) + \int_x^\pi \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}\, q(t)\, y_3(t,\lambda,q)\, dt\,, \tag{1.6}$$

$$y_4(x,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda(\pi-x)}{\lambda} + \int_x^\pi \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}\, q(t)\, y_4(t,\lambda,q)\, dt\, : \tag{1.7}$$

Ֆիքսած x-ի և q-ի համար $y_i(x,\lambda,q)$ լուծումները և դրանց $y_i'(x,\lambda,q)$ ածանցյալները ($i = 1, 2, 3, 4$) հանդիսանում են λ պարամետրի ամբողջ ֆունկցիաներ:

Թեորեմ 1.1-ը ասում է, որ Կոշու խնդրի լուծման գոյության և միակության մասին թեորեմը, որը հայտնի էր անընդհատ գործակիցների դեպքում, տեղի ունի նաև հանրագումարելի գործակցի (մեր դեպքում q գործակցի) դեպքում:

$q \in L^2_{\mathbb{C}}[0,\pi]$ դեպքում թեորեմ 1.1-ի պնդումները y_1-ի և y_2-ի համար ապացուցված են [12]-ում: Մենք ավելացրել ենք պնդումները y_3-ի և y_4-ի համար և կատարել ենք ապացույցները $q \in L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$ համար: Նկատենք նաև, որ թեորեմ 1.1-ը, ըստ էության, ապացուցված է [16]-ում: Մեր ապացույցը որոշ չափով տարբերվում է նշված հայտնի ապացույցներից և օգտագործվում է հետագայում թեորեմներ 1.2 և 1.3-ի ապացույցներում:

Հաջորդ թեորեմը ցույց է տալիս, որ բացարձակ արժեքով բավականաչափ մեծ λ-ների համար $y(x,\lambda,q)$ և $y(x,\lambda,0)$ լուծումները քիչ են տարբերվում իրարից: Նկատենք, որ $y_1(x,\lambda,0) = \cos\lambda x$, $y_2(x,\lambda,0) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda}$, $y_3(x,\lambda,0) = \cos\lambda(\pi - x)$, $y_4 = \frac{\sin\lambda(\pi-x)}{\lambda}$: Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$\sigma_0(x,q) = \sigma_0(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt\ , \tag{1.8}$$

$$\sigma_\pi(x,q) = \sigma_\pi(x) = \int_x^\pi |q(t)|\,dt\ : \tag{1.9}$$

Թեորեմ 1.2. y_i լուծումների և դրանց y_i' ածանցյալների համար ($i = 1,2,3,4$) տեղի ունեն հետևյալ գնահատականները ($|\lambda| \geq 1$ դեպքում)՝

$$|y_1(x,\lambda,q) - \cos\lambda x| \leq \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}\ e^{|\mathrm{Im}\lambda|x + \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}}\ , \tag{1.10}$$

$$\left|y_2(x,\lambda,q) - \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right| \leq \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|^2}\ e^{|\mathrm{Im}\lambda|x + \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}}\ , \tag{1.11}$$

$$|y_3(x,\lambda,q) - \cos\lambda(\pi - x)| \leq \frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|}\ e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x) + \frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|}}\ , \tag{1.12}$$

$$\left|y_4(x,\lambda,q) - \frac{\sin\lambda(\pi - x)}{\lambda}\right| \leq \frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|^2}\ e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x) + \frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|}}\ , \tag{1.13}$$

և

$$|y_1'(x,\lambda,q) + \lambda\sin\lambda x| \leq C\sigma_0(x)\cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}\ , \tag{1.14}$$

$$|y_2'(x,\lambda,q) - \cos\lambda x| \leq \frac{C\sigma_0(x)}{|\lambda|}\cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}\ , \tag{1.15}$$

$$|y_3'(x,\lambda,q) - \lambda\sin\lambda x| \leq C\sigma_\pi(x)\cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x)}\ , \tag{1.16}$$

$$|y_4'(x,\lambda,q) + \cos\lambda(\pi - x)| \leq \frac{C\sigma_\pi(x)}{|\lambda|}\cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x)}\ , \tag{1.17}$$

որտեղ $C = 1 + \sigma_0(\pi)e^{\sigma_0(\pi)}$:

Գնահատականներ y_1-ի, y_2-ի, y_1'-ի և y_2'-ի համար, որոնք բավականին չափով նման են (1.10), (1.11) և (1.14), (1.15) գնահատականներին, $q \in L^2_{\mathbb{C}}[0,\pi]$ դեպքում ստացված են [12]-ում: Այդպիսի գնահատականները, որոնք կոչվում են ասիմպտոտիկ (քանի որ նրանք կարևոր են $|\lambda| \to \infty$ դեպքում), ուսումնասիրվել են շատերի կողմից (տես [2], [7], [9], [17], [19]): Մեր գնահատականները ոչ սկզբունքորեն, բայց որոշ չափով տարբերվում են նախկինում եղածներից և ապացուցված են (ռեգուլյար դեպքերի համար առավել ընդհանուր) $q \in L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$ դեպքի համար:

Մյուս արդյունքը նվիրված է լուծման կախվածությանը q գործակցից:

Թեորեմ 1.3. Եթե $q_m \to q$ $(m \to \infty)$ $L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$-ի իմաստով, այսինքն $\int_0^{\pi} |q_m(x) - q(x)|\, dx \to 0$ երբ $m \to \infty$, ապա $y_i(\cdot,\cdot,q_m) \to y_i(\cdot,\cdot,q)$ և $y_i'(\cdot,\cdot,q_m) \to y_i'(\cdot,\cdot,q)$ հավասարաչափ $[0,\pi] \times \mathbb{C}$-ի սահմանափակ ենթաբազմությունների վրա, այսինքն (R-ը այստեղ կամայական դրական թիվ է)

$$\max_{\substack{x\in[0,\pi]\\ |\lambda|\le R}} |y_i(x,\lambda,q_m) \to y_i(x,\lambda,q)| \to 0\,, \qquad \max_{\substack{x\in[0,\pi]\\ |\lambda|\le R}} |y'{}_i(x,\lambda,q_m) \to y'{}_i(x,\lambda,q)| \to 0$$

երբ $m \to \infty$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

Նկատենք, որ նման պնդում կա [12]-ում և [14]-ում հետևյալ տեսքի՝

Եթե $q_m \to q$ $L^2[0,\pi]$-ի իմաստով, ապա $y_{1,2}(\cdot,\cdot,q_m) \to y_{1,2}(\cdot,\cdot,q)$ հավասարաչափ:

Սակայն ածանցյալների մասին պնդում չկա:

Եվ այսպես, մենք ձևակերպեցինք այն հիմնական պնդումները, որոնք շուտով կապացուցենք:

1.2. Լուծումների գոյությունը և ասիմպտոտիկ վարքը

Այս բաժինը նվիրված է թեորեմ 1.1 և 1.2-ի ապացույցներին:

Լեմմա 1.1. Դիցուք $f \in L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$, $a, b \in \mathbb{C}$: Այդ դեպքում

$$-y'' = \lambda^2 y - f(x) \tag{1.18}$$

$$y(0) = a \tag{1.19}$$

$$y'(0) = b \tag{1.20}$$

Կոշու խնդիրն ունի միակ լուծում, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$y(x) = a\cos\lambda x + b\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, f(t)\, dt\ : \tag{1.21}$$

Ապացույց: Սահմանենք y_f ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$y_f(x) \overset{def}{=} \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, f(t)\, dt\,, \tag{1.22}$$

որը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$y_f(x) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x \cos \lambda t \, f(t) \, dt - \cos \lambda x \int_0^x \frac{\sin \lambda t}{\lambda} f(t) \, dt \text{ ։} \tag{1.23}$$

Այստեղից երևում է, որ $y_f(x)$-ը բացարձակ անընդհատ ֆունկցիա է: Դիֆերենցելով այս հավասարությունը և կրճատելով նման անդամները, կստանանք՝

$$y_f'(x) = \cos \lambda x \int_0^x \cos \lambda t \, f(t) \, dt + \lambda \sin \lambda x \int_0^x \frac{\sin \lambda t}{\lambda} f(t) \, dt \text{ ։} \tag{1.24}$$

Այս հավասարությունը տեղի ունի $[0, \pi]$-ում համարյա ամենուրեք (հ.ա.) և հետևաբար ամենուրեք $[0, \pi]$-ում, քանի որ աջ մասը բացարձակ անընդհատ ֆունկցիա է: Դիֆերենցելով (1.24) հավասարությունը կստանանք, որ հ.ա. $[0, \pi]$-ում

$$y_f''(x) = -\lambda \sin \lambda x \int_0^x \cos \lambda t \, f(t) \, dt + \lambda^2 \cos \lambda x \int_0^x \frac{\sin \lambda t}{\lambda} f(t) \, dt +$$

$$+(\sin^2 \lambda x + \cos^2 \lambda x) f(x) = -\lambda^2 y_f(x) + f(x) \,,$$

այսինքն՝ $y_f(x)$-ը, ըստ սահմանման, հանդիսանում է (1.18) հավասարման լուծում: (1.23) և (1.24)-ից երևում է, որ $y_f(0) = y_f'(0) = 0$:

Քանի որ $\cos \lambda x$-ը և $\frac{\sin \lambda x}{\lambda}$-ը հանդիսանում են (1.18)-ին համապատասխան $-y'' = \lambda^2 y$ համասեռ հավասարման գծորեն անկախ լուծումներ, իսկ նրանց $a \cos \lambda x + b \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$ գծային կոմբինացիան բավարարում է (1.19) և (1.20) սկզբնական պայմաններին, ապա (1.21) ֆունկցիան հանդիսանում է (1.18)-(1.20) Կոշու խնդրի լուծում: Որպեսզի ապացուցենք այդ լուծման միակությունը, ենթադրենք որ կա ևս մեկ՝ $z(x)$ լուծում: Այդ դեպքում $v(x) = y(x) - z(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է $-v'' = \lambda^2 v$, $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$ Կոշու խնդրի լուծում (հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարման համար), որն ունի միայն նույնաբար զրոյական լուծում՝ $v(x) \equiv 0$: Լեմմա 1.1-ը ապացուցված է:

Այժմ անցնենք (1.1) հավասարման y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ լուծումների կառուցմանը: Նախ ավելի հանգամանորեն քննարկենք $y_2(x, \lambda, q)$ լուծման կառուցումը, որը մենք կփնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$y_2(x, \lambda, q) = S_0(x, \lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x, \lambda, q) \,, \tag{1.25}$$

որտեղ $S_0 = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$, իսկ S_k-ների վերաբերյալ մենք կենթադրենք որ նրանք բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$S_k(x, \lambda, tq) = t^k S_k(x, \lambda, q), \quad t \in \mathbb{R}, \big(\mathbb{R} = (-\infty, \infty)\big): \tag{1.26}$$

Անդամ առ անդամ դիֆերենցելով (1.25) շարքը 2 անգամ (ենթադրենք դա կարելի է),

$$y_2''(x,\lambda,q) = -\lambda \sin \lambda x + \sum_{k=1}^{\infty} S_k''(x,\lambda,q)\ ,$$

և տեղադրելով (1.1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$-\sum_{k=1}^{\infty} S_k''(x,\lambda,q) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^2 S_k(x,\lambda,q) - q(x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x,\lambda,q) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda^2 S_k(x,\lambda,q) - q(x) S_{k-1}(x,\lambda,q)]:$$

Փոխարինելով վերջին հավասարման մեջ $q(x)$-ը $tq(x)$-ով՝ համաձայն (1.26) պայմանի կստանանք՝

$$-\sum_{k=1}^{\infty} t^k S_k''(x,\lambda,q) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k [\lambda^2 S_k(x,\lambda,q) - q(x) S_{k-1}(x,\lambda,q)],$$

որտեղից, հավասարեցնելով գործակիցները t-ի հավասար աստիճանների համար, ստանում ենք՝

$$-S_k''(x,\lambda,q) = \lambda^2 \cdot S_k(x,\lambda,q) - q(x) S_{k-1}(x,\lambda,q), \quad k = 1, 2, \dots \ : \tag{1.27}$$

(1.2) սկզբնական պայմաններից, որոնց պետք է բավարարի $y_2(x,\lambda,q)$ ֆունկցիան, հետևում է՝

$$y_2(0,\lambda,tq) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(0,\lambda,tq) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k S_k(0,\lambda,q) = 0\ ,$$

$$y_2'(0,\lambda,tq) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k'(0,\lambda,tq) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k S_k'(0,\lambda,q) = 1\ :$$

Այստեղից S_k-ի համար ստանում ենք սկզբնական պայմանները՝

$$S_k(0,\lambda,q) = 0, \quad S_k'(0,\lambda,q) = 0: \tag{1.28}$$

Եթե դիտարկենք (1.27), (1.28) Կոշու խնդիրը որպես (1.18)-(1.20) խնդրի մասնավոր դեպք, լեմմա 1.1-ից հետևում է, որ

$$S_k(x,\lambda,q) = \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} q(t) S_{k-1}(t,\lambda,q)\, dt\ , \quad k = 1, 2, \dots\ : \tag{1.29}$$

Եվ այսպես, մենք ենթադրեցինք, որ S_k-ները բավարարում են (1.26) պայմանին և, որ (1.25) շարքը կարելի է երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցել ըստ x-ի և արդյունքում ստացանք, որ (1.25) շարքի S_k անդամները պետք է որոշվեն (1.29) ռեկուրենտ բանաձևով (որի դեպքում (1.26) տեղի ունի):

Այժմ մենք կարող ենք ուղղակի դիտարկել (1.25) շարքը, որտեղ $S_0 = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$, իսկ S_k-երը որոշվում են (1.29)-ից:

Այստեղից, մասնավորապես, ստանում ենք՝

$$S_1(x,\lambda,q)=\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\cdot\frac{\sin\lambda t}{\lambda}q(t)\,dt\,,$$

$$S_2(x,\lambda,q)=\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\left(\int_0^t \frac{\sin\lambda(t-t_1)}{\lambda}\cdot\frac{\sin\lambda t_1}{\lambda}q(t_1)\,dt_1\right)dt=$$

$$=\int_0^x\left(\int_0^t \frac{\sin\lambda t_1}{\lambda}\cdot\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\cdot\frac{\sin\lambda(t-t_1)}{\lambda}q(t)q(t_1)\,dt_1\right)dt$$

և, ըստ ինդուկցիայի, S_n-ի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$S_n(x,\lambda,q)=\int_0^x\int_0^{t_n}\int_0^{t_{n-1}}\cdots\int_0^{t_2}\frac{\sin\lambda t_1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin\lambda(t_{i+1}-t_i)}{\lambda}q(t_i)\,dt_1dt_2\ldots dt_n\,, \tag{1.30}$$

որը հարմար է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$S_n(x,\lambda,q)=\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}\frac{\sin\lambda t_1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin\lambda(t_{i+1}-t_i)}{\lambda}q(t_i)\,dt_1dt_2\ldots dt_n :$$

Հաշվի առնելով $|\sin\lambda t|\le e^{|\mathrm{Im}\lambda|t}$անհավասարությունը և այն, որ

$$e^{|\mathrm{Im}\lambda|t_1}\cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|(t_2-t_1)}\cdots e^{|\mathrm{Im}\lambda|(x-t_n)}=e^{|\mathrm{Im}\lambda|x},$$

(1.30)-ից S_n-ի համար ստանում ենք հետևյալ գնահատականը՝

$$|S_n(x,\lambda,q)|\le\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^{n+1}}\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^{n}|q(t_i)|\,dt_1dt_2\ldots dt_n\,, \tag{1.31}$$

որից հարմար է օգտվել $|\lambda|\ge 1$ դեպքում: Երբ $|\lambda|\le 1$, (և, մասնավորապես, $|\mathrm{Im}\lambda|\le 1$) տեղի ունի հետևյալ գնահատականը՝

$$\left|\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right|=\left|\int_0^t\cos\lambda x\,dx\right|\le\int_0^t e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}dx\le\int_0^t e^x dx=e^t-1<e^t: \tag{1.32}$$

Այդ պատճառով, երբ $|\lambda|\le 1$, S_n-ի համար տեղի ունի հետևյալ գնահատականը՝

$$\begin{aligned}|S_n(x,\lambda,q)|&\le\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}e^{t_1}\cdot e^{(t_2-t_1)}\cdots e^{(x-t_n)}\prod_{i=1}^{n}|q(t_i)|\,dt_1dt_2\ldots dt_n=\\&=e^x\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^{n}|q(t_i)|\,dt_1dt_2\ldots dt_n :\end{aligned} \tag{1.33}$$

Նկատենք, որ (1.8) սահմանումից հետևում է, որ $\sigma_0'(x)=|q(x)|$ (համարյա ամենուրեք):

Լեմմա 1.2.

$$\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^{n}|q(t_i)|\,dt_1dt_2\dots dt_n=\frac{\sigma_0^n(x)}{n!}\,: \tag{1.34}$$

Ապացույց: Լեմման ապացուցենք ինդուկցիայով: Երբ $n=1$, ունենք (1.8)-ը: Երբ $n=2$, հաշվի առնելով, որ $\sigma_0'(x)=|q(x)|$, ստանում ենք՝

$$\int\limits_{0\le t_1\le t_2\le t_3=x}|q(t_1)|\,|q(t_2)|\,dt_1dt_2=\int_0^x|q(t_2)|\left(\int_0^{t_2}|q(t_1)|\,dt_1\right)dt_2=$$

$$=\int_0^x\sigma_0'(t_2)\cdot\sigma_0(t_2)\,dt_2=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{d}{dt_2}\sigma_0^2(t_2)\,dt_2=\frac{1}{2}\sigma_0^2(x)\,:$$

Շարունակությունը ինդուկցիայով՝ դիցուք (1.34)-ը ճիշտ է $n=k-1$ դեպքում: Այդ դեպքում

$$\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x}|q(t_k)|\left(\prod_{i=1}^{k-1}|q(t_i)|\,dt_1dt_2\dots dt_{k-1}\right)dt_k=\int_0^x\sigma_0'(t_k)\cdot\frac{\sigma_0^{k-1}(t_k)}{(k-1)!}dt_k=$$

$$=\frac{1}{k!}\int_0^x\frac{d}{dt_k}\sigma_0^k(t_k)\,dt_k=\frac{\sigma_0^k(x)}{k!}\,:$$

Լեմման ապացուցված է: Լեմմա1.2-ի ուրիշ ապացույց բերված է [12]-ում:

Այսպիսով՝ (1.31)-ից և (1.34)-ից $|\lambda|\ge1$ դեպքում S_n-ի համար կստանանք հետևյալ գնահատականը՝

$$|S_n(x,\lambda,q)|\le\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^{n+1}}\cdot\frac{\sigma_0^n(x)}{n!}, \tag{1.35}$$

իսկ երբ $|\lambda|\le1$, կստանանք՝ ((1.33)-ից և (1.34)-ից)

$$|S_n(x,\lambda,q)|\le e^x\cdot\frac{\sigma_0^n(x)}{n!}\,: \tag{1.36}$$

Այժմ արդեն (1.25)-ից և (1.35)-ից կստանանք (երբ $|\lambda|\ge1$)՝

$$\begin{gathered}\left|y_2(x,\lambda,q)-\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}|S_k(x,\lambda,q)|\le e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_0^k(x)}{|\lambda|^{k+1}\cdot k!}=\\=\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}\sigma_0(x)}{|\lambda|^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_0^{k-1}(x)}{|\lambda|^{k-1}\cdot k!}<\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}\sigma_0(x)}{|\lambda|^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_0^n(x)}{|\lambda|^n\cdot n!}=\frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|^2}e^{|\mathrm{Im}\lambda|x+\frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}},\end{gathered} \tag{1.37}$$

այսինքն ստացել ենք թեորեմ 1.2-ի (1.11) գնահատականը: $y_2(x,\lambda,q)$ ֆունկցիայի համար $|\lambda|\ge1$ դեպքում կստանանք՝

$$|y_2(x,\lambda,q)| \le \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|} + \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|^2} \cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|x + \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}} = \left(1 + \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|} \cdot e^{\frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}}\right) \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|}\,: \tag{1.38}$$

Երբ $|\lambda| \le 1$, (1.36)-ից $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$-ի համար կստանանք

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x,\lambda,q)\right| \le e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^k(x)}{k!}, \tag{1.39}$$

իսկ y_2-ի համար՝

$$|y_2(x,\lambda,q)| \le e^x + e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^k(x)}{k!} = e^{x+\sigma_0(x)}: \tag{1.40}$$

(1.37)- (1.40) անհավասարությունները ցույց են տալիս, որ (1.25) շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $[0,\pi] \times \mathbb{C} \times L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$ բազմության կամայական սահմանափակ ենթաբազմության վրա:

Հավասարաչափ զուգամիտությունը թույլ է տալիս անդամ առ անդամ ինտեգրել շարքը (օգտվելով (1.29) նույնությունից)

$$y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t) S_{k-1}(t,\lambda,q)\,dt = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \tag{1.41}$$

$$+ \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t) \sum_{k=1}^{\infty} S_{k-1}(t,\lambda,q)\,dt = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t) y_2(t,\lambda,q)\,dt:$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ (1.25) բանաձևով որոշվող $y_2(x,\lambda,q)$ ֆունկցիան, որտեղ S_k-երը որոշվում են (1.30) բանաձևով, հանդիսանում է (1.5) ինտեգրալ հավասարման լուծում:

Այստեղից հետևում է, որ $y_2(0,\lambda,q) = 0$ և ածանցյալի համար տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$y_2'(x,\lambda,q) = \cos\lambda x + \int_0^x \cos\lambda(x-t) \cdot q(t) y_2(t,\lambda,q)\,dt: \tag{1.42}$$

Վերջին նույնությունից, մասնավորապես, ստանում ենք, որ $y_2'(0,\lambda,q) = 1$: Քանի որ (1.42)-ի աջ մասը բացարձակ անընդհատ ֆունկցիա է, ապա, դիֆերենցելով (1.42)-ը, կստանանք հավասարություն, որը պետք է տեղի ունենա համարյա ամենուրեք՝

$$y_2''(x,\lambda,q) = -\lambda\sin\lambda x + q(x) y_2(x,\lambda,q) - \lambda \int_0^x \sin\lambda(x-t) q(t) y_2(t,\lambda,q)\,dt =$$

$$= q(x)y_2(x,\lambda,q) - \lambda^2\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)y_2(t,\lambda,q)dt\right) =$$

$$= q(x)y_2(x,\lambda,q) - \lambda^2 y_2(x,\lambda,q),$$

այսինքն՝ y_2-ը, ըստ սահմանման, հանդիսանում է $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ հավասարման լուծում: Մեզ մնում է ապացուցել, որ y_2-ը (որն որոշված է (1.25) բանաձևով) այս հավասարման միակ լուծումն է, որը բավարարում է $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ սկզբնական պայմաններին: Դիցուք φ-ն նույնպես (1.1) հավասարման լուծումն է, որը բավարարում է նույն սկզբնական պայմաններին, ինչ և y_2-ը: Լեմմա 1.1-ի համաձայն

$$\varphi(x) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\varphi(t)dt:$$

Այդ պատճառով $v(x) = y_2(x) - \varphi(x)$ լուծումների տարբերությունը բավարարում է հետևյալ հավասարմանը՝

$$v(x) = \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)v(t)dt: \tag{1.43}$$

Նշանակենք $V = \max\limits_{x\in[0,\pi]}|v(x)|$ և $c = \max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|\frac{sin\,\lambda x}{\lambda}\right|$:

Ակնհայտ է, որ c-ն և V-ն հավասարաչափ սահմանափակ են (ըստ λ-ի) $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության բոլոր սահմանափակ ենթաբազմությունների վրա: Այդ պատճառով (1.43)-ից կունենանք՝

$$|v(x)| \le c \cdot V \cdot \sigma_0(x):$$

Տեղադրելով այս գնահատականը (1.43)-ի մեջ, կստանանք՝

$$|v(x)| \le c \cdot \int_0^x |q(t)| \cdot c \cdot V \cdot \sigma_0(t)\,dt = c^2 \cdot V \cdot \int_0^x \sigma_0'(t)\sigma_0(t)\,dt = c^2 \cdot V \cdot \frac{\sigma_0^2(x)}{2}:$$

Կրկին տեղադրելով այս գնահատականները (1.43)-ում, կստանանք հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|v(x)| \le V \cdot \frac{c^n \cdot \sigma_0^n(x)}{n!} \le V \cdot \frac{c^n \cdot \sigma_0^n(x)}{n!},$$

որոնք տեղի ունեն ցանկացած n-ի համար: Այստեղից հետևում է, որ $v(x) \equiv 0$, այսինքն միակությունը ապացուցված է:

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ y_2-ը ներկայացվում է հետևյալ շարքով՝

$$y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x,\lambda,q),$$

որտեղ $S_k(x,\lambda,q)$-ները $(k=0,1,2,\dots)$ հանդիսանում են ամբողջ ֆունկցիաներ λ-ից (ֆիքսված x-ի և q-ի համար), և շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $[0,\pi]\times\mathbb{C}\times L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$ բազմության սահմանափակ ենթաբազմությունների վրա: Վայերշտրասի թեորեմի (տես [20]) համաձայն y_2-ը (այսինքն՝ ամբողջ շարքը) ևս հանդիսանում է ամբողջ ֆունկցիա λ-ից: Քանի որ $y_2'(x,\lambda,q)$ ածանցյալի համար ստացված (1.42) արտահայտության աջ մասը հանդիսանում է ամբողջ ֆունկցիա λ-ից, ապա $y_2'(x,\lambda,q)$-ը նույնպես ամբողջ ֆունկցիա է: Այսպիսով, թեորեմ 1.1-ը ամբողջությամբ ապացուցված է $y_2(x,\lambda,q)$ լուծման համար:

Ինչպես y_2-ը, նույն եղանակով կփնտրենք $y_1(x,\lambda,q)$, $y_3(x,\lambda,q)$ և $y_4(x,\lambda,q)$ լուծումները հետևյալ տեսքերով՝

$$y_1(x,\lambda,q)=\cos\lambda x+\sum_{k=1}^{\infty}C_k(x,\lambda,q), \tag{1.44}$$

որտեղ

$$C_k(x,\lambda,q)=\int\limits_{0\le t_0\le t_1\le\cdots\le t_k=x}\cos\lambda t_1\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{\sin\lambda(t_{i+1}-t_i)}{\lambda}q(t_i)\right]dt_1dt_2\dots dt_n\,, \tag{1.45}$$

$$y_3(x,\lambda,q)=\cos\lambda(\pi-x)+\sum_{k=1}^{\infty}P_k(x,\lambda,q), \tag{1.46}$$

որտեղ

$$P_k(x,\lambda,q)=\int\limits_{x=t_0\le t_1\le\cdots\le t_k=\pi}\cos\lambda(\pi-x)\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{\sin\lambda(t_i-t_{i-1})}{\lambda}q(t_i)\right]dt_k\dots dt_1, \tag{1.47}$$

$$y_4(x,\lambda,q)=\frac{\sin\lambda(\pi-x)}{\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(x,\lambda,q), \tag{1.48}$$

որտեղ

$$Q_k(x,\lambda,q)=\int\limits_{x=t_0\le t_1\le\cdots\le t_k=\pi}\frac{\sin\lambda(\pi-x)}{\lambda}\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{\sin\lambda(t_i-t_{i-1})}{\lambda}q(t_i)\right]dt_k\dots dt_1\,: \tag{1.49}$$

Նկատենք, որ $C_n(x,\lambda,q)$-ի և $S_n(x,\lambda,q)$-ի միջև տարբերությունը կայանում է միայն (1.30)-ի և (1.45)-ի մեջ ինտեգրալի նշանի տակ առաջին արտադրիչների տարբեր լինելու մեջ (այն է՝ $\frac{\sin\lambda t_1}{\lambda}$ և $\cos\lambda t_1$): Այդ պատճառով, եթե ($|\lambda|\ge1$) S_n-ի համար մենք ստանում ենք (1.35) գնահատականը, ապա C_n-ի համար այն կտարբերվի միայն նրանով, որ հայտարարում կլինի ոչ թե $|\lambda|^{n+1}$, այլ $|\lambda|^n$, և, հետևաբար, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x,\lambda,q)\right|$-ի համար գնահատականը կտարբերվի (1.37)-ից հայտարարում $|\lambda|$-ի մեկ աստիճանով, այն է՝

$$|y_1(x,\lambda,q)-\cos\lambda x| \le \sum_{k=1}^{\infty}|C_k(x,\lambda,q)| < \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\lambda|x+\frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}}, \tag{1.50}$$

այսինքն ստացանք թեորեմ 1.1-ի (1.10) գնահատականը: Երբ $|\lambda|\le 1$, գնահատականը կհամընկնի (1.39)-ի և (1.40)-ի հետ:

(1.31) գնահատականի ստացմանը նման P_k-ի համար (1.47)-ից և Q_k-ի համար (1.49)-ից կստանանք՝

$$|P_k(x,\lambda,q)| \le \int\limits_{x=t_0\le\cdots\le t_k=\pi} \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-t_k)}\dots e^{|\mathrm{Im}\lambda|(t_1-x)}}{|\lambda|^k}\prod_{i=1}^{k}|\,q(t_i)|dt_k\dots dt_1 =$$

$$= \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|^k}\int\limits_{x=t_0\le\cdots\le t_k=\pi}\prod_{i=1}^{k}|\,q(t_i)|dt_k\dots dt_1,$$

իսկ Q_k-ի համար նույնը, բայց հայտարարում $|\lambda|^{k+1}$: Օգտվելով (1.9) նշանակումից և նկատելով, որ $\sigma_\pi'(x)=-|q(x)|$, կարելի է ապացուցել լեմմա 1.2-ի հետևյալ նմանակը:

Լեմմա 1.3.

$$\int\limits_{x=t_0\le\cdots\le t_k=\pi}\prod_{i=1}^{k}|\,q(t_i)|dt_k\dots dt_1 = \frac{\sigma_\pi^k(x)}{k!}:$$

Այստեղից արդեն (1.37)-ին նման ձևով կստանանք թեորեմ 1.2-ի (1.12) և (1.13) գնահատականները: $|\lambda|\le 1$ դեպքում (1.36)-ի ստացմանը նման P_k-ի և Q_k-ի համար կստանանք հետևյալ գնահատականները.

$$|P_k(x,\lambda,q)|, |Q_k(x,\lambda,q)| \le e^{\pi-x}\cdot\frac{\sigma_\pi^k(x)}{k!},$$

որոնք $|\lambda|\ge 1$-ի համար գնահատականների հետ միասին ապահովում են (1.46) և (1.48) շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությունը: Վերը շարադրվածի հիման վրա կարելի է պնդել հետևյալը:

Թեորեմ 1.4. (1.25), (1.44), (1.46), (1.48) շարքերը հավասարաչափ զուգամիտում են $[0,\pi]\times\mathbb{C}\times L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$ բազմության սահմանափակ ենթաբազմությունների վրա համապատասխան Կոշու խնդիրների միակ լուծումներին, որոնք հանդիսանում են նաև համապատասխան (1.4)-(1.7) ինտեգրալ հավասարումների լուծումներ: Ֆիքսած x-ի և q-ի համար այդ լուծումները և դրանց y_1', y_2', y_3', y_4' ածանցյալները հանդիսանում են λ պարամետրի ամբողջ ֆունկցիաներ: Բացի այդ, տեղի ունեն (1.10)-(1.13) գնահատականները:

Այսպիսով ապացուցված են թեորեմ 1.1-ը և թեորեմ 1.2-ի մի մասը: Որպեսզի ավարտենք թեորեմ 1.2-ի ապացույցը, մնում է ստանալ (1.14)-(1.17) գնահատականները: Դրա համար նկատենք, որ (1.38) գնահատականից հեշտությամբ հետևում է

$$|y_2(x,\lambda,q)| \le C \cdot \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|} \tag{1.51}$$

գնահատականը (երբ $|\lambda| \ge 1$), որտեղ որպես C կարելի է վերցնել

$$C = 1 + \sigma_0(\pi)e^{\sigma_0(\pi)}: \tag{1.52}$$

Օգտվելով այս գնահատականից, (1.42) արտահայտության ինտեգրալի համար ստանում ենք՝

$$\left|\int_0^x \cos\lambda(x-t)q(t)y_2(x,\lambda,q)\,dt\right| \le C\int_0^x e^{|\mathrm{Im}\lambda|(x-t)} \cdot |q(t)| \cdot \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|t}}{|\lambda|}dt = \frac{C\sigma_0(x)e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|},$$

այսինքն ապացուցված է (1.15) գնահատականը: y_1-ի համար (1.50)-ից (1.51)-ին նման ձևով կստանանք գնահատական՝

$$|y_1(x,\lambda,q)| \le \left(1 + \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|} \cdot e^{\frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}}\right)e^{|\mathrm{Im}\lambda|x} \le C \cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}, \tag{1.53}$$

միևնույն C հաստատունով: Օգտվելով այս գնահատականից և

$$y_1'(x,\lambda,q) = -\lambda\sin\lambda x + \int_0^x \cos\lambda(x-t)\,q(t)y_1(x,\lambda,q)\,dt$$

ներկայացումից կստանանք (1.14) գնահատականը:

y_3-ի և y_4-ի համար (երբ $|\lambda| \ge 1$) ստանում ենք

$$|y_3(x,\lambda,q)| \le \left(1 + \frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|} \cdot e^{\frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|}}\right)e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x)} \le C \cdot e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x)}, \tag{1.54}$$

$$|y_4(x,\lambda,q)| \le \left(1 + \frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|} \cdot e^{\frac{\sigma_\pi(x)}{|\lambda|}}\right)\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|} \le C \cdot \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|} \tag{1.55}$$

գնահատականները, ընդ որում, քանի որ $\sigma_\pi(x) \le \sigma_\pi(0) = \sigma_0(\pi)$, ապա որպես C հաստատուն այս գնահատականներում կարելի է վերցնել C-ն (1.52)-ից: Օգտագործելով (1.54) և (1.55) գնահատականները,

$$y_3'(x,\lambda,q) = \lambda\sin\lambda(\pi-x) + \int_0^x \cos\lambda(t-x)\,q(t)y_3(x,\lambda,q)\,dt\,,$$

$$y_4'(x,\lambda,q) = -\cos\lambda(\pi-x) + \int_0^x \cos\lambda(t-x)\,q(t)y_4(x,\lambda,q)\,dt\,,$$

ներկայացումներից (նույնություններից, որոնք հետևում են (1.6)-ից և (1.7)-ից) ստանում ենք (1.16) և (1.17) գնահատականները:

Հետագայում մեզ պետք կլինեն $y_i(x,\lambda,q)$, $i = 1,2,3,4$, լուծումների ավելի նուրբ գնահատականներ: Այդ նպատակով կապացուցենք հաջորդ պնդումը:

Լեմմա 1.4. Դիցուք $q \in L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$: Այդ դեպքում

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\lambda x + \frac{1}{2\lambda} a(x,\lambda)\,, \tag{1.56}$$

$$y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} b(x,\lambda)\,, \tag{1.57}$$

$$y_3(x,\lambda,q) = \cos\lambda(\pi - x) + \frac{1}{2\lambda} c(x,\lambda)\,, \tag{1.58}$$

$$y_4(x,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda(\pi - x)}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} d(x,\lambda)\,, \tag{1.59}$$

որտեղ a, b, c, d-ն ըստ x-ի երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են (ավելի ճշգրիտ a', b', c', d'-ը բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաներ են), ըստ λ-ի ամբողջ ֆունկցիաներ են և դրանք կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$a(x,\lambda) = \sin\lambda x \cdot \int_0^x q(t)\,dt + \int_0^x q(x)\sin\lambda(x - 2t)\,dt + R_1(x,\lambda,q), \tag{1.60}$$

$$b(x,\lambda) = \cos\lambda x \cdot \int_0^x q(t)\,dt + \int_0^x q(x)\cos\lambda(x - 2t)\,dt + R_2(x,\lambda,q), \tag{1.61}$$

$$c(x,\lambda) = \sin\lambda(\pi - x) \cdot \int_x^\pi q(t)\,dt + \int_x^\pi q(x)\sin\lambda(2t - \pi - x)\,dt + R_3(x,\lambda,q), \tag{1.62}$$

$$d(x,\lambda) = \cos\lambda(\pi - x) \cdot \int_x^\pi q(t)\,dt + \int_x^\pi q(x)\cos\lambda(\pi + x - 2t)\,dt + R_4(x,\lambda,q), \tag{1.63}$$

իսկ R_i-երը, $i = 1, 2, 3, 4$, բավարարում են հետևյալ գնահատականներին (երբ $|\lambda| \geq 1$)՝

$$R_1(x,\lambda,q), R_2(x,\lambda,q) = O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|}\right), \tag{1.64}$$

$$R_3(x,\lambda,q), R_4(x,\lambda,q) = O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right), \tag{1.65}$$

Մասնավորապես, իրական λ-ների համար տեղի ունեն հետևյալ գնահատականները՝

$$y_1(\pi,\lambda,q) = \cos\lambda\pi + \frac{\sin\lambda\pi}{2\lambda}\int_0^\pi q(t)\,dt + \frac{o(1)}{\lambda}\;, \quad \lambda \to \infty, \tag{1.66}$$

$$y_2(\pi,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} - \frac{\cos\lambda\pi}{2\lambda^2}\int_0^\pi q(t)\,dt + \frac{o(1)}{\lambda^2}\;, \quad \lambda \to \infty: \tag{1.67}$$

$$y_3(0,\lambda,q) = \cos\lambda\pi + \frac{\sin\lambda\pi}{2\lambda}\int_0^\pi q(t)\,dt + \frac{o(1)}{\lambda}\;, \quad \lambda \to \infty, \tag{1.68}$$

$$y_4(0,\lambda,q) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} - \frac{\cos\lambda\pi}{2\lambda^2}\int_0^\pi q(t)\,dt + \frac{o(1)}{\lambda^2}\;, \quad \lambda \to \infty: \tag{1.69}$$

Ապացույց: Ներկայացնենք (1.25)-ը հետևյալ տեսքով՝

$$y_2(x,\lambda,q) = S_0(x,\lambda) + S_1(x,\lambda) + \sum_{k=2}^{\infty} S_k(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} +$$

$$+ \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} \cdot \frac{\sin\lambda x}{\lambda} q(t)\,dt + \sum_{k=2}^{\infty} S_k(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} - \tag{1.70}$$

$$-\frac{1}{2\lambda^2}\cos\lambda x \int_0^x q(t)\,dt + \frac{1}{2\lambda^2}\int_0^x q(t)\cos\lambda(x-2t)\,dt + \sum_{k=2}^{\infty} S_k(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} b(x,\lambda),$$

որտեղ

$$b(x,\lambda) = \cos\lambda x \int_0^x q(t)\,dt - \int_0^x q(t)\cos\lambda(x-2t)\,dt - 2\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} S_k(x,\lambda) \,:$$

Այժմ, (1.35) գնահատականներից հետևում է, որ

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} S_k(x,\lambda)\right| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^{k+1}} \cdot \frac{\sigma_0^k(x)}{k!} = \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x} \cdot \sigma_0^2(x)}{|\lambda|^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_0^{k-2}(x)}{|\lambda|^{k-1}\cdot k!} <$$

$$< \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x} \cdot \sigma_0^2(x)}{|\lambda|^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_0^{k-2}(x)}{|\lambda|^{k-1}\cdot (k-2)!} = \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x} \cdot \sigma_0^2(x)}{|\lambda|^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_0^{n}(x)}{|\lambda|^{n}\cdot n!} =$$

$$= \frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x} \cdot \sigma_0^2(x)}{|\lambda|^3} \cdot e^{\frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}} = \frac{\cdot\, \sigma_0^2(x)}{|\lambda|^3} e^{|\mathrm{Im}\lambda|x + \frac{\sigma_0(x)}{|\lambda|}} \,:$$

Նշանակելով $R_2(x,\lambda,q) = 2\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} S_k(x,\lambda)$, ստանում ենք (1.61)-ը և (1.64)-ը: Այսպիսով ապացուցվեցին (1.57), (1.61) և (1.64) բանաձևերը, երբ $|\lambda| \ge 1$: $b(x,\lambda)$-ի ողորկությունը ըստ x-ի և ըստ λ-ի հետևում է (1.57)-ից: (1.67)-ը ստացվում է ուղղակի տեղադրումով: y_1, y_3, y_4-ին վերաբերվող պնդումները ապացուցվում են նման ձևով: Լեմմա 1.4-ը ապացուցված է:

1.3. Լուծումների կախվածությունը q-ից

Այստեղ մենք կապացուցենք թեորեմ 1.3-ը:
Քանի որ $q_m \to q$ $L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$-ում պայմանից հետևում է, որ

$$|\sigma_0(\pi,q_m) - \sigma_0(\pi,q)| \le \int_0^\pi |q_m(x) - q(x)|\,dx < \varepsilon$$

երբ $m > N_0$, որտեղ N_0-ն ինչ-որ բավականին մեծ թիվ է, ապա գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$, որ $\sigma_0(\pi,q_m), \sigma_0(\pi,q) < M$ բոլոր բնական m-երի համար:

Դիցուք $A = [0,\pi] \times B$, որտեղ B-ն $\mathbb{C}$-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է: Այդ դեպքում (1.35) և (1.36) գնահատականներից հետևում է, որ $|S_n(x,\lambda,p)| \le c\frac{M^n}{n!}$

հավասարաչափ A-ի վրա, որտեղ c-ն ինչ-որ հաստատուն է, իսկ $p = q_m$ կամ $p = q$: Այդ դեպքում

$$|y_2(x,\lambda,q_m) - y_2(x,\lambda,q)| \le \sum_{n=1}^{N_0} |S_n(x,\lambda,q_m) - S_n(x,\lambda,q)| +$$

$$+ \sum_{n=N_0+1}^{\infty} (|S_n(x,\lambda,q_m)| + |S_n(x,\lambda,q)|) \le \sum_{n=1}^{N_0} |S_n(x,\lambda,q_m) - S_n(x,\lambda,q)| + 2c \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

հավասարաչափ A-ի վրա: Քանի որ առաջին գումարը վերջավոր է, իսկ երկրորդը կարելի է դարձնել փոքր կամայական $\varepsilon > 0$ թվից N_0-ի ընտրության հաշվին, ապա $y_2(x,\lambda,q_m) \to y_2(x,\lambda,q)$ հավասարաչափ զուգամիտությունը ապացուցելու համար մեզ բավական է ցույց տալ $S_n(x,\lambda,q_m) \to S_n(x,\lambda,q)$ հավասարաչափ (ըստ $(x,\lambda) \in A$) զուգամիտությունը ֆիքսած n-ի դեպքում: Քանի որ

$$|S_n(x,\lambda,q_m) - S_n(x,\lambda,q)| =$$

$$= \left| \int\limits_{0 \le t_0 \le \cdots \le t_{n+1} = x} \frac{\sin \lambda t_1}{\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \lambda(t_{i+1} - t_i)}{\lambda} \left[\prod_{i=1}^{n} q_m(t_i) - \prod_{i=1}^{n} q(t_i) \right] dt_1 \dots dt_n \right| \le C \cdot F_n^m(x),$$

որտեղ $F_n^m(x)$-ով նշանակել ենք

$$F_n^m(x) = \int\limits_{0 \le t_0 \le \cdots \le t_{n+1} = x} \left| \prod_{i=1}^{n} q_m(t_i) - \prod_{i=1}^{n} q(t_i) \right| dt_1 dt_2 \dots dt_n,$$

ապա բավական է ապացուցել, որ $F_n^m(x) \to 0$, երբ $m \to \infty$ հավասարաչափ $[0,\pi]$-ի վրա ցանկացած վերջավոր n-ի համար: Այդ փաստը ապացուցենք ինդուկցիայով: Երբ $n = 1$,

$$F_1^m(x) = \int_0^x |q_m(x) - q(x)| dt \le \int_0^\pi |q_m(x) - q(x)| dt = \sigma_0(\pi, q_m - q) \to 0,$$

համաձայն թեորեմի պայմանի: Հիմա ենթադրենք $F_k^m(x) \to 0$ հավասարաչափ $[0,\pi]$-ի վրա ինչ-որ k-ի համար: Ապացուցենք, որ $F_{k+1}^m(x) \to 0$ նույնպես հավասարաչափ $[0,\pi]$-ի վրա: Դրա համար բավական է նկատել, որ

$$\prod_{i=1}^{k+1} q_m(t_i) - \prod_{i=1}^{k+1} q(t_i) = [q_m(t_{k+1}) - q(t_{k+1})] \cdot q_m(t_1) \cdot q_m(t_2) \cdots q_m(t_k) +$$

$$+ [q_m(t_1) \cdot q_m(t_2) \cdots q_m(t_k) - q(t_1) \cdot q(t_2) \cdots q(t_k)] \cdot q(t_{k+1})$$

նույնությունից հետևում է, որ

$$F_{k+1}^m(x) \le \int_0^x |q_m(t_{k+1}) - q(t_{k+1})| dt_{k+1} \cdot \sigma_0^k(\pi, q_m) + F_k^{(m)}(\pi) \sigma_0^k(\pi, q) \to 0$$

թեորեմի պայմանից և ինդուկցիոն ենթադրությունից:

Աձանցյալների հավասարաչափ զուգամիտությունը ապացուցելու համար նկատենք, որ

$$|y_2'(x,\lambda,q_m) - y_2'(x,\lambda,q)| = \left|\int_0^x \cos\lambda(x-t)[q_m(t)y_2(x,\lambda,q_m) - q(t)y_2(x,\lambda,q)]\,dt\right| \leq$$

$$\leq e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}\left[\int_0^x |q_m(t)-q(t)|\,|y_2(x,\lambda,q_m)|dt + \int_0^x |q(t)|\,|y_2(x,\lambda,q_m) - y_2(x,\lambda,q)|dt\right] \leq$$

$$\leq c\left[\sup_{t\in[0,\pi]}|y_2(t,\lambda,q_m)|\cdot\sigma_0(\pi,q_m-q) + \sup_{t\in[0,\pi]}|y_2(t,\lambda,q_m) - y_2(t,\lambda,q)|\cdot\sigma_0(\pi,q)\right]:$$

Վերը ապացուցված հավասարաչափ զուգամիտությունից՝ $y_2(\cdot,\lambda,q_m) \to y_2(\cdot,\lambda,q)$, $|y_2(x,\lambda,q)|$-ի հավասարաչափ (A-ի վրա) սահմանափակությունից (որը հետևում է (1.40) և (1.51) գնահատականներից) և նրանից, որ $\sigma_0(\pi,q_m-q) \to 0$ (թեորեմ 1.3-ի պայմանից) հետևում է, որ վերջին արտահայտությունը ձգտում է զրոյի, երբ $m\to\infty$:y_1, y_3, y_4 լուծումների համար ապացույցները ստացվում են նման ձևով: Թեորեմ 1.3-ը ապացուցված է:

§2. Շտուրմ-Լիուվիլի եզրային խնդիրը: Սեփական արժեքների գոյությունը և հաշվելիությունը

Նշանակենք $L(q,\alpha,\beta)$-ով Շտուրմ-Լիուվիլի եզրային խնդիրը՝

$$\ell y \overset{def}{\equiv} -y'' + q(x)y = \mu y, \quad x \in (0,\pi), \mu \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi], \tag{2.2}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \quad \beta \in [0,\pi), \tag{2.3}$$

որտեղ $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ (այսինքն q-ն իրական, չափելի, Լեբեգի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիա է):

Լուծել (2.1)-(2.3) եզրային խնդիրը նշանակում է գտնել մի ֆունկցիա, որը բավարարում է (2.1) հավասարմանը և (2.2), (2.3) եզրային պայմաններին: Հեշտ է տեսնել, որ $y(x) \equiv 0$ ֆունկցիան բավարարում է և (2.1) հավասարմանը և (2.2), (2.3) եզրային պայմաններին: Այդ ֆունկցիան կոչում ենք խնդրի տրիվիալ լուծում:

Արդյո՞ք $L(q,\alpha,\beta)$ խնդիրը կարող է ունենալ ոչ տրիվիալ լուծում: Դիտարկենք $L\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ մասնավոր դեպքը, այսինքն

$$-y'' = \mu y,$$

$$y'(0) = 0,$$

$$y'(\pi) = 0$$

եզրային խնդիրը: Քանի որ այս դեպքում հավասարումը գծային է, համասեռ և հաստատուն գործակիցներով, ապա նրա ընդհանուր լուծումը ունի

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}\,x}$$

տեսքը, և ածանցյալն ունի

$$y'(x) = \sqrt{-\mu}\left(c_1 e^{\sqrt{-\mu}\,x} - c_2 e^{-\sqrt{-\mu}\,x}\right)$$

տեսքը, որտեղ c_1 և c_2-ը կամայական (կոմպլեքս) թվեր են: $y'(0) = 0$ եզրային պայմանից ստանում ենք

$$\sqrt{-\mu}\,(c_1 - c_2) = 0\,,$$

իսկ $y'(\pi) = 0$ պայմանից

$$c_1 e^{\sqrt{-\mu}\,\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\mu}\,\pi} = 0$$

պայմանները: Առաջինից հետևում է, որ կամ $\mu = 0$, կամ $c_1 = c_2$: Եթե $\mu = 0$, ապա ստանում ենք, որ լուծումը հաստատուն է (կամայական), իսկ եթե $c_1 = c_2$ $(\neq 0)$, ապա երկրորդից հետևում է, որ $c_1\left(e^{\sqrt{-\mu}\,\pi} - e^{-\sqrt{-\mu}\,\pi}\right) = 0$ կամ $e^{2\sqrt{-\mu}\,\pi} = 1$. Քանի որ $1 = e^{2\pi i k}$, $k \in \mathbb{Z}$, ապա $e^{2\sqrt{-\mu}\,\pi} = e^{2\pi i k}$, այսինքն $\sqrt{-\mu} = i\sqrt{\mu} = ik$, կամ $\mu = k^2$: Այսպիսով, $L\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ խնդիրը ունի ոչ տրիվիալ լուծումներ միայն μ պարամետրի որոշակի ($\mu = k^2$, $k =$

$0, 1, 2, \ldots$) արժեքների դեպքում և այդ ոչ տրիվիալ լուծումներն են $y_k(x) = c_k(e^{ikx} + e^{-ikx}) = 2c_k \cos kx$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ֆունկցիաները (c_k – կամայական հաստատուն է, զրոյից տարբեր):

Սահմանում: $L(q, \alpha, \beta)$ խնդրի սեփական արժեք կոչվում է μ պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում խնդիրն ունի ոչ տրիվիալ լուծում: Այդ լուծումը կոչվում է սեփական ֆունկցիա:

$L\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ խնդրի օրինակը ցույց է տալիս, որ այն ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ, որոնք կազմում են հաջորդականություն ($\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} = \{n^2\}_{n=0}^{\infty}$), որը ձգտում է անվերջի: Արդյո՞ք նման բան տեղի ունի $L(q, \alpha, \beta)$ խնդրի համար ընդհանուր դեպքում:

Ողորկ q-երի դեպքում $L(q, \alpha, \beta)$ խնդրի սեփական արժեքների գոյությունը, հաշվելիությունը և ասիմպտոտական բանաձևերը դրանց համար ուսումնասիրվել են դեռևս XIX դարում և XX դարի սկզբում (տես [21], [22], [23]): Այս պարագրաֆում մենք կբերենք խիստ ապացույց $L(q, \alpha, \beta)$ խնդրի սեփական արժեքների գոյության և նրանց բազմության հաշվելիության վերաբերյալ $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\alpha \in (0, \pi]$, $\beta \in [0, \pi)$ դեպքում:

Մենք կգործենք հետևյալ հերթականությամբ: Սկզբում մենք կապացուցենք $L(q, \pi, 0)$ խնդրի սեփական արժեքների (ս.ա.) գոյությունը և հաշվելիությունը: Հետո կապացուցենք $L(q, \pi, \beta)$ խնդրի ս.ա. գոյությունը և հաշվելիությունը $\beta \in (0, \pi)$ դեպքում, այնուհետև $L(q, \alpha, \beta)$-ի համար կամայական $(\alpha, \beta) \in (0, \pi] \times [0, \pi)$ դեպքում:

Նշանակենք $\varphi(x, \mu, \alpha)$ և $\psi(x, \mu, \beta)$-ով (2.1) հավասարման լուծումները, որոնք բավարարում են

$$\varphi(0, \mu, \alpha) = \sin\alpha\ , \quad \varphi'(0, \mu, \alpha) = -\cos\alpha, \tag{2.4}$$

$$\psi(\pi, \mu, \beta) = \sin\beta\ , \quad \psi'(\pi, \mu, \beta) = -\cos\beta, \tag{2.5}$$

սկզբնական պայմաններին: Ակնհայտ է, որ (տես (1.3))

$$\varphi(x, \lambda^2, \alpha) = y_1(x, \lambda)\sin\alpha - y_2(x, \lambda)\cos\alpha, \tag{2.6}$$

$$\psi(x, \lambda^2, \beta) = y_1(x, \lambda)\sin\beta - y_2(x, \lambda)\cos\beta: \tag{2.7}$$

Յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in [0, \pi]$-ի համար $\varphi(x, \mu, \alpha)$ և $\varphi'_x(x, \mu, \alpha)$-ն հանդիսանում են μ-ի (նաև λ-ի) և α-ի ամբողջ ֆունկցիաներ, իսկ $\psi(x, \mu, \beta)$ և $\psi'_x(x, \mu, \beta)$-ն՝ μ-ի և β-ի: (2.4)-ից հետևում է, որ $\varphi(x, \mu, \alpha)$ լուծումը բավարարում է (2.2) եզրային պայմանին և, հետևաբար, որպեսզի նա լինի $L(q, \alpha, \beta)$ խնդրի լուծում, մնում է որ նա բավարարի նաև (2.3) եզրային պայմանին, այսինքն, որ $\varphi(\pi, \mu, \alpha)\cos\beta + \varphi'(\pi, \mu, \alpha)\sin\beta = 0$:

Այսպիսով, $L(q, \alpha, \beta)$ խնդրի սեփական արժեքները համընկնում են

$$\Phi(\mu) = \Phi(\mu, \alpha, \beta) = \Phi_\beta(\mu) \overset{def}{=} \varphi(\pi, \mu, \alpha)\cos\beta + \varphi'(\pi, \mu, \alpha)\sin\beta \tag{2.8}$$

ամբողջ ֆունկցիայի զրոների հետ: Նմանապես, (2.5)-ից բխում է, որ $\psi(x,\mu,\beta)$ լուծումը բավարարում է (2.3) եզրային պայմանին և, հետևաբար, $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքները համնկնում են

$$\Psi(\mu)=\Psi(\mu,\alpha,\beta)=\Psi_\alpha(\mu)\overset{def}{=}\psi(0,\mu,\beta)\cos\alpha+\psi'(0,\mu,\beta)\sin\alpha \tag{2.9}$$

ամբողջ ֆունկցիայի զրոների հետ: Φ և Ψ ֆունկցիաները կոչվում են $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի բնութագրիչ ֆունկցիաներ: φ և ψ լուծումների վրոնսկիանի ($\mathrm{W}[\varphi,\psi](x)\overset{def}{=}\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)$) համար Լիուվիլի բանաձևից (տես [18]) հետևում է, որ այդ վրոնսկիանը հաստատուն է, այսինքն $\mathrm{W}[\varphi,\psi](0)=\mathrm{W}[\varphi,\psi](\pi)$ և, հետևաբար, $\Psi(\mu)=-\Phi(\mu)$:

Հետագայում պետք կգա հետևյալ հայտնի (տես [19]) լեմման:

Լեմմա 2.1.Եթե $|z-\pi n|\geq\frac{\pi}{4}$ բոլոր ամբողջ n-երի համար ($n\in\mathbb{Z}$), ապա

$$|\sin z|\geq\frac{1}{4}\,e^{|\mathrm{Im}z|}: \tag{2.10}$$

Հիշեցնենք նաև Ռուշեի թեորեմը (տես [24]).

Ռուշեի թեորեմը. Եթե $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են D միակապ, սահմանափակ տիրույթում և նրա C եզրագծի վրա, ընդ որում՝ $|g(z)|<|f(z)|$ C-ի վրա, ապա $f(z)$ և $g(z)+f(z)$ ֆունկցիաները D տիրույթում ունեն նույն քանակությամբ զրոներ:

Սկզբում ապացուցենք, որ $L(q,\pi,0)$ խնդիրը ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ: Այստեղ հարմար է μ սպեկտրալ պարամետրը գրել $\mu=\lambda^2$ տեսքով: $L(q,\pi,0)$ խնդիրը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases}\ell y=\lambda^2 y,\\ y(0)=0,\\ y(\pi)=0:\end{cases}$$

$y(0)=0$ եզրային պայմանին բավարարում է §1-ում ուսումնասիրված $y_2(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda^2,\pi)$ լուծումը՝ որոշված $y_2(0,\lambda)=0$, $y_2'(0,\lambda)=1$ սկզբնական պայմաններով: Այսպիսով, $L(q,\pi,0)$ խնդրի սեփական արժեքները հանդիսանում են $\Phi(\mu,\pi,0)=0$ բնութագրիչ հավասարման լուծումները կամ, որ նույնն է՝

$$\Phi(\lambda^2,\pi,0)=y_2(\pi,\lambda)=0:$$

հավասարման արմատների քառակուսիները:

Համաձայն (1.11) գնահատականի՝

$$\left|y_2(\pi,\lambda)-\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\right|\leq\frac{\sigma_0(\pi)\cdot e^{\frac{\sigma_0(\pi)}{|\lambda|}}}{|\lambda|}\cdot\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}}{|\lambda|}: \tag{2.11}$$

Դիտարկենք այն բոլոր կոմպլեքս λ-երը, որոնց համար $|\lambda| > 1$, $|\lambda\pi - \pi n| \geq \frac{\pi}{4}$ (այսինքն՝ $|\lambda - n| \geq \frac{1}{4}$) և $|\lambda| > 4\sigma_0(\pi)e^{\sigma_0(\pi)}$: Այդ դեպքում, ըստ 2.1 լեմմայի, (2.11) անհավասարությունը կընդունի

$$\left|y_2(\pi,\lambda) - \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\right| \leq \left|\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\right| \tag{2.12}$$

տեսքը: Այժմ դիտարկենք կոմպլեքս հարթության վրա $C_N = \left\{\lambda: |\lambda| = N + \frac{1}{2}\right\}$ շրջանագծերը, որոնց վրա $\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}$ ֆունկցիան զրո չի դառնում և որոնց վրա տեղի ունի $|\lambda - n| \geq \frac{1}{4}$ անհավասարությունը: Ռուշեի թեորեմում վերցնենք $g(z) = y_2(\pi,z) - \frac{\sin\pi z}{z}$, իսկ $f(z) = \frac{\sin\pi z}{z}$: Այդ դեպքում (2.12)-ից և Ռուշեի թեորեմից հետևում է, որ C_N կոնտուրի ներսում $y_2(\pi,\lambda)$-ն ունի նույնքան զրո, որքան և $\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}$-ն: Այսինքն՝ $2N$ զրոներ: Ձգտեցնելով $N \to \infty$ ստանում ենք, որ $y_2(\pi,\lambda)$-ն ունի հաշվելի թվով զրոներ, այսինքն $L(q,\pi,0)$ խնդիրն ունի սեփական արժեքների հաշվելի բազմություն, որոնք մենք նշանակում ենք $\lambda_n^2 = \mu_n(q,\pi,0)$, $n = 0,1,2,\ldots$: Քանի որ $\Phi(\lambda^2,\pi,0) = y_2(\pi,\lambda)$ բնութագրիչ ֆունկցիան զույգ ամբողջ ֆունկցիա է, ապա նրա զրոները կարելի է դասավորել հետևյալ հաջորդականությամբ՝

$$\ldots, -\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \ldots, -\lambda_1, -\lambda_0, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \ldots,$$

որտեղ $|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|$ և $\mathrm{Re}\lambda_i \geq 0$, երբ $i \geq 0$:

Այժմ դիտարկենք λ կոմպլեքս հարթության մեջ $\mathcal{R}_n = \left\{\lambda: |\lambda - n| = \frac{1}{2}\right\}$ շրջանագիծը: Բավականաչափ մեծ n-երի դեպքում այս շրջանագծի կետերի համար ևս տեղի ունեն $|\lambda| > 1$, $|\lambda - n| > \frac{1}{4}$, $|\lambda| > 4\sigma_0(\pi)e^{\sigma_0(\pi)}$ պայմանները և, հետևաբար, տեղի ունի (2.12) անհավասարությունը: Համաձայն նույն Ռուշեի թեորեմի, $\mathcal{R}_n$ շրջանագծով սահմանափակված շրջանում, $y_2(\pi,\lambda)$-ն ունի նույնքան զրոներ, որքան և $\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}$ ֆունկցիան, այսինքն՝ 1 զրո, այսինքն՝ մենք կարող ենք պնդել, որ մոդուլով մեծ սեփական արժեքները բոլորը պարզ են և բավարարում են $|\lambda_n - n| \leq \frac{1}{2}$ պայմանին: Այսինքն՝ $\lambda_n = n + a_n$, որտեղ $|a_n| \leq \frac{1}{2}$: Այսպիսով ապացուցված է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 2.2. Դիցուք $q \in L^1_{\mathbb{C}}[0,\pi]$: Այդ դեպքում $L(q,\pi,0)$ խնդիրն ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ, որոնցից միայն վերջավոր հատը կարող են լինել բազմապատիկ, իսկ բացարձակ արժեքով բավականաչափ մեծ սեփական արժեքները հավասար են $(n + a_n)^2$, որտեղ $|a_n| \leq \frac{1}{2}$:

Եթե $q(x)$ գործակիցը (1.1)-ում իրական ֆունկցիա է (դիտարկում ենք $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ դեպքը), ապա քաջ հայտնի է (տես, օրինակ, [10]), որ $\lambda_n^2 = \mu_n(q,\pi,0)$, $n = 0,1,2,\ldots$ սեփական արժեքները ևս իրական են:

Ապացուցենք մի լեմմա, որից կբխի, որ ցանկացած $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի ($q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, $\alpha \in (0,\pi]$, $\beta \in [0,\pi)$) բոլոր սեփական արժեքները պարզ են (եթե դրանք գոյություն ունեն):

Լեմմա 2.3. Ցանկացած $\beta_1, \beta_2 \in [0,\pi)$, $\beta_1 \neq \beta_2$, և $\alpha \in (0,\pi]$ համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu,\alpha)\,dx = \frac{\dot{\Phi}(\mu,\alpha,\beta_1)\Phi(\mu,\alpha,\beta_2) - \Phi(\mu,\alpha,\beta_1)\dot{\Phi}(\mu,\alpha,\beta_2)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)}\,: \tag{2.13}$$

Ապացույց: Գրենք այն փաստը, որ $\varphi(x,\mu,\alpha) = \varphi(x,\mu)$-ն $\ell y = \mu y$ հավասարման լուծումն է, ինչպես նաև դիֆերենցենք համապատասխան նույնությունը[1] ըստ μ-ի ($\dot{f} = \frac{\partial}{\partial\mu} f$)

$$-\varphi''(x,\mu) + q(x)\varphi(x,\mu) \equiv \mu \cdot \varphi(x,\mu), \tag{2.14}$$

$$-\dot{\varphi}''(x,\mu) + q(x)\dot{\varphi}(x,\mu) \equiv \varphi(x,\mu) + \mu \cdot \dot{\varphi}(x,\mu): \tag{2.15}$$

Բազմապատկելով (2.14)-ը $\dot{\varphi}(x,\mu)$-ով, իսկ (2.15)-ը $\varphi(x,\mu)$-ով, կստանանք՝

$$-\varphi''\dot{\varphi} + q(x)\varphi \cdot \dot{\varphi} \equiv \mu \cdot \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

$$-\dot{\varphi}''\varphi + q(x) \cdot \varphi \cdot \dot{\varphi} \equiv \mu \cdot \varphi \cdot \dot{\varphi} + \varphi^2:$$

Երկրորդ նույնությունից հանենք առաջինը և ստանանք նոր նույնություն՝

$$\varphi'' \cdot \dot{\varphi} - \dot{\varphi}'' \cdot \varphi \equiv \frac{d}{dx}[\varphi' \cdot \dot{\varphi} - \dot{\varphi}' \cdot \varphi] \equiv \varphi^2:$$

Ինտեգրելով այս նույնությունն ըստ x-ի 0-ից π, կստանանք որ

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu,\alpha)\,dx = \varphi'(\pi,\mu,\alpha)\,\dot{\varphi}(\pi,\mu,\alpha) - \dot{\varphi}'(\pi,\mu,\alpha)\varphi(\pi,\mu,\alpha) \tag{2.16}$$

Այստեղ չենք գրել $\varphi' \cdot \dot{\varphi} - \dot{\varphi}' \cdot \varphi$ ֆունկցիայի արժեքը 0-ում, քանի որ $\varphi(x,\mu,\alpha)$ լուծումը բավարարում է (2.4) սկզբնական պայմաններին նույնաբար ըստ բոլոր μ-երի, և այդ պատճառով $\dot{\varphi}(0,\mu,\alpha) \equiv 0$, $\dot{\varphi}'(0,\mu,\alpha) \equiv 0$:

Ելնելով (2.8) սահմանումից, գրենք, որ

$$\dot{\Phi}(\mu,\alpha,\beta_1) \cdot \Phi(\mu,\alpha,\beta_2) = [\dot{\varphi}(\pi,\mu,\alpha)\cos\beta_1 + \dot{\varphi}'(\pi,\mu,\alpha)\sin\beta_1] \cdot$$

$$\cdot [\varphi(\pi,\mu,\alpha)\cos\beta_2 + \varphi'(\pi,\mu,\alpha)\sin\beta_2] = \dot{\varphi} \cdot \varphi \cdot \cos\beta_1\cos\beta_2 +$$

$$+\dot{\varphi} \cdot \varphi' \cdot \cos\beta_1 \sin\beta_2 + \dot{\varphi}' \cdot \varphi \cdot \sin\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \dot{\varphi} \cdot \varphi' \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2:$$

---

[1] Նույնություն ասելով այստեղ հասկանում ենք, որ հավասարությունը տեղի ունի համարյա ամենուրեք $[0,\pi]$-ում:

Եթե այս արտահայտության մեջ β_1-ի և β_2-ի տեղերը փոխենք և վերը գրված արտահայտությունից հանենք ստացվածը, ապա կստանանք, որ

$$\dot{\Phi}(\mu,\alpha,\beta_1)\cdot\Phi(\mu,\alpha,\beta_2)-\Phi(\mu,\alpha,\beta_1)\cdot\dot{\Phi}(\mu,\alpha,\beta_2)=$$

$$=\dot{\varphi}\varphi'[\sin\beta_2\cdot\cos\beta_1-\sin\beta_1\cdot\cos\beta_2]+\dot{\varphi}'\cdot\varphi[\sin\beta_1\cdot\cos\beta_2-\sin\beta_2\cdot\cos\beta_1]\equiv$$

$$\equiv[\dot{\varphi}(\pi,\mu,\alpha)\cdot\varphi'(\pi,\mu,\alpha)-\dot{\varphi}'(\pi,\mu,\alpha)\cdot\varphi'(\pi,\mu,\alpha)]\cdot\sin(\beta_2-\beta_1)=$$

$$=\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu,\alpha)\,dx\ \sin(\beta_2-\beta_1)$$

համաձայն (2.16)-ի: Լեմմա 2.3-ը ապացուցված է:

Հետևանք: $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի բոլոր սեփական արժեքները պարզ են (եթե դրանք գոյություն ունեն):

Ապացույց: Դիցուք μ^*-ը $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքն է: Համաձայն արդեն ասվածի, այն իրական է, $\Phi(\mu^*,\alpha,\beta)=0$ և $\varphi(x,\mu^*,\alpha)$-ն սեփական ֆունկցիա է, որը նույնպես իրականարժեք է և տարբեր է նույնաբար զրո ֆունկցիայից: Այդ պատճառով (2.13)-ում ձախ մասը դրական է $\mu=\mu^*$ դեպքում: Եթե $\dot{\Phi}(\mu^*,\alpha,\beta)=0$ (դիցուք $\beta=\beta_1$), ապա (2.13)-ի աջ մասում կլինի 0, այսինքն, մենք ստանում ենք հակասություն: Այսպիսով $\dot{\Phi}(\mu^*,\alpha,\beta)\neq 0$, այսինքն μ^* սեփական արժեքը պարզ է: Նման ձևով ապացուցվում է 2.3΄ լեմման:

Լեմմա 2.3΄. Ցանկացած $\alpha_1,\alpha_2\in(0,\pi]$, $\alpha_1\neq\alpha_2$ և $\beta\in[0,\pi)$-ի համար տեղի ունի

$$\int_0^\pi \psi^2(x,\mu,\beta)\,dx=\frac{\dot{\Psi}(\mu,\alpha_1,\beta)\cdot\Psi(\mu,\alpha_2,\beta)-\Psi(\mu,\alpha_1,\beta)\dot{\Psi}(\mu,\alpha_2,\beta)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}:$$

հավասարությունը:

Այսպիսով, մինչ այժմ մեզ մոտ ապացուցված է, որ $L(q,\pi,0)$ խնդրի սեփական արժեքները $q\in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ դեպքում բոլորը (հաշվելի թվով) պարզ են, իրական են և հանդիսանում են λ_n, $n=0,1,2,\dots$ թվերի քառակուսիները, որոնք սկսած ինչ-որ n_0-ից ($n\geq n_0$) ունեն $\lambda_n=n+a_n$ (որտեղ $|a_n|\leq\frac{1}{2}$) տեսքը: Հետևաբար, $L(q,\pi,0)$ խնդրի սեփական արժեքները, որոնք կնշանակենք $\mu_n(q,\pi,0)$, $n=0,1,2,\dots$ կարող ենք համարակալել աճման կարգով՝

$$\mu_0(q,\pi,0)<\mu_1(q,\pi,0)<\dots<\mu_n(q,\pi,0)<\cdots: \qquad (2.17)$$

Դիտարկենք այժմ $L(q,\pi,\beta)$, $\beta\in(0,\pi)$, խնդիրը՝

$$\begin{cases}\ell y=\lambda^2 y,\\ y(0)=0,\\ y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0:\end{cases}$$

Քանի որ $\varphi(x,\lambda^2,\pi)=y_2(x,\lambda)$, ապա $L(q,\pi,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքները հետևյալ հավասարման արմատներն են ($\mu=\lambda^2$)՝

$$\Phi(\mu,\pi,\beta)=y_2(\pi,\lambda)\cos\beta+y_2'(\pi,\lambda)\sin\beta=0\ :$$

Եթե (2.13)-ում վերցնենք $\alpha=\pi$, $\beta_1=\beta$, $\beta_2=0$, ապա ստանում ենք

$$\int_0^\pi y_2^2\,(x,\lambda)dx=\frac{\dot\Phi(\mu,\pi,0)\cdot\Phi(\mu,\pi,\beta)-\Phi(\mu,\pi,0)\dot\Phi(\mu,\pi,\beta)}{\sin\beta}$$

հավասարությունը, որը, բազմապատկելով $\sin\beta$-ով և բաժանելով $\Phi^2(\mu,\pi,0)$-ով, կգրենք

$$\frac{\sin\beta}{\Phi^2(\mu,\pi,0)}\int_0^\pi y_2^2\,(x,\lambda)dx=-\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\Phi(\mu,\pi,\beta)}{\Phi(\mu,\pi,0)}\right]: \tag{2.18}$$

տեսքով: Քանի որ $\beta\in(0,\pi)$ դեպքում այդ հավասարության ձախ մասը դրական է իրական μ-երի համար ($\mu\neq\mu_k(q,\pi,0)$, $k=0,1,2,\ldots$), ապա այստեղից բխում է, որ $\frac{\Phi(\mu,\pi,\beta)}{\Phi(\mu,\pi,0)}$ մերոմորֆ ֆունկցիան իրական μ-երի դեպքում ($\mu\neq\mu_k$) խիստ նվազող ֆունկցիա է, իսկ քանի որ $\mu_k(q,\pi,0)$-ն և $\mu_{k+1}(q,\pi,0)$-ն բևեռներ են, ապա ((μ_k,μ_{k+1}) միջակայքերում) այն նվազում է $+\infty$-ից մինչև $-\infty$: Հետևաբար այդ բևեռների միջև կա մեկ և միայն մեկ $\tilde\mu$ կետ, որում $\Phi(\mu,\pi,\beta)$-ն դառնում է 0, այսինքն՝ $\mu_k(q,\pi,0)$-ի և $\mu_{k+1}(q,\pi,0)$-ի միջև կա $L(q,\pi,\beta)$ խնդրի ուղիղ մեկ սեփական արժեք, որը մենք կնշանակենք $\tilde\mu=\mu_{k+1}(q,\pi,\beta)$: Եթե մենք ցույց տանք, որ

$$\lim_{\mu\to-\infty}\frac{\Phi(\mu,\pi,\beta)}{\Phi(\mu,\pi,0)}=+\infty \tag{2.19}$$

ապա այդ մերոմորֆ ֆունկցիայի նվազման պատճառով $\big(-\infty,\mu_0(q,\pi,0)\big)$ միջակայքում ևս մեկ անգամ $\Phi(\mu,\pi,\beta)$-ն դառնում է 0: Այդ 0-ն (դա սեփական արժեք է) կնշանակենք $\mu_0(q,\pi,\beta)$-ով: Այս ձևով կապացուցվի $L(q,\pi,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքների բազմության հաշվելիությունը և այն, որ տեղի ունեն

$$\mu_0(q,\pi,\beta)<\mu_0(q,\pi,0)<\cdots<\mu_n(q,\pi,\beta)<\mu_n(q,\pi,0)<\mu_{n+1}(q,\pi,\beta)<\cdots \tag{2.20}$$

անհավասարությունները, այսինքն $L(q,\pi,\beta)$ և $L(q,\pi,0)$ խնդիրների սեփական արժեքների մեկընդմիջությունը:

Որպեսզի ապացուցենք (2.19)-ը, մենք կապացուցենք հետևյալ լեմման՝

Լեմմա 2.4. $t\to\infty$ դեպքում

$$\Phi(-t^2,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{te^{\pi t}}{2}\left[\sin\alpha\sin\beta+O\left(\dfrac{1}{t}\right)\right], & \text{երբ } \alpha,\beta\in(0,\pi),\\ \dfrac{e^{\pi t}}{2}\left[\sin\beta+O\left(\dfrac{1}{t}\right)\right], & \text{երբ } \alpha=\pi,\beta\in(0,\pi),\\ \dfrac{e^{\pi t}}{2}\left[\sin\alpha+O\left(\dfrac{1}{t}\right)\right], & \text{երբ } \alpha=(0,\pi),\beta=0,\\ \dfrac{e^{\pi t}}{2t}\left[1+O\left(\dfrac{1}{t}\right)\right], & \text{երբ } \alpha=\pi,\beta=0:\end{cases}$$

Ապացույց: Քանի որ $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ լուծումների և նրանց $y_1'(x,\lambda)$ և $y_2'(x,\lambda)$ ածանցյալների համար հայտնի են (1.10), (1.11) և (1.14), (1.15) գնահատականները, որոնցից բխում են

$$y_1(\pi,\lambda)=\cos\lambda\pi+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}}{|\lambda|}\right),\qquad y_1'(\pi,\lambda)=-\lambda\sin\lambda\pi+O\left(e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}\right),$$

$$y_2(\pi,\lambda)=\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}}{|\lambda|^2}\right),\qquad y_2'(\pi,\lambda)=\cos\lambda\pi+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}}{|\lambda|}\right),$$

ասիմպտոտիկ բանաձևերը, ապա վերցնելով $\lambda=it$, $\mu=\lambda^2=(it)^2=-t^2$, $\Phi(-t^2,\alpha,\beta)$-ի համար կստանանք

$$\Phi(-t^2,\alpha,\beta)=\left(\cos i\pi t+O\left(\frac{e^{\pi t}}{t}\right)\right)\sin\alpha\cos\beta-\left(\frac{\sin i\pi t}{it}+O\left(\frac{e^{\pi t}}{t^2}\right)\right)\cos\alpha\cos\beta+$$

$$+\left(it\sin i\pi t+O(e^{\pi t})\right)\sin\alpha\sin\beta-\cos i\pi t+O\left(\frac{e^{\pi t}}{t}\right)\cos\alpha\sin\beta,$$

գնահատականը, որից բխում են լեմմա 2.4-ի պնդումները (հաշվի առնելով, որ $\cos i\pi t=\frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{2}$, $\sin i\pi t=\frac{e^{-\pi t}-e^{\pi t}}{2i}$): Լեմման ապացուցված է:

Այստեղից, մասնավորապես, բխում է, որ

$$\lim_{\mu\to-\infty}\frac{\Phi(\mu,\pi,\beta)}{\Phi(\mu,\pi,0)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi(-t^2,\pi,\beta)}{\Phi(-t^2,\pi,0)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\pi t}\left[\sin\beta+O\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{1}{2}\frac{e^{\pi t}}{t}\left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right]}=\lim_{t\to\infty}[t\sin\beta+O(1)]=+\infty,$$

այսինքն՝ ապացուցված է (2.19)-ը և, հետևաբար, (2.20) առնչությունը:

Այժմ դիտարկենք $L(q,\alpha,\beta)$ խնդիրը: $L(q,\pi,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքները

$$\Phi(\mu,\pi,\beta)=-\Psi(\mu,\pi,\beta)=\psi(0,\mu,\beta)=0\tag{2.21}$$

հավասարման լուծումներն են: Ինչպես (2.18)-ը հետևում է լեմմա 2.3-ից, այնպես էլ լեմմա 2.3'-ից ապացուցվում է

Լեմմա 2.5. Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը ($\alpha \in (0, \pi)$ դեպքում)՝

$$-\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\Psi(\mu,\alpha,\beta)}{\Psi(\mu,\pi,\beta)}\right] = \frac{\sin\alpha}{\Psi^2(\mu,\pi,\beta)}\int_0^\pi \psi^2(x,\mu,\beta)\,dx : \tag{2.22}$$

Այստեղից բխում է, որ $\frac{\Psi(\mu,\alpha,\beta)}{\Psi(\mu,\pi,\beta)}$ մերոմորֆ ֆունկցիան խիստ նվազող է

$$\big(-\infty, \mu_0(q,\pi,\beta)\big), \big(\mu_0(q,\pi,\beta), \mu_1(q,\pi,\beta)\big), \dots, \ \big(\mu_k(q,\pi,\beta), \mu_{k+1}(q,\pi,\beta)\big), \dots$$

միջակայքերից յուրաքանչյուրում, ընդ որում նվազում է $+\infty$-ից մինչև $-\infty$, և, հետևաբար, այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում մեկ անգամ դառնում է 0: $\big(\mu_k(q,\pi,\beta), \mu_{k+1}(q,\pi,\beta)\big)$ միջակայքում ընկած 0-ն համարակալենք $k+1$ համարով, այսինքն այն կլինի $\mu_{k+1}(q,\alpha,\beta)$ սեփական արժեքը: Մեզ մնաց ապացուցել, որ $\lim_{\mu\to-\infty}\frac{\Psi(\mu,\alpha,\beta)}{\Psi(\mu,\pi,\beta)} = +\infty$: Իրոք, այս սահմանը, ըստ 2.4 լեմմայի և $\Psi(\mu,\alpha,\beta) = -\Phi(\mu,\alpha,\beta)$ հարաբերության, հավասար է

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi(-t^2,\alpha,\beta)}{\Phi(-t^2,\pi,\beta)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{te^{\pi t}}{2}\left[\sin\alpha\sin\beta + O\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{e^{\pi t}}{2}\left[\sin\beta + O\left(\frac{1}{t}\right)\right]} = \lim_{t\to\infty} t\sin\alpha = +\infty :$$

Այսպիսով կամական $\alpha \in (0,\pi)$ և $\beta \in (0,\pi)$-ի համար տեղի ունեն

$$\begin{gathered}\mu_0(q,\alpha,\beta) < \mu_0(q,\pi,\beta) < \mu_0(q,\pi,0) < \cdots \\ \cdots < \mu_n(q,\alpha,\beta) < \mu_n(q,\pi,\beta) < \mu_n(q,\pi,0) < \cdots\end{gathered} \tag{2.23}$$

անհավասարությունները, որոնք տալիս են $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքների կոռեկտ համարակալումը կամայական $(\alpha,\beta) \in (0,\pi] \times [0,\pi)$ զույգի համար:

Քանի որ $\mu_n = \mu_n(q,\alpha,\beta)$ սեփական արժեքները μ պարամետրի այն արժեքներն են, որոնց համար տեղի ունի

$$\varphi(\pi,\mu,\alpha)\cos\beta + \varphi'(\pi,\mu,\alpha)\sin\beta = 0,$$

հավասարությունը, ապա $\varphi_n(x) \overset{def}{=} \varphi(x,\mu_n(q,\alpha,\beta),\alpha)$, $n = 0,1,2,\dots$, ֆունկցիաները հանդիսանում են սեփական ֆունկցիաներ, μ_n սեփական արժեքին համապատասխանող: Նմանապես, $\psi_n(x) \overset{def}{=} \psi(x,\mu_n(q,\alpha,\beta),\beta)$-ն ևս հանդիսանում է սեփական ֆունկցիա, որը համապատասխանում է μ_n սեփական արժեքին: Քանի որ μ_n սեփական արժեքները բոլորը պարզ են, ապա գոյություն ունեն $c_n = c_n(q,\alpha,\beta)$, $n = 0,1,2,\dots$ հաստատուններ, այնպիսիք որ

$$\varphi_n(x) = c_n\psi_n(x): \tag{2.24}$$

φ_n և ψ_n սեփական ֆունկցիաների L^2 նորմերի քառակուսիները ընդունված է նշանակել a_n և b_n, այսինքն՝

$$a_n = a_n(q,\alpha,\beta) \stackrel{def}{=} \int_0^\pi \varphi_n^2(x)\,dx\,, \tag{2.25}$$

$$b_n = b_n(q,\alpha,\beta) \stackrel{def}{=} \int_0^\pi \psi_n^2(x)\,dx\,: \tag{2.26}$$

a_n և b_n մեծությունները կոչվում են նորմավորող հաստատուններ:

§3. Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրների ընտանիքի սեփական արժեքների ֆունկցիան

Սեփական արժեքների կախվածությունը q-ից բավականին խորը ուսումնասիրված է [12] և [19] աշխատություններում $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ դեպքի համար: Սեփական արժեքների կախվածությունը α և β պարամետրերից հիմնականում ուսումնասիրվում էր հետևյալ եղանակով. եզրային պայմանները բաժանվում էին 4 դեպքերի՝

1. $\sin\alpha \neq 0, \sin\beta \neq 0$, այսինքն $\alpha, \beta \in (0,\pi)$;
2. $\sin\alpha = 0, \sin\beta \neq 0$, այսինքն $\alpha = \pi, \beta \in (0,\pi)$;
3. $\sin\alpha \neq 0, \sin\beta = 0$, այսինքն $\alpha \in (0,\pi), \beta = \pi$;
4. $\sin\alpha = \sin\beta = 0$, այսինքն $\alpha = \pi, \beta = 0$,

և արդյունքները, մասնավորապես սեփական արժեքների ասիմպտոտիկան, ձևակերպվում էին առանձին 4 դեպքերի համար (մանրամասն աղյուսակը բերված է [17]-ում).

$$1)\ \mu_n(q,\alpha,\beta) = n^2 + \frac{2}{\pi}(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n(q,\alpha,\beta), \tag{3.1}$$

եթե $\sin\alpha \neq 0, \sin\beta \neq 0$, այսինքն $\alpha, \beta \in (0,\pi)$,

$$2)\ \mu_n(q,\pi,\beta) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n(q,\beta), \text{եթե } \sin\beta \neq 0, \tag{3.2}$$

$$3)\ \mu_n(q,\alpha,0) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n(q,\alpha), \text{եթե } \sin\alpha \neq 0, \tag{3.3}$$

$$4)\ \mu_n(q,\pi,0) = (n+1)^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n(q), \tag{3.4}$$

որտեղ $r_n = o(1)$, երբ $n \to \infty$, բայց այս գնահատականը հավասարաչափ չէ ըստ $\alpha, \beta \in [0,\pi]$ և (3.1) բանաձևից հնարավոր չէ ստանալ մնացածը՝ $\alpha \to \pi$ կամ $\beta \to 0$ սահմանային անցումներով: Այնինչ, ինչպես ցույց կտրվի ստորև, սեփական արժեքների կախվածությունը α և β պարամետրերից ողորկ է (նույնիսկ անալիտիկ), և մենք ուզում ենք ունենալ մեկ բանաձև չորսի փոխարեն, որը հաշվի կառնի այդ ողորկ կախվածությունը: Այդ նպատակով կապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.1. Ամենափոքր սեփական արժեքը, $\mu_0(q,\alpha,\beta)$-ն, ունի հետևյալ հատկությունը.

$$\lim_{\alpha\to 0}\mu_0(q,\alpha,\beta) = -\infty, \lim_{\beta\to\pi}\mu_0(q,\alpha,\beta) = -\infty: \tag{3.5}$$

$\mu_n(q,\alpha,\beta)$ սեփական արժեքների համար, երբ $n \geq 2$, տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$\mu_n(q,\alpha,\beta) = [n + \delta_n(\alpha,\beta)]^2 + [q] + r_n, \qquad n = 2,3,\dots, \tag{3.6}$$

որտեղ $[q] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\,dx$,

$$\begin{aligned}\delta_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\Bigg[&\arccos\frac{\cos\alpha}{\sqrt{[n+\delta_n(\alpha,\beta)]^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} - \\ &- \arccos\frac{\cos\beta}{\sqrt{[n+\delta_n(\alpha,\beta)]^2\sin^2\beta + \cos^2\beta}}\Bigg],\end{aligned} \tag{3.7}$$

իսկ $r_n = r_n(q,\alpha,\beta) = o(1)$, երբ $n \to \infty$, հավասարաչափ ըստ բոլոր $\alpha,\beta \in [0,\pi]$ և բոլոր q-երի $L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$-ի սահմանափակ ենթաբազմություններից (մենք կգրենք $q \in BL^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$)։ Ավելի ճշգրիտ՝

$$\begin{aligned} r_n(q,\alpha,\beta) &= +\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\cos 2\sqrt{\mu_n(q,\alpha,\beta)}\,x\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right), \text{եթե } \alpha \in (0,\pi), \\ r_n(q,\pi,\beta) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\cos 2\sqrt{\mu_n(q,\pi,\beta)}\,x\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\text{:} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Դիտողություն 3.1. Թեկուզ (3.7)-ը $\delta_n(\alpha,\beta)$-ի համար ներկայացում չէ, այլ միայն հավասարում (տրանսցենդենտ), այն բավականին հարմար է $\delta_n(\alpha,\beta)$ ֆունկցիայի և սեփական արժեքների ասիմպտոտիկայի հետազոտման համար։ Մասնավորապես, (3.1)-(3.4)-ը (3.6) և (3.7) բանաձևերի հետևանքներն են, և (3.6)-ում մենք կարող ենք անցնել սահմանի, երբ $\alpha \to \pi$ կամ $\beta \to 0$։

Թեորեմ 3.1-ը ապացուցելու և սեփական արժեքների կախվածությունը α և β պարամետրերից հետազոտելու համար մենք կներմուծենք Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրների ընտանիքի սեփական արժեքների ֆունկցիայի (Ս.Ա.Ֆ.) գաղափարը։

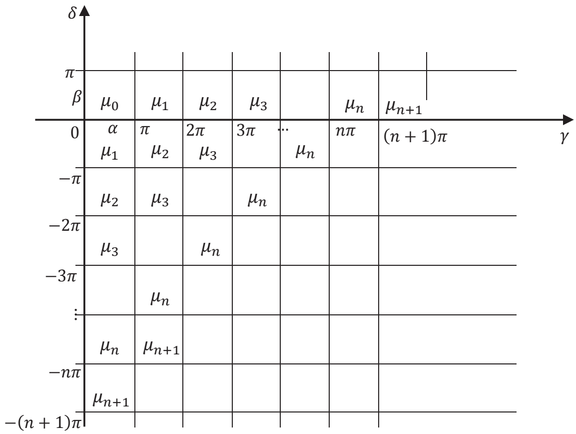
Մինչ այդ, նկատենք, որ կամայական $\gamma \in (0,\infty)$ կարելի է ներկայացնել $\gamma = \alpha + \pi n$ տեսքով, որտեղ $\alpha \in (0,\pi]$, իսկ $n = 0,1,2,\dots$, և կամայական $\delta \in (-\infty,\pi)$ կարելի է ներկայացնել $\delta = \beta - \pi m$ տեսքով, որտեղ $\beta \in [0,\pi)$, իսկ $m = 0,1,2,\dots$։

Սահմանում 3.1. $\mu(\cdot,\cdot)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիան, որոշված $(0,\infty)\times(-\infty,\pi)$ բազմության վրա

$$\mu(\gamma,\delta) = \mu(\alpha+\pi k, \beta - \pi m) = \mu_{k+m}(q,\alpha,\beta), \alpha \in (0,\pi], \beta \in [0,\pi), k,m = 0,1,2,\dots, \tag{3.9}$$

բանաձևով, կանվանենք $\{L(q,\alpha,\beta), \alpha \in (0,\pi], \beta \in [0,\pi)\}$ խնդիրների ընտանիքի Ս.Ա.Ֆ.

Սահմանման իմաստը լավ պատկերացնելու համար տանք նկար, որտեղ Ս.Ա.Ֆ.-ի որոշման տիրույթը բաժանված է քառակուսիների, որոնցից ամեն մեկում Ս.Ա.Ֆ.-ն համընկնում է համապատասխան համար ունեցող սեփական արժեքի հետ։



Ստորև բերվող թեորեմը նկարագրում է Ս.Ա.Ֆ.-ի որոշ հատկությունները:

Թեորեմ 3.2. Ս.Ա.Ֆ.-ն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

ա) Ամեն մի ֆիքսած β-ի համար ($\beta \in [0,\pi)$) $\mu^{+}(\gamma) \overset{def}{=} \mu(\gamma,\beta)$ ֆունկցիան խիստ աճում է (ամբողջ $(0,\infty)$ կիսաառանցքի վրա), և նրա արժեքների տիրույթը ամբողջ իրական առանցքն է: Ամեն մի ֆիքսած α-ի համար ($\alpha \in (0,\pi]$) $\mu^{-}(\delta) \overset{def}{=} \mu(\alpha,\delta)$ ֆունկցիան խիստ նվազում է ($(-\infty,\pi)$ կիսաառանցքի վրա), և նրա արժեքների տիրույթը ամբողջ իրական առանցքն է:

բ) Ամեն մի $(\gamma,\delta) \in (0,\infty) \times (-\infty,\pi)$ կետի համար գոյություն ունի այդ կետի $U_{\gamma,\delta} \subset \mathbb{C}^2$ շրջակայք, որի վրա որոշված է միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա $\tilde{\mu}(\tilde{\gamma},\tilde{\delta})$ ($\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ երկու կոմպլեքս փոփոխականների), որը համընկնում է $\mu(\gamma,\delta)$ Ս.Ա.Ֆ.-ի հետ արգումենտների իրական արժեքների դեպքում: Այլ կերպ ասած՝ $\mu(\gamma,\delta)$ Ս.Ա.Ֆ.-ն իրական անալիտիկ ֆունկցիա է $(0,\infty) \times (-\infty,\pi)$-ում:

գ) Երբ $n \geq 2$ և $\mu_n(q,\alpha,\beta) \geq 0$, տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$\sqrt{\mu_n(q,\alpha,\beta)} = n + \delta(\alpha,\beta) + \frac{[q]}{2[n+\delta_n(\alpha,\beta)]} + \ell_n(q,\alpha,\beta), \tag{3.10}$$

որտեղ մնացորդային անդամ $\ell_n = \ell_n(q,\alpha,\beta) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ հավասարաչափ ըստ բոլոր $\alpha,\beta \in [0,\pi]$ և $q \in BL^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ և, բացի այդ, $\alpha,\beta \in (0,\pi)$ դեպքում $\ell(x) \overset{def}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \ell_n \cdot \sin nx$ ֆունկցիան բացարձակ անընդհատ է $(0,2\pi)$-ում, այսինքն $\ell \in AC[a,b]$ ամեն մի $[a,b]$ հատվածի համար, որն ընկած է $(0,2\pi)$-ում ($[a,b] \subset (0,2\pi)$):

Թեորեմ 3.2-ի ա) և բ) կետերը կապացուցենք այս պարագրաֆում, գ) կետը կապացուցվի §4-ում: Թեորեմ 3.1-ը նույնպես կապացուցվի §4-ում:

Այժմ, Ս.Ա.Ֆ. անալիտիկության (բ) կետը) ապացույցի համար առաջին հերթին նկատենք, որ $\Phi(\mu,\alpha,\beta)$ բնութագրիչ ֆունկցիան կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\Phi(\mu,\gamma_1,\gamma_2) = \varphi(\pi,\mu,\gamma_1)\cos\gamma_2 + \varphi'(\pi,\mu,\gamma_1)\sin\gamma_2,$$

և այն դիտարկել որպես երեք կոմպլեքս փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիա (տես թեորեմ 1.1): Համաձայն լեմմա 2.3-ի, $\Phi(\mu,\gamma_1,\gamma_2)$ բնութագրիչ ֆունկցիայի զրոները պարզ են: Երկրորդ, օգտվենք անբացահայտ ֆունկցիայի մասին թեորեմից, հետևյալ ձևակերպումով (տես [20], էջ 166):

Թեորեմ 3.3 (անբացահայտ ֆունկցիայի մասին): Դիցուք $\gamma\in\mathbb{C}^2$, $\mu\in\mathbb{C}$, $F(\mu,\gamma){:}\, U\to\mathbb{C}$, որտեղ F-ը (μ_0,γ_0) կետի որոշ U շրջակայքում որոշված անալիտիկ ֆունկցիա է, ընդ որում

$$\frac{\partial F}{\partial\mu}(\mu_0,\gamma_0)\neq 0:$$

Այդ դեպքում $F(\mu,\gamma)=F(\mu_0,\gamma_0)$ հավասարումից (μ-ի նկատմամբ) միարժեք որոշվում է $\tilde\mu=\tilde\mu(\gamma){:}\ V\to\mathbb{C}$ ֆունկցիան, որն անալիտիկ է γ_0 կետի որոշ V շրջակայքում և այնպիսին է, որ $F(\tilde\mu(\gamma),\gamma)=F(\mu_0,\gamma_0)$ բոլոր γ-ների համար V-ից:

Որպես $F(\mu,\gamma)$ այժմ վերցնենք $\Phi(\mu)=\Phi(\mu,\gamma_1,\gamma_2)=\varphi(\pi,\mu,\gamma_1)\cos\gamma_2+\varphi'(\pi,\mu,\gamma_1)\sin\gamma_2$ բնութագրիչ ֆունկցիան, որը հանդիսանում է μ, γ_1, γ_2 երեք կոմպլեքս փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիա: Դիցուք γ_1^0-ն կամայական դրական թիվ է, որը մենք կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝ $\gamma_1^0=\alpha+\pi n$, որտեղ $\alpha\in(0,\pi]$, $n=0,1,2,\ldots$ և $\gamma_2^0=\beta-\pi m\in(-\infty,\pi)$, որտեղ $\beta\in[0,\pi)$, $m=0,1,2,\ldots$: Եվ դիցուք $\mu_0=\mu(\gamma_1^0,\gamma_2^0)=\mu(\alpha+\pi n,\beta-\pi m)=\mu_{n+m}(\alpha,\beta)$: Այդ դեպքում,

$$\Phi(\mu_0,\gamma_1^0,\gamma_2^0)=(-1)^{m+n}[\varphi(\pi,\mu_0,\alpha)\cos\beta+\varphi'(\pi,\mu_0,\alpha)\sin\beta]=0:$$

$L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքների պարզությունից հետևում է, որ $\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}(\mu_0,\gamma_1^0,\gamma_2^0)\neq 0$: Այստեղից, համաձայն անբացահայտ ֆունկցիայի մասին թեորեմի, հետևում է, որ գոյություն ունի (γ_1^0,γ_2^0) կետի որևէ V կոմպլեքս շրջակայք, որտեղ միարժեքորեն որոշված է $\tilde\mu(\gamma_1,\gamma_2)$ անալիտիկ ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\tilde\mu(\gamma_1^0,\gamma_2^0)=\mu_0$, $\Phi(\tilde\mu(\gamma),\gamma_1,\gamma_2)=\Phi(\mu_0,\gamma_1^0,\gamma_2^0)=0$, բոլոր $(\gamma_1,\gamma_2)\in V$ համար: Մասնավորապես, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in V$ իրական զույգերի համար $\tilde\mu(\gamma_1,\gamma_2)=\mu(\gamma_1,\gamma_2)$: Քանի որ (γ_1^0,γ_2^0)-ն $(0,\infty)\times(-\infty,\pi)$ բազմության կամայական կետ է, ապա $\mu(\gamma_1,\gamma_2)$ սեփական արժեքների ֆունկցիայի անալիտիկությունը ապացուցված է, այսինքն ապացուցված է թեորեմ 3.2-ի բ) կետը:

Անցնելով ա) կետի ապացույցին, նախ ապացուցենք, որ $\mu^+(\cdot)$ և $\mu^-(\cdot)$ ֆունկցիաների արժեքների տիրույթը ամբողջ իրական առանցքն է: Դրա համար բավական է ապացուցել, որ ցանկացած $\mu_0\in\mathbb{R}$-ի համար գոյություն ունի

$\beta_0 \in [0,\pi)$, այնպիսին, որ $\Phi_{\beta_0}(\mu_0) = \varphi(\pi,\mu_0,\alpha)\cos\beta_0 + \varphi'(\pi,\mu_0,\alpha)\sin\beta_0 = 0$ (նմանապես, բավական է ապացուցել, որ գոյություն ունի $\alpha_0 \in (0,\pi]$, այնպիսին, որ $\Psi_{\alpha_0}(\mu_0) = \psi(0,\mu_0,\beta)\cos\alpha_0 + \psi'(0,\mu_0,\beta)\sin\alpha_0 = 0$): Իրոք, եթե $\varphi(\pi,\mu_0,\alpha) = 0$, կվերցնենք $\beta_0 = 0$, իսկ եթե $\varphi(\pi,\mu_0,\alpha) \neq 0$, ապա կվերցնենք $\operatorname{ctg}\beta_0 = -\frac{\varphi'(\pi,\mu_0,\alpha)}{\varphi(\pi,\mu_0,\alpha)}$ (ավելի ճիշտ, կվերցնենք $\beta_0 = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\varphi'(\pi,\mu_0,\alpha)}{\varphi(\pi,\mu_0,\alpha)}\right)$): μ^+-ի դեպքը ապացուցվում է նման ձևով:

Անցնենք $\mu^+(\cdot)$-ի աճման և $\mu^-(\cdot)$-ի նվազման ապացույցին:

Լեմմա 3.1. Տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\left.\frac{\partial\mu(\gamma,\beta)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha+\pi n} = \frac{1}{a_n(q,\alpha,\beta)} \tag{3.21}$$

$$\left.\frac{\partial\mu(\alpha,\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=\beta-\pi n} = -\frac{1}{b_n(q,\alpha,\beta)}: \tag{3.22}$$

Ապացույց: Ըստ $\varphi(x,\mu,\gamma)$ լուծման և $\mu(\cdot,\cdot)$ Ս.Ա.Ֆ.-ի սահմանման, $\varphi(x,\mu(\gamma,\beta),\gamma)$, $\gamma \in (0,\infty)$, ֆունկցիան հանդիսանում է $\mu(\gamma,\beta) = \mu(\alpha+\pi n,\beta) = \mu_n(\alpha,\beta)$ սեփական արժեքի համապատասխան սեփական ֆունկցիա: Այսպիսով, տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները[1] (կարճության համար կգրենք $\varphi(x,\mu(\gamma,\beta),\gamma) = \varphi(x,\gamma)$).

$$-\varphi''(x,\gamma) + q(x)\varphi(x,\gamma) \equiv \mu(\gamma,\beta)\varphi(x,\gamma),$$

$$-\varphi''(x,\gamma+\Delta\gamma) + q(x)\varphi(x,\gamma+\Delta\gamma) \equiv \mu(\gamma+\Delta\gamma,\beta)\varphi(x,\gamma+\Delta\gamma):$$

Բազմապատկելով առաջին նույնությունը $\varphi(x,\gamma+\Delta\gamma)$-ով, իսկ երկրորդը՝ $\varphi(x,\gamma)$-ով, և երկրորդից հանելով առաջինը, ստանում ենք հետևյալ նույնությունը.

$$\frac{d}{dx}[\varphi'(x,\gamma)\varphi(x,\gamma+\Delta\gamma) - \varphi'(x,\gamma+\Delta\gamma)\varphi(x,\gamma)] \equiv$$

$$\equiv [\mu(\gamma+\Delta\gamma,\beta) - \mu(\gamma,\beta)]\varphi(x,\gamma)\varphi(x,\gamma+\Delta\gamma):$$

Ինտեգրելով վերջին նույնությունը ըստ x-ի 0-ից π և հաշվի առնելով, որ $\varphi(0,\mu,\gamma) = \sin\gamma$, $\varphi'(0,\mu,\gamma) = -\cos\gamma$ բոլոր կոմպլեքս μ-երի համար, իսկ $\varphi(x,\gamma) = \varphi(x,\mu(\gamma,\beta),\gamma)$ սեփական ֆունկցիան բավարարում է $\varphi(\pi,\gamma)\cos\beta + \varphi'(\pi,\gamma)\sin\beta = 0$ եզրային պայմանին (բոլոր իրական γ-երի համար), ստանում ենք՝

$$\sin\Delta\gamma \equiv [\mu(\gamma+\Delta\gamma,\beta) - \mu(\gamma,\beta)]\int_0^\pi \varphi(x,\gamma)\,\varphi(x,\gamma+\Delta\gamma)\,dx:$$

Բաժանելով $\Delta\gamma$-ի վրա և $\Delta\gamma$ ձգտեցնելով 0-ի, կստանանք՝

$$1 = \frac{\partial\mu(\gamma,\beta)}{\partial\gamma}\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu(\gamma,\beta),\gamma)\,dx \tag{3.23}$$

[1] Նույնություն ասելով այստեղ հասկանում ենք, որ հավասարությունը տեղի ունի համարյա ամենուրեք $[0,\pi]$-ում:

և, մասնավորապես, երբ $\gamma = \alpha + \pi n$, ստանում ենք (3.21) հավասարությունը: Նման դատողություններով $\psi(x, \mu, \delta)$ լուծման համար ստանում ենք հետևյալ հավասարությունը՝

$$-1 = \frac{\partial \mu(\alpha, \delta)}{\partial \delta} \int_0^\pi \psi^2(x, \mu(\alpha, \delta), \delta)\, dx, \tag{3.24}$$

որտեղից, երբ $\delta = \beta - \pi n$, ստանում ենք (3.22) հավասարությունը: Լեմմա 3.1-ը ապացուցված է:

Քանի որ $\mu(\gamma, \delta)$ սեփական արժեքների ֆունկցիայի արժեքները իրական են, բոլոր $\gamma \in (0, \infty)$ և $\delta \in (-\infty, \pi)$ համար, իսկ իրական μ, γ, δ-ի համար $\varphi(x, \mu, \gamma)$ և $\psi(x, \mu, \delta)$ լուծումները իրական են և այդ լուծումները տարբերվում են նույնաբար 0-ից (դա հետևում է (2.4) և (2.5) սկզբնական պայմաններից, որոնց բավարարում են φ-ին և ψ-ին), ապա (3.23) –ում և (3.24)-ում մասնակցող ինտեգրալները դրական են, որտեղից հետևում է $\frac{\partial \mu(\gamma, \beta)}{\partial \gamma}$ ածանցյալի դրական լինելը և $\frac{\partial \mu(\alpha, \delta)}{\partial \delta}$ ածանցյալի բացասական լինելը:

Այսպիսով, թեորեմ 3.2-ի ա) և բ) կետերը լրիվ ապացուցված են:

Գրականություն

1. Риман Б. О представлении функции тригонометрическим рядом. Сочинения. Гостехиздат, М.-Л., 1948, стр.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М., 1969.
3. Ambartzumian V.A. Ueber eine Frage der Eigenvert theorie. Z. Physik, 53, 1929, pp. 690-695.
4. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. Из-во “Мир”, Москва.
5. Gardner G., Green J., Kruskal M., Miura R. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Letters, v.19, N 19, 1967, 1095-1097.
6. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: 1953, т.1; М.: 1954, т.2.
7. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Изд-во И.Л., 1951.
8. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям…, т. М., Изд-во И.Л.,1961.
9. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Москва, Изд-во “Мир”, 1968.
10. Левитан Б.М. Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. Москва, 1988.
11. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их Приложения. Киев, 1977.
12. Pöschel J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. Academic Press, 1987.
13. Zettle A. Sturm-Liouville Theory. 2005.
14. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. Физматлит, 2007.
15. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.
16. Чудов Л.А. Обратная задача Штурма-Лиувилля, Мат. сб., том 25 (67), N 3, стр. 451-454, 1949.
17. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды ММО, том I, стр. 327-420, 1952.
18. Ղազարյան Հ., Հովհաննիսյան Ա., Հարությունյան Տ., Կարապետյան Գ. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ. 2002.
19. Isaacson E., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem I, Comm. Pure Appl. Math. 1983. v.36. p. 767-783.
20. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Из-во Ленинградского ун-та, 1981.
21. Liouville J. Sur le de’velopment des fonctions ou parties de fonctions en se’ries dont les divers termes sont assuje’tis ‘a satisfaire ‘a une même e’quation diffe’rentielle du second ordre, contenant un parame‘tre variable. Journal de math. Pur. et appl. I (1836), P. 253-265; II (1837), P. 16-35, 418-436.

22. Hobson E.W. On a general convergence theorem and theory of the representation of a function by series of normal functions. Proc. of the London Math. Soc. (2). 1908, V. 6. P. 349-395.
23. Kneser A. Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Math. Ann. 1904. V. 58. P. 81-147.
24. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.
25. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 1. М., 1986.

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՇՏՈՒՐՄ-ԼԻՈՒՎԻԼԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

ՄԱՍ I

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Շապիկի ձևավորումը՝ Ա. Ստեփանյանի

Չափսը՝ 60x84 1/16: Ծավալը՝ 2.75 տպ. մամուլ:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Տպաքանակ՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, Ալեք Մանուկյան 1