ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գայանե Ղազարյան

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

Խնդիրների լուծման ուղեցույց և տիպային խնդիրների ընտրանի

(ուսումնամեթոդական ձեռնարկ)

Երևան
ԵՊՀ հրատարակչություն
2015

ՀՏԴ 514.12:512.64(07)
ԳՄԴ 22.151+22.143g7
Ղ 158

Հրատարակության է երաշխավորվել
ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից

Գ. Գ. Ղազարյան
Ղ 158 Վերլուծական երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ/Խնդիրների լուծման ուղեցույց և տիպային խնդիրների ընտրանի (ուսումնամեթոդական ձեռնարկ)/Գ. Գ. Ղազարյան: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2015, 202 էջ:

Ձեռնարկը համապատասխանում է ԵՊՀ ֆիզիկայի և ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետների բակալավրիատի «Վերլուծական երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ» առարկայի ուսումնական ծրագրին: Այն ներառում է առարկայի տարբեր բաժիններ, որոնցից յուրաքանչյուրի սկզբնամասում համառոտ շարադրված է տեսական նյութը, բերված են գրեթե բոլոր թեմաներին վերաբերող օրինակներ իրենց լուծումներով ու մանրամասն բացատրություններով, իսկ վերջում ձևակերպված են տվյալ բաժնի վերաբերյալ մեծ թվով տիպային խնդիրներ: Այս առումով ձեռնարկը կարող է ծառայել նաև որպես խնդրագիրք և օգտակար լինել ոչ միայն առկա, այլ նաև հեռակա ուսուցման կրթական ծրագրով սովորող ուսանողների, ինչպես նաև ԲՈՒՀ-երի՝ վերոհիշյալ առարկան ուսումնասիրող բնագիտական այլ ֆակուլտետների ուսանողների համար:

ՀՏԴ 514.12:512.64(07)
ԳՄԴ 22.151+22.143g7

ISBN 978-5-8084-2007-6

© ԵՊՀ հրատ., 2015
© Գ. Գ. Ղազարյան, 2015

Առաջաբան

Սույն ձեռնարկը գրվել է Ֆիզիկայի ֆակուլտետի առաջին կուրսի ուսանողներին «Վերլուծական երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ» առարկայի դասավանդման տարիների փորձի հիման վրա և նպատակ ունի գոյություն ունեցող ժամանակի սակավության պայմաններում առավելագույնս արդյունավետ օգտագործել առարկային հատկացված ինչպես դասախոսությունների, այնպես էլ գործնական պարապմունքների ակադեմիական ժամաքանակը: Այն ուղեցույց-խնդրագիրք է, որը համապատասխանում է ԵՊՀ ֆիզիկայի և ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետների բակալավրիատի նշված առարկայի ուսումնական ծրագրին և նախատեսված է վերոհիշյալ առարկան ուսումնասիրող բնագիտական ֆակուլտետների առկա և հեռակա ուսուցման կրթական ծրագրով սովորող ուսանողների, ինչպես նաև տարբեր մակարդակի մաթեմատիկական պատրաստվածություն ունեցող այլ մասնագետների համար:

Ձեռնարկը կազմված է ինը բաժիններից, որոնցից յուրաքանչյուրի սկզբնամասում շարադրված է տեսական նյութը՝ հիմնականում առանց ապացույցների: Այնուհետև լուծված են մեծ թվով տարբեր բարդությունների օրինակներ, որոնք ավելի հասկանալի են դարձնում ձևակերպված սահմանումները, պնդումներն ու թեորեմները և սովորեցնում են, թե ինչպես կարելի է տեսական գիտելիքները օգտագործել պրակտիկ խնդիրների լուծման մեջ: Յուրաքանչյուր բաժնի վերջում ձևակերպված են տիպային խնդիրներ ինքնուրույն լուծման համար, որոնց որոշ մասի պատասխանները և լուծման հնարավոր եղանակները տրված են ձեռնարկի վերջում:

Ձեռնարկը գրելիս օգտագործվել են տարբեր ժամանակներում հրատարակված մեթոդական ձեռնարկների, ինչպես նաև գոյություն ունեցող գրքերի և դասագրքերի նյութերը (առանց առանձնահատուկ հղումներ կատարելու):

Հեղինակը շնորհակալություն է հայտնում ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ, պրոֆեսոր Ռ. Մ. Ավագյանին և ֆիզմաթ. գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Մ. Գ. Գրիգորյանին արժեքավոր դիտողությունների և ձեռնարկի հրատարակմանն աջակցելու համար:

Թեմա 1: Վեկտորական հանրահաշիվ

Վեկտորներ, գծային գործողություններ վեկտորների հետ: Բազիս և վեկտորի կոորդինատներ, աֆիննական կոորդինատական համակարգ և կետի աֆիննական կոորդինատներ: Վեկտորների սկալյար արտադրյալ, վեկտորների վեկտորական և խառը արտադրյալներ, կրկնակի վեկտորական արտադրյալ

Սահմանում: Ուղղորդված հատվածը (կամ որ նույնն է՝ կետերի կարգավորված զույգը) անվանում են *վեկտոր:*

Վեկտորը նշանակում են կա'մ $\overrightarrow{AB}$ սիմվոլով, որտեղ A-ն և B-ն համապատասխանաբար նրա սկզբնակետն ու ծայրակետն են, կա'մ մեկ մուգ լատիներեն տառով, ասենք՝ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$: Վեկտորի սկզբնակետն անվանում են նրա *կիրառման կետ*: Վեկտորի սկզբնակետի և ծայրակետի միջև եղած հեռավորությունն անվանում են *վեկտորի երկարություն (մոդուլ կամ բացարձակ մեծություն):* Վեկտորի երկարությունը նշանակում են $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ կամ $|\boldsymbol{a}|$ սիմվոլներով:

Վեկտորը, որի սկզբնակետն ու ծայրակետը համընկնում են, անվանում են *զրոյական վեկտոր* $\boldsymbol{0}$:

Սահմանում: Վեկտորներն անվանում են *համագիծ (կոլինեար)*, եթե նրանք գտնվում են միևնույն ուղղի կամ զուգահեռ ուղիղների վրա:

Սահմանում: Վեկտորներն անվանում են *համահարթ (կոմպլանար),* եթե նրանք գտնվում են միևնույն հարթության կամ զուգահեռ հարթությունների վրա:

Սահմանում: Երկու վեկտորներն անվանում են *հավասար*, եթե նրանք համագիծ են, ունեն միևնույն ուղղությունը (այսինքն՝ համուղղված են) և ունեն հավասար երկարություններ:

Սահմանում: Տրված $\boldsymbol{a}$ վեկտորի ուղղությամբ ուղղված և միավոր երկարություն ունեցող ($|\boldsymbol{a}| = 1$) վեկտորն անվանում են $\boldsymbol{a}$ վեկտորի օրթ և նշանակում են $\boldsymbol{a}^0$ սիմվոլով:

Սահմանում: $\boldsymbol{a}$ *և* $\boldsymbol{b}$ *վեկտորների գումար* կոչվում է այն $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\boldsymbol{a}$ վեկտորի սկզբնակետից դեպի $\boldsymbol{b}$ վեկտորի ծայրակետը, երբ $\boldsymbol{b}$ վեկտորը կիրառված է $\boldsymbol{a}$ վեկտորի ծայրակետի վրա:

Նկ. 1.1.

Նկ. 1.2.

Գործողությունը, որը $\boldsymbol{a}$ *և* $\boldsymbol{b}$ վեկտորներին համապատասխանեցնում է նրանց $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ գումարը, անվանում են *վեկտորների գումարում*: Վեկտորների գումարման վերոհիշյալ կանոնն անվանում են *եռանկյան կանոն* (նկ 1.1.): Վեկտորները գումարվում են նաև *զուգահեռագծի կանոնով* (տե՛ս նկ. 1.2.):

Սահմանում: α *իրական թվի և* $\boldsymbol{a}$ *վեկտորի արտադրյալ* կոչվում է այն $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}$ վեկտորը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) $|\boldsymbol{b}|=|\alpha||\boldsymbol{a}|$,

2) $\boldsymbol{b}$ վեկտորը համագիծ է $\boldsymbol{a}$ վեկտորին,

3) $\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{a}$ վեկտորները համուղղված են, եթե $\alpha>0$, և հակադիր են ուղղված, եթե $\alpha<0$: (Եթե $\alpha=0$, ապա 1) պայմանից հետևում է, որ $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$):

Սահմանում: $\boldsymbol{a}$ *և* $\boldsymbol{b}$ *վեկտորների տարբերություն* կոչվում է $\boldsymbol{a}$ -ի և $\boldsymbol{b}$ վեկտորի հակադիր $-\boldsymbol{b}$ վեկտորի գումարը՝ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$:

Վեկտորների գումարումն ու թվով բազմապատկումը օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1^0. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ *(գումարման տեղափոխական հատկություն),*

2^0. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ *(գումարման զուգորդական հատկություն),*

3^0. *Գոյություն ունի* $\boldsymbol{O}$ *զրոյական վեկտոր այնպիսին, որ ցանկացած* $\boldsymbol{a}$ *վեկտորի համար* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{a}$ *(զրոյական վեկտորի առանձնահատկությունը),*

4^0. *Յանկացած* $\boldsymbol{a}$ *վեկտորի համար* $\boldsymbol{a}'=(-1)\cdot\boldsymbol{a}$ *վեկտորը նրան հակադիր է, այսինքն՝* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{O}$ *(հակադիր վեկտորի գոյության հատկություն) :* $\boldsymbol{a}$ վեկտորի հակադիր վեկտորը նշանակում են $-\boldsymbol{a}$:

5^0. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ *(թվային արտադրիչի բաշխական հատկություն վեկտորների գումարման նկատմամբ),*

6^0. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$ *(վեկտորական արտադրիչի բաշխական հատկություն թվերի գումարման նկատմամբ),*

7^0. $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$ *(թվային արտադրիչների զուգորդական հատկություն),*

8^0. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ *(1 թվի հետ վեկտորի բազմապատկման հատկություն)*:

Վեկտորների գումարումը, հանումը և թվով բազմապատկումը անվանում են *գծային գործողություններ վեկտորների հետ:*

Սահմանում: Երեք ոչ համահարթ վեկտորներ՝ վերցրած որոշակի հերթականությամբ, անվանում են *բազիս տարածության մեջ,* երկու ոչ համագիծ վեկտորներ՝ վերցրած որոշակի հերթականությամբ, անվանում են *բազիս հարթության վրա* և ուղղին պատկանող ցանկացած ոչ զրոյական վեկտոր անվանում են *բազիս այդ ուղղի վրա:*

Սահմանում: Եթե $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ վեկտորները բազիս են տարածության մեջ, և $\boldsymbol{a}$ վեկտորն արտահայտվում է նրանց գծային կոմբինացիայի միջոցով՝

$$\boldsymbol{a}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\alpha_3\boldsymbol{e}_3\,,$$

ապա ասում են, որ $\boldsymbol{a}$ *-ն վերլուծված է ըստ* $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ *բազիսի* և այդ բազիսում ունի $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ *կոորդինատներ (կամ բաղադրիչներ):*

Նույն ձևով սահմանվում են վեկտորի կոորդինատները հարթության և ուղղի վրա:

Սահմանում: Տարածության մեջ կետի և բազիսի համախումբը կոչվում է *աֆիններական կոորդինատական համակարգ:* Կետը կոչվում է *կոորդինատների սկզբնակետ*, կոորդինատների սկզբնակետով անցնող, և

բազիսային վեկտորների ուղղությամբ ուղղված առանցքները՝ *կոորդինատային առանցքներ:*

Դիցուք՝ տարածության մեջ ընտրված են O կետը և $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ բազիսը:

Սահմանում: M կետի աֆիննական կոորդինատներ կոչվում են $\overrightarrow{OM}$ վեկտորի կոորդինատները $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ բազիսում:

Նման ձևով սահմանվում են *աֆիննական կոորդինատական համակարգեր և կետի աֆիննական կոորդինատներ հարթության և ուղղի վրա:* Հասկանալի է, որ հարթությանը պատկանող կետն ունի միայն երկու կոորդինատ, իսկ ուղղին պատկանողը՝ միայն մեկ:

Ցանկացած աֆիննական կոորդինատական համակարգում

1. հավասար վեկտորներն ունեն հավասար կոորդինատներ,
2. վեկտորների հետ գծային գործողությունները բերվում են նրանց կոորդինատների հետ նույն գործողությունների կատարմանը. գումարելիս համապատասխան կոորդինատները գումարվում են, թվով բազմապատկելիս՝ բազմապատկվում են այդ նույն թվով,
3. համագիծ վեկտորների կոորդինատները համեմատական են,
4. վեկտորի կոորդինատները հավասար են նրա ծայրակետի և սկզբնակետի համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը,
5. Եթե M կետը $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերը միացնող հատվածը բաժանում է λ/μ (λ>0, μ>0) հարաբերությամբ, ապա M կետի x, y, z կոորդինատները որոշվում են հետևյալ կերպ՝

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}, \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}, \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}: \qquad (1.1)$$

Սահմանում: *Բազիսը* կոչվում է *օրթոնորմավորված* (օրթոգոնալ և նորմավորված), եթե նրա վեկտորները զույգ առ զույգ ուղղահայաց են (օրթոգոնալ են) և ունեն միավոր երկարություն:

Սահմանում: Աֆիննական կոորդինատական համակարգը, որի բազիսը օրթոնորմավորված է, կոչվում է *ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգ:*

Ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում բազիսային վեկտորները կնշանակենք համապատասխանաբար $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$

տառերով: Դիցուք՝ $\boldsymbol{d}$ -ն ցանկացած վեկտոր է, որը $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ օրթոնորմավորված բազիսում ունի համապատասխանաբար x, y, z կոորդինատներ, այսինքն՝

$$\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}:$$

x, y, z թվերն անվանում են $\boldsymbol{d}$ *վեկտորի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներ*: Ընդունված է հետևյալ նշանակումը՝ $\boldsymbol{d} = \{x, y, z\}$:

Եթե M –ը տարածության ցանկացած կետ է, իսկ O–ն կոորդինատների սկզբնակետը, ապա, ըստ սահմանման, M *կետի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատները* $\overrightarrow{OM}$ վեկտորի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներն են: M կետի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատները նշանակում են հետևյալ կերպ՝ $M(x, y, z)$:

Նույն ձևով սահմանվում են վեկտորի և կետի *ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատները հարթության վրա:*

Դիցուք՝ u -ն որևէ առանցք է, իսկ $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ –ն՝ որևէ վեկտոր: Նշանակենք A' և B'-ով համապատասխանաբար A և B կետերի պրոյեկցիաները u առանցքի վրա:

Սահմանում: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ *վեկտորի պրոյեկցիա* u *առանցքի վրա* կոչվում է u առանցքի $\overrightarrow{A'B'}$ *ուղղորդված հատվածի մեծությունը,* այն է՝ $\overrightarrow{A'B'}$-ի երկարությունը դրական նշանով, եթե այն ուղղված է u առանցքի ուղղությամբ, և բացասական նշանով, եթե այն հակառակ է ուղղված u առանցքին:

u առանցքի վրա $\boldsymbol{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան նշանակում են հետևյալ կերպ՝ $\text{պր}_u \boldsymbol{a}$:

Պնդում 1: Դիցուք՝ φ -ն u առանցքի նկատմամբ $\boldsymbol{a}$ վեկտորի թեքման անկյունն է: u առանցքի վրա $\boldsymbol{a}$ վեկտորի պրոյեկցիայի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\text{պր}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi:$$

Պնդում 2: $\boldsymbol{d}$ վեկտորի x, y, z ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատները հավասար են կոորդինատային առանցքների վրա նրա պրոյեկցիաներին:

Երկու վեկտորների կազմած անկյուն ասելով հասկանում ենք նրանց ուղղություններով կազմված անկյուններից այն, որը չի գերազանցում π-ն:

Սահմանում: Երկու ***վեկտորների սկալյար արտադրյալ*** կոչվում է այն թիվը, որը հավասար է այդ վեկտորների երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալին:

$\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը կնշանակենք $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ սիմվոլով: Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը φ է, ապա ըստ սահմանման՝ կունենանք՝

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi: \qquad (1.2)$$

Օգտվելով $\boldsymbol{a}$ վեկտորով որոշվող առանցքի վրա $\boldsymbol{b}$ վեկտորի պրոյեկցիայի գաղափարից՝ կարող ենք գրել՝

$$\text{պր}_{\text{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos\varphi,$$

և հետևաբար (1.2)-ը կարող ենք արտագրել հետևյալ կերպ՝

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\ \text{պր}_{\text{a}}\boldsymbol{b}: \qquad (1.2)'$$

Նույն դատողություններով՝

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\ \text{պր}_{\text{b}}\boldsymbol{a}: \qquad (1.2)''$$

(1.2)' և (1.2)'' հավասարությունները կարելի է ընդունել որպես ***սկալյար արտադրյալի երկրորդ սահմանում:***

Սկալյար արտադրյալի գաղափարը ծագել է մեխանիկայում. եթե $\boldsymbol{a}$ վեկտորը ուժ է, որի կիրառման կետը տեղափոխվում է $\boldsymbol{b}$ վեկտորի սկզբնակետից դեպի ծայրակետը, և որը $\boldsymbol{b}$ վեկտորի հետ կազմում է φ անկյուն, ապա այդ ուժի կատարած ω աշխատանքը որոշվում է

$$\omega = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

հավասարությունով, այսինքն՝ հավասար է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալին:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալի հատկությունները՝

1^0. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ *-տեղափոխական հատկություն,*

2^0. $(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ *-զուգորդական հատկություն թվային արտադրիչի նկատմամբ,*

3^0. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ *-բաշխական հատկություն վեկտորների գումարման նկատմամբ,*

4^0. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}|^2>0$, *եթե* $\boldsymbol{a}$ *–ն ոչ զրոյական վեկտոր է, և* $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}|^2=0$, *եթե* $\boldsymbol{a}$ *–ն զրոյական վեկտոր է:*

Թեորեմ 1.1: Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում ունեն համապատասխանաբար x_1, y_1, z_1 և x_2, y_2, z_2 կոորդինատներ, ապա

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2: \tag{1.3}$$

Հետևանք 1: ա) Ցանկացած $\boldsymbol{a}$ վեկտորի երկարությունը նրա x, y, z ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}: \tag{1.4}$$

բ) Ցանկացած A և B կետերի միջև եղած հեռավորությունը նրանց (x_1, y_1, z_1) և (x_2, y_2, z_2) ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}: \tag{1.5}$$

Հետևանք 2: Ցանկացած երկու՝ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած φ անկյունը նրանց x_1, y_1, z_1 և x_2, y_2, z_2 ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}: \tag{1.6}$$

Հետևանք 3: Ցանկացած $\boldsymbol{a}$ վեկտորի $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *ուղղորդ կոսինուսների (կոորդինատային առանցքների հետ կազմած անկյունների կոսինուսների)* համար տեղի ունի՝

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1: \tag{1.7}$$

Հետևանք 4: Ցանկացած $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$ վեկտորի պրոյեկցիան որևէ $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա որոշվում է

$$\text{պր}_{\text{u}}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}^0) \tag{1.8}$$

բանաձևով, որտեղ $\boldsymbol{u}^0$ -ն $\boldsymbol{u}$ առանցքի օրթն է:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած վեկտորի օրթի կոորդինատները հավասար են այդ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներին՝

$$\boldsymbol{u}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\},$$

հետևաբար վերջին բանաձևը կարելի է արտագրել հետևյալ կերպ՝

$$\text{պր}_{\text{u}}\boldsymbol{a} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma : \qquad (1.8)'$$

Սահմանում: $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալ կոչվում է այն $\boldsymbol{c}$ վեկտորը (նշանակում են $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$), որը բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին՝

1. $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, որտեղ φ–ն $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է:
2. $\boldsymbol{c}$ վեկտորն օրթոգոնալ է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրին:
3. $\boldsymbol{c}$ վեկտորն ուղղված է այնպես, որ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ եռյակն աջ է (երրորդ վեկտորի ծայրակետից նայելիս առաջինից երկրորդին անցման ամենակարճ պտույտը երևում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ):

Վեկտորական արտադրյալի գաղափարը ծագել է մեխանիկայում: Այսպես՝ եթե $\boldsymbol{b}$ վեկտորը M կետում կիրառված ուժ է, իսկ $\boldsymbol{a}$ վեկտորն ուղղված է որևէ O կետից դեպի M -ը, ապա $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորը $\boldsymbol{b}$ ուժի մոմենտն է O կետի նկատմամբ:

Վեկտորական արտադրյալի հատկությունները:

1^0. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}]$ (արտադրիչների հակատեղափոխական հատկություն),

2^0. $[\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (զուգորդական հատկություն թվային արտադրիչի նկատմամբ),

3^0. $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ (բաշխական հատկություն վեկտորների գումարման նկատմամբ),

4^0. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{O}$ ցանկացած $\boldsymbol{a}$ վեկտորի համար,

5^0. Որպեսզի երկու վեկտորները լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց վեկտորական արտադրյալը հավասար լինի զրոյական վեկտորի:

6^0. $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալի մոդուլը թվապես հավասար է միևնույն սկզբնակետի բերված արտադրիչների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսին:

7^0. Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում ունեն համապատասխանաբար $\{x_1,y_1,z_1\},\{x_2,y_2,z_2\}$ կոորդինատներ, ապա $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալը արտադրիչների կոորդինատների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{(y_1z_2-y_2z_1);-(x_1z_2-x_2z_1);(x_1y_2-x_2y_1)\}$$

կամ որ նույնն է՝

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}: \qquad (1.9)$$

Սահմանում: $(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])$ թիվը ($\boldsymbol{a}$ վեկտորը սկալյարապես բազմապատկված է $\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալով) անվանում են $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ ***վեկտորների խառը արտադրյալ*** և նշանակում են հետևյալ սիմվոլով՝ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$:

Վեկտորների ***խառը արտադրյալի հատկությունները:***

1^0. Երկրաչափորեն $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ ոչ համահարթ վեկտորների խառը արտադրյալը հավասար է միևնույն սկզբնակետի բերված արտադրիչների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալին դրական նշանով, երբ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ եռյակն աջ է, և բացասական նշանով, երբ այն ձախ է:

2^0. Երեք վեկտորների խառը արտադրյալը հավասար է զրոյի այն և միայն այն ժամանակ, երբ արտադրիչները համահարթ են:

3^0. Ցանկացած $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորների համար

$$(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])=([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) \text{ և } (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=$$
$$=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}):$$

4^0. Եթե $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորները ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում ունեն $\{x_1, y_1, z_1\}$, $\{x_2, y_2, z_2\}$ և $\{x_3, y_3, z_3\}$ կոորդինատներ, ապա

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}: \tag{1.10}$$

Դիցուք՝ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$-ն ցանկացած երեք վեկտորներ են: $[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]]$ վեկտորն ($\boldsymbol{a}$ վեկտորը վեկտորապես բազմապատկված է $\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալով) անվանում **են** $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ **և** $\boldsymbol{c}$ ***վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ:***

Թեորեմ 1.2: Ցանկացած $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորների համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}): \tag{1.11}$$

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 1.1: Հաշվել $\boldsymbol{a}=\{6;3;-2\}$ վեկտորի մոդուլը:

Լուծում: Վեկտորի կոորդինատները տրված են ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում, հետևաբար նրա երկարությունը կհաշվենք՝ օգտվելով (1.4) բանաձևից՝

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=7:\blacksquare$$

Խնդիր 1.2: Որոշել $\boldsymbol{a}=\{2;-3;-1\}$ վեկտորի սկզբնակետի կոորդինատները, եթե նրա ծայրակետը համընկնում է $(1;-1;2)$ կետի հետ:

Լուծում: Նշանակենք $A(x;y;z)$-ով $\boldsymbol{a}$ վեկտորի սկզբնակետը: Վեկտորի կոորդինատները հավասար են նրա ծայրակետի և սկզբնակետի կոորդինատների տարբերությանը, հետևաբար՝

$1-x=2;\ -1-y=-3;\ 2-z=-1$, որտեղից՝ $x=-1;\ y=2;\ z=3:\blacksquare$

Խնդիր 1.3: Որոշել $\boldsymbol{a}=\{12;-15;-16\}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:

Լուծում: Քանի որ ցանկացած $\boldsymbol{d}$ վեկտորի $\{x;y;z\}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատները հավասար են կոորդինատային առանցքների վրա նրա պրոյեկցիաներին (*պնդում 2*)՝

$$x=|\boldsymbol{d}|\cos\alpha;\quad y=|\boldsymbol{d}|\cos\beta;\quad z=|\boldsymbol{d}|\cos\gamma,$$

հետևաբար՝

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{d}|};\ \cos\beta=\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{d}|};\ \cos\gamma=\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{d}|}:$$

Մեր դեպքում՝ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}=25$, հետևաբար՝

$$\cos\alpha=\frac{12}{25};\ \cos\beta=-\frac{3}{5};\ \cos\gamma=-\frac{16}{25}:\blacksquare$$

Խնդիր 1.4: Տրված են $\boldsymbol{a}=\{3;-2;6\}$ և $\boldsymbol{b}=\{-2;1;0\}$ վեկտորները: Որոշել $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ վեկտորի կոորդինատները:

Լուծում: Քանի որ ցանկացած աֆիննական կոորդինատական համակարգում (մեր դեպքում՝ ուղղանկյուն դեկարտյան) վեկտորները

գումարելիս համապատասխան կոորդինատները գումարվում են, թվով բազմապատկելիս՝ բազմապատկվում են այդ նույն թվով, ապա
$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\{(2\cdot 3+3\cdot(-2));(2\cdot(-2)+3\cdot 1);(2\cdot 6+3\cdot 0)\}==\{0;-1;12\}$:■

Խնդիր 1.5: Տրված են $A(-1,5,-10), B(5,-7,8), C(2,2,-7)$ և $D(5,-4,2)$ չորս կետերը: Ստուգել, որ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները համագիծ են, պարզել, թե դրանցից ո՞րն է ավելի երկար և քանի՞ անգամ, համուղղվա՞ծ են, թե՞ հակուղղված:

Լուծում: Նախ գտնենք $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորների կոորդինատները՝ ծայրակետի կոորդինատներից հանելով սկզբնակետի կոորդինատները: Կստանանք՝

$$\overrightarrow{AB}=\{6,-12,18\} \text{ և } \overrightarrow{CD}=\{3,-6,9\}:$$

Ցանկացած աֆիննական կոորդինատական համակարգում համագիծ վեկտորների կոորդինատները համեմատական են: Ստուգելու համար՝ համագիծ են արդյոք $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները, կազմենք նրանց կոորդինատների հարաբերությունները՝

$$\frac{6}{3}=\frac{-12}{-6}=\frac{18}{9}=2:$$

Այսպիսով՝ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները համագիծ են, համուղղված են (համեմատականության գործակիցը դրական է), և $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի երկարությունը 2 անգամ մեծ է $\overrightarrow{CD}$ վեկտորի երկարությունից: ■

Խնդիր 1.6: Գտնել $\boldsymbol{a}=\{3;4;-12\}$ վեկտորի օրթը:

Լուծում: Վեկտորի օրթը նրան համուղղված և միավոր երկարություն ունեցող վեկտոր է: $\boldsymbol{a}$ վեկտորի օրթը նշանակենք $\boldsymbol{a}^0$:

Դիցուք՝ $\boldsymbol{a}^0=\{x;y;z\}$: Ըստ պայմանի՝ $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-12}=\mu>0$ և $x^2+y^2+z^2=1$, հետևաբար՝

$$9\mu^2+16\mu^2+144\mu^2=1\Rightarrow \mu^2=\frac{1}{169}\Rightarrow \mu=\frac{1}{13}:$$

Այսպիսով՝ $x=\frac{3}{13}; y=\frac{4}{13}; z=-\frac{12}{13}$:■

Խնդիր 1.7: Հարթության վրա տրված են երկու վեկտորներ՝ $\boldsymbol{p}=\{2;-3\}$ և $\boldsymbol{q}=\{1;2\}$: Բազի՞ս է արդյոք վեկտորների $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ համախումբը: Եթե այո, գտնել $\boldsymbol{a}=\{9;4\}$ վեկտորի վերլուծությունը ըստ $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ բազիսի:

Լուծում: $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ վեկտորները համագիծ չեն (կոորդինատները համեմատական չեն) և հետևաբար բազիս են հարթության վրա: Դիցուք՝ α և β-ն $\boldsymbol{a}$ վեկտորի վերլուծության գործակիցներն են ըստ $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ բազիսի՝

$$\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}:$$

Քանի որ վեկտորները գումարելիս համապատասխան կոորդինատները գումարվում են, թվով բազմապատկելիս բազմապատկվում են այդ նույն թվով, և հավասար վեկտորներն էլ ունեն հավասար կոորդինատներ, ապա վերջին հավասարությունը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=9\\-3\alpha+2\beta=4\end{cases},\ \text{որտեղից՝}\ \begin{cases}\alpha=2\\\beta=5\end{cases},$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$:■

Խնդիր 1.8: $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ անկյուն: Իմանալով, որ $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, հաշվել $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ սկալյար արտադրյալը:

Լուծում: Օգտվելով սկալյար արտադրյալի հատկություններից և սահմանումից՝ կարող ենք գրել

$$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+6(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=$$

$$=3|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi+4|\boldsymbol{b}|^2=-61:■$$

Խնդիր 1.9: Ապացուցել, որ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ վեկտորն օրթոգոնալ է $\boldsymbol{a}$ վեկտորին:

Լուծում: Սկալյար արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ որպեսզի երկու վեկտորները լինեն օրթոգոնալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝ բավական է ապացուցել, որ $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})=0$:

Օգտվելով սկալյար արտադրյալի 3-րդ հատկությունից և հաշվի առնելով, որ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$ և $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ արտադրյալները թվեր են և կարող են դուրս հանվել սկալյար արդադրյալի նշանի տակից (հատկություն 2), $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})$-ի համար կստանանք՝

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}):$$

Քանի որ սկալյար արտադրյալը նաև տեղափոխելի է, ապա վերջին հավասարությունից անմիջականորեն հետևում է, որ $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})=0$:

Երկրորդ լուծում: Նկատենք, որ ըստ կրկնակի վեկտորական արտադրյալի վերաբերյալ *թեորեմ 1.2*-ի՝

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]],$$

հետևաբար $\boldsymbol{p}$ վեկտորն օրթոգոնալ է $\boldsymbol{a}$ վեկտորին, այսինքն՝ $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})=0$:■

Խնդիր 1.10: Գտնել հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գագաթներից տարված միջնագծերով կազմված բութ անկյան մեծությունը:

Նկ. 1.3.

Լուծում: Կատարենք գծագիրը (նկ. 1.3.): Որոնելի անկյունը նշանակենք α-ով, որը եռանկյան միջնագծերի հետ համընկնող $\overrightarrow{A_1A}$ և $\overrightarrow{C_1C}$ վեկտորների կազմած անկյունն է: Եռանկյան կողմերի հետ համընկնող վեկտորները նշանակենք $\overrightarrow{BA}$ և $\overrightarrow{BC}$: Ըստ պայմանի ունենք, որ $\overrightarrow{BA}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են և $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$:

Սկալյար արտադրյալի սահմանումից կստանանք՝

$$\cos\alpha=\frac{\left(\overrightarrow{A_1A},\overrightarrow{C_1C}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1A}\right|\left|\overrightarrow{C_1C}\right|}:$$

$\overrightarrow{A_1A}$ և $\overrightarrow{C_1C}$ վեկտորները վերլուծենք ըստ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ բազիսի (նկ. 1.3.)՝

$$\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}:$$

Հետևաբար, ըստ սկալյար արտադրյալի 2-րդ և 3-րդ հատկությունների և այն փաստի, որ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են և ունեն a -ին հավասար երկարություն, կարող ենք գրել՝

$$\left(\overrightarrow{A_1A},\overrightarrow{C_1C}\right)=\left(\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=$$

$$=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=-a^2:$$

Նույն ձևով՝

$$\left|\overrightarrow{A_1A}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)}=\sqrt{\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$\left|\overrightarrow{C_1C}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)}=\sqrt{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}:$$

Հետևաբար՝

$$\cos\alpha=\frac{\left(\overrightarrow{A_1A},\overrightarrow{C_1C}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1A}\right|\left|\overrightarrow{C_1C}\right|}=\frac{-a^2}{5/4a^2}=-\frac{4}{5}:$$

Ուրեմն՝

$$\alpha=\arccos\left(-4/5\right):\blacksquare$$

Խնդիր 1.11: Տրված են եռանկյան գագաթները՝

$$A\left(3;2;-3\right),\ B\left(5;1;-1\right),\ C\left(1;-2;1\right):$$

Գտնել A գագաթին հարակից արտաքին անկյունը:

Նկ. 1.4.

Լուծում: Կատարենք սխեմատիկ գծագիրը: Որոնելի անկյունը՝ α-ն, $\overrightarrow{BA}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների կազմած անկյունն է (նկ. 1.4.):

Հաշվենք $\overrightarrow{BA}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների կոորդինատները՝ ծայրակետի կոորդինատներից հանելով սկզբնակետի կոորդինատները : Կստանանք՝

$$\overrightarrow{BA}=\{-2;1;-2\},\quad \overrightarrow{AC}=\{-2;-4;4\}:$$

Այժմ, օգտվելով (1.6) բանաձևից, հաշվենք $\overrightarrow{BA}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների կազմած անկյունը՝

$$\cos\alpha=\frac{4-4-8}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{4+16+16}}=-\frac{8}{3\cdot 6}=-\frac{4}{9}:$$

Ուրեմն՝

$$\alpha=\arccos(-4/9):\blacksquare$$

Խնդիր 1.12: $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ անկյուն: Հաշվել $\left|[\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]\right|^2$, եթե $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$:

Լուծում: Օգտվելով վեկտորական արտադրյալի 1-4 հատկություններից և նրա մոդուլի սահմանումից՝ կարող ենք գրել.

$$\left|[\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]\right|^2=\left|3[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]+9[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-3[\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]\right|^2,$$

որտեղից՝

$$\left|[\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]\right|^2=\left|10[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]\right|^2=100|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{a}|^2\sin^2\varphi:$$

Տեղադրելով $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$ և $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ արժեքները վերջինիս մեջ, կստանանք՝

$$\left|[\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]\right|^2=100\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{3}{4}=300:\blacksquare$$

Խնդիր 1.13: Դիցուք՝ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}],\quad [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}]:$$

Ապացուցել, որ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ և $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ վեկտորները համագիծ են:

Լուծում: Որպեսզի վեկտորները լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց վեկտորական արտադրյալը հավասար լինի զրոյի: Ցույց տանք, որ դա այդպես է: Իրոք, օգտվելով վեկտորական արտադրյալի 3-րդ և 4-րդ գծային հատկություններից, արտադրիչների հակատեղափոխական հատկությունից և տրված առնչություններից, կարող ենք գրել՝

$$[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{O}:\blacksquare$$

Խնդիր 1.14: Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ և $C(1;3;-1)$: Գտնել B գագաթից AC կողմին իջեցված բարձրության երկարությունը:

Լուծում: Կատարենք սխեմատիկ գծագիրը (նկ. 1.5.):

Նկ. 1.5.

Մի կողմից ABC եռանկյան մակերեսը հավասար է AC հիմքի և BB_1 բարձրության արտադրյալի կեսին՝

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BB_1|:$$

Մյուս կողմից, ըստ վեկտորական արտադրյալի հատկության, այն $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի մոդուլի կեսն է՝

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|:$$

Համադրելով վերջին երկու հավասարությունները՝ կստանանք՝

$$|BB_1|=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{|AC|}: \qquad (1.12)$$

Այժմ, օգտվելով ստացված հավասարությունից, հաշվենք $|BB_1|$-ը: Նախ, քանի որ վեկտորի կոորդինատները նրա ծայրակետի և սկզբնակետի կոորդինատների տարբերությունն է, ապա՝

$$\overrightarrow{AB}=\{4;-5;0\},\quad \overrightarrow{AC}=\{0;4;-3\},$$

այնուհետև ըստ (1.9) բանաձևի՝

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left\{\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right\}=\{15;12;16\}$$

և ըստ (1.4)-ի՝

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25;$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5:$$

Այսպիսով՝ տեղադրելով ստացված արժեքները (1.12)-ի մեջ՝ կըստանանք՝

$$\left|BB_1\right|=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|AC\right|}=\frac{25}{5}=5:\ \blacksquare$$

Խնդիր 1.15: $\boldsymbol{c}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներին, որոնք կազմում են 30°-ին հավասար անկյուն: Հաշվել $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ խառը արտադրյալը, եթե $|\boldsymbol{a}|=6,\ |\boldsymbol{b}|=3,\ |\boldsymbol{c}|=3$:

Լուծում: Ըստ խառը արտադրյալի սահմանման և նրա հատկությունների՝

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])=([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}):$$

Սկալյար արտադրյալի և վեկտորական արտադրյալի մոդուլի սահմանումներից կստանանք՝

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c})=|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]||\boldsymbol{c}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\alpha\cos\theta, \qquad (1.13)$$

որտեղ α-ն $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների , իսկ θ-ն $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորների կազմած անկյուններն են:

Քանի որ $\boldsymbol{c}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներին, ապա այն համագիծ է նրանց $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալին (քանի որ, ըստ վեկտորական արտադրյալի սահմանման, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալը ևս ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներին): Այսինքն՝ $\boldsymbol{c}$ վեկ-

տորը $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$-ի հետ կկազմի $\theta=0^\circ$ կամ $\theta=180^\circ$ անկյուններ՝ կախված $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ եռյակի կողմնորոշումից (աջ կամ ձախ):

Այսպիսով՝ տեղադրելով համապատասխան արժեքները (1.13) հավասարության մեջ՝ ($|\boldsymbol{a}|=6, |\boldsymbol{b}|=3, |\boldsymbol{c}|=3$, $\sin\alpha=1/2$, $\cos\theta=\pm1$) կստանանք՝

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=6\cdot3\cdot3\cdot\frac{1}{2}(\pm1)=\pm27 : \blacksquare$$

Խնդիր 1.16: Ապացուցել, որ $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ կետերը ընկած են միևնույն հարթության մեջ:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ A,B,C,D կետերը կպատկանեն միևնույն հարթությանը այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ վեկտորները համահարթ լինեն, կամ որ նույնն է՝ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ խառը արտադրյալը հավասար լինի զրոյի:

Ինչպես և նախորդ խնդիրներում, վեկտորների կոորդինատները կհաշվենք՝ ծայրակետի կոորդինատներից հանելով սկզբնակետի կոորդինատները: Կստանանք՝

$$\overrightarrow{AB}=\{-1;-1;6\}, \overrightarrow{AC}=\{-2;0;2\}, \overrightarrow{AD}=\{1;-1;4\} :$$

Հաշվենք $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ խառը արտադրյալը արտադրիչների ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների միջոցով (տե՛ս (1.10))՝

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-1\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-10+12=0 :$$

Այսպիսով՝ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=0$, հետևաբար $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ վեկտորները համահարթ են, և հետևաբար A,B,C,D կետերը պատկանում են միևնույն հարթությանը: $\blacksquare$

Խնդիր 1.17: Ապացուցել նույնությունները՝

ա) $\left[\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{b},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right]\right]=\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right]\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\right)-\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}\right]\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right)$,

բ) $\left[\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{b},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right]\right]=\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right)\boldsymbol{b}-\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]$:

Լուծում: ա) Նույնության ձախ կողմի $\left[\boldsymbol{b},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right]$ կրկնակի վեկտորական արտադրյալը ձևափոխենք՝ օգտվելով նրա համար ստացված (1.11) նույնությունից՝

$$\left[\boldsymbol{b},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right]=\boldsymbol{c}\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\right)-\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right):$$

Ստացվածը տեղադրելով ա)-ի ձախ կողմում և օգտվելով վեկտորական արտադրյալի 2-րդ և 3-րդ գծային հատկություններից՝ կստանանք՝

$$\left[\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{b},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right]\right]=\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\right)-\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right)\right]=\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\right)\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right]-\left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right)\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}\right]:$$

բ)Նույնության ձախ կողմի $\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]$ վեկտորական արտադրյալը նշանակենք $\boldsymbol{f}$ -ով՝

$$\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]=\boldsymbol{f}$$

և ձևափոխենք այն՝ օգտվելով (1.11) նույնությունից՝

$$\left[\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{b},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right]\right]=\left[\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{b},\boldsymbol{f}\right]\right]=\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{f}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right):$$

Տեղադրելով $\boldsymbol{f}=\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]$-ն ստացված նույնության մեջ՝ կստանանք՝

$$\left[\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{b},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right]\right]=\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{a},\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\right)-\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)=\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right)\boldsymbol{b}-\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)\left[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right]:$$

■

Տիպային խնդիրներ

1. Տրված են $A(3;-1;2)$ և $B(-1;2;1)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{BA}$ վեկտորների կոորդինատները և նրանց երկարությունները:
2. Որոշել $\boldsymbol{a}=\{2;-3;-1\}$ վեկտորի սկզբնակետի կոորդինատները, եթե նրա ծայրակետը համընկնում է $(1;-1;2)$ կետի հետ:
3. Որոշել $\boldsymbol{a}=\{12;-15;-16\}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:
4. Վեկտորը OX և OZ առանցքների հետ կազմում է $\alpha=120^o$ և $\gamma=45^o$ անկյուններ: Ինչպիսի՞ անկյուն է այն կազմում OY առանցքի հետ:
5. Ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարեն $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները, որպեսզի $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ վեկտորը $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը բաժանի հավասար մասերի:
6. O կետը ABC եռանկյան ծանրության կենտրոնն է: Ապացուցել, որ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$:
7. $ABCD$ շեղանկյան մեջ տրված են $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$ և $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$ անկյունագծերը: Գտնել շեղանկյան կողմերի հետ համընկնող վեկտորների վերլուծությունը ըստ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ բազիսի:
8. Տրված են $\boldsymbol{a}=\{3;-2;6\}$ և $\boldsymbol{b}=\{-2;1;0\}$ վեկտորները: Գտնել հետևյալ վեկտորների կոորդինատները՝ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; $2\boldsymbol{a}$; $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$; $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$:
9. Ստուգել $\boldsymbol{a}=\{2;-1;3\}$ և $\boldsymbol{b}=\{-6;3;-9\}$ վեկտորների կոլինեարությունը: Պարզել, թե որն է որից մեծ և քանի անգամ, համուղղված են, թե հակուղղված:
10. Ստուգել, որ տրված չորս կետերը՝ $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$, սեղանի գագաթներ են:
11. Գտնել $\boldsymbol{a}=\{3;-2;6\}$ վեկտորի օրթը:
12. Որոշել $\boldsymbol{a}=\{3;-5;8\}$ և $\boldsymbol{b}=\{-1;1;-4\}$ վեկտորների գումարի և տարբերության մոդուլը:

13. $\boldsymbol{a}=\{2;-3;6\}$ և $\boldsymbol{b}=\{-1;2;-2\}$ վեկտորները կիրառված են միևնույն կետում: Գտնել $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդի ուղղությամբ ուղղված $\boldsymbol{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե $|\boldsymbol{c}|=3\sqrt{42}$:

14. $\overrightarrow{AB}=\{2;6;-4\}$ և $\overrightarrow{AC}=\{4;2;-2\}$ վեկտորները համընկնում են եռանկյան կողմերի հետ: Որոշել եռանկյան միջնագծերի հետ համընկնող $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CP}$ վեկտորների կոորդինատները:

15. Հարթության վրա տրված են երեք վեկտորներ՝ $a=\{3;-2\}$, $b=\{-2;1\}$ և $\boldsymbol{c}=\{7;-4\}$: Գտնել այդ վեկտորներից յուրաքանչյուրի վերլուծությունը՝ որպես բազիս ընդունելով մյուս երկուսը:

16. Տրված են երեք վեկտորներ՝ $\boldsymbol{p}=\{3;-2;1\},\boldsymbol{q}=\{-1;1;-2\}$ և $\boldsymbol{r}=\{2;1;-3\}$: Գտնել $\boldsymbol{c}=\{11;-6;5\}$ վեկտորի վերլուծությունը ըստ $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ բազիսի:

17. $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$ անկյուն, ընդ որում՝ $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=4$: Հաշվել 1) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$, 2) $|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2$:

18. $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, իսկ $\boldsymbol{c}$ վեկտորը նրանց հետ կազմում է $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ անկյուն: Իմանալով, որ $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$ և $|\boldsymbol{c}|=8$, հաշվել՝ 1) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})$, 2) $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}|^2$:

19. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ միավոր վեկտորները բավարարում են $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ պայմանին: Հաշվել $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$:

20. Տրված են $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ երեք վեկտորներ, որոնք բավարարում են $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ պայմանին, ընդ որում՝ $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=1$ և $|\boldsymbol{c}|=4$: Հաշվել $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$:

21. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորները զույգ առ զույգ կազմում են $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ անկյուն: Հաշվել $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $|\boldsymbol{a}|=4,\ |\boldsymbol{b}|=2$ և $|\boldsymbol{c}|=6$:

22. Ապացուցել, որ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}$ վեկտորին:

23. Տրված են, որ $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=5$: Որոշել, թե α -ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց:

24. Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները, որպեսզի $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ վեկտորը ուղղահայաց լինի $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ վեկտորին:

25. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ և $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ վեկտորները համընկնում են ABC եռանկյան կողմերի հետ: Գտնել B գագաթից $\overrightarrow{AC}$ կողմին տարված բարձրության հետ համընկնող $\overrightarrow{BD}$ վեկտորի վերլուծությունը ըստ $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ բազիսի:

26. $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ անկյուն: Հաշվել $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած α անկյունը, եթե $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3},\ |\boldsymbol{b}|=1$:

27. Տրված են $\boldsymbol{a}=\{4;-2;-4\}$ և $\boldsymbol{b}=\{6;-3;2\}$ վեկտորները: Հաշվել 1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, 2) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$:

28. Հաշվել $\boldsymbol{f}=\{3;-2;-5\}$ ուժի կատարած աշխատանքը, եթե նրա կիրառման կետը, շարժվելով ուղղագիծ, տեղափոխվում է $A(2;-3;5)$ կետից $B(3;-2;-1)$ կետ:

29. Երեք ուժեր՝ $\boldsymbol{f}_1=\{3;-4;2\}$, $\boldsymbol{f}_2=\{2;3;-5\}$ և $\boldsymbol{f}_3=\{-3;-2;4\}$, կիրառված են մի կետում: Հաշվել այդ ուժերի համազորի կատարած աշխատանքը, երբ նրա կիրառման կետը, շարժվելով ուղղագիծ, տեղափոխվում է $C(5;3;-7)$ դիրքից $D(4;-1;-4)$ դիրք:

30. Գտնել $\boldsymbol{a}=\{2;-4;4\}$ և $\boldsymbol{b}=\{-3;2;6\}$ վեկտորներով կազմված անկյան կոսինուսը:

31. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$ և $C(3;-2;1)$: Գտնել B գագաթի ներքին անկյունը:

32. $\boldsymbol{x}$ վեկտորը, համագիծ լինելով $\boldsymbol{a}=\{6;-8;-7,5\}$ վեկտորին, OZ առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն: Գտնել $\boldsymbol{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե $|\boldsymbol{x}|=50$:

33. Տրված են $\boldsymbol{a}=\{3;-1;5\}$ և $\boldsymbol{b}=\{1;2;-3\}$ վեկտորները: Գտնել այն $\boldsymbol{x}$ վեկտորը, որն ուղղահայաց է OZ առանցքին և բավարարում է $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=9$ և $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=-4$ պայմաններին:

34. $\boldsymbol{x}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}=\{3;2;2\}$ և $\boldsymbol{b}=\{18;-22;-5\}$ վեկտորներին և $\boldsymbol{OY}$ առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն: Իմանալով, որ $|\boldsymbol{x}|=14$, գտնել նրա կոորդինատները:

35. Գտնել $\boldsymbol{a}=\{5;2;5\}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\boldsymbol{b}=\{2;-1;2\}$ վեկտորի առանցքի վրա:

36. Տրված են $\boldsymbol{A}(3;-4;-2), \boldsymbol{B}(2;5;-2)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի պրոյեկցիան այն առանցքի վրա, որը OX և OY առանցքների հետ կազմում է $\alpha=60^0$, $\beta=120^0$ անկյուններ, իսկ OZ առանցքի հետ՝ բութ γ անկյուն:

37. Տրված են երեք վեկտորներ՝ $\boldsymbol{a}=\{1;-3;4\}$, $\boldsymbol{b}=\{3;-4;2\}$, $\boldsymbol{c}=\{-1;1;4\}$: Հաշվել $\boldsymbol{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ վեկտորի առանցքի վրա:

38. Տրված են $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=26$, $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|=72$: Հաշվել $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ սկալյար արտադրյալը:

39. $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, և $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$: Հաշվել 1) $|[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]|$, 2) $|[3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}]|$:

40. $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ անկյուն, և $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$: Հաշվել 1) $\left|[2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}]\right|^2$, 2) $\left|[\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]\right|^2$:

41. Ինչպիսի՞ պայմանի պետք է բավարարեն $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները, որպեսզի $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ:

42. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորները բավարարում են $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ պայմանին: Ապացուցել, որ $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$:

43. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ և $\boldsymbol{d}$ վեկտորները կապված են $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]$, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}]$ առնչություններով: Ապացուցել, որ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ և $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ վեկտորները համագիծ են:

44. Տրված են $\boldsymbol{a}=\{3;-1;-2\}$ և $\boldsymbol{b}=\{1;2;-1\}$ վեկտորները: Գտնել հետևյալ վեկտորական արտադրյալների կոորդինատները 1) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, 2) $[2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]$:

45. $\boldsymbol{p}=\{2;-4;5\}$ ուժը կիրառված է $A(4;-2;3)$ կետում: Որոշել այդ ուժի մոմենտը $B(3;2;-1)$ կետի նկատմամբ:

46. $\boldsymbol{f}=\{2;2;9\}$ ուժը կիրառված է $\boldsymbol{B}(4;-2;3)$ կետում: Որոշել այդ ուժի մոմենտի մեծությունը և ուղղորդ կոսինուսները $\boldsymbol{C}(3;2;-1)$ կետի նկատմամբ:

47. Երեք ուժերը՝ $\boldsymbol{f}_1=\{2;-1;-3\}$, $\boldsymbol{f}_2=\{3;2;-1\}$ և $\boldsymbol{f}_3=\{-4;1;3\}$, կիրառված են միևնույն $C(-1;4;-2)$ կետում: Որոշել այդ ուժերի համազորի մոմենտի մեծությունը և ուղղորդ կոսինուսները $A(2;3;-1)$ կետի նկատմամբ:

48. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$: Հաշվել եռանկյան մակերեսը:

49. $\boldsymbol{x}$ վեկտորը ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}=\{4;-2;-3\}$ և $\boldsymbol{b}=\{0;1;3\}$ վեկտորներին և $\boldsymbol{oy}$ առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն: Գտնել նրա կոորդինատները, եթե $|\boldsymbol{x}|=26$:

50. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ վեկտորները կազմում են աջ եռյակ և փոխուղղահայաց են: Հաշվել $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$-ն, եթե $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$:

51. $\boldsymbol{c}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներին, իսկ վերջիններս կազմում են $\varphi = 60^0$ անկյուն: Հաշվել $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$-ն, եթե $|\boldsymbol{a}| = 3,\ |\boldsymbol{b}| = 5,\ |\boldsymbol{c}| = 8$:

52. Ապացուցել, որ $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=0$ պայմանին բավարարող վեկտորները համահարթ են:

53. Համահարթ են արդյոք $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ վեկտորները, եթե՝

ա) $\boldsymbol{a} = \{2;3;-1\}$, $\boldsymbol{b} = \{1;-1;3\}$, $\boldsymbol{c} = \{1;9;-11\}$,

բ) $\boldsymbol{a} = \{2;-1;2\}$, $\boldsymbol{b} = \{1;2;-3\}$, $\boldsymbol{c} = \{3;-4;7\}$:

54. Ապացուցել, որ հետևյալ չորս կետերը պատկանում են միևնույն հարթությանը՝ $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$:

55. Հաշվել քառանիստի ծավալը, եթե հայտնի են նրա գագաթների կոորդինատները՝ $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$:

56. Տրված են քառանիստի գագաթները՝ $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$: Գտնել նրա D գագաթից իջեցված բարձրության երկարությունը:

57. Ապացուցել նույնությունները՝

1) $([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,

2) $[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]]] = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}](\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}](\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,

3) $[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]]] = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]$,

4) $([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$,

5) $[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,

6) $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|^2|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]|^2 - ([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}])^2 = |\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$:

Թեմա 2: Հարթության վրա ուղղի տարբեր տեսքի հավասարումներ

Ուղղի ընդհանուր հավասարում, ուղղի հավասարում հատվածներով, երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարում, ուղղի հավասարում անկյունային գործակցով, ուղիղների կազմած անկյուն, ուղղի նորմալ հավասարում, կետի շեղումը ուղղից, ուղիղների փունջ

Թեորեմ 2.1: Հարթության ֆիքսված Oxy ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում x և y փոփոխականների նկատմամբ առաջին կարգի ցանկացած հավասարումով որոշվում է ուղիղ գիծ, և ընդհակառակը՝ հարթության ցանկացած ուղիղ գիծ նկարագրվում է առաջին կարգի հավասարումով:

Առաջին կարգի

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{2.1}$$

հավասարումը՝ A, B և C ցանկացած հաստատուններով (A -ն և B -ն միաժամանակ զրոներ չեն), կոչվում է ***ուղղի ընդհանուր հավասարում:***

Դիտարկենք ուղղի (2.1) հավասարումը, երբ A, B և C գործակիցները զրոյից տարբեր են: Այն կարող ենք արտագրել հետևյալ կերպ՝

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1:$$

Նշանակելով $a = -C/A$ և $b = -C/B$՝ կստանանք ուղղի մեկ այլ հավասարում՝

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2.2}$$

որն անվանում են ***ուղղի հավասարում հատվածներով:*** (2.2) հավասարման մեջ a և b թվերը հավասար են այն հատվածների մեծություններին (ուղղված կոորդինատների սկզբնակետից), որոնք հատում է ուղիղը Ox և Oy առանցքների վրա:

Ուղղի՝ Ox առանցքի նկատմամբ թեքման անկյան տանգենսն անվանում են այդ *ուղղի անկյունային գործակից*՝ $k = tg\alpha$: Եթե ուղիղը զուգահեռ չէ Oy առանցքին և տրված է $Ax + By + C = 0$ ընդհանուր

հավասարումով, ապա նրա k անկյունային գործակիցը ստացվում է հետևյալ կերպ՝ $k = -\frac{A}{B}$:

Ուղիղը, որն անցնում է տրված $M_1(x_1, y_1)$ կետով և ունի տրված k անկյունային գործակիցը, որոշվում է հետևյալ հավասարումով՝

$$y - y_1 = k(x - x_1): \tag{2.3}$$

Կատարելով $b = y_1 - kx_1$ նշանակում՝ կստանանք՝

$$y = kx + b, \tag{2.4}$$

որն անվանում են ***ուղղի հավասարում k անկյունային գործակցով:***

Եթե երկու ուղիղները տրված են անկյունային գործակիցներով՝

$$y = k_1x + b_1, \; y = k_2x + b_2,$$

ապա նրանց կազմած անկյունները որոշվում են

$$tg\varphi = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \tag{2.5}$$

բանաձևով:

(2.5)-ից հետևում է, որ k_1 և k_2 անկյունային գործակիցներով ուղիղները զուգահեռ են, եթե

$$k_1 = k_2, \tag{2.6}$$

և ուղղահայաց են, եթե

$$k_1k_2 = -1: \tag{2.7}$$

Տրված երկու՝ $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումն ունի այսպիսի տեսք՝

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}: \tag{2.8}$$

Դիտարկենք որևէ L ուղիղ: Կոորդինատների O սկզբնակետից տանենք L ուղղին ուղղահայաց n ուղիղը և այդ երկու ուղիղների հատման կետը նշանակենք P-ով (նկ. 2.1.): n ուղղի վրա վերցնենք $\boldsymbol{n}$ միավոր վեկտորն այնպես, որ այն ուղղված լինի $\overrightarrow{OP}$ վեկտորի ուղղությամբ: Եթե $\overrightarrow{OP}$ վեկտորի երկարությունը p է, $\boldsymbol{n}$ վեկտորի և OX

առանցքի կազմած անկյունը θ է, ապա ուղղի հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0, \qquad (2.9)$$

որը կոչվում է ***ուղղի նորմալ հավասարում***: Դիցուք՝ d -ն $M(x, y)$ կետից այդ ուղիղը եղած հեռավորությունն է:

Նկ. 2.1.

Սահմանում: M կետի δ շեղում L ուղղից անվանում են $+d$ թիվը, եթե M կետն ու O կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են L ուղղի տարբեր կողմերում, և $-d$ թիվը, եթե M կետն ու O կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են L ուղղի միևնույն կողմում:

Պնդում 1: *Յանկացած* $M_0(x_0, y_0)$ *կետի շեղումը* L *ուղղից գտնելու համար պետք է* L *ուղղի նորմալ* (2.9) *հավասարման ձախ մասում* x *և* y *փոփոխականների փոխարեն տեղադրել* M_0 *կետի* x_0 *և* y_0 *կոորդինատները:*

$Ax + By + C = 0$ *ուղղի հավասարումը նորմալ տեսքի բերելու համար անհրաժեշտ է այն բազմապատկել*

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

նորմավորող բազմապատկիչով, որի նշանը հակադիր է C *-ի նշանին:*

Տրված հարթությանը պատկանող և որոշակի S կետով անցնող ուղիղների համախումբն ընդունված է անվանել S *կենտրոնով ուղիղների փունջ:*

Թեորեմ 2.2: Եթե $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ հավասարումները երկու տարբեր ոչ զուգահեռ ուղիղների հավասարումներ են, որոնք հատվում են ինչ-որ S կետում, իսկ α -ն և β -ն ցանկացած թվեր են, որոնք միաժամանակ հավասար չեն զրոյի, ապա

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (2.10)$$

հավասարումը S կետով անցնող ուղղի հավասարում է: Ավելին՝ S կետով անցնող ցանկացած ուղիղ որոշվում է (2.10) հավասարումով α-ի և β-ի որոշակի արժեքների դեպքում:

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 2.1: Տրված է $2x+3y+4=0$ ուղիղը: Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(2;1)$ կետով և ա) ուղղահայաց է տրված ուղղին, բ) զուգահեռ է տրված ուղղին:

Լուծում: Տրված ուղղի անկյունային գործակիցը՝ k_1-ը, հավասար է $-2/3$: Զուգահեռ ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են, հետևաբար տրված ուղղին զուգահեռ ուղղի անկյունային գործակիցը՝ k_2-ը, հավասար է k_1-ին. $k_2=k_1=-2/3$: Ուղղահայաց ուղիղների անկյունային գործակիցների արտադրյալը -1 է, ուրեմն տրված ուղղին ուղղահայաց ուղղի անկյունային գործակիցը՝ k_3-ը, հավասար է $3/2$ ($k_1k_3=-1$): Օգտվելով տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի (2.3) հավասարումից՝ տրված ուղղին զուգահեռ ուղղի համար կստանանք՝

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-2)$$

հավասարումը, իսկ տրված ուղղին ուղղահայաց ուղղի համար՝

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2)$$

հավասարումը:

Այսպիսով՝ զուգահեռ ուղղի հավասարումն է

$$2x+3y-7=0,$$

ուղղահայաց ուղղի հավասարումն է

$$3x-2y-4=0: \blacksquare$$

Խնդիր 2.2: Տրված է $2x+3y+4=0$ ուղիղը: Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են $M(2;1)$ կետով և տրված ուղղի հետ կազմում են $\alpha=45^0$ անկյուն:

Լուծում: Նկատենք, որ տրված ուղղի հետ $\alpha=45^0$ անկյուն կազմում են երկու ուղիղներ՝ մեկը տրված ուղղից ժամսլաքի ուղղությամբ, մյուսը՝ հակառակ: Ինչպես նախորդ խնդրում, տրված ուղղի անկյունային գործակիցը՝ k_1-ը, հավասար է $-2/3$: Որոնելի ուղիղների անկյունային գործակիցները նշանակելով k_2 և k_3՝ (2.5)-ից կստանանք՝

$$tg45=\pm\frac{k_{2,3}+2/3}{1+k_1k_{2,3}},$$

որտեղից՝

$$k_2=1/5,\ k_3=-5:$$

Այսպիսով՝ օգտվելով տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի (2.3) հավասարումից՝ կստանանք որոնելի ուղիղների հավասարումները՝

$$y-1=\frac{1}{5}(x-2) \quad \text{և} \quad y-1=-5(x-2),$$

որտեղից վերջնականապես՝

$$x-5y+3=0, \quad 5x+y-11=0:\blacksquare$$

Խնդիր 2. 3: $E(1;-1)$ կետը քառակուսու կենտրոն է, որի կողմերից մեկը ընկած է $x-2y+12=0$ ուղղի վրա: Կազմել քառակուսու մյուս կողմերը պարունակող ուղիղների հավասարումները:

Նկ. 2.2.

Լուծում: Դիցուք՝ տրված ուղղի վրա է ընկած քառակուսու BC կողմը, իսկ E-ն AC և BD անկյունագծերի հատման կետն է (նկ. 2.2.): Խնդիրը կլուծենք հետևյալ փուլերով.

- կգտնենք AC և BD ուղիղների հավասարումները,
- կորոշենք քառակուսու գագաթների կոորդինատները,

- ըստ գագաթների կոորդինատների՝ կգտնենք նրա կողմերի հավասարումները:

Եվ այսպես՝ AC և BD ուղիղները E կետով անցնող և BC ուղղի հետ $\alpha = 45^0$ և $\alpha = 135^0$ անկյուններ կազմող ուղիղներ են: Գտնենք այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները: Նշանակենք k_1-ով BC ուղղի անկյունային գործակիցը, որը հավասար է $1/2$, իսկ k_2 և k_3-ով՝ որոնելի AC և BD ուղիղների անկյունային գործակիցները: Օգտվելով (2.5) բանաձևից՝ կստանանք՝

$$tg45 = \frac{k_2 - 1/2}{1 + 1/2\,k_2}, \; tg135 = \frac{k_3 - 1/2}{1 + 1/2\,k_3},$$

որտեղից՝ $k_2 = 3$, $k_3 = -1/3$:

Տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի (2.3) հավասարումից կստանանք՝

$$y + 1 = 3(x - 1) \quad \text{և} \quad y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1),$$

որտեղից էլ վերջնականապես կստացվեն AC և BD ուղիղների հավասարումները՝ $y = 3x - 4$ և $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$:

Անցնենք լուծման հաջորդ փուլին և գտնենք քառակուսու գագաթների կոորդինատները: B և C գագաթների կոորդինատները կորոշենք որպես BC, BD և BC, AC ուղիղների հատման կետերի կոորդինատներ: Այլ կերպ ասած՝ կլուծենք հետևյալ համակարգերը՝

$$\begin{cases} x - 2y + 12 = 0 \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x - 2y + 12 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}:$$

Արդյունքում կստացվեն $B(-8,2)$ և $C(4,8)$:

Քանի որ E-ն AD և AC հատվածների միջնակետ է, ապա A և D գագաթների կոորդինատները կգտնենք՝ օգտվելով հատվածի (x, y) միջնակետի կոորդինատները նրա (x_1, y_1) և (x_2, y_2) ծայրակետերի կոորդինատների միջոցով արտահայտող $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

բանաձևերից (տե՛ս (1.1)): Այսպիսով՝ պարզ հաշվարկների արդյունքում կստանանք՝ $A(-2;-10)$, $D(10;-4)$:

Այժմ կգտնենք քառակուսու կողմերի հավասարումները՝ օգտվելով $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղղի (2.8) հավասարումից: Կստացվեն

- AB ուղղի համար՝ $\frac{x+2}{-8+2} = \frac{y+10}{2+10}$, որտեղից ուղղի հավասարումը՝ $2x + y + 14 = 0$,
- CD ուղղի համար՝ $\frac{x-4}{10-4} = \frac{y-8}{-4-8}$, որտեղից ուղղի հավասարումը՝ $2x + y - 16 = 0$,
- AD ուղղի համար՝ $\frac{x+2}{10+2} = \frac{y+10}{-4+10}$, որտեղից ուղղի հավասարումը՝ $x - 2y - 18 = 0$:■

Խնդիր 2.4: Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $B(5,-5)$ կետով և կոորդինատային անկյունից առանձնացնում է 50 քմ մակերեսով եռանկյուն:

Լուծում: Որոնելի ուղղի հավասարումը փնտրենք հատվածներով (տե՛ս 2.2)՝ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$: Մեր խնդիրն է որոշել a և b պարամետրերի արժեքները: $B(5,-5)$ կետը պատկանում է ուղղին, հետևաբար նրա կոորդինատները բավարարում են ուղղի հավասարմանը: Տեղադրելով B կետի կոորդինատները ուղղի հավասարման մեջ և բերելով ընդհանուր հայտարարի՝ կստանանք՝

$$5b - 5a = ab:$$

Այժմ նկատենք, որ քանի որ a-ն և b-ն այն հատվածների մեծություններն են, որոնք հատում է ուղիղը կոորդինատային առանցքներից, ապա կոորդինատային անկյունից առանձնացված եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ՝ $S = \frac{1}{2}|a||b|$, կամ որ նույնն է՝ $S = \pm\frac{ab}{2}$: Ըստ խնդրի պայմանի՝ կստանանք՝ $ab = \pm 2S = \pm 100$:

Այսպիսով՝ մեզ անհրաժեշտ է լուծել հավասարումների երկու համակարգ՝

$$\begin{cases} ab = 100 \\ 5b - 5a = 100 \end{cases} \text{ և } \begin{cases} ab = -100 \\ 5b - 5a = 100 \end{cases}:$$

Լուծելով ստացված համակարգերը՝ կստանանք առաջին համակարգից՝ $a_1 = -10 + 10\sqrt{2},\ a_2 = -10 - 10\sqrt{2}$ և $b_1 = 10 + 10\sqrt{2},\ b_2 = 10 - 10\sqrt{2}$, երկրորդ համակարգից՝ $a = 10,\ b = -10$:

Այսպիսով՝ խնդրի պայմանին բավարարում են երեք ուղիղներ.

$$\left(\sqrt{2}+1\right)x + \left(\sqrt{2}-1\right)y - 10 = 0;\ \left(\sqrt{2}-1\right)x + \left(\sqrt{2}+1\right)y + 10 = 0;$$

$$x - y - 10 = 0:\blacksquare$$

Խնդիր 2.5: Ապացուցել, որ $2x + y + 3 = 0$ ուղիղը հատում է $A(-5;1)$ և $B(3;7)$ կետերով սահմանափակված հատվածը:

Նկ. 2.3.

Լուծում: Ակնհայտ է, որ տրված ուղիղը կհատի AB հատվածն այն և միայն այն ժամանակ, երբ հատվածի ծայրակետերը գտնվեն ուղղի տարբեր կողմերում, այլ կերպ ասած՝ երբ ծայրակետերի շեղումները տրված ուղղից ունենան տարբեր նշաններ (նկ. 2.3.):

Դա պարզելու համար ստանանք ուղղի նորմալ հավասարումը: Գտնենք նորմավորող բազմապատկիչը՝

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}:$$

Ուղղի նորմալ հավասարումը կլինի՝

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{\sqrt{5}}{5}y - \frac{3\sqrt{5}}{5} = 0:$$

Գտնենք $A(-5;1)$ և $B(3;7)$ կետերի շեղումները տրված ուղղից: Դրա համար, ըստ պնդում 1-ի, անհրաժեշտ է այդ կետերի կոորդինատները տեղադրել ուղղի նորմալ հավասարման ձախ կողմում: Կստանանք՝

$$\delta_A = -\frac{2\sqrt{5}}{5}(-5) - \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{10\sqrt{5} - 4\sqrt{5}}{5} > 0,$$

$$\delta_B = -\frac{3 \cdot 2\sqrt{5}}{5} - \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5} = -\frac{16\sqrt{5}}{5} < 0:$$

Այսպիսով՝ A և B կետերի շեղումները տրված ուղղից ունեն հակադիր նշաններ, հետևաբար ուղիղը հատում է այդ կետերով սահմանափակված հատվածը: ■

Խնդիր 2.6: Գտնել $7x - 24y - 50 = 0$ և $7x - 24y + 10 = 0$ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը:

Լուծում: Ուղիղների հավասարումները բերենք նորմալ տեսքի: Գտնենք նորմավորող բազմապատկիչները՝ $t_1 = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 24^2}} = \frac{1}{25}$ և $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{7^2 + 24^2}} = -\frac{1}{25}$, և գրենք տրված ուղիղների նորմալ հավասարումները՝ $\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y - 2 = 0$ և $-\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - 1 = 0$:

Ելնելով նորմալ հավասարումներից՝ կարող ենք եզրակացնել, որ նախ՝ ուղիղները կոորդինատների սկզբնակետից գտնվում են համապատասխանաբար $p_1 = 2$ և $p_2 = 1$ հեռավորությունների վրա (նորմալ հավասարումներում p-ի երկրաչափական իմաստից ելնելով), ինչպես նաև ընկած են կոորդինատների սկզբնակետի տարբեր կողմերում, քանի որ x-ի և y-ի գործակիցները հավասարումներում ունեն հակադիր նշաններ և հետևաբար հակադիր են ուղղված կոորդինատների սկզբնակետից դեպի ուղիղներն ուղղված նորմալները (նկ. 2.4.):

Նկ. 2.4.

Հետևաբար ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է կոորդինատների սկզբնակետից նրանց ունեցած հեռավորությունների

գումարին (եթե ուղիղներն ընկած լինեին կոորդինատների սկզբնակետի միևնույն կողմում, ապա նրանց միջև եղած հեռավորությունը հավասար կլիներ սկզբնակետից նրանց ունեցած հեռավորությունների տարբերությանը): Այսպիսով՝ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը 3 է: ■

Երկրորդ լուծում: Ակնհայտ է, որ $\left(0;-\frac{25}{12}\right)$ կետը պատկանում է առաջին ուղղին: Այդ կետի շեղումը (հետևաբար նաև հեռավորությունը) երկրորդ ուղղից գտնելու համար նրա կոորդինատները տեղադրենք երկրորդ ուղղի նորմալ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$-\frac{7}{25}\cdot 0+\frac{24}{25}\left(-\frac{25}{12}\right)-1=-3:$$

Այսպիսով՝ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը 3 է: ■

Խնդիր 2.7: Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են $P(2;-1)$ կետով և $L_1: 2x-y+5=0$ և $L_2: 3x+6y-1=0$ ուղիղների հետ կազմում են հավասարասրուն եռանկյուն:

Լուծում: Խնդիրը կլուծենք երկու փուլով՝

- կգտնենք տրված ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները,
- կգտնենք այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են P կետով և ուղղահայաց են ստացված կիսորդներին:

Քանի որ հավասարասրուն եռանկյունների կիսորդները ուղղահայաց են իրենց հիմքերին (մեր դեպքում եռանկյունների հիմքերը անցնում են P կետով), ապա դրանք կլինեն հենց որոնելի ուղիղները:

Եվ այսպես՝ L_1 և L_2 ուղիղների հավասարումները բերենք նորմալ տեսքի՝ դրանք բազմապատկելով համապատասխանաբար

$$\mu_1=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5} \text{ և } \mu_2=\frac{1}{\sqrt{3^2+6^2}}=\frac{1}{3\sqrt{5}}$$

նորմավորող բազմապատկիչներով: Կստանանք՝

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{5}{\sqrt{5}}=0 \text{ և } \frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{3\sqrt{5}}=0:$$

Դիցուք՝ այժմ $M(x,y)$-ը կիսորդի ցանկացած կետ է: Քանի որ M կետի հեռավորությունները տրված ուղիղներից գտնելու համար անհրաժեշտ է կետի կոորդինատները տեղադրել ուղիղների նորմալ հավասարումների մեջ ու վերցնել դրանց բացարձակ արժեքները (պնդում 1), և քանի որ կիսորդի ցանկացած կետի հեռավորությունները անկյան կողմերից իրար հավասար են, ապա կստանանք՝

$$\frac{|-2x+y-5|}{\sqrt{5}}=\frac{|3x+6y-1|}{3\sqrt{5}},$$

որը համարժեք է հետևյալ երկու հավասարումներին՝

$$\frac{-2x+y-5}{\sqrt{5}}=\frac{3x+6y-1}{3\sqrt{5}} \text{ և } \frac{-2x+y-5}{\sqrt{5}}=-\frac{3x+6y-1}{3\sqrt{5}}:$$

Կատարելով պարզ ձևափոխություններ՝ կստանանք L_1 և L_2 ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հետևյալ հավասարումները՝

$$-3x+9y-16=0 \text{ և } 9x+3y+14=0,$$

որոնց անկյունային գործակիցներն են համապատասխանաբար՝

$k_1=\frac{1}{3}$ և $k_2=-3$:

Այժմ, օգտվելով տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակից ունեցող ուղղի (2.3) հավասարումից և այն փաստից, որ ուղղահայաց ուղիղների անկյունային գործակիցների արտադրյալը պետք է հավասար լինի -1 (տե՛ս 2.7), կստանանք այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են $P(2;-1)$ կետով, ունեն համապատասխանաբար $k_1'=-3$ և $k_2'=\frac{1}{3}$ անկյունային գործակիցներ (ուղղահայաց են կիսորդներին)՝

$$y+1=\frac{1}{3}(x-2) \text{ և } y+1=-3(x-2),$$

որտեղից էլ վերջնականապես կստացվեն որոնելի հավասարումները՝

$$-x+3y+5=0 \text{ և } 3x+y-5=0:\blacksquare$$

Խնդիր 2.8: Որոշել, թե $3x-2y+5=0$ և $2x+y-3=0$ ուղիղներով կազմված սո՞ւր, թե՞ բութ անկյան մեջ է գտնվում կոորդինատների սկզբնակետը:

Լուծում: Գրենք ուղիղների նորմալ հավասարումները (տե՛ս նախորդ խնդիրները)՝

$$-\frac{3}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{5}{\sqrt{13}}=0, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0:$$

Դիտարկենք երկու վեկտորներ՝

$$\boldsymbol{n}_1=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\} \text{ և } \boldsymbol{n}_2=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right\},$$

որոնք համապատասխանաբար $3x-2y+5=0$ և $2x+y-3=0$ ուղիղների միավոր նորմալ վեկտորներն են՝ ուղղված կոորդինատների սկզբնակետից դեպի ուղիղները: Պարզ է, որ եթե այդ վեկտորները կազմեն սուր անկյուն, ապա կոորդինատների սկզբնակետը ընկած կլինի տրված ուղիղներով կազմված բութ անկյան մեջ և ընդհակառակը:

Այսպիսով՝ քանի որ

$$\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right)=-\frac{6}{\sqrt{65}}+\frac{2}{\sqrt{65}}<0,$$

ապա $\boldsymbol{n}_1$ և $\boldsymbol{n}_2$ վեկտորները կազմում են բութ անկյուն (հետևում է սկալյար արտադրյալի սահմանումից), և հետևաբար կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է տրված ուղիղներով կազմված սուր անկյան մեջ: ■

Տիպային խնդիրներ

1. Որոշել $5x+3y-3=0$ ուղղին զուգահեռ և ուղղահայաց ուղիղների անկյունային գործակիցները:
2. Տրված են ուղղանկյան երկու կողմերի հավասարումները՝ $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$, և գագաթներից մեկը՝ $A(2;-3)$: Կազմել ուղղանկյան մյուս երկու կողմերի հավասարումները:
3. Տրված են ուղղանկյան երկու կողմերի հավասարումները՝ $x-2y=0$, $x-2y+15=0$, և անկյունագծերից մեկի հավասարումը՝ $7x+y-15=0$: Գտնել ուղղանկյան գագաթների կոորդինատները:
4. Գտնել $P(-6;4)$ կետի պրոյեկցիան $4x-5y+3=0$ ուղղի վրա:
5. Գտնել $P(-5;13)$ կետի սիմետրիկ Q կետը $2x-3y-3=0$ ուղղի նկատմամբ:
6. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են եռանկյան $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$ գագաթներով և զուգահեռ են հանդիպակաց կողմերին:
7. Տրված են եռանկյան կողմերի միջնակետերը՝ $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$, $M_3(3;-4)$: Կազմել նրա կողմերի հավասարումները:
8. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(3;2)$: Կազմել բարձրությունների հավասարումները:
9. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$: Կազմել B գագաթից տարված միջնագծի վրա A գագաթից իջեցված ուղղահայացի հավասարումը:
10. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(2;-2)$, $B(3;-5)$, $C(5;7)$: Կազմել A գագաթի ներքին անկյան կիսորդի վրա C գագաթից իջեցված ուղղահայաց ուղղի հավասարումը:

11. Տրված են ուռուցիկ քառանկյան հաջորդական գագաթները՝ $A(-3;1)$, $B(3;9)$, $C(7;6)$, $D(-2;-6)$: Գտնել անկյունագծերի հատման կետը:

12. Տրված են ուղղանկյան երկու կողմերի հավասարումները՝ $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$, և անկյունագծերից մեկի հավասարումը՝ $3x+7y-10=0$: Կազմել ուղղանկյան մյուս կողմերի և երկրորդ անկյունագծի հավասարումը:

13. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$: Կազմել A գագաթի ներքին և արտաքին անկյունների կիսորդների հավասարումները:

14. Գտնել $A(-8;12)$ կետի պրոյեկցիան $B(2;-3)$ և $C(-5;1)$ կետերով անցնող ուղղի վրա:

15. Գտնել $A(8;-9)$ կետի սիմետրիկ B կետը $C(3;-4)$ և $D(-1;-2)$ կետերով անցնող ուղղի նկատմամբ:

16. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել P կետ այնպիսին, որ $M(1;2)$ և $N(3;4)$ կետերից նրա հեռավորությունների գումարը լինի փոքրագույնը:

17. Օրդինատների առանցքի վրա գտնել P կետ այնպիսին, որ $M(-3;2)$ և $N(2;5)$ կետերից նրա հեռավորությունների տարբերությունը լինի առավելագույնը:

18. $A(-4;5)$ կետը քառակուսու գագաթ է, որի անկյունագիծը գտնվում է $7x-y+8=0$ ուղղի վրա: Կազմել քառակուսու կողմերի և մյուս անկյունագծի հավասարումները:

19. Տրված են քառակուսու երկու հակադիր գագաթները՝ $A(-1;3)$, $C(6;2)$: Կազմել նրա կողմերի հավասարումները:

20. Տրված են եռանկյան երկու գագաթները՝ $M_1(-10;2)$, $M_2(6;4)$, և բարձրությունների հատման կետը՝ $N(5;2)$: Գտնել եռանկյան երրորդ գագաթի կոորդինատները:

21. Տրված են եռանկյան երկու գագաթները՝ $A(3;-1)$, $B(5;7)$, և բարձրությունների հատման կետը՝ $N(4;-1)$: Կազմել այդ եռանկյան կողմերի հավասարումները:

22. ABC եռանկյան մեջ տրված են AB կողմի հավասարումը՝ $5x-3y+2=0$, AM $4x-3y+1=0$ և BN $7x+2y-22=0$ բարձրությունների հավասարումները: Կազմել եռանկյան մյուս երկու կողմերի և երրորդ բարձրության հավասարումները:

23. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված են գագաթներից մեկը՝ $A(4;-1)$, և երկու կիսորդների հավասարումները՝ $x-1=0$, $x-y-1=0$:

24. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե հայտնի են գագաթներից մեկը՝ $B(2;-1)$, ինչպես նաև տարբեր գագաթներից տարված բարձրության՝ $3x-4y+27=0$ և կիսորդի՝ $x+2y-5=0$ հավասարումները:

25. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե հայտնի են գագաթներից մեկը՝ $C(4;-1)$, ինչպես նաև միևնույն գագաթից տարված բարձրության՝ $2x-3y+12=0$ և միջնագծի $2x+$ $+3y=0$ հավասարումները:

26. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե հայտնի են գագաթներից մեկը՝ $B(2;-7)$, ինչպես նաև տարբեր գագաթներից տարված բարձրության՝ $3x+y+11=0$ և միջնագծի՝ $x+2y+7=0$ հավասարումները:

27. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե հայտնի են գագաթներից մեկը՝ $C(4;3)$, ինչպես նաև միևնույն գագաթից տարված կիսորդի՝ $x+2y-5=0$ և միջնագծի՝ $4x+13y-$ $-10=0$ հավասարումները:

28. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե հայտնի են գագաթներից մեկը՝ $A(3;-1)$, ինչպես նաև տարբեր գագաթներից տարված կիսորդի՝ $x-4y+10=0$ և միջնագծի՝ $6x+10y$ $-59=0$ հավասարումները:

29. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $C(1;1)$ կետով և կոորդինատային անկյունից առանձնացնում է 2 քմ մակերեսով եռանկյուն:

30. Ուղղի ընդհանուր հավասարումը բերել նորմալ տեսքի հետևյալ դեպքերում՝

1) $4x-3y-10=0$,

2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$,

3) $12x-5y+13=0$:

31. Գտնել կետի շեղումը և հեռավորությունը ուղղից հետևյալ դեպքերում՝

1) $A(2;-1)$; $4x+3y+10=0$,

2) $B(0;-3)$; $5x-12y-23=0$,

3) $P(-2;3)$; $3x-4y-2=0$:

32. Պարզել, թե $M(1;-3)$ կետն ու կոորդինատների սկզբնակետը ուղղի միևնույն կողմում են գտնվում, թե տարբեր հետևյալ դեպքերում՝

1) $2x-y+5=0$,

2) $x-3y-5=0$,

3) $x-3y+2=0$,

4) $10x+24y+15=0$:

33. Ապացուցել, որ $2x-3y+6=0$ ուղիղը չի հատում $A(-2;-3)$ և $B(1;-2)$ կետերով սահմանափակված հատվածը:

34. $A(-1;6)$, $B(1;-3)$, $C(4;10)$, $D(9;0)$ կետերը քառանկյան հաջորդական գագաթներն են: Պարզել՝ ուռուցի՞կ է արդյոք քառանկյունը:

35. Հաշվել զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը հետևյալ դեպքերում՝

ա) $5x-12y+26=0$,
$5x-12y-13=0$,

բ) $4x-3y+15=0$,
$8x-6y+25=0$:

36. Ապացուցել, որ $P(2;7)$ կետով կարելի է տանել երկու այնպիսի ուղիղներ, որ նրանց հեռավորությունները $Q(1;2)$ կետից լինեն հավասար 5-ի: Կազմել այդ ուղիղների հավասարումները:

37. Ապացուցել, որ $C(7;-2)$ կետով կարելի է տանել միայն մեկ ուղիղ այնպիսին, որ նրա հեռավորությունը $A(4;-6)$ կետից լինի հավասար 5-ի: Կազմել այդ ուղղի հավասարումը:

38. Կազմել տրված ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները՝

ա) $x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$, բ) $3x+4y-1=0$, $5x+12y-2=0$:

39. Որոշել, թե $M(1;-2)$ կետն ու կոորդինատների սկզբնակետը երկու ուղիղների հատումից առաջացած միևնույն, կից, թե հակադիր անկյուններում են գտնվում:

ա) $\begin{matrix}2x-y-5=0\\3x+y+10=0\end{matrix}$; բ) $\begin{matrix}x-2y-1=0\\3x-y-2=0\end{matrix}$; գ) $\begin{matrix}4x+3y-10=0\\12x-5y-5=0\end{matrix}$:

40. Որոշել, թե $M(2;3)$ և $N(5;-1)$ կետերը երկու ուղիղների հատումից առաջացած միևնույն, կից, թե հակադիր անկյուններում են գտնվում:

ա) $\begin{matrix}x-3y-5=0\\2x+9y-2=0\end{matrix}$; բ) $\begin{matrix}12x+y-1=0\\13x+2y-5=0\end{matrix}$; գ) $\begin{matrix}2x+7y-5=0\\x+3y+7=0\end{matrix}$:

41. Որոշել, թե կոորդինատների սկզբնակետը եռանկյան ներսում է գտնվում, թե դրսում, եթե եռանկյան կողմերը տրված են հետևյալ հավասարումներով՝ $7x-5y-11=0$, $8x+3y+31=0$, $x+8y-19=0$:

42. Որոշել, թե $M(-3;2)$ կետը եռանկյան ներսում է գտնվում, թե դրսում, եթե եռանկյան կողմերը տրված են հետևյալ հավասարումներով՝ $x+y-4=0$, $3x-7y+8=0$, $4x-y-31=0$:

43. Պարզել, թե $3x-2y+5=0$, $2x+y-3=0$ ուղիղներով առաջացած սուր, թե բութ անկյան մեջ է գտնվում կոորդինատների սկզբնակետը:

44. Պարզել, թե $3x-5y-4=0$, $x+2y+3=0$ ուղիղներով առաջացած սուր, թե բութ անկյան մեջ է գտնվում $M(2;-5)$ կետը:

45. Կազմել $x-7y+5=0$, $5x+5y-3=0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որը կից է կոորդինատների սկզբնակետը պարունակող անկյանը:

46. Կազմել $2x-3y-5=0$, $6x-4y+7=0$ ուղիղներով կազմըված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որը կից է $C(2;-1)$ կետը պարունակող անկյանը:

47. Կազմել $3x+4y-5=0$, $5x-12y+3=0$ ուղիղներով կազմված սուր անկյան կիսորդի հավասարումը:

48. Կազմել $x-3y+5=0$, $3x-y+15=0$ ուղիղներով կազմըված բութ անկյան կիսորդի հավասարումը:

49. ABC եռանկյան մեջ տրված են $AN: x+5y-3=0$ և $BN: x+y-1=0$ բարձրությունների հավասարումները և $AB: x+3y-1=0$ կողմի հավասարումը: Առանց որոշելու բարձրությունների հատման կետը և եռանկյան գագաթը՝ կազմել եռանկյան մյուս երկու կողմերի և երրորդ բարձրության հավասարումը:

50. Կազմել ABC եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե հայտնի են նրա գագաթներից մեկը՝ $A(2;-1)$, և միևնույն գագաթից տարված բարձրության՝ $7x-10y+1=0$ և կիսորդի՝ $3x-2y+5=0$ հավասարումները: Խնդիրը լուծել՝ առանց հաշվելու B և C գագաթների կոորդինատները:

Թեմա 3: Հարթություն, ուղիղը տարածության մեջ

Հարթության տարբեր տեսքի հավասարումներ, ուղղի ընդհանուր, կանոնական, պարամետրական հավասարումները տարածության մեջ

Թեորեմ 3.1: Տարածության մեջ ֆիքսված կամայական $Oxyz$ ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգում x, y և z փոփոխականների նկատմամբ ցանկացած առաջին կարգի հավասարումով որոշվում է հարթություն, և ընդհակառակը՝ տարածության մեջ տրված ցանկացած հարթություն նկարագրվում է առաջին կարգի հավասարումով:

Դիտարկենք առաջին կարգի հավասարում՝

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1}$$

որտեղ A, B, C և D գործակիցները ցանկացած հաստատուններ են, ընդ որում՝ A, B և C թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է: (3.1) հավասարումը անվանում են ***հարթության ընդհանուր հավասարում:***

Հարթությունը, որն անցնում է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***կետով և ունի*** $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$ ***նորմալ*** (ոչ զրոյական վեկտոր, որին հարթությունը ուղղահայաց է), նկարագրվում է հետևյալ հավասարումով՝

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0: \tag{3.2}$$

Դիցուք՝ հարթության (3.1) հավասարման մեր A, B, C և D գործակիցները զրոյից տարբեր են, այն արտագրենք հետևյալ կերպ՝

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1:$$

Այստեղից, վերցնելով $a = -D/A,\ b = -D/B,\ c = -D/C$, կստանանք՝

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{3.3}$$

հավասարումը, որն անվանում են ***հարթության հավասարում հատվածներով:***

Միևնույն ուղղին չպատկանող երեք՝ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ և $M_3(x_3, y_3, z_3)$ ***կետերով անցնող հարթությունը*** որոշվում է հետևյալ հավասարումով՝

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \ : \qquad (3.4)$$

Հարթության նորմալ հավասարում է կոչվում նրա հավասարումը՝ գրված հետևյալ տեսքով՝

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (3.5)$$

որտեղ p-ն կոորդինատների սկզբնակետից մինչև հարթություն եղած հեռավորությունն է, իսկ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$-երը հարթության այն նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են, որն ուղղված է կոորդինատների սկզբնակետից դեպի հարթություն (այն դեպքում, երբ ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, նորմալի դրական ուղղության ընտրությունը էական չէ):

Դիցուք՝ d-ն $M(x, y, z)$ կետի հեռավորությունն է տրված հարթությունից:

Սահմանում: *M կետի δ շեղում հարթությունից* անվանում են $+d$ թիվը, եթե M կետն ու O կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են հարթության տարբեր կողմերում, և $-d$ թիվը, եթե M կետն ու O կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են հարթության միևնույն կողմում:

Պնդում 3.1: *Ցանկացած $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի շեղումը հարթությունից գտնելու համար պետք է հարթության* (3.5) *նորմալ հավասարման ձախ մասում x, y և z փոփոխականների փոխարեն տեղադրել M_0 կետի x_0, y_0 և z_0 կոորդինատները:*

Հարթության $Ax + By + Cz + D = 0$ ընդհանուր հավասարումը (3.5) նորմալ տեսքի բերելու համար այն պետք է բազմապատկել

$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ նորմավորող բազմպատկիչով, որի նշանը հակադիր է D-ի նշանին:

Դիցուք՝ տարածության մեջ ուղիղը որոշվում է երկու իրարից տարբեր և ոչ զուգահեռ $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ հարթությունների հատումով: Հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, \qquad (3.6)$$

անվանում են ***ուղղի ընդհանուր հավասարումներ տարածության մեջ:***

Դիցուք՝

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ և } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

հավասարումները երկու տարբեր ոչ զուգահեռ հարթությունների հավասարումներն են, որոնք հատվում են ինչ-որ L ուղղով, իսկ α-ն և β-ն ցանկացած թվեր են, որոնք միաժամանակ հավասար չեն զրոյի: Այդ դեպքում

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$$

հավասարումը L ուղղով անցնող հարթության հավասարում է: Ավելին՝ L ուղղով անցնող ցանկացած հարթություն որոշվում է վերոհիշյալ հավասարումով α-ի և β-ի որոշակի արժեքների դեպքում: Այն անվանում են ***հարթությունների փնջի հավասարում:***

Այն ուղիղը, որն անցնում է տարածության տրված $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ կետով և ունի տրված $\boldsymbol{q}=\{l,m,n\}$ *ուղղորդ վեկտորը (վեկտոր, որին ուղիղը զուգահեռ է),* նկարագրվում է հետևյալ հավասարումներով՝

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \qquad (3.7)$$

որոնց անվանում են ***ուղղի կանոնական հավասարումներ:***

Դիցուք՝ տրված են $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ և $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ կետերը:

Տարածության երկու տարբեր կետերով անցնող ուղղի հավասարումներն են՝

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}: \qquad (3.8)$$

Ուղղի պարամետրական հավասարումները տարածության մեջ կստացվեն (3.7) կանոնական հավասարումներից, եթե որպես t պարամետր վերցնենք (3.7)-ի հարաբերություններից յուրաքանչյուրը: Կստանանք՝

$$x=x_1+lt,\ y=y_1+mt,\ z=z_1+nt: \qquad (3.9)$$

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 3.1: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(3;-2;-5)$ կետով և զուգահեռ է $2x-4y-2z+3=0$ հարթությանը:

Լուծում: Տրված $M(3;-2;-5)$ կետով անցնող հարթության հավասարումը, համաձայն (3.2)-ի, կունենա այսպիսի տեսք՝

$$A(x-3)+B(y+2)+C(z+5)=0:$$

Վերջինս զուգահեռ կլինի տրված $2x-4y-2z+3=0$ հարթությանը, եթե համագիծ լինեն այդ հարթությունների համապատասխանաբար $\boldsymbol{n}_1=\{A;B;C\}$ և $\boldsymbol{n}_2=\{2;-4;2\}$ նորմալ վեկտորները, այսինքն՝ տեղի ունենան

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{-4}=\frac{C}{-2}$$

պայմանները:

Մասնավորապես կարելի է վերցնել՝

$$A=2,\ B=-4,\ C=-2:$$

Տեղադրելով այս արժեքները $M(3;-2;-5)$ կետով անցնող հարթության հավասարման մեջ՝ կստանանք՝

$$2(x-3)-4(y+2)-2(z+5)=0,$$

կամ

$$x-2y-z-12=0:\blacksquare$$

Խնդիր 3.2: Ուղղի

$$\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x-y-4z-8=0 \end{cases}$$

ընդհանուր հավասարումը բերել կանոնական տեսքի:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար մեզ բավական է գտնել տրված ուղղին պատկանող որևէ կետ և ուղղի որևէ ուղղորդ վեկտոր:

Ուղղին պատկանող որևէ M կետի կոորդինատները գտնելու համար կամայականորեն ընտրենք այդ կետի որևէ կոորդինատը, օրինակ՝ $z=-1$, և տեղադրելով ուղղի հավասարումների մեջ՝ լուծենք ստացված համակարգը՝

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x+y=4 \end{cases}:$$

Կստանանք՝

$$x=2,\ y=0:$$

Հետևաբար $M(2;0;-1)$ կետը տրված ուղղին պատկանող կետ է:

Որպես տրված ուղղի ուղղորդ վեկտոր կարելի է վերցնել $\boldsymbol{n}_1=\{1;-2;3\}$ և $\boldsymbol{n}_2=\{2;-1;-4\}$ նորմալ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը (ինչո՞ւ)՝

$$[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2]=\left\{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\}=\{5;10;5\}:$$

Այսպիսով՝ որոնելի կանոնական հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{10}=\frac{z+1}{5},$$

կամ որ նույնն է՝

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}:\blacksquare$$

Խնդիր 3.3: Գտնել $C(3,-4,-2)$ կետի պրոյեկցիան հետևյալ երկու զուգահեռ ուղիղներով անցնող հարթության նկատմամբ՝

$$L_1: \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}, \quad L_2: \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}:$$

Լուծում: Հարթության վրա կետի պրոյեկցիան այդ կետով անցնող և հարթությանը ուղղահայաց ուղղի և այդ հարթության հատման կետն է: Խնդիրը կլուծենք հետևյալ փուլերով՝

- կգտնենք տրված ուղիղներով անցնող α հարթության հավասարումը,
- կստանանք այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է C կետով և ուղղահայաց է α հարթությանը,
- կգտնենք α հարթության և նրան ուղղահայաց ուղղի հատման կետը:

Դիցուք՝ $\boldsymbol{q} = \{13;1;-4\}$ վեկտորը զուգահեռ ուղիղների ուղղորդ վեկտորն է, $M_1(5,6,-3)$ և $M_2(2,3,-3)$ կետերը համապատասխանաբար L_1 և L_2 ուղիղներին պատկանող կետեր են, $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{3;3;0\}$ վեկտորը այդ կետերը միացնող վեկտոր է: Որոնելի α հարթության $\boldsymbol{n}$ նորմալը պետք է միաժամանակ ուղղահայաց լինի $\boldsymbol{q}$ և $\boldsymbol{l}$ վեկտորներին և հետևաբար համագիծ՝ այդ վեկտորների վեկտորական արտադրյալին: Ունենք

$$[\boldsymbol{q},\boldsymbol{l}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 13 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 12\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j} + 36\boldsymbol{k} \text{ և } \boldsymbol{n} = \{1;-1;3\}:$$

Այսպիսով՝ ունենք հարթության նորմալ վեկտոր և նրան պատկանող կետ: Տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող հարթության հավասարման (3.2) բանաձևից կստանանք՝

$$(x-5)-(y-6)+3(z+3)=0,$$

որտեղից էլ կստացվի α հարթության հավասարումը՝

$$x-y+3z+10=0:$$

Այժմ անհրաժեշտ է ստանալ այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է C կետով և ուղղահայաց է α հարթությանը: Որոնելի ուղղի ուղղորդ վեկտորը հավասար կամ համագիծ է α հարթության նորմալին,

հետևաբար տրված կետով անցնող և տրված ուղղորդ վեկտոր ունեցող ուղղի (3.7) կանոնական հավասարումներից կստանանք ուղղի հավասարումները՝

$$L_3 : \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+2}{3} = t :$$

Խնդիրը վերջնականապես կլուծվի, երբ գտնենք α հարթության և L_3 ուղղի հատման կետը, կամ որ նույնն է՝ լուծենք համակարգ՝

$$\begin{cases} x - y + 3z + 10 = 0 \\ x = t + 3 \\ y = -t - 4 \\ z = 3t - 2 \end{cases},$$

որտեղից՝ $t = -1 \Rightarrow x = 2; y = -3; z = -5$:

Այսպիսով՝ որոնելի պրոյեկցիան է $x = 2;\ y = -3;\ z = -5$ կոորդինատներով կետը: ■

Խնդիր 3.4: Գտնել $M\left(3;2;1\right)$ կետի պրոյեկցիան

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$$

ուղղի վրա:

Լուծում: *Տարածության մեջ կետի պրոյեկցիան ուղղի վրա այդ կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց հարթության և տրված ուղղի հատման կետն է:*

Նախ կազմենք M կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց հարթության հավասարումը: Պարզ է, որ ուղղի $\boldsymbol{q} = \{1;1;2\}$ ուղղորդ վեկտորը այդ ուղղին ուղղահայաց ցանկացած հարթության նորմալ վեկտոր է, հետևաբար $M\left(3;2;1\right)$ կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց հարթության հավասարումը կլինի (տե՛ս (3.2)-ը)

$$x - 3 + y - 2 + 2\left(z - 1\right) = 0,$$

կամ

$$x + y + 2z - 7 = 0 :$$

Մեզ պետք է գտնել տրված ուղղի և ստացված հարթության հատման կետի կոորդինատները:

Լուծենք համակարգ՝

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{2}=t \\ x+y+2z-7=0 \end{cases}:$$

Համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ տեղադրենք

$$x=2+t,\ y=-3+t,\ z=2t$$

արտահայտություններն առաջին հավասարումից և գտնենք t-ի արժեքը՝

$$2+t-3+t+4t-7=0,$$

որտեղից՝ $t=4/3$:

Այսպիսով՝ հատման կետի կոորդինատները կլինեն՝

$$x=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3},\quad y=-3+\frac{4}{3}=-\frac{5}{3},\quad z=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3},$$

իսկ որոնելի պրոյեկցիան՝

$$\left(\frac{10}{3};-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right):\blacksquare$$

Խնդիր 3.5: Գտնել $P(4;1;6)$ կետի սիմետրիկ Q կետը

$L:\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ ուղղի նկատմամբ:

Լուծում: Խնդիրը կլուծենք երկու փուլով՝

- կգտնենք տրված կետի պրոյեկցիան տրված ուղղի վրա,
- օգտվելով հատվածի միջնակետի կոորդինատները նրա ծայրակետերի կոորդինատների միջոցով արտահայտելու (1.1) բանաձևերից՝ կորոշենք պահանջվող կետի կոորդինատները:

Տարածության մեջ կետի պրոյեկցիան ուղղի վրա այդ կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց հարթության և տրված ուղղի հատման կետն է: P կետով անցնող և L ուղղին ուղղահայաց α հարթության հավասարումը ստանալու համար որոշենք L ուղղի ուղղորդ վեկտորը, քանի որ այն կամ նրան համագիծ ցանկացած վեկտոր կարող է ծառայել որպես այդ ուղղին ուղղահայաց հարթության նորմալ: Իսկ ահա տարածության մեջ ուղղի ընդհանուր հավասարումից նրա ուղղորդ վեկտորը որոշվում է որպես երկու նորմալ վեկտորների վեկտորական արտադրյալ, որոնցից մեկը այդ ուղիղը որոշող առաջին

հարթության նորմալն է, մյուսը երկրորդ հարթության նորմալն է (ինչո՞ւ):

Այսպիսով՝ դիցուք $\boldsymbol{n}$-ը α հարթության նորմալն է, $\boldsymbol{q}$-ն L ուղղի ուղղորդ վեկտորն է, իսկ $\boldsymbol{n}_1 = \{1,-1,-4\}$-ը և $\boldsymbol{n}_2 = \{2,1,-2\}$-ը այդ ուղիղը որոշող հարթությունների նորմալներն են: Ըստ վերը շարադրվածի՝ ունենք $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \{6,-6,3\}$; $\boldsymbol{n} = \{2,-2,1\}$: Տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող հարթության հավասարման բանաձևից (տե՛ս 3.2) կստանանք՝

$$2(x-4) - 2(y-1) + (z-6) = 0,$$

որտեղից էլ կստացվի α հարթության հավասարումը՝

$$2x - 2y + z - 12 = 0:$$

Առաջին փուլում մնաց գտնել α հարթության և L ուղղի հատման կետը: Դրա համար անհրաժեշտ է լուծել հավասարումների այսպիսի համակարգ՝

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 12 = 0 \\ x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}:$$

Վերջինս լուծելով՝ կստանանք P կետի M պրոյեկցիան L ուղղի վրա՝ $M(3,-1,4)$:

Այժմ, քանի որ M կետը PQ հատվածի միջնակետն է, կգտնենք Q կետի կոորդինատները հետևյալ հավասարումներից (տե՛ս 1.1) ՝

$$\frac{4+x}{2} = 3;\ \frac{1+y}{2} = -1;\ \frac{6+z}{2} = 4:$$

Այսպիսով՝ կստանանք L ուղղի նկատմամբ P կետի սիմետրիկ Q կետի կոորդինատները՝ $Q(2,-3,2)$:■

Խնդիր 3.6: Կազմել $L_1 : x = t+1, y = 2t-8, z = -t-12$ և $L_2 : x = 3t-7, y = -2t+4, z = 3t+4$ ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացի պարամետրական հավասարումները:

Լուծում: Երկու խաչվող ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացը կարելի է գտնել հետևյալ կերպ՝

- տանել L_1-ով անցնող և L_2-ին զուգահեռ α_0 հարթությունը,

- գտնել L_1-ով անցնող և α_0 հարթությանն ուղղահայաց α_1 հարթության հավասարումը,
- գտնել α_1 հարթության և L_2-ուղղի M_0 հատման կետը,
- գտնել M_0 կետով անցնող և α_0 հարթությանը ուղղահայաց ուղղի հավասարումը, որն էլ հենց պահանջվող ուղղահայացի հավասարումն է:

Եվ այսպես՝ L_1-ով անցնող և L_2-ին զուգահեռ α_0 հարթության $\boldsymbol{n}_0$ նորմալը պետք է ուղղահայաց լինի L_1 և L_2 ուղիղների $\boldsymbol{q}_1 = \{1,2,-1\}$ և $\boldsymbol{q}_2 = \{3,-2,-4\}$ ուղղորդ վեկտորներին, հետևաբար որպես նորմալ կարելի է վերցնել վերջիններիս վեկտորական արտադրյալին հավասար կամ նրան համագիծ որևէ վեկտոր, մեր դեպքում՝ $[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2] = \{4,-6,-8\}$ և $\boldsymbol{n}_0 = \{2,-3,-4\}$: Նկատենք, որ α_0 հարթության հավասարման ստացման անհրաժեշտություն չկա:

L_1-ով անցնող և α_0-ին ուղղահայաց α_1 հարթության $\boldsymbol{n}_1$ նորմալը պետք է ուղղահայաց լինի L_1 ուղղի $\boldsymbol{q}_1 = \{1,2,-1\}$ ուղղորդ վեկտորին և α_0 հարթության $\boldsymbol{n}_0 = \{2,-3,-4\}$ նորմալին, հետևաբար կարող է լինել նրանց վեկտորական արտադրյալին հավասար կամ նրան համագիծ որևէ վեկտոր՝ $[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{n}_0] = \{-11,2,-7\}$ և $\boldsymbol{n}_1 = \{-11,2,-7\}$: L_1 ուղղի ցանկացած կետ պատկանում է α_1 հարթությանը, հետևաբար այդ ուղղի ասենք $M_1(1,-8,-12)$ կետով անցնող և $\boldsymbol{n}_1$ նորմալն ունեցող հարթության հավասարումը կլինի՝

$$-11(x-1) + 2(y+8) - 7(z+12) = 0,$$

որտեղից էլ վերջնականապես կստացվի α_1 հարթության հավասարումը՝

$$-11x + 2y - 7z - 57 = 0:$$

Հաջորդ քայլում α_1 հարթության և L_2-ուղղի հատման կետը գտնելու համար կլուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} -11x+2y-7z-57=0 \\ x=3t-7 \\ y=-2t+4 \\ z=3t+4 \end{cases},$$

և կստանանք $M_0(-7,4,4)$: Վերջում կգտնենք $M_0(-7,4,4)$ կետով անցնող և $\boldsymbol{n}_0=\{2,-3,-4\}$ նորմալին հավասար ուղղորդ վեկտոր ունեցող ուղղի հավասարումները, որոնք էլ հենց որոնելի ուղղի հավասարումներն են՝

$$\begin{cases} x=2t-7 \\ y=-3t+4 \\ z=-4t+4 \end{cases}: \blacksquare$$

Խնդիր 3.7: Գտնել տրված երկու ուղիղների միջև եղած ամենակարճ հեռավորությունը՝

$$L_1: \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2} \text{ և } L_2: \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}:$$

Լուծում: Խնդիրը կլուծենք երկու փուլով.

- կգտնենք այն α հարթության հավասարումը, որն անցնում է L_1 ուղղով և զուգահեռ է L_2 ուղղին,
- կորոշենք L_2 ուղղի ցանկացած կետի հեռավորությունը α հարթությունից:

Առաջին փուլն իրականացնելու համար բավական է ունենալ վերոհիշյալ հարթության որևէ $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ նորմալ վեկտոր և այդ հարթությանը պատկանող որևէ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետ ու օգտվել տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող հարթության հավասարման (3.2) բանաձևից:

Քանի որ հարթությունը պետք է անցնի L_1 ուղղով և զուգահեռ լինի L_2 ուղղին, հետևաբար նրա $\boldsymbol{n}$ նորմալը պետք է ուղղահայաց լինի L_1 և L_2 ուղիղների $\boldsymbol{q}_1=\{3,4,-2\}$ և $\boldsymbol{q}_2=\{6,-4,-1\}$ ուղղորդ վեկտորներից յուրաքանչյուրին: Դա նշանակում է, որ որպես α հարթության $\boldsymbol{n}$ նորմալ կարող ենք վերցնել $\boldsymbol{q}_1$ և $\boldsymbol{q}_2$ վեկտորների վեկտորական արտադ-

բյալը՝ $[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2] = \{-12;-9;-36\}$ կամ նրան համագիծ որևէ վեկտոր՝ $\boldsymbol{n} = \{4;3;12\}$: Իսկ քանի որ հարթությունն անցնում է L_1 ուղղով, ապա որպես հարթությանը պատկանող կետ կարող ենք վերցնել L_1 ուղղին պատկանող ցանկացած կետ, ասենք՝ $M_1(-7,-4,-3)$: Այսպիսով՝ α հարթության հավասարումն է

$$4(x+7)+3(y+4)+12(z+3)=0,$$

որտեղից վերջնականապես կստանանք $4x+3y+12z+76=0$:

Խնդրի *երկրորդ փուլն* իրագործելու համար անհրաժեշտ է ստանալ α հարթության նորմալ հավասարումը, այնուհետև գտնել L_2 ուղղին պատկանող ցանկացած կետի հեռավորությունը α հարթությունից:

Այսպիսով՝ α հարթության ընդհանուր հավասարումը բազմապատկելով $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = -\dfrac{1}{13}$ նորմավորող բազմապատկիչով՝ կստանանք հարթության նորմալ հավասարումը՝

$$-\frac{4}{13}x-\frac{3}{13}y-\frac{12}{13}z-\frac{76}{13}=0:$$

L_2 ուղղին պատկանող $M_2(21;-5;2)$ կետի կոորդինատները տեղադրելով վերջինիս մեջ և վերցնելով ստացված թվի բացարձակ արժեքը (շեղման բացարձակ արժեքը կետի հեռավորությունն է ուղղից)՝ կստանանք L_2 ուղղի և α հարթության կամ որ նույնն է՝ L_1 և L_2 ուղիղների միջև եղած ամենակարճ հեռավորությունը՝

$$d(L_1, L_2) = \left| -\frac{4}{13}\cdot 21 - \frac{3}{13}\cdot(-5) - \frac{12}{13}\cdot 2 - \frac{76}{13} \right| = 13: \blacksquare$$

Տիպային խնդիրներ

1. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2;1;-1)$ կետով և ուղղահայաց է $\boldsymbol{n}=\{1;-2;3\}$ վեկտորին:
2. Տրված են երկու կետեր՝ $M_1(3;-1;2)$ և $M_2(4;-2;-1)$: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով և ուղղահայաց է $\overrightarrow{M_1M_2}$ վեկտորին:
3. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(3;4;-5)$ կետով և զուգահեռ է երկու վեկտորների՝ $\boldsymbol{a}_1=\{3;1;-1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{1;-2;1\}$:
4. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(2;-1;3)$ և $M_2(3;1;2)$ կետերով և զուգահեռ է $\boldsymbol{a}=\{3;-1;4\}$ վեկտորին:
5. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է հետևյալ երեք կետերով՝ $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_2(2;0;2)$:
6. l և m պարամետրերի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում հետևյալ հավասարումների զույգերը կորոշեն զուգահեռ հարթություններ՝

   ա) $2x+ly+3z-5=0,\quad mx-6y-6z+2=0$,

   բ) $mx+3y-2z-1=0,\quad 2x-5y-lz=0$:
7. $\boldsymbol{l}$ պարամետրի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում հետևյալ հավասարումների զույգերը կորոշեն ուղղահայաց հարթություններ՝

   ա) $3x-5y+lz-3=0,\quad x+3y+2z+5=0$,

   բ) $7x-2y-z=0,\quad lx+y-3z-1=0$:
8. Որոշել հարթությունների կազմած երկնիստ անկյունները հետևյալ դեպքերում՝

   ա) $x-\sqrt{2}y+3z-1=0,\quad x+\sqrt{2}y-z+3=0$,

   բ) $x+2y+2z-3=0,\quad 16x+12y-15z-1=0$:
9. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(3;-2;-7)$ կետով և զուգահեռ է $2x-3z+5$ հարթությանը:

10. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և ուղղահայաց է հետևյալ երկու հարթություններին՝ $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$:

11. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(2;-1;1)$ կետով և ուղղահայաց է $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$ երկու հարթություններին:

12. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(1;-1;-2)$ և $M_2(3;1;1)$ երկու կետերով և ուղղահայաց է $x - 2y + 3z - 5 = 0$ հարթությանը:

13. Հարթության ընդհանուր հավասարումը բերել նորմալ տեսքի հետևյալ դեպքերում՝

1) $2x - 2y + z - 18 = 0$,
2) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$,
3) $3x - 4y - 1 = 0$:

14. Գտնել կետի շեղումը և հեռավորությունը հարթությունից հետևյալ դեպքերում՝

1) $M_1(-2;-4;3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$,
2) $M_2(2;-1;-1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$,
3) $M_3(1;2;-3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$:

15. Հաշվել $P(-1;1;-2)$ կետի հեռավորությունը $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ և $M_3(4;-5;-2)$ երեք կետերով անցնող հարթությունից:

16. Ապացուցել, որ $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ հարթությունը հատում է $M_1(3;-2;1)$ և $M_2(-2;5;2)$ կետերով սահմանափակված հատվածը:

17. Հաշվել զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը հետևյալ դեպքերում՝

ա) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$,

բ) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$:

18. Կազմել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք կիսում են տրված հատվող հարթություններով առաջացած երկնիստ անկյունները հետևյալ դեպքերում՝

1) $x-3y+2z-5=0, \quad 3x-2y-z+3=0$,

2) $2x-y+5z+3=0, \quad 2x-10y+4z-2=0$:

19. Որոշել, թե $M_1(2;-1;1)$ և $M_2(1;2;-3)$ կետերը երկու հարթությունների հատումից առաջացած միևնո՞ւյն, հակադի՞ր, թե՞ կից երկնիստ անկյուններում են գտնվում հետևյալ դեպքերում՝

1) $3x-y+2z-3=0, \quad x-2y-z+4=0$,

2) $2x-y+5z-1=0, \quad 3x-2y+6z-1=0$:

20. Որոշել, թե $M_1(3;2;-1)$ կետը հետևյալ հարթությունների հատումից առաջացած սո՞ւր, թե՞ բութ երկնիստ անկյան մեջ է գտնվում՝ $5x-y+z+3=0, \quad 4x-3y+2z+5=0$:

21. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $3x-$ $-y+2z+9=0, \quad x+z-3=0$ հարթությունների հատման գծով և

1) $M_1(4;-2;-3)$ կետով,

2) զուգահեռ է ox առանցքին,

3) զուգահեռ է oz առանցքին:

22. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $2x-y+3z-5=0, \quad x+2y-z+2=0$ հարթությունների հատման գծով և զուգահեռ է $l=\{2;-1;-2\}$ վեկտորին:

23. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $3x-2y+z-3=0, \quad x-2z=0$ հարթությունների հատման գծով և ուղղահայաց է $x-2y+z+5=0$ հարթությանը:

24. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\begin{cases} 5x-y-2z-3=0 \\ 3x-2y-5z+2=0 \end{cases}$ ուղղով և ուղղահայաց է $x+19y-$ $-7z-11=0$ հարթությանը:

25. Պատկանո՞ւմ է արդյոք $4x-8y+17z-8=0$ հարթությունը $\alpha(5x-y+4z-1)+\beta(2x+2y-3z+2)=0$ հարթությունների փնջին:

26. l-ի և m-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում է $5x+ly+4z+m=0$ հարթությունը պատկանում $\alpha(3x-7y+z-3)+$ $+\beta(x-9y-2z+5)=0$ փնջին:

27. Կազմել այն ուղղի կանոնական հավասարումները, որն անցնում է $M_1(2;0;-3)$ կետով և զուգահեռ է 1) $\boldsymbol{a}=\{2;-3;5\}$ վեկտորին, 2) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ ուղղին:

28. Կազմել այն ուղղի կանոնական հավասարումները, որոնք անցնում են հետևյալ երկու կետերով՝ 1) $(1;-2;1),(3;1;-1)$, 2) $(1;2;-4),(-1;2;-4)$:

29. Կազմել այն ուղղի պարամետրական հավասարումները, որն անցնում է $M_1(1;-1;3)$ կետով և զուգահեռ է 1) $\boldsymbol{a}=\{2;3;-4\}$ վեկտորին, 2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{0}$ ուղղին, 3) $x=3t-1$, $y=-2t+3, z=5t+2$ ուղղին:

30. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$, $C(4;-7;-2)$: Կազմել C գագաթից տարված միջնագծի պարամետրական հավասարումները:

31. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$: Կազմել B գագաթի ներքին անկյան կիսորդի կանոնական հավասարումները:

32. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$, $C(5;1;-7)$: Կազմել B գագաթից դիմացի կողմին տարված բարձրության պարամետրական հավասարումները:

33. Կազմել հետևյալ ուղիղների կանոնական և պարամետրական հավասարումները՝

$$1)\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}, \qquad 2)\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}:$$

34. Ապացուցել ուղիղների զուգահեռությունը՝

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ և $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$,

2) $x=2t+5,\ \ y=-t+2, z=t-7$ և

$\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$:

35. Ապացուցել ուղիղների ուղղահայացությունը՝

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ և $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z3=0 \end{cases}$,

2) $x=2t+1,\ \ y=3t-2, z=-6t+1$ և

$\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$:

36. Գտնել ուղիղների կազմած սուր անկյունը՝

$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$; $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$:

37. Ապացուցել, որ պարամետրական տեսքով տրված ուղիղները հատվում են՝

$x=t+5,\ \ y=-4t-1, z=t-4$;

$x=t+5,\ \ y=-4t-1, z=t-41$:

38. Տրված ուղիղները l-ի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում են հատվում

$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$; $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$:

39. Ապացուցել, որ $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$

ուղիղը ընկած է $4x-3y+7z-7=0$ հարթության մեջ:

40. Գտնել ուղղի և հարթության հատման կետը՝

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$; $2x+3y+z-1=0$,

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-5}$; $x-2y+z-15=0$:

41. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(2;-3;-5)$ կետով և ուղղահայաց է $6x-3y-5z+7=0$ հարթությանը:

42. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(1;-1;-1)$ կետով և ուղղահայաց է $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ ուղղին:

43. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(1;-2;1)$ կետով և ուղղահայաց է $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ ուղղին:

44. Գտնել $P(2;-1;3)$ կետի պրոյեկցիան $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$ ուղղի վրա:

45. Գտնել $P(2;-5;7)$ կետի սիմետրիկ Q կետը $M_1(5;4;6)$ և $M_2(-2;-17;-8)$ կետերով անցնող ուղղի նկատմամբ:

46. Գտնել $P(1;3;-4)$ կետի սիմետրիկ Q կետը $3x+y-2z=0$ հարթության նկատմամբ:

47. Գտնել $P(2;3;-1)$ կետի հեռավորությունը հետևյալ ուղիղներից՝

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$,

2) $x=t+1,\ \ y=t+2,\ z=4t+13$,

3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}$:

48. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(1;2;-3)$ կետով և զուգահեռ է $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-725}{3}$, $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$ ուղիղներին:

49. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $x=2t+1,\ \ y=-3t+2,\ z=2t-3$ ուղղով և $M(2;-2;1)$ կետով:

50. Կազմել տրված զուգահեռ ուղիղներով անցնող հարթության հավասարումը՝

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{2}, \qquad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}:$$

51. Գտնել $C(3;-4;-2)$ կետի պրոյեկցիան հետևյալ զուգահեռ ուղիղներով անցնող հարթության վրա՝

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}, \ \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}:$$

52. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $x=3t+1, \quad y=2t+3, z=-t-2$ ուղղով և զուգահեռ է $\begin{cases}2x-y+z-3=0\\ x+2y-z-5=0\end{cases}$ ուղղին:

53. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ ուղղով և ուղղահայաց է $3x+2y-$ $-z-5=0$ հարթությանը:

54. Գտնել հետևյալ խաչվող ուղիղների միջև եղած ամենակարճ հեռավորությունը՝

1) $x=2t-4, \ y=-t+4, z=-2t-1$;
$x=4t-5, \ y=-3t+5, z=-5t+5$;

2) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$; $x=6t+9, \ y=-2t, z=-t+2$:

Թեմա 4: Երկրորդ կարգի կորեր

Էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի կանոնական հավասարումները, ֆոկալ հատկությունները, էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսաները

Նկ. 4.1.

Էլիպս կոչվում է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների գումարը այդ նույն հարթությանը պատկանող տրված երկու F_1 և F_2 կետերից հաստատուն մեծություն է: Տրված F_1 և F_2 կետերը կոչվում են *էլիպսի ֆոկուսներ:*

Դիցուք՝ F_1F_2 հատվածի երկարությունը $2c$ է, իսկ այն հաստատունը, որի մասին խոսվում է էլիպսի սահմանման մեջ, $2a$ է: Պարզ է, որ $2a > 2c \Rightarrow a > c$: Եթե ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգի առանցքներն ընտրենք այնպես, որ էլիպսի ֆոկուսները գտնվեն աբսցիսների առանցքի վրա՝ սիմետրիկ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ապա այդպիսի կոորդինատական համակարգում էլիպսի հավասարումը կունենա այսպիսի տեսք՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (4.1)$$

որտեղ $b^2 = a^2 - c^2$: (4.1)-ն անվանում են *էլիպսի կանոնական հավասարում:*

Ընտրված կոորդինատական համակարգում կոորդինատական առանցքները կլինեն էլիպսի սիմետրիայի առանցքներ (*էլիպսի առանցքներ*), իսկ կոորդինատների սկզբնակետը՝ նրա սիմետրիայի կենտրոն (*էլիպսի կենտրոն*) (նկ. 4.1.): Էլիպսի հատման կետերը առանցքների հետ կոչվում են *էլիպսի գագաթներ*: Էլիպսի հակադիր գագաթները միացնող հատվածները, ինչպես նաև նրանց $2a$ և $2b$ երկարությունները կոչվում են էլիպսի համապատասխանաբար *մեծ և փոքր առանցքներ*, իսկ a և b երկարություններն անվանում են էլիպսի համապատասխանաբար մեծ և փոքր կիսաառանցքներ:

Հետևյալ թիվը՝ $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, անվանում են էլիպսի էքսցենտրիսիտետ: Ակնհայտ է, որ $\varepsilon < 1$: Եթե $M(x, y)$ կետը էլիպսի կամայական կետ է, ապա $F_1M = r_1$ և $F_2M = r_2$ հատվածները անվանում են $M(x, y)$ կետի ***ֆոկալ շառավիղներ***: Ֆոկալ շառավիղները կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ՝

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x:$$

Նկ. 4.2.

Ուղիղները, որոնք ուղղահայաց են էլիպսի ֆոկուսային առանցքին և նրա կենտրոնից ունեն a/ε հեռավորություն (նկ. 4.2.), կոչվում են ***էլիպսի դիրեկտրիսաներ:*** Կարելի է ցույց տալ, որ *էլիպսի ցանկացած կետի՝ ֆոկուսից և համապատասխան դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է և հավասար է ε -ի:*

Հիպերբոլ կոչվում է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների տարբերությունը այդ նույն հարթությանը պատկանող տրված երկու F_1 և F_2 կետերից հաստատուն մեծություն է: Տրված F_1 և F_2 կետերը կոչվում են *հիպերբոլի ֆոկուսներ:*

Նկ. 4.3.

Դիցուք՝ F_1F_2 հատվածի երկարությունը $2c$ է, իսկ այն հաստատունը, որի մասին խոսվում է հիպերբոլի սահմանման մեջ, $2a$ է: Պարզ է, որ $2a < 2c \Rightarrow a < c$: Եթե ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգի առանցքներն ընտրենք այնպես, որ ֆոկուսներն ընկած լինեն աբսցիսների առանցքի վրա և սիմետրիկ լինեն կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ապա

հիպերբոլը այդ կոորդինատական համակարգում կնկարագրվի հետևյալ հավասարումով՝

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (4.2)$$

որտեղ $b^2=c^2-a^2$: (4.2)-ն անվանում են ***հիպերբոլի կանոնական հավասարում:***

Նշված կոորդինատական համակարգում *կոորդինատական առանցքները հիպերբոլի սիմետրիայի առանցքներն են և կոչվում են հիպերբոլի առանցքներ, կոորդինատների սկզբնակետը հիպերբոլի սիմետրիայի կենտրոնն է և կոչվում է հիպերբոլի կենտրոն:* Հիպերբոլի հատման կետերը սիմետրիայի առանցքների հետ կոչվում են *հիպերբոլի գագաթներ*:

(4.2) կանոնական հավասարումով որոշվող հիպերբոլը Ox առանցքի հետ հատվում է երկու՝ $A(-a,0)$ և $B(a,0)$ կետերում (նկ. 4.3.), իսկ Oy առանցքի հետ հատման կետ չունի: Հիպերբոլի հետ հատվող սիմետրիայի առանցքը կոչվում է *հիպերբոլի իրական առանցք,* իսկ չհատվող սիմետրիայի առանցքը՝ *հիպերբոլի կեղծ առանցք:*

$2a$ և $2b$ կողմերով ուղղանկյունը, որը սիմետրիկ է դասավորված հիպերբոլի առանցքների նկատմամբ և շոշափում է նրա գագաթները, անվանում են *հիպերբոլի հիմնական ուղղանկյուն* (նկ. 4.3.)*:* Հիմնական ուղղանկյան անկյունագծերը պարունակող ուղիղներն անվանում են *հիպերբոլի ասիմպտոտներ*: Դրանց հավասարումներն են՝ $y=\pm\frac{b}{a}x$:

Հետևյալ թիվը՝ $\varepsilon=\frac{c}{a}$, անվանում են հիպերբոլի *էքսցենտրիսիտետ*, ընդ որում՝ քանի որ այժմ $c>a$, ապա $\varepsilon>1$: Դիցուք՝ M-ը հիպերբոլին պատկանող կետ է x և y կոորդինատներով: Նշանակենք r_1 և r_2-ով M կետի հեռավորությունները համապատասխանաբար F_1 և F_2 ֆոկուսներից, որոնց կանվանենք M կետի ֆոկալ շառավիղներ: Հիպերբոլի M կետի r_1 և r_2 ֆոկալ շառավիղների համար ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը՝

$$r_1=a+\varepsilon x, \quad r_2=-a+\varepsilon x \quad \text{(աջ ճյուղ)},$$

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x \text{ (ձախ ճյուղ):} \tag{4.3}$$

$x = \pm a/\varepsilon$ ուղիղները, որոնք ուղղահայաց են հիպերբոլի ֆոկուսային առանցքին և նրա կենտրոնից ունեն a/ε հեռավորություն, կոչվում են հիպերբոլի աջ և ձախ ֆոկուսներին համապատասխանող *դիրեկտրիսաներ* (նկ. 4.4.):

Նկ. 4.4.

Հիպերբոլի ցանկացած կետի՝ ֆոկուսից և համապատասխան դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է և հավասար է ε -ի:

Պարաբոլ է կոչվում հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հավասարապես են հեռացված այդ հարթությանը պատկանող ֆիքսված F կետից և ֆիքսված ուղղից, ընդ որում՝ F կետը կոչվում է *պարաբոլի ֆոկուս*, իսկ ուղիղը՝ *պարաբոլի դիրեկտրիսա:*

Եթե կոորդինատական համակարգի O սկզբնակետն ընտրենք FD հատվածի միջնակետում, որտեղ D-ն F ֆոկուսից դիրեկտրիսային իջեցված ուղղահայացի հիմքն է, իսկ Ox և Oy առանցքներն ուղղենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկ. 4.5.-ում, ապա պարաբոլը կնկարագրվի հետևյալ հավասարումով, որն անվանում են պարաբոլի կանոնական հավասարում՝

$$y^2 = 2px, \tag{4.4}$$

p մեծությունը կոչվում է *պարաբոլի պարամետր:*

Նկ. 4.5.

(4.4) կանոնական հավասարումով որոշվող պարաբոլն ունի մեկ սիմետրիայի առանցք՝ Ox, որն անվանում են *պարաբոլի առանցք:*

Պարաբոլի հատման կետը նրա առանցքի հետ կոչվում է *պարաբոլի գագաթ, որն այս դեպքում կոորդինատների սկզբնակետն է:* Դիցուք՝ M կետը պարաբոլի ցանկացած կետ է: Այդ կետի ֆոկալ շառավիղը, այսինքն՝ ֆոկուսից ունեցած հեռավորությունը, կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝ $r = x + \frac{p}{2}$:

Քանի որ պարաբոլը, ըստ սահմանման, այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ է, որոնք հավասարապես են հեռացված տրված կետից՝ ֆոկուս, և տրված ուղղից՝ դիրեկտրիսա, ապա պարաբոլի ցանկացած M կետի ֆոկուսից ունեցած հեռավորության հարաբերությունը դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորությանը հավասար կլինի 1-ի: Այդ պատճառով էլ *պարաբոլի էքսցենտրիսիտետն ընդունում են հավասար 1-ի:* Պարաբոլի դիրեկտրիսայի հավասարումն է՝ $x = -\frac{p}{2}$:

Էլիպսի հիպերբոլի պարաբոլի շոշափողի հավասարումներն են համապատասխանաբար՝

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1, \quad \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1, \quad Yy = p\left(X + x\right),$$

որտեղ $\left(X, Y\right)$ կետը շոշափման կետն է:

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 4.1: Տրված է $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$ էլիպսը: Գտնել ֆոկուսի կոորդինատները, էքսցենտրիսիտետը, դիրեկտրիսաների հավասարումները, այն կետերի կոորդինատները, որոնց ֆոկալ շառավիղների (այսինքն՝ ֆոկուսներից ունեցած հեռավորությունների) արտադրյալը հավասար է փոքր կիսաառանցքի քառակուսուն:

Լուծում: Տրված էլիպսի համար $a=7$ և $b=5$, հետևաբար ֆոկուսից կենտրոն եղած հեռավորությունը կլինի՝

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-25}=2\sqrt{6}:$$

Այսպիսով՝ ֆոկուսների կոորդինատներն են՝

$$F_1\left(-2\sqrt{6};0\right);\quad F_2\left(2\sqrt{6};0\right),$$

իսկ էքսցենտրիսիտետը՝

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{6}}{7}:$$

Դիրեկտրիսաների հավասարումները կստացվեն $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ բանաձևից՝

$$x=\pm\frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{7}}=\pm\frac{49}{2\sqrt{6}}:$$

Այժմ գտնենք պահանջվող կետերի կոորդինատները: Ըստ պայմանի՝

$$b^2=r_1r_2=\left(a+\varepsilon x\right)\left(a-\varepsilon x\right)=a^2-\varepsilon^2x^2,$$

կամ

$$25=49-\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2x^2,$$

$$x=\pm 7:$$

Այդ կետերի օրդինատները կգտնենք էլիպսի հավասարումից՝

$$\frac{(\pm 7)^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1,$$

որտեղից՝

$$y=\pm 5:$$

Որոնելի կետերն են $(7;5);(-7;-5);(7;-5);(-7;5)$:■

Խնդիր 4.2: Կազմել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե նրա մեծ կիսաառանցքը հավասար է 10, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ $0,8$:

Լուծում: Էլիպսի կանոնական հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1:$$

Քանի որ ըստ պայմանի $a=10$, ապա խնդրի պայմաններից պետք է որոշել b-ն:

Հայտնի է, որ $\varepsilon=c/a=0,8$: Այստեղից, տեղադրելով $a=10$, կստանանք $c=8$:

Իմանալով a-ն և c-ն՝ $b^2=a^2-c^2$ բանաձևից կարող ենք գտնել b-ն՝

$$b^2=100-64=36;\quad b=6:$$

Այսպիսով՝ էլիպսի որոնելի հավասարումն է՝

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1:■$$

Խնդիր 4.3: Կազմել $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ էլիպսի շոշափողի հավասարումները՝ տարված $A(12;-3)$ կետից:

Լուծում: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի շոշափողի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

որտեղ $(x_0;y_0)$-ն շոշափման կետն է: Տրված էլիպսի շոշափողի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x_0x}{32}+\frac{y_0y}{18}=1:$$

Քանի որ շոշափողն անցնում է $A(12;-3)$ կետով, ապա A կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն այդ հավասարմանը: Տեղադրելով A կետի կոորդինատները վերջին հավասարման մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{12x_0}{32}-\frac{3y_0}{18}=1,$$

կամ

$$9x_0-4y_0=24:$$

Սակայն $(x_0;y_0)$ շոշափման կետը պատկանում է էլիպսին, հետևաբար՝

$$\frac{x_0^2}{32}+\frac{y_0^2}{18}=1:$$

Վերջին երկու հավասարումները լուծելով համատեղ՝ կգտնենք երկու լուծում՝

$$x_0'=4,\quad y_0'=3,$$

$$x_0''=\frac{4}{5},\quad y_0''=-\frac{21}{5}:$$

Որոնելի շոշափողները երկուսն են: Դրանց հավասարումները կստացվեն $\frac{x_0x}{32}+\frac{y_0y}{18}=1$ հավասարման մեջ x_0 և y_0-ի փոխարեն տեղադրելով մի դեպքում 4 և 3, մյուս դեպքում՝ $4/5$ և $-21/5$:

Այսպիսով՝

$$\frac{4x}{32}+\frac{3y}{18}=1,\qquad \frac{4/5\,x}{32}-\frac{21/5\,y}{18}=1,$$

կամ որ նույնն է՝

$$3x+4y-24=0,$$

$$3x-28y-120=0:\ \blacksquare$$

Խնդիր 4.4: Որոշել $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ հավասարումով որոշվող հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը, դիրեկտրիսաների հավասարումները, ասիմպտոտների հավասարումները:

Լուծում: Ըստ հիպերբոլի (4.2) կանոնական հավասարման՝ տրված հիպերբոլի համար $a=6$ և $b=3$, հետևաբար՝

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5:$$

Հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը հաշվում են հետևյալ բանաձևով՝ $\varepsilon=c/a=5/3$: Հիպերբոլի ֆոկուսներն ու գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները՝

$$F_1(-5;0),\ F_2(5;0),\ A_1(-3;0),\ A_2(3;0),\ \ B_1(0;-4),B_2(0;4):$$

Հիպերբոլի դիրեկտրիսաների հավասարումներն են՝

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{9}{5}:$$

Հիպերբոլի ասիմպտոտների հավասարումներն են՝

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x:\blacksquare$$

Խնդիր 4.5: Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե հայտնի են նրա ասիմպտոտները՝ $y=\pm\frac{1}{2}x$, և նրան պատկանող M կետի կոորդինատները՝ $M\left(12;3\sqrt{3}\right)$:

Լուծում: Գրենք հիպերբոլի կանոնական հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1:$$

Մեզ պետք է որոշել որոնելի հիպերբոլի a և b պարամետրերի արժեքները:

Հիպերբոլի ասիմպտոտների հավասարումներն ունեն այսպիսի տեսք՝

$$y=\pm\frac{b}{a}x:$$

Ըստ պայմանի՝ ունենք, որ որոնելի հիպերբոլի ասիմպտոտների հավասարումներն են $y=\pm\frac{1}{2}x$: Այստեղից կարող ենք գրել, որ $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$: Սա a-ն և b-ն գտնելու մի պայմանն է: Մյուս կողմից՝ M կետը պատկանում է հիպերբոլին, հետևաբար նրա $\left(12;3\sqrt{3}\right)$ կոորդինատները բավարարում են հիպերբոլի հավասարմանը՝

$$\frac{144}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1:$$

Այսպիսով՝ կունենանք երկու հավասարում a և b պարամետրերը որոշելու համար՝

$$\begin{cases}\frac{144}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1\\ \frac{b}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}:$$

Վերջինս լուծելով՝ կստանանք $a^2=36$ և $b^2=9$:

Այսպիսով՝ որոնելի հիպերբոլի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1:\blacksquare$$

Խնդիր 4.6: $y^2=12x$ հավասարումով որոշվող պարաբոլի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից հավասար է նրա՝ ֆոկուսից ունեցած հեռավորությանը (նկ. 4.6.):

Լուծում: Որոնելի M կետի հեռավորությունը ֆոկուսից՝

$$MO=MF=x+\frac{p}{2}=x+3:$$

MOC եռանկյունուց ունենք՝

$$MO=\sqrt{x^2+y^2},$$

որտեղից՝

$$x+3=\sqrt{x^2+y^2};$$

Նկ. 4.6.

$$x^2+6x+9=x^2+y^2:$$

y^2 -ու փոխարեն տեղադրենք $12x$, կստանանք՝

$$x=\frac{3}{2};\ y=3\sqrt{2}:\blacksquare$$

Տիպային խնդիրներ

1. Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե նրա ֆոկուսները գտնվում են աբսցիսների առանցքի վրա, սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, և

1) կիսաառանցքները հավասար են 5 և 2,
2) մեծ առանցքը 10 է, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 8,
3) փոքր առանցքը 24 է, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 10,
4) մեծ առանցքը 20 է, էքսցենտրիսիտետը՝ $3/5$,
5) դիրեկտրիսաների միջև եղած հեռավորությունը 5 է, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 4,
6) դիրեկտրիսաների միջև հեռավորությունը 32 է, էքսցենտրիսիտետը՝ $1/2$,
7) $M_1\left(-2\sqrt{5};2\right)$ կետը պատկանում է էլիպսին, իսկ փոքր կիսաառանցքը 3 է,
8) $M_1\left(4;-\sqrt{3}\right)$ և $M_2\left(2\sqrt{2};3\right)$ կետերը պատկանում են էլիպսին,
9) $M_1\left(\sqrt{15};-1\right)$ կետը պատկանում է էլիպսին, միջֆոկուսային հեռավորությունը 8 է,
10) $M_1\left(2;-5/3\right)$ կետը պատկանում է էլիպսին, էքսցենտրիսիտետը $2/3$ է,

11) $M_1(8;12)$ կետը պատկանում է էլիպսին և ձախ ֆոկուսից գտնվում է 20 հեռավորության վրա,

12) $M_1(-\sqrt{5};2)$ կետը պատկանում է էլիպսին, դիրեկտրիսաների միջև հեռավորությունը 10 է:

2. Էլիպսի էքսցենտրիսիտետը $2/3$ է, M կետի ֆոկալ շառավիղը՝ 10: Հաշվել M կետի և այդ ֆոկուսին համապատասխանող դիրեկտրիսայի միջև հեռավորությունը:

3. Համոզվել, որ $M_1(-4;2,4)$ կետը պատկանում է $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ էլիպսին, որոշել նրա ֆոկալ շառավիղները:

4. Էլիպսի էքսցենտրիսիտետը $1/3$ է, կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, ֆոկուսներից մեկը $(-2,0)$-ն է: Որոշել էլիպսի՝ 2-ին հավասար աբսցիս ունեցող M կետի հեռավորությունը տրված ֆոկուսի հետ միակողմանի դիրեկտրիսայից:

5. Որոշել $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ էլիպսի այն կետերը, որոնց հեռավորությունը աջ ֆոկուսից հավասար է 14-ի:

6. Որոշել $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ էլիպսի այն կետերը, որոնց հեռավորությունը ձախ ֆոկուսից հավասար է 2,5-ի:

7. Կազմել $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ էլիպսի շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $4x-2y+23=0$ ուղղին, և հաշվել նրանց միջև հեռավորությունը:

8. $A\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3}\right)$ կետից տարված են $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ էլիպսին շոշափողներ: Կազմել դրանց հավասարումները:

9. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե նրա ֆոկուսները գտնվում են աբսցիսների առանցքի վրա, սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, և

1) առանցքները հավասար են՝ $2a = 10$ և $2b = 8$,
2) առանցքը $2b = 8$ է, միջֆոկուսային հեռավորությունը $2c = 10$ է,
3) առանցքը $2a = 16$ է, էքսցենտրիսիտետը՝ $5/4$,
4) ասիմպտոտների հավասարումներն են $y = \pm\frac{4}{3}x$, միջֆոկուսային հեռավորությունը $2c = 20$ է,
5) դիրեկտրիսաների միջև հեռավորությունը $22\frac{2}{13}$ է, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ $2c = 26$,
6) դիրեկտրիսաների միջև հեռավորությունը $\frac{8}{3}$ է, էքսցենտրիսիտետը՝ $\frac{3}{2}$:
7) $M_1(-5;3)$ կետը պատկանում է հիպերբոլին, իսկ էքսցենտրիսիտետը $\sqrt{2}$ է,
8) $M_1(6;-1)$ և $M_2(-8;2\sqrt{2})$ կետերը պատկանում են հիպերբոլին,
9) $M_1\left(\frac{9}{2};-1\right)$ կետը պատկանում է հիպերբոլին, $y = \pm\frac{4}{3}x$-ը ասիմպտոտների հավասարումներն են,
10) $M_1(-3;-5/2)$ կետը պատկանում է հիպերբոլին, $x = \pm\frac{4}{3}$-ը դիրեկտրիսաների հավասարումներն են,
11) $y = \pm\frac{3}{4}x$-ը ասիմպտոտների հավասարումներն են, $x = \pm\frac{16}{5}$-ը դիրեկտրիսաների հավասարումներն են:

10. Հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը 2 է, կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետում է, ֆոկուսներից մեկը $F(12,0)$-ն է: Հաշվել հիպերբոլի 13 աբսցիս ունեցող կետի հեռավորությունը տրված ֆոկուսի հետ միակողմանի դիրեկտրիսայից:

11. Համոզվել, որ $M_1(-5;9/4)$ կետը պատկանում է $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ հիպերբոլին, որոշել նրա ֆոկալ շառավիղները:

12. Հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը 3 է, հիպերբոլի M կետի հեռավորությունը դիրեկտրիսայից հավասար է 4-ի: Գտնել M կետի հեռավորությունը տրված դիրեկտրիսայի հետ միակողմանի ֆոկուսից:

13. Որոշել $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ հիպերբոլի այն կետերը, որոնց հեռավորությունը աջ ֆոկուսից հավասար է 4,5-ի:

14. Որոշել $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ հիպերբոլի այն կետերը, որոնց հեռավորությունը ձախ ֆոկուսից հավասար է 7-ի:

15. Կազմել $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ հիպերբոլի շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $10x-3y+9=0$ ուղղին:

16. Կազմել $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ հիպերբոլի շոշափողների հավասարումները, որոնք ուղղահայաց են $4x+3y-7=0$ ուղղին:

17. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, եթե

1) պարաբոլը գտնվում է աջ կիսահարթությունում, սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ, իսկ պարամետրը $p=3$ է,
2) պարաբոլը գտնվում է ձախ կիսահարթությունում, սիմետրիկ է Ox-ի նկատմամբ, իսկ պարամետրը $p=0,5$ է:

18. Որոշել $y^2=24x$ պարաբոլի ֆոկուսը և դիրեկտրիսայի հավասարումը:

19. Որոշել $y^2=24x$ պարաբոլի 7 աբսցիս ունեցող M կետի ֆոկալ շառվիղը:

20. Որոշել $y^2 = 12x$ պարաբոլի 6 օրդինատ ունեցող M կետի ֆոկալ շառավիղը:

21. $y^2 = 16x$ պարաբոլի վրա գտնել կետեր, որոնց ֆոկալ շառավիղը 13 է:

22. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, եթե տրված է $F(7;2)$ ֆոկուսը և $x - 5 = 0$ դիրեկտրիսան:

23. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որը շոշափում է $y^2 = 8x$ պարաբոլը և զուգահեռ է $2x + 2y - 3 = 0$ ուղղին:

24. Տանել $y^2 = 12x$ պարաբոլին շոշափողներ, որոնք զուգահեռ են $3x - 2y + 30 = 0$ ուղղին, և հաշվել նրանց միջև հեռավորությունը:

25. Կազմել $y^2 = 36x$ պարաբոլին $A(2;9)$ կետից տարված շոշափողների հավասարումները:

Թեմա 5: Մատրիցներ և որոշիչներ

Մատրիցի սահմանումը, գործողություններ մատրիցների հետ, որոշիչի սահմանումը, հատկությունները: Հակադարձ մատրից, մատրիցի ռանգ

Մատրիցի սահմանումը: m տող և n սյուն ունեցող ուղղանկյուն թվային աղյուսակն անվանում են $m \times n$ կարգի մատրից: Այն դեպքում, երբ $m = n$, մատրիցն անվանում են $m = n$ կարգի ***քառակուսային մատրից:*** Մատրիցների գրառման համար օգտագործում են հետևյալ նշանակումները՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ կամ } A = \left\| a_{ij} \right\| = \left(a_{ij} \right), i = \overline{1,m} \;\; j = \overline{1,n} \;,$$

որտեղ a_{ij} թվերն անվանում են մատրիցի ***տարրեր***, ընդ որում՝ առաջին կարգահամարը ցույց է տալիս տողի, իսկ երկրորդը՝ սյան համարը:

n-րդ կարգի քառակուսային մատրիցի $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ տարրերի համախումբն անվանում են մատրիցի ***գլխավոր*** իսկ $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ տարրերի համախումբը՝ ***երկրորդական*** անկյունագիծ:

Այն քառակուսային մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծի վրա չգտնվող բոլոր տարրերը զրոներ են, անվանում են ***անկյունագծային մատրից:***

Այն անկյունագծային մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերը հավասար են, անվանում են ***սկալյար մատրից:*** Սկալյար մատրիցներից կառանձնացնենք երկուսը. n-րդ կարգի ***միավոր մատրիցը***՝ E-ն, որի գլխավոր անկյունագծի վրա մեկեր են, n-րդ կարգի ***զրոյական մատրիցը***՝ O-ն, որի գլխավոր անկյունագծի վրա զրոներ են:

Մատրիցների գումարում: Միևնույն $m \times n$ կարգի $A = \left(a_{ij} \right)$ և $B = \left(b_{ij} \right)$ մատրիցների ***գումար*** կոչվում է այն $m \times n$ կարգի $C = \left(c_{ij} \right)$ մատրիցը, որի c_{ij} տարրերը հավասար են

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m} \;\; j = \overline{1,n}\right): \tag{5.1}$$

Գործողությունը, որը երկու մատրիցներին համապատասխանեցնում է նրանց գումարը, անվանում են ***մատրիցների գումարում:*** Մատրիցների գումարումը գրառում են հետևյալ կերպ՝ $C = A + B$:

Մատրիցի բազմապատկումը թվով: $A = \left(a_{ij}\right)$ $m \times n$ կարգի մատրիցի և λ թվի արտադրյալ կոչվում է այն $C = \left(c_{ij}\right)$ $m \times n$ կարգի մատրիցը, որի c_{ij} տարրերը հավասար են

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m} \;\; j = \overline{1,n}\right): \tag{5.2}$$

Գործողությունը, որը մատրիցին և թվին համապատասխանեցնում է նրանց արտադրյալը, անվանում են ***մատրիցի բազմապատկում թվով:*** Մատրիցի բազմապատկումը թվով գրառում են հետևյալ կերպ՝ $C = \lambda A$ կամ $C = A\lambda$:

Մատրիցների գումարումը և թվով բազմապատկումը անվանում են ***գծային գործողություններ:*** Մատրիցների հետ *գծային գործողությունների հատկություններն են* ՝

1) գումարման տեղափոխական հատկություն՝ $A + B = B + A$,
2) գումարման զուգորդական հատկություն՝
   $\left(A + B\right) + C = A + \left(B + C\right)$,
3) զուգորդական հատկություն թվային արտադրիչի նկատմամբ՝
   $\left(\lambda\mu\right)A = \lambda\left(\mu A\right)$,
4) բաշխական հատկություն մատրիցների գումարման նկատմամբ՝ $\lambda\left(A + B\right)A = \lambda A + \lambda B$,
5) բաշխական հատկություն թվերի գումարման նկատմամբ՝
   $\left(\lambda + \mu\right)A = \lambda A + \mu A$:

Մատրիցների բազմապատկում: $A = \left(a_{ij}\right)$ $m \times n$ կարգի և $B = \left(b_{ij}\right)$ $n \times p$ կարգի մատրիցների արտադրյալ կոչվում է այն $C = \left(c_{ij}\right)$ $m \times p$ կարգի մատրիցը, որի c_{ij} տարրերը հավասար են

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \left(i = \overline{1,m} \;\; j = \overline{1,p}\right): \tag{5.3}$$

Գործողությունը, որը երկու մատրիցներին համապատասխանեցնում է նրանց արտադրյալը, անվանում են ***մատրիցների բազմապատկում:*** Մատրիցների բազմապատկումը գրառում են հետևյալ կերպ՝

$$C = A \cdot B:$$

Մատրիցների բազմապատկման հատկություններն են՝

1) զուգորդական հատկություն՝ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
2) բաշխական հատկություն մատրիցների գումարման նկատմամբ՝ $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ և $C \cdot (A + B) = = C \cdot A + C \cdot B$,
3) մատրիցների բազմապատկումը, ընդհանրապես ասած, տեղափոխելի չէ: Սակայն եթե D-ն n-րդ կարգի սկալյար մատրից է, ապա n-րդ կարգի ցանկացած A մատրիցի համար $A \cdot D$ և $D \cdot A$ արտադրյալները հավասար են, մասնավորապես $A \cdot E = E \cdot A = A$ և $A \cdot O = O \cdot A = O$:

n-րդ կարգի որոշիչի սահմանումը ինդուկցիայի միջոցով:

Դիտարկենք n-րդ կարգի քառակուսային մատրից՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (5.4)$$

և ***ինդուկտիվ եղանակով*** նրան համապատասխանեցնենք թվային բնութագրիչ, որին կանվանենք n-րդ կարգի մատրիցին համապատասխանող որոշիչ կամ ***n-րդ կարգի որոշիչ:***

Երբ $n = 1$, (5.4) մատրիցը բաղկացած է մեկ՝ a_{11} տարրից, և որպես առաջին կարգի որոշիչ սահմանենք հենց այդ տարրի մեծությունը՝ a_{11} թիվը:

Երբ $n = 2$, (5.4) մատրիցը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}: \qquad (5.5)$$

Որպես (5.5) երկրորդ կարգի մատրիցին համապատասխանող որոշիչ ընդունենք $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ թիվը և գրառենք հետևյալ նշանակումներից որևէ մեկով՝

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} : \qquad (5.6)$$

Ենթադրենք՝ սահմանվել է $n-1$-րդ կարգի որոշիչը: *n-րդ կարգի (5.4) մատրիցի ցանկացած a_{ij}* ***տարրի մինոր*** *կանվանենք այն $n-1$-րդ կարգի մատրիցին համապատասխանող որոշիչը, որը ստացվում է (5.4) մատրիցից՝ նրա i-րդ տողի և j-րդ սյան հեռացման արդյունքում: a_{ij}* տարրի մինորը նշանակվում է $\overline{M_i^j}$ սիմվոլով:

n-րդ կարգի որոշիչի սահմանումը: *(5.4) մատրիցին համապատասխանող n-**րդ կարգի որոշիչ** կանվանենք՝ $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j}\overline{M_j^1}$-ին հավասար թիվը և կնշանակենք հետևյալ կերպ՝*

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j}\overline{M_j^1} : \qquad (5.7)$$

Վերջինս անվանում են ***n-րդ կարգի որոշիչի վերլուծություն ըստ առաջին տողի:***

Թեորեմ 5.1: (5.4) մատրիցին համապատասխանող n-րդ կարգի որոշիչի համար ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը՝

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}\overline{M_j^i}, \quad i = 1,2,\dots,n, \qquad (5.8)$$

$$\Delta = \det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}\overline{M_j^i} \qquad j = 1,2,\dots,n: \qquad (5.9)$$

(5.8) և (5.9) բանաձևերն անվանում են ***n-րդ կարգի որոշիչի վերլուծություններ ըստ համապատասխանաբար i-րդ տողի և j-րդ սյան:***

Որոշիչի ներկայացումն անմիջականորեն իր տարրերի միջոցով: Դիտարկենք $1,2,\dots,n$ թվերի ցանկացած $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ դասավորություն ($\alpha_i \neq \alpha_j$ երբ $i \neq j$) կամ, այլ կերպ ասած, $1,2,\dots,n$ թվերի ցանկացած ***տեղափոխություն:*** $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ թվերից կազմենք որևէ α_i,α_j զույգ:

Կասենք, որ α_i, α_j *զույգն ունի* ***կարգախախտում****, եթե* $\alpha_i > \alpha_j$ *այն դեպքում, երբ* $i < j$ *:* Նշանակենք $N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$-ով $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ տեղափոխության բոլոր հնարավոր α_i, α_j զույգերի կարգախախտումների քանակը:

Թեորեմ 5.2: (5.4) մատրիցին համապատասխանող n-րդ կարգի որոշիչի համար ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը՝

$$\Delta = \det A = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} ... a_{\alpha_n n},$$

$$\Delta = \det A = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{n\alpha_n}, \qquad (5.10)$$

որտեղ գումարումը կատարվում է ըստ $1,2,...,n$ թվերի բոլոր հնարավոր $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ տեղափոխությունների:

Որոշիչի հատկությունները:

Հատկություն 1 (որոշիչի տողերի և սյուների իրավահավասարության հատկություն): Մատրիցի որոշիչը տրանսպոնացումից (որի արդյունքում մատրիցի տողերը դառնում են սյուներ, սյուները՝ տողեր՝ պահպանելով իրենց հերթականությունը) չի փոխվում:

Հատկություն 2 (որոշիչի հակասիմետրիկության հատկություն տողերի (սյուների) տեղափոխման ժամանակ): Որոշիչի երկու տողերի (երկու սյուների) տեղափոխումից նրա բացարձակ արժեքը չի փոխվում, սակայն փոխվում է նշանը:

Հատկություն 3 (որոշիչի գծայնություն): Եթե n-րդ կարգի Δ որոշիչի որևէ k-րդ տող $(1 \le k \le n)$ իրենից ներկայացնում է $b_{k1}, b_{k2}, ..., b_{kn}$ և $c_{k1}, c_{k2}, ..., c_{kn}$ տողերի գծային կոմբինացիա λ և μ գործակիցներով, ապա $\Delta = \lambda\Delta_1 + \mu\Delta_2$, որտեղ Δ_1-ը որոշիչ է, որի k-րդ տողը հավասար է $b_{k1}, b_{k2}, ..., b_{kn}$, իսկ մյուս տողերը նույնն են, ինչ որ Δ որոշիչում, Δ_2-ը որոշիչ է, որի k–րդ տողը հավասար է $b_{k1}, b_{k2}, ..., b_{kn}$, իսկ մյուս տողերը նույնն են, ինչ որ Δ որոշիչում:

Վերոհիշյալ երեք հատկությունները որոշիչի բնույթը պարզաբանող *հիմնական հատկություններն են*: Այժմ կձևակերպենք դրանցից բխող ևս հինգ հատկություն:

Հետևանք 1: *Հավասար տողեր (կամ սյուներ) պարունակող որոշիչը հավասար է զրոյի:*

Հետևանք 2: *Որոշիչի որևէ տողի (կամ սյան) բոլոր տարրերը λ թվով բազմապատկելը համարժեք է այդ որոշիչը նույն λ թվով բազմապատկելուն, կամ որ նույնն է՝ որոշիչի որևէ տողի (կամ սյան) ընդհանուր արտադրիչը կարելի է դուրս բերել որոշիչի նշանից դուրս:*

Հետևանք 3: *Եթե որոշիչի որևէ տողի (կամ սյան) տարրերը զրոներ են, ապա որոշիչը ևս հավասար է զրոյի:*

Հետևանք 4: *Համեմատական տողեր (կամ սյուներ) պարունակող որոշիչը հավասար է զրոյի:*

Հետևանք 5: *Եթե որոշիչ որևէ տողի (կամ սյան) տարրերին գումարենք նրա մեկ այլ տողի (կամ սյան) համապատասխան տարրերը ցանկացած λ թվով բազմապատկված, ապա որոշիչի մեծությունը չի փոխվի:*

Օգտվելով որոշիչի սահմանումից և հատկություններից՝ կարելի է ապացուցել, որ

Պնդում 5.1: Գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ ***եռանկյունաձև որոշիչը*** (գլխավոր անկյունագծից վերև կամ ներքև ընկած բոլոր տարրերը զրոներ են) հավասար է գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալին:

Պնդում 5.2: Երկրորդական անկյունագծի նկատմամբ ***եռանկյունաձև որոշիչը*** (երկրորդական անկյունագծից վերև կամ ներքև ընկած բոլոր տարրերը զրոներ են) հավասար է $(-1)^{n(n-1)/2}$ թվի և երկրորդական անկյունագծի տարրերի արտադրյալին:

Մատրիցների գումարի և արտադրյալի որոշիչը: *n-րդ կարգի երկու A և B քառակուսային մատրիցների գումարի որոշիչը հավասար է բոլոր հնարավոր այնպիսի n-րդ կարգի որոշիչների գումարին, որոնք ստացվում են, եթե դրանց տողերի (սյուների) մի մասը վերցնենք A մատրիցի համապատասխան տողերին (սյուներին) հավասար, իսկ մյուս մասը՝ B մատրիցի համապատասխան տողերին (սյուներին) հավասար:*

Միևնույն n-րդ կարգի երկու A և B քառակուսային մատրիցների արտադրյալի՝ որոշիչը հավասար է արտադրիչների որոշիչների արտադրյալին.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B : \qquad (5.11)$$

Հակադարձ մատրից: Դիցուք՝ A-ն n-րդ կարգի քառակուսի մատրից է, իսկ E-ն նույն կարգի միավոր մատրից է: n-րդ կարգի A^{-1} քառակուսի մատրիցն անվանում են A մատրիցի *հակադարձ,* եթե

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E:$$

Նշանակենք $A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M_j^i}$, որն անվանում են a_{ij} *տարրի հանրահաշվական լրացում:*

Թեորեմ 5.3: Որպեսզի A մատրիցն ունենա հակադարձ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\Delta = \det A \neq 0$: Հակադարձ մատրիցն այս դեպքում որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n1}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}: \qquad (5.12)$$

Մատրիցի ռանգի սահմանումը: Դիցուք՝ A-ն $m \times n$ կարգի (ոչ անպայման քառակուսային) մատրից է, իսկ k-ն m և n թվերից փոքրագույնը չգերազանցող բնական թիվ է:

Սահմանում: A մատրիցի k*-րդ կարգի մինոր* անվանում են այն k-րդ կարգի որոշիչը, որը կազմված է A մատրիցի ցանկացած k տողերի և ցանկացած k սյուների հատման տեղերում գրված տարրերով:

Ենթադրենք՝ A մատրիցն ունի գոնե մեկ՝ զրոյից տարբեր տարր:

Սահմանում (մատրիցի ռանգի): $r \leq \min\{m, n\}$ թիվն անվանում են A մատրիցի ռանգ, եթե տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները՝

1) գոյություն ունի A մատրիցի r-րդ կարգի զրոյից տարբեր մինոր,

2) A մատրիցի ցանկացած $(r+1)$-րդ և ավելի բարձր կարգի մինորները, եթե կան այդպիսիք, հավասար են զրոյի:

Վերոհիշյալ r-րդ կարգի՝ զրոյից տարբեր մինորը կանվանենք A մատրիցի ***բազիսային մինոր***, A մատրիցի տողերը և սյուները, որոնց

հատման տեղերում է գտնվում բազիսային մինորը, կանվանենք համապատասխանաբար ***բազիսային տողեր*** և ***բազիսային սյուներ:***

Թեորեմ 5.4 (թեորեմ բազիսային մինորի վերաբերյալ): Մատրիցի բազիսային տողերը (սյուները) գծորեն անկախ են: Մատրիցի ցանկացած տող (սյուն) ներկայացվում է բազիսային տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիայի միջոցով:

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 5.1: Տրված են A, B, C մատրիցները: Հաշվել $2A+3B^T-C$ արտահայտության արժեքը, եթե՝

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\4&3&5\\0&7&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&1&-7\\3&4&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-2&1\\3&4&5\end{pmatrix}:$$

Լուծում: Գտնենք արտահայտության արժեքը՝ հաջորդաբար կատարելով գործողությունները՝

$$2A=2\begin{pmatrix}2&0&-1\\4&3&5\\0&7&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&-2\\8&6&10\\0&14&-8\end{pmatrix};$$

$$3B^T=3\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&1&-7\\3&4&4\end{pmatrix}^T=3\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&1&4\\5&-7&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&9\\-9&3&12\\15&-21&12\end{pmatrix};$$

$$2A+3B^T-C=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 8 & 6 & 10\\ 0 & 14 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ -9 & 3 & 12\\ 15 & -21 & 12\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6 & 7\\ -3 & 11 & 21\\ 12 & -11 & -1\end{pmatrix}:\blacksquare$$

Խնդիր 5.2: Տրված են A և B մատրիցները: Հաշվել AB և BA արտադրյալները, եթե

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}:$$

Լուծում: Ըստ մատրիցների արտադրյալի սահմանման՝

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 6+0\cdot 2+3\cdot(-3) & -1\cdot 0+0\cdot(-2)+3\cdot 1\\ 1\cdot 6+3\cdot 2+(-4)\cdot(-3) & 1\cdot 0+3\cdot(-2)+(-4)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 3\\ 24 & -10\end{pmatrix}:$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot(-1)+0\cdot 1 & 6\cdot 0+0\cdot 3 & 6\cdot 3+0\cdot(-4)\\ 2\cdot(-1)+(-2)\cdot 1 & 2\cdot 0+(-2)\cdot 3 & 2\cdot 3+(-2)\cdot(-4)\\ (-3)\cdot(-1)+1\cdot 1 & (-3)\cdot 0+1\cdot 3 & (-3)\cdot 3+1\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 18\\ -4 & -6 & 14\\ 4 & 3 & -13\end{pmatrix}:\blacksquare$$

Խնդիր 5.3: Հաշվել որոշիչները՝

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}, \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}:$$

Լուծում: 1) Ընտրենք 3-րդ տողը և օգտվելով որոշիչի հատկություններից՝ ստանանք զրոներ այդ տողում. նախ առաջին և երկրորդ սյուները թողնենք նույնությամբ, 3-րդ սյունից հանենք առաջինի քառապատիկը, 4-րդից հանենք առաջինը, այնուհետև ստացված որոշիչը վերլուծենք ըստ 3-րդ տողի՝

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -9 & -2 \\ -2 & 6 & 11 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 6 & 11 & 7 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix}:$$

Ստացված երրորդ կարգի որոշիչում զրոները հավաքենք առաջին սյան վրա՝ առաջին տողը թողնելով նույնությամբ, 2-րդ տողից հանելով վեցապատիկ առաջինը, 3-րդ տողից՝ եռապատիկ առաջինը: Այնուհետև ստացված որոշիչը հաշվենք՝ վերլուծելով այն ըստ առաջին սյան.

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 6 & 11 & 7 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 0 & 65 & 19 \\ 0 & 21 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 65 & 19 \\ 21 & 2 \end{vmatrix} = 65\cdot 2 - 19\cdot 21 = -269:$$

2) Որոշիչի բոլոր տողերից, բացի առաջինից, կհանենք առաջինը: Կստանանք գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ եռանկյունաձև որոշիչ, որի արժեքը հավասար է գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալին (պնդում 5.1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 = -8:\blacksquare$$

Խնդիր 5.4: Հաշվել A մատրիցի որոշիչը, եթե

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}:$$

Լուծում: Տրված մատրիցի որոշիչը կհաշվենք ըստ հետևյալ սխեմայի. նախ որոշիչի նշանի տակից դուրս կհանենք սյուների x_i ընդհանուր արտադրիչը, այնուհետև, սկսած առաջինից, բոլոր սյուներին կգումարենք նրան հաջորդող սյուները: Կստանանք՝

$$\det A = x_1x_2x_3\dots x_n\cdot\begin{vmatrix} \frac{a_1}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \dots & \frac{a_n}{x_n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=x_1x_2x_3\dots x_n\cdot\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i} & \sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{x_i} & \sum_{i=3}^{n}\frac{a_i}{x_i} & \dots & \frac{a_n}{x_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, ստացվեց գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ եռանկյունաձև որոշիչ, որի արժեքը հավասար է անկյունագծի վրա գտնվող տարրերի արտադրյալին (պնդում 5.1): Այսպիսով՝

$$\det A = x_1x_2x_3\dots x_n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i}:\blacksquare$$

Խնդիր 5.5: n -րդ կարգի որոշիչում ի՞նչ նշանով է մտնում գլխավոր և երկրորդական անկյունագծերի վրա գտնվող տարրերի արտադրյալը:

Լուծում: Ըստ n-րդ կարգի $A=(a_{ij}),\ (i,j=\overline{1,n})$ մատրիցի որոշիչի (5.10) վերլուծությունների՝

$$\det A=\sum_{P(n)}(-1)^{N(p_1,p_2,\dots,p_n)}a_{1p_1}\cdot a_{2p_2}\cdot a_{3p_3}\cdot\ldots\cdot a_{np_n},$$

որտեղ գումարը տարածվում է ըստ $1,2,\dots,n$ թվերի բոլոր հնարավոր $(p_1,p_2,\dots,p_n)\in P(n)$ տեղափոխությունների, իսկ $N(p_1,p_2,\dots,p_n)$-ով նշանակված է $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ տեղափոխության բոլոր կարգախախտումների քանակը: Այս ներկայացումից հետևում է, որ որոշիչի տարրերի $a_{1p_1}\cdot a_{2p_2}\cdot a_{3p_3}\cdot\ldots\cdot a_{np_n}$ արտադրյալի նշանը կախված է $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ տեղափոխության կարգախախտումների թվից՝ $(-1)^{N(p_1,p_2,\dots,p_n)}$:

Դիցուք՝ $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$-ը և $a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot a_{3(n-2)}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$-ը n-րդ կարգի որոշիչի գլխավոր և երկրորդական անկյունագծի վրա գտնվող տարրերի արտադրյալներն են: $(1,2,..,n)$ և $(n,n-1,..,1)$ տեղափոխություններում հաշվենք կարգախախտումների քանակը: Ակնհայտ է, որ

$$N(1,2,..,n)=0 \text{ և } N(n,n-1,..,1)=(n-1)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}:$$

Այսպիսով՝ գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալը որոշիչում մտնում է դրական նշանով, երկրորդական անկյունագծի տարրերի արտադրյալը՝ $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ նշանով: ■

Խնդիր 5.6: Հակադարձելի՞ է արդյոք տրված A մատրիցը: Եթե այո, գտնել նրա հակադարձը.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}:$$

Նախ պարզենք A մատրիցի հակադարձելիությունը: Հաշվենք նրա որոշիչը՝

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0:$$

Քանի որ A մատրիցի որոշիչը հավասար չէ զրոյի, ուրեմն այն հակադարձելի է, և նրա A^{-1} հակադարձը, ըստ 5.3 թեորեմի, ունի այսպիսի տեսք՝

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}:$$

A_{ij} -ն A մատրիցի a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումն է: Մեր դեպքում՝

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -3,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6:$$

Այսպիսով՝

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \\ -1/3 & -5/3 & -2 \end{pmatrix}:\blacksquare$$

Խնդիր 5.7: Լուծել մատրիցային հավասարումը՝

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}:$$

Լուծում: Նշանակենք A, B, C -ով հետևյալ մատրիցները՝

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}:$$

Այսպիսի նշանակումներով տրված մատրիցային հավասարումը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$AXB = C:$$

Դիցուք՝ X մատրիցը վերջինիս լուծումն է: Տեղադրելով այն հավասարման մեջ՝ կստանանք նույնություն: Քանի որ $\det A = -1$ և $\det B = -2$, ապա A և B մատրիցները հակադարձելի մատրիցներ են: Նշանակենք A^{-1} և B^{-1}-ով նրանց հակադարձները և վերոհիշյալ նույնությունը աջից բազմապատկենք B^{-1}-ով, ձախից՝ A^{-1}-ով: Կստանանք՝

$$A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}:$$

Ըստ մատրիցների բազմապատկման զուգորդական հատկության՝ կարող ենք գրել

$$(A^{-1}A)X(BB^{-1}) = C,$$

հետևաբար՝

$$EXE = A^{-1}CB^{-1},$$

որտեղից էլ՝

$$X = A^{-1}CB^{-1}:$$

Այսպիսով՝ մնում է գտնել A^{-1} և B^{-1} մատրիցները և կատարել $A^{-1}CB^{-1}$ բազմապատկում: A^{-1} և B^{-1} հակադարձները կգտնենք հակադարձ մատրիցների ստացման Գաուս-Ժորդանի եղանակով (տե՛ս [13], գլուխ 1, § 3): Դրա համար կկազմենք $(A|E)$ և $(B|E)$ համակցված մատրիցները և տարրական տողային ձևափոխություններ կատարելով՝ կբերենք համապատասխանաբար $(E|A^{-1})$ և $(E|B^{-1})$ տեսքերի՝

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & -1/3 & -5/3 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 5 & -3\end{array}\right)=\left(E\middle|A^{-1}\right),$$

$$\left(B\middle|E\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 6 & 1 & 0\\ 7 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 6/5 & 1/5 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 6/5 & 1/5 & 0\\ 0 & -2/5 & -7/5 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 7/2 & -5/2\end{array}\right)=\left(E\middle|B^{-1}\right),$$

որտեղից՝

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{pmatrix}:$$

Կատարելով $A^{-1}CB^{-1}$ բազմապատկում՝ կստանանք՝

$$A^{-1}CB^{-1}=\left(A^{-1}C\right)B^{-1}=\left[\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}:\blacksquare$$

Խնդիր 5.7: Դիցուք A –ն n -րդ կարգի մատրից է, իսկ E -ն n -րդ կարգի միավոր մատրից է: Ապացուցել, որ եթե $A^2=A$, ապա $E-2A$ մատրիցը հակադարձելի է և $E-2A=(E-2A)^{-1}$:

Լուծում: Նախ ցույց տանք, որ $E-2A$ մատրիցը հակադարձելի է: Օգտվելով մատրիցների բազմապատկման հատկություններից՝ հաշվենք հետևյալ արտադրյալը՝

$$\left(E-2A\right)^2=\left(E-2A\right)\cdot\left(E-2A\right)=E^2-2AE-2EA+4A^2:$$

Քանի որ $E^2=E;\ AE=EA=A$ և, ըստ պայմանի, $A^2=A$, ապա վերջին հավասարությունը կարող ենք արտագրել հետևյալ կերպ՝

$$\left(E-2A\right)^2=E-4A+4A=E:$$

Այստեղից, քանի որ $\det\left(A\cdot B\right)=\det A\cdot\det B$ (տե՛ս 5.11), կունենանք՝

$$\det(E-2A)^2=(\det(E-2A))^2=\det E=1:$$

Այսինքն՝ $\det(E-2A)\neq 0$, հետևաբար $E-2A$ մատրիցն ունի հակադարձ՝ $(E-2A)^{-1}$: Ստացված $(E-2A)^2=E$ հավասարության երկու կողմը աջից բազմապատկենք հակադարձով, կստանանք՝

$$(E-2A)^2(E-2A)^{-1}=E\cdot(E-2A)^{-1}:$$

Քանի որ $(E-2A)(E-2A)^{-1}=E$ և $E\cdot(E-2A)^{-1}=(E-2A)^{-1}$, ապա վերջին հավասարությունը համարժեք է $E-2A=(E-2A)^{-1}$ հավասարությանը, ինչն էլ պետք էր ապացուցել: ■

Խնդիր 5.7: Դիցուք՝ A-ն և B-ն միևնույն կարգի հակադարձելի մատրիցներ են: Ապացուցել հետևյալ հավասարությունների համարժեքությունը՝

$$AB=BA,\quad AB^{-1}=B^{-1}A:$$

Լուծում: Դիցուք՝ տեղի ունի $AB=BA$ հավասարությունը: Վերջինս աջից ու ձախից բազմապատկենք B^{-1}ով՝

$$B^{-1}(AB)B^{-1}=B^{-1}(BA)B^{-1}:$$

Օգտվելով մատրիցների արտադրյալի զուգորդական հատկությունից՝ կստանանք $(B^{-1}A)(BB^{-1})=(B^{-1}B)(AB^{-1})$, որտեղից, հաշվի առնելով, որ $BB^{-1}=B^{-1}B=E$ և ցանկացած D մատրիցի համար $DE=$ $=ED=D$, կստանանք $(B^{-1}A)E=E(AB^{-1})$, հետևաբար և $B^{-1}A=$ $=AB^{-1}$:

Դիցուք՝ այժմ տեղի ունի $B^{-1}A=AB^{-1}$ հավասարությունը: Վարվելով նույն ձևով և աջից ու ձախից այն բազմապատկելով B-ով, կստանանք՝ $B(B^{-1}A)B=B(AB^{-1})B$, որտեղից՝

$$(BB^{-1})(AB)=(BA)(B^{-1}B),$$

այսինքն՝ $E(AB)=(BA)E$, որտեղից էլ՝ $AB=BA$:■

Խնդիր 5.8: Հաշվել տրված մատրիցի ռանգը երիզող մինորների եղանակով՝

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 4\\ 2 & -6 & 4 & 3\\ 3 & -9 & 3 & 2\end{pmatrix}:$$

Լուծում: $k+1$-րդ կարգի M_{k+1} մինորը, որն իր մեջ պարունակում է k–րդ կարգի M_k մինորը, անվանում են M_k մինորը *երիզող մինոր*: Հայտնի է, որ *եթե մատրիցն ունի k–րդ կարգի մինոր $M_k \neq 0$, ու նրան երիզող բոլոր $k+1$-րդ կարգի մինորները $M_{k+1}=0$, ապա $rang(A)=k$:*

Պարզ է, որ տրված մատրիցն ունի առաջին կարգի ոչ զրոյական մինոր (մատրիցի ցանկացած ոչ զրոյական տարրը): Այդ պատճառով դիտարկենք երկրորդ կարգի մինորները և գտնենք երկրորդ կարգի որևէ ոչ զրոյական մինոր, օրինակ՝

$$M_2=\begin{vmatrix}-3 & 5\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-12+30=18\neq 0:$$

Արդեն հասկանալի է, որ մատրիցի ռանգը 2-ից փոքր չէ: Մնում է ստուգել, թե տվյալ մատրիցում գոյություն ունի՞ արդյոք երրորդ կարգի ոչ զրոյական մինոր: Դրա համար կարիք չկա դիտարկել բոլոր երրորդ կարգի մինորները, բավական է հաշվել միայն վերոհիշյալ M_2 ոչ զրոյական մինորը երիզող մինորները՝

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & -6 & 4\\ 3 & -9 & 3\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=0$$

և

$$M_3=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 4\\ -6 & 4 & 3\\ -9 & 3 & 2\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & -6 & -5\\ 0 & -12 & -10\end{vmatrix}=0:$$

Հետևաբար $rang(A)=2$, իսկ նշված $M_2=\begin{vmatrix}-3 & 5\\ -6 & 4\end{vmatrix}\neq 0$ մինորը կարելի է ընդունել որպես բազիսային մինոր:

Պատասխան՝ $rang(A)=2$:■

Ի դեպ, մատրիցի ռանգը կարելի է հաշվել նաև ***տարրական ձևափոխությունների եղանակով.*** կատարելով տարրական տողային և սյունային ձևափոխություններ՝ մատրիցը բերվում է *անկյունագծային տեսքի*, որի ռանգը հավասար է անկյունագծի վրա գտնվող ոչ զրոյական տարրերի քանակին (ինչո՞ւ):

Տիպային խնդիրներ

1. Կատարել գործողությունները.

ա) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$,

բ) $3\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 6 & 11\end{pmatrix}$,

գ) $4\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$:

2. Բազմապատկել մատրիցները.

ա) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, **դ)** $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, **զ)** $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, **ը)** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$:

3. Կատարել գործողությունները՝

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$, գ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$, դ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$:

4. Հաշվել AB և BA արտադրյալները, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

բ) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

դ) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$:

5. Ցույց տալ, որ եթե $AB = BA$, ապա

ա) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, բ) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$:

6. Գտնել տրված մատրիցի հետ տեղափոխելի բոլոր մատրիցները՝

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

7. Հաշվել AA^T, որտեղ $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, իսկ A^T-ն A-ի տրանսպոնացված մատրիցն է:

8. Ապացուցել, որ

ա) $\left(A^T\right)^T = A$, բ) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,

գ) $(A+B)^T = A^T + B^T$, դ) $(AB)^T = B^T A^T$:

9. Տրված մատրիցներից որո՞նք են սիմետրիկ՝ $A = A^T$, շեղսիմետրիկ՝ $A = -A^T$.

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

10. Ապացուցել, որ

ա) երկու սիմետրիկ կամ երկու շեղսիմետրիկ մատրիցների արտադրյալը սիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե մատրիցները տեղափոխելի են,

բ) սիմետրիկ և շեղսիմետրիկ մատրիցների արտադրյալը շեղսիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե մատրիցները տեղափոխելի են:

11. Ապացուցել, որ ցանկացած $(m \times n)$ կարգի A մատրիցի համար AA^T և $A^T A$ մատրիցները սիմետրիկ մատրիցներ են:

12. Ապացուցել, որ շեղսիմետրիկ մատրիցների գլխավոր անկյունագծի բոլոր տարրերը զրոներ են:

13. Ապացուցել, որ եթե A-ն և B-ն շեղսիմետրիկ մատրիցներ են, ապա $(A+B)$-ն շեղսիմետրիկ մատրից է:

14. Ապացուցել, որ եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա $\left(A - A^T\right)$-ն շեղսիմետրիկ մատրից է, իսկ $\left(A + A^T\right)$-ն սիմետրիկ մատրից է:

15. Հաշվել երկրորդ և երրորդ կարգի որոշիչները՝

ա) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

դ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, ե) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$, է) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$:

16. Որոշիչները վերլուծել ըստ տառերից կազմված տողերի կամ սյուների՝

ա) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$:

17. Առանց որոշիչները բացելու ապացուցել, որ

ա) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

բ) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$:

18. Հաշվել որոշիչները՝

ա) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

բ) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$,

դ) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$,

ե) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$,

զ) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$,

է) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$,

ը) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$,

թ) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$,

ժ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$,

ի) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, վ) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$:

19. Հաշվել $\boldsymbol{n}$ –րդ կարգի որոշիչները՝

ա) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -1 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & \dots & n \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$,

ե) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$,

է) $\begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & \dots & x & 2 & x \\ x & x & \dots & 3 & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & n & \dots & x & x & x \\ x & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix}$, ը) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$,

թ) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$, ժ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$,

ի) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$, լ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$:

20. Ապացուցել, որ կենտ կարգի շեղսիմետրիկ մատրիցի որոշիչը հավասար է զրոյի:

21. Ինչպե՞ս կփոխվի n-րդ կարգի որոշիչը, եթե առաջին սյունը տեղափոխենք վերջ, իսկ մյուս սյուները տեղաշարժենք ձախ՝ պահպանելով նրանց հերթականությունը:

22. Ինչպե՞ս կփոխվի n-րդ կարգի որոշիչը, եթե նրա տողերը գրենք հակառակ հերթականությամբ:

23. Ինչպե՞ս կփոխվի n-րդ կարգի որոշիչը, եթե նրա բոլոր տարրերը փոխվեն հակադիրով:

24. Ապացուցել, որ որոշիչը չի փոխվի, եթե նրա յուրաքանչյուր սյանը, սկսած երկրորդից, ավելացնենք բոլոր նախորդող սյուները:

25. Ապացուցել, որ որոշիչը չի փոխվի, եթե նրա յուրաքանչյուր տողից, բացի վերջինից, հանենք բոլոր հաջորդող տողերը:

26. Ինչպե՞ս կփոխվի n-րդ կարգի որոշիչը, եթե նրա յուրաքանչյուր տողից, բացի վերջինից, հանենք հաջորդ տողը, իսկ վերջին տողից հանենք սկզբնական առաջին տողը:

27. Ինչպե՞ս կփոխվի n-րդ կարգի որոշիչը, եթե նրա յուրաքանչյուր սյանը, սկսած երկրորդից, ավելացնենք նախորդը, իսկ առաջին սյանը ավելացնենք սկզբնական վերջին սյունը:

28. 6-րդ կարգի որոշիչում ի՞նչ նշանով են մասնակցում հետևյալ արտադրյալները՝

ա) $a_{21}a_{33}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$, բ) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$:

29. Մտնո՞ւմ են արդյոք 5-րդ կարգի որոշիչում հետևյալ արտադրյալները՝

ա) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$, բ) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$

30. i-ն և k-ն ընտրել այնպես, որ 5-րդ կարգի որոշիչում $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ արտադրյալը մտնի դրական նշանով:

31. Զրոյից տարբեր քանի՞ զումարելիներ ունեն (5.10) վերլուծությունները, եթե

ա) $a_{11} = 0$, իսկ մյուս տարրերը զրոներ չեն,

բ) $a_{ij} = 0$, իսկ մյուս տարրերը զրոներ չեն,

գ) $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1k} = 0, k < n,$ իսկ մյուս տարրերը զրոներ չեն:

32. Գտնել մատրիցների հակադաձը՝

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ը) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$,

թ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, ժ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,

ի) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, լ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$:

33. Լուծել մատրիցային հավասարումը՝

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, բ) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$:

34. Ցույց տալ, որ եթե A-ն և B-ն հակադարձելի են, ապա AB-ն նույնպես հակադարձելի է և $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

35. Դիցուք՝ A-ն և B-ն միևնույն կարգի հակադարձելի մատրիցներ են: Ապացուցել, որ հետևյալ հավասարությունները համարժեք են՝

$$AB = BA,\ \ AB^{-1} = B^{-1}A,\ \ A^{-1}B = BA^{-1},\ \ A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}:$$

36. Ապացուցել, որ եթե A-ն հակադարձելի է, ապա

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A,\ (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, \forall \lambda \in R, \lambda \neq 0,\ \left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}:$$

37. Գտնել $(AB)^{-1}, \left(A^{T}\right)^{-1}, A^{-2}, (2A)^{-1}$ մատրիցները, եթե տրված են

ա) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix},\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$

բ) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}:$

38. Դիցուք՝ A, B, C, D-ն հակադարձելի մատրիցներ են: Ապացուցել, որ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & \left(C - DB^{-1}A\right)^{-1} \\ \left(B - AC^{-1}D\right)^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}:$$

39. A և C մատրիցները հակադարձելի մատրիցներ են: Հաշվել հետևյալ մատրիցների հակադարձները՝

ա) $\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix},$ բ) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}:$

40. Ապացուցել, որ եթե A-ն, B-ն, C-ն քառակուսի մատրիցներ են, և $ABC = E$, ապա B–ն հակադարձելի է, և $B^{-1} = CA$:

41. Ցույց տալ, որ եթե C-ն հակադարձելի է և $AC = BC$ կամ $CA = CB$, ապա $A = B$:

42. Ապացուցել, որ եթե A-ն հակադարձելի է և $AB = O$, ապա $B = O$:

43. Ապացուցել, որ եթե $A^2 = A$, ապա կամ $A = E$ կամ A-ն ոչ հակադարձելի է:

44. Հաշվել մատրիցի ռանգը, գտնել բազիսային տողերը և սյուները՝

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1- & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

գ) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, ը) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -6 & 10 & -11 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 10 & 5 & 10 & -6 & 17 \end{pmatrix}$:

45. Հաշվել մատրիցի ռանգը՝ կախված λ պարամետրի արժեքից՝

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 & 5 \\ \lambda & \lambda & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$:

Թեմա 6: Գծային տարածություններ

Գծային տարածությունների սահմանումը և օրինակներ, գծային տարածության տարրերի գծային կախվածությունը, գծային տարածության բազիս և չափողականություն, գծային ենթատարածություններ

Գծային տարածության սահմանումը: Ցանկացած բնույթի $x, y, \ldots, z$ տարրերի L բազմությունն անվանում են գծային (կամ աֆիննական) տարածություն, եթե տեղի ունեն հետևյալ երեք պայմանները.

1. L բազմության տարրերի համար սահմանված է *գումարման գործողություն,* այսինքն՝ *L-ի ցանկացած x և y տարրերի ինչ- որ օրենքով կամ կանոնով համապատասխանության մեջ է դրված այդ նույն բազմության z տարր, որն անվանում են x և y տարրերի գումար և նշանակում են հետևյալ կերպ՝* $z = x + y$:
2. L բազմության տարրերի համար սահմանված է թվով բազմապատկման գործողություն, այսինքն՝ *L-ի ցանկացած x տարրի և ցանկացած λ իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված այդ նույն բազմության u տարր, որն անվանում են x տարրի և λ թվի արտադրյալ և նշանակում են հետևյալ կերպ՝* $u = \lambda x$ *:*
3. Վերոհիշյալ գործողությունները բավարարում են հետևյալ ութ աքսիոմներին.
   1) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in L$ (գումարման տեղափոխական հատկություն),
   2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in L$ (գումարման զուգորդական հատկություն),
   3) գոյություն ունի $\theta \in L$ զրոյական տարր այնպիսին, որ ցանկացած $x \in L$ տարրի համար $x + \theta = x$ (զրոյական տարրի յուրահատկություն),
   4) ցանկացած $x \in L$ տարրի համար գոյություն ունի $x' \in L$ հակադիր տարր այնպիսին, որ $x + x' = \theta$ (հակադիր տարրի գոյության հատկություն),
   5) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in L$ (1 թվային բազմապատկչի յուրահատկություն),

6) $\lambda(\mu \boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$, $\forall \lambda, \mu \in R$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$ (զուգորդական հատկություն թվային բազմապատկչի նկատմամբ),

7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{x}$, $\forall \lambda \in R$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$ (բաշխական հատկություն թվերի գումարի նկատմամբ),

8) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}$, $\forall \lambda \in R$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ (բաշխական հատկություն տարրերի գումարի նկատմամբ):

1-8 աքսիոմներից որպես հետևանք կարելի է ստանալ ***գծային տարածությունների պարզագույն հատկություններ***.

Թեորեմ 6.1: Ցանկացած գծային տարածության **ա)** $\boldsymbol{\theta}$ զրոյական տարրը միակն է; **բ)** յուրաքանչյուր $\boldsymbol{x}$ տարրի $\boldsymbol{x}'$ հակադիր տարրը միակն է:

Թեորեմ 6.2: Ցանկացած գծային տարածության մեջ **ա)** $\boldsymbol{\theta}$ զրոյական տարրը հավասար է գծային տարածության կամայական $\boldsymbol{x}$ տարրի և զրո թվի արտադրյալին; **բ)** յուրաքանչյուր $\boldsymbol{x}$ տարրի հակադիր տարրը հավասար է այդ տարրի և -1 թվի արտադրյալին:

Գծային տարածության տարրերն ընդունված է անվանել վեկտորներ:

Գծային տարածությունների օրինակներ:

1. Բոլոր իրական թվերի R բազմությունը՝ գումարման և թվով բազմապատկման սովորական գործողություններով:

2. Ուղղի, հարթության և տարածության մեջ որոշված ազատ վեկտորների համապատասխանաբար B_1, B_2 և B_3 բազմությունները՝ վեկտորների գումարման ու վեկտորը թվով բազմապատկելու սովորական գործողություններով:

3. Իրական թվերի կարգավորված n-յակների

$$R^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) / x_i \in R, i = 1,2,...,n\},$$

բազմությունը՝ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ և $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ տարրերի համար գումարման և λ իրական թվով բազմապատկման հետևյալ գործողություններով՝

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),\ \lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n):$$

4. $m \times n$-րդ կարգի բոլոր իրական տարրերով մատրիցների $M_{m \times n}$ բազմությունը մատրիցների գումարման և մատրիցը թվով բազմապատկելու սովորական գործողություններով:

5. $[a,b]$հատվածի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաների $C[a,b]$ բազմությունը ֆունկցիաների գումարման և ֆունկցիան թվով բազմապատկելու սովորական գործողություններով:

6. x-ից կախված բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների P_n բազմությունը, որոնց կարգը չի գերազանցում n-ը՝

$P_n = \{f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n / a_i \in R, i = 0,1,2,\ldots,n\}$, ֆունկցիաների գումարման և ֆունկցիան թվով բազմապատկելու սովորական գործողություններով:

Դիտողություն: Ճիշտ n-րդ կարգի բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների բազմությունը գծային տարածություն չէ (ինչո՞ւ):

Սահմանում (գծորեն կախյալության): L գծային տարածության $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{z}$ վեկտորների համախումբն անվանում են գծորեն կախյալ, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ իրական թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, և այդ վեկտորների գծային կոմբինացիան նշված գործակիցներով զրոյական տարր է՝

$$\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} + \ldots + \gamma \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\theta} : \qquad (6.1)$$

Եթե $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{z}$ վեկտորների համախումբը գծորեն կախյալ չէ, այն անվանում են *գծորեն անկախ համախումբ:* Այլ կերպ ասած՝

Սահմանում (գծորեն անկախության): L գծային տարածության $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{z}$ վեկտորների համախումբն անվանում են գծորեն անկախ, եթե (6.1) հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ գործակիցները միաժամանակ զրոներ են:

Օրինակներ:

1. Ազատ վեկտորների B_2 գծային տարածությունում ցանկացած երկու համագիծ վեկտորներ գծորեն կախյալ են, B_3 գծային տարածությունում ցանկացած երեք համահարթ վեկտորներ գծորեն կախյալ են, տարածության ցանկացած չորս վեկտորներ գծորեն կախյալ են:

2. R^n գծային տարածության հետևյալ n տարրերը՝

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,\ldots,0) \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

գծորեն անկախ են:

Իսկապես, դիտարկենք $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in R^n$ վեկտորների գծային կոմբինացիան որևէ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ գործակիցներով, կստանանք

$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, որը հավասար է R^n գծային տարածության $\boldsymbol{\theta} = (0,0,\ldots,0)$ զրոյական տարրին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$:

3. $m \times n$ -րդ կարգի բոլոր իրական տարրերով մատրիցների $M_{m\times n}$ գծային տարածության մեջ դիտարկենք բոլոր E_{ij} $m \times n$ -րդ կարգի մատրիցները, որոնց i -րդ տողի և j -րդ սյան հատման տեղում գրված է 1, իսկ բոլոր մնացած տեղերում՝ 0: Դրանց անվանում են *մատրիցային միավորներ*: $E_{ij}, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n$ մատրիցային միավորները գծորեն անկախ են: Իսկապես, դիտարկենք այդ մատրիցների գծային կոմբինացիան λ_{ij} գործակիցներով: Կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}:$$

Ստացված մատրիցը կլինի զրոյական այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lambda_{ij} = 0$ բոլոր $i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n$ արժեքների համար:

4. n -ից փոքր կամ հավասար կարգ ունեցող բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների P_n գծային տարածության

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2, \ldots,\ p_n(x) = x^n$$

տարրերը գծորեն անկախ են (ապացուցե՛լ):

Սահմանում (գծային տարածության բազիսի): L գծային տարածության կարգավորված և գծորեն անկախ $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ տարրերի համախումբն անվանում են բազիս այդ տարածության մեջ, եթե ցանկացած $\boldsymbol{x} \in L$ տարրի համար գոյություն ունեն այնպիսի $x_1, x_2, \ldots, x_n$ իրական թվեր, որ

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e_1} + x_2 \boldsymbol{e_2} + \ldots + x_n \boldsymbol{e_n}: \qquad (6.2)$$

Վերջինս անվանում են $\boldsymbol{x} \in L$ տարրի վերլուծություն ըստ $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ բազիսի, իսկ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ թվերը՝ $\boldsymbol{x} \in L$ տարրի կոոր-

դինատներ $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ բազիսում: $\boldsymbol{x}$ տարրի կոորդինատները (տրրված բազիսում) կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝ $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$:

Թեորեմ 6.3: L գծային տարածության յուրաքանչյուր $\boldsymbol{x}$ տարր ըստ $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ բազիսի կարող է վերլուծվել միակ ձևով, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\boldsymbol{x}$ տարրի կոորդինատները $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ բազիսում որոշվում են միարժեքորեն:

Թեորեմ 6.4: L գծային տարածության ցանկացած երկու տարրեր գումարելիս նրանց կոորդինատները (L տարածության ցանկացած բազիսի նկատմամբ) գումարվում են, ցանկացած տարր λ թվով բազմապատկելիս այդ տարրի բոլոր կոորդինատները բազմապատկվում են λ թվով:

Գծային տարածություններում բազիսի օրինակներ:

1. Ազատ վեկտորների B_2 գծային տարածության ցանկացած ոչ համագիծ վեկտորների զույգը, իսկ B_3 գծային տարածության ցանկացած ոչ համահարթ վեկտորների եռյակը կազմում են բազիս համապատասխան տարածությունների մեջ:

2. R^n գծային տարածության
$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,...,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,...,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,...,0) ..., \boldsymbol{e}_n = (0,0,0,...,1)$
տարրերը կազմում են բազիս, քանի որ դրանք գծորեն անկախ են և R^n տարածության ցանկացած $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 ... x_n)$ տարր կարելի է ներկայացնել

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + ... + x_n\boldsymbol{e}$$

տեսքով, այսինքն՝ ցանկացած $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 ... x_n)$ տարր վերլուծելի է ըստ $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ բազիսի: R^n գծային տարածության $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,...,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \boldsymbol{e}_n = (0,0,0,...,1)$ բազիսն անվանում են ***տիպային բազիս:***

3. $m \times n$ -րդ կարգի մատրիցների $M_{m\times n}$ գծային տարածության մեջ E_{11}, $E_{12}, ... E_{mn}$ մատրիցային միավորները կազմում են բազիս, քանի որ նրանք գծորեն անկախ են, իսկ $M_{m\times n}$ տարածության ցանկացած

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ մատրից կարելի է ներկայացնել $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ տեսքով, այսինքն՝ A-ն վերլուծելի է ըստ $E_{11}, E_{12}, \dots E_{mn}$ մատրիցային միավորների: $M_{m\times n}$ գծային տարածության $E_{11}, E_{12}, \dots E_{mn}$ բազիսն անվանում են $M_{m\times n}$ ***գծային տարածության տիպային բազիս:***

4. n-ից փոքր կամ հավասար կարգ ունեցող բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների P_n գծային տարածության

$$p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2,\dots, p_n(x)=x^n$$

բազմանդամները կազմում են բազիս, քանի որ նրանք գծորեն անկախ են, և P_n գծային տարածության ցանկացած բազմանդամ ունի այսպիսի տեսք՝

$$f(x)=\lambda_0\cdot 1+\lambda_1\cdot x+\dots+\lambda_n\cdot x^n=$$
$$=\lambda_0\cdot p_0(x)+\lambda_1\cdot p_1(x)+\dots+\lambda_n\cdot p_n(x),$$

այսինքն՝ վերլուծելի է ըստ $p_0(x), p_1(x),\dots, p_n(x)$ բազմանդամների: $p_0(x), p_1(x), p_2(x),\dots, p_n(x)$ բազիսն անվանում են P_n ***գծային տարածության տիպային բազիս:***

Սահմանում (գծային տարածության չափողականության): *L գծային տարածությունը կոչվում է n չափանի՝* $\dim L=n$, եթե այն պարունակում է n գծորեն անկախ տարրեր, և այդ տարածության ցանկացած $n+1$ տարրեր արդեն գծորեն կախյալ են:

Հաջորդիվ երկու թեորեմները կպարզաբանեն *գծային տարածության բազիսի և չափողականության կապը:*

Թեորեմ 6.5: Եթե L-ը n չափանի գծային տարածություն է, ապա այդ տարածության ցանկացած n գծորեն անկախ տարրերի համախումբ բազիս է L-ում:

Թեորեմ 6.6: Եթե L գծային տարածությունը ունի n տարրերից բաղկացած որևէ բազիս, ապա նրա չափողականությունը n է:

Այսպիսով՝ $\dim R^n=n$, $\dim P_n=n+1$, $\dim M_{m\times n}=m\cdot n$:

Գծային տարածության մի բազիսից մյուսին անցման մատրից: Գծային տարածության $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ բազիսը կնշանակենք $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n})$ մատրից տողով, իսկ $\boldsymbol{x}$ տարրի կոորդինատները $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ բազիսում՝ $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ մատրից սյունով: Այս դեպքում $\boldsymbol{x}$ տարրի $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}$ վերլուծությունը $\boldsymbol{e}$ բազիսում կգրվի $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{X}$ մատրիցային տեսքով:

Դիցուք՝ $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n})$-ն և $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1, f_2, ..., f_n})$-ը n չափանի *գծային տարածության երկու բազիսներ են:* $\boldsymbol{f}$ բազիսի վեկտորները վերլուծենք ըստ $\boldsymbol{e}$ բազիսի՝

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= a_{11}\boldsymbol{e_1} + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n1}\boldsymbol{e_n}, \\ \boldsymbol{f}_2 &= a_{12}\boldsymbol{e_1} + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n2}\boldsymbol{e_n}, \\ &\dots \\ \boldsymbol{f}_n &= a_{1n}\boldsymbol{e_1} + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{nn}\boldsymbol{e_n}: \end{aligned} \tag{6.3}$$

Այս վերլուծությունների a_{ij} գործակիցներով կազմված

$$\boldsymbol{T}_{e \to f} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցն անվանում են ***$\boldsymbol{e}$-ից $\boldsymbol{f}$-ին անցման մատրից:*** Նշենք, որ անցման մատրիցի i-րդ սյունը $(i = 1,2,...,n)$ $\boldsymbol{e}$ հին բազիսի նկատմամբ $\boldsymbol{f}_i$ վեկտորի (նոր բազիսի i-րդ վեկտորի) կոորդինատների սյունն է: Այսինքն՝ *անցման մատրիցը կազմված է հին բազիսում նոր բազիսի կոորդինատներից՝ գրված սյուներով:*

Անցման մատրիցի հատկությունները:

1. (6.3) առնչությունները կարելի է գրել մատրիցային հավասարության տեսքով՝

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{T}_{e \to f} \tag{6.4}$$

2. Անցման մատրիցը քառակուսային է և չվերասերված, հետևաբար միշտ ունի հակադարձ:
Իսկապես, $\det \boldsymbol{T}_{e \to f} \neq 0$, քանի որ $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ վեկտորները գծորեն անկախ են:

3. Եթե $\boldsymbol{T}$-ն $\boldsymbol{e}$-ից $\boldsymbol{f}$-ին անցման մատրիցն է, ապա $\boldsymbol{T}^{-1}$ հակադարձ մատրիցը $\boldsymbol{f}$-ից $\boldsymbol{e}$-ին անցման մատրիցն է:
Իրոք, հաշվի առնելով (6.4) առնչությունները, կստանանք՝

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_{f \to e} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_{e \to f}^{-1} :$$

4. $\boldsymbol{T}_{e \to g} = \boldsymbol{T}_{e \to f} \cdot \boldsymbol{T}_{f \to g}$:

Իրոք, քանի որ $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{T}_{e \to g}$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{T}_{e \to f}$, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_{f \to g}$, հետևաբար $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{T}_{e \to g} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_{f \to g} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{T}_{e \to f} \cdot \boldsymbol{T}_{f \to g}$: Այսպիսով՝ $\boldsymbol{T}_{e \to g} = \boldsymbol{T}_{e \to f} \cdot \boldsymbol{T}_{f \to g}$:

Թեորեմ 6.7: Դիցուք՝ $\boldsymbol{X}_e$-ն $\boldsymbol{e}$ բազիսում $\boldsymbol{x}$ վեկտորի կոորդինատների մատրից սյունն է, $\boldsymbol{X}_f$-ը $\boldsymbol{f}$ բազիսում $\boldsymbol{x}$ վեկտորի կոորդինատների մատրից սյունն է, $\boldsymbol{T}_{e \to f}$-ը $\boldsymbol{e}$-ից $\boldsymbol{f}$ բազիսին անցման մատրիցն է: *$\boldsymbol{x}$ վեկտորի կոորդինատները $\boldsymbol{e}$ և $\boldsymbol{f}$ բազիսներում կապված են հետևյալ առնչությամբ՝*

$$\boldsymbol{X}_e = \boldsymbol{T}_{e \to f} \cdot \boldsymbol{X}_f : \tag{6.5}$$

Սահմանում (գծային ենթատարածության): L գծային տարածության L_1 ոչ դատարկ ենթաբազմությունն անվանում են L գծային տարածության ենթատարածություն, եթե տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները՝

1. L_1 ենթաբազմության ցանկացած երկու $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրերի $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ գումարը պատկանում է L_1 ենթաբազմությանը, այսինքն՝

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L_1,$$

2. L_1 ենթաբազմության ցանկացած $\boldsymbol{x}$ տարրի և ցանկացած λ իրական թվի $\lambda\boldsymbol{x}$ արտադրյալը պատկանում է L_1 ենթաբազմությանը, այսինքն՝

$$\forall \boldsymbol{x} \in L_1; \forall \lambda \in R \Rightarrow \lambda\boldsymbol{x} \in L_1:$$

Ակնհայտ է, որ վերոհիշյալ երկու պայմաններին բավարարող L_1 ենթաբազմությունն ինքը գծային տարածություն է՝ L-ում սահմանված գծային գործողությունների նկատմամբ:

Գծային ենթատարածությունների օրինակներ:

1. Ցանկացած L գծային տարածություն միշտ ունի երկու գծային ենթատարածություններ՝ 1) *զրոյական ենթատարածությունը,* որը L-ի գծային ենթատարածություն է՝ բաղկացած միայն զրոյական տարրից, 2) *ամբողջ* L*-ը*, որը կարելի է դիտարկել որպես ենթատարածություն:
2. Տրված հարթությանը զուգահեռ ազատ վեկտորների B_2 բազմությունը իրենից ներկայացնում է ազատ վեկտորների B_3 գծային տարածության ենթատարածություն:
3. n-ից փոքր կամ հավասար կարգ ունեցող բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների P_n գծային տարածությունը $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաների $C[a,b]$ գծային տարածության ենթատարածություն է:

Սահմանում (գծային թաղանթի): Դիցուք՝ $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e}_k$-ն L գծային տարածության որոշակի տարրերի համախումբ է: L գծային տարածության $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e}_k$ տարրերի $L(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e}_k)$ գծային թաղանթ են անվանում այդ տարրերի բոլոր հնարավոր գծային կոմբինացիաների բազմությունը՝

$$L(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e}_k) = \{x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e}_2 + ... + x_k\boldsymbol{e}_k \,/\, x_i \in R, i = 1,2,...,k\}$$

$L(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e}_k)$-ն անվանում են նաև $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e}_k$ տարրերով ծնված գծային թաղանթ:

Իրավացի են հետևյալ պնդումները՝

Պնդում 1: Եթե $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k}$ տարրերը L գծային տարածության տարրեր են, ապա այդ տարրերի $L(\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k})$ գծային թաղանթը L գծային տարածության ենթատարածություն է:

Պնդում 2: $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k} \in L$ տարրերի գծային թաղանթը այդ տարրերը պարունակող L-ի ամենափոքր ենթատարածությունն է:

Պնդում 3: Ցանկացած գծային տարածություն նրա որևէ բազիսի գծային թաղանթն է:

Որպես ***գծային թաղանթի կոնկրետ օրինակ*** կարող է ծառայել $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաների $C[a,b]$ գծային տարածության $1, x, x^2, ..., x^n$ ֆունկցիաների գծային թաղանթը: Ակնհայտ է, որ այդ գծային թաղանթը իրենից ներկայացնում է n-ից փոքր կամ հավասար կարգ ունեցող բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների P_n գծային տարածությունը:

Թեորեմ 6.8 (գծային թաղանթի չափողականության): $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k}$ տարրերի $L(\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k})$ գծային թաղանթի չափողականությունը հավասար է $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k}$ համախմբի առավելագույն թվով գծորեն անկախ տարրերի քանակին: Մասնավորապես, եթե $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k}$ տարրերը գծորեն անկախ են, ապա $L(\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k})$ գծային թաղանթի չափողականությունը k է, իսկ $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_k}$ տարրերը կազմում են այդ թաղանթի բազիս:

Հետևանք (մատրիցի ռանգի երկրորդ սահմանումը): Մատրիցի ռանգը հավասար է նրա առավելագույն գծորեն անկախ տողերի կամ սյուների քանակին:

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 6.1: R^3 -ում գումարումն ու թվով բազմապատկումը սահմանված են հետևյալ կերպ՝

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+1\\ \beta_1+\beta_2+1\\ \gamma_1+\gamma_2+1\end{pmatrix},\quad c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1+c-1\\ c\beta_1+c-1\\ c\gamma_1+c-1\end{pmatrix}:$$

Գծային տարածություն է արդյոք R^3-ը սահմանված գործողություններով: Պատասխանը հիմնավորե՛ լ:

Լուծում: Որպեսզի R^3 -ը նշված գործողություններով լինի գծային տարածություն, անհրաժեշտ է, որ այդ գործողությունները բավարարեն այն ութ աքսիոմներին, որոնք նշված են գծային տարածության սահմանման մեջ: Մինչ հատկությունների ստուգումը պարզենք, թե նշված գործողությունների դեպքում ինչպիսի տեսք կունենան գծային տարածության զրոյական տարրը և տվյալ տարրի հակադիրը: Դիցուք՝ $X=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\in R^3$ -ը ցանկացած տարր է: Քանի որ գծային տարածության զրոյական տարրը ստացվում է 0 թվի և գծային տարածության ցանկացած տարրի արտադրյալի արդյունքում, իսկ տվյալ տարրի հակադիրը՝ այդ տարրի և -1 թվի արտադրյալի արդյունքում (թեորեմներ 6.1 և 6.2), ապա զրոյական և հակադիր տարրերի համար կունենանք՝

$$\theta=0\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix},\quad X'=-1\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha-2\\ -\beta-2\\ -\gamma-2\end{pmatrix}:$$

Ստուգենք 3-րդ, 4-րդ և 5-րդ հատկությունները՝

3. $$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+\theta=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-1+1\\ \beta-1+1\\ \gamma-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},$$

4. $X+X'=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\alpha-2\\ -\beta-2\\ -\gamma-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\alpha-2+1\\ \beta-\beta-2+1\\ \gamma-\gamma-2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}=\theta$:

5. $1\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+1-1\\ \beta+1-1\\ \gamma+1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$:

Ինչպես տեսնում ենք, նշված հատկությունները բավարարվում են: Դժվար չէ համոզվել, որ մնացած հատկությունները, որոնց ստուգումը թողնում ենք ընթերցողին, ևս տեղի ունեն: Այսպիսով՝ R^3-ը վերոհիշյալ գործողություններով գծային տարածություն է: ■

Խնդիր 6.2: R թվային առանցքի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաների $C(R)$ գծային տարածության մեջ ուսումնասիրել

$$f_1(x)=\cos^2 x, f_2(x)=\cos 2x, f_3(x)=1$$

ֆունկցիաների գծային կախյալությունը:

Լուծում: $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ եռանկյունաչափական նույնությունից հետևում է, որ $f_2(x)$ ֆունկցիան մյուս երկու՝ $f_1(x), f_3(x)$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիան է՝ $f_2(x)=2f_1(x)-f_3(x)$: Հետևաբար ֆունկցիաների $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ համախումբը գծորեն կախյալ է:■

Խնդիր 6.3: $C(R)$ գծային տարածության մեջ ուսումնասիրել $f_1(x)=\sin x, f_2(x)=\sin 2x, f_3(x)=\sin 3x$ ֆունկցիաների գծային կախյալությունը:

Լուծում: Կազմենք տրված ֆունկցիաների զրոյական գծային կոմբինացիան՝

$$\alpha\sin x+\beta\sin 2x+\gamma\sin 3x\equiv 0, \forall x\in R:$$

Հավասարությունը տեղի ունի x-ի ցանկացած արժեքի համար, հետևաբար այն ճիշտ է մասնավորապես, երբ $x=\pi/4$, $x=\pi/3$, $x=\pi/2$: Հավասարության մեջ տեղադրելով x-ի նշված արժեքները՝ կստանանք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha+\beta+\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta=0 \\ \alpha-\gamma=0 \end{cases} :$$

Վերջինս ունի միայն զրոյական լուծում՝ $\alpha=\beta=\gamma=0$, հետևաբար ֆունկցիաների $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ համակարգը գծորեն անկախ է:■

Խնդիր 6.4: Ապացուցել, որ վեկտորների

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

համակարգը բազիս է R^3 -ում:

Լուծում: Ապացուցենք, որ a_1, a_2, a_3 վեկտորները գծորեն անկախ են: Վեկտորների կոորդինատներով կազմենք մատրից՝

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\det A\neq 0$, հետևաբար A մատրիցի ռանգը՝ $rangA=3$: Ըստ ռանգի երկրորդ սահմանման՝ մատրիցի սյուները, հետևաբար նաև a_1, a_2, a_3 վեկտորները, գծորեն անկախ են: Քանի որ գծորեն անկախ վեկտորների քանակը հավասար է R^3 գծային տարածության չափողականությանը, հետևաբար այդ վեկտորները կազմում են գծային տարածության բազիս (թեորեմներ 6.5 և 6.6):■

Խնդիր 6.5: Ապացուցել, որ բազմանդամների $f_1(t)=t^3+t^2+t+1$, $f_2(t)=t^2+t+1$, $f_3(t)=t+1$, $f_4(t)=1$ համակարգը մինչև երրորդ կարգի բազմանդամների P_3 գծային տարածության բազիս է:

Լուծում: *Առաջին եղանակ*: Դիտարկենք $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ և $f_4(t)$ բազմանդամների զրոյական գծային կոմբինացիան՝

$$\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)+\lambda_3 f_3(t)+\lambda_4 f_4(t)\equiv 0, \quad \forall t\in(-\infty,+\infty):$$

Բազմանդամների գծորեն անկախությունը ցույց տալու համար բավական է ցույց տալ, որ վերջինս տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$: Ցույց տանք, որ դա իրոք այդպես է: Իսկապես, նույնության մեջ տեղադրելով բազմանդամները և կատարելով նման անդամների միացում՝ կստանանք՝

$$\lambda_1\left(t^3+t^2+t+1\right)+\lambda_2\left(t^2+t+1\right)+\lambda_3(t+1)+\lambda_4\cdot 1\equiv 0, \forall t\in(-\infty,+\infty),$$

$$\Leftrightarrow t^3\cdot\lambda_1+t^2\cdot(\lambda_1+\lambda_2)+t\cdot(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\equiv 0,$$

$$\forall t\in(-\infty,+\infty):$$

Քանի որ բազմանդամների $1,t,t^2,t^3$ համակարգը գծորեն անկախ է (P_3 գծային տարածության տիպային բազիսի վեկտորներն են), ապա նրանց ցանկացած գծային կոմբինացիա նույնաբար զրո կլինի այն և միայն այն ժամանակ, երբ բոլոր գործակիցները լինեն զրոներ: Դա նշանակում է, որ վերջին հավասարությունից կստանանք գծային համասեռ հավասարումների այսպիսի համակարգ՝

$$\begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0 \end{cases},$$

որն ունի միայն զրոյական լուծում՝ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$: Այսինքն՝ բազմանդամների $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ և $f_4(t)$ համակարգը գծորեն անկախ է: Եվ քանի որ P_3 գծային տարածության չափողականությունը հավասար է 4–ի, հետևաբար վերոհիշյալ համակարգը կլինի P_3 գծային տարածության բազիս (թեորեմներ 6.5 և 6.6):

Երկրորդ եղանակ: $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ համակարգի գծորեն անկախությունը կարելի է ցույց տալ՝ օգտվելով նաև այն փաստից, որ գծային տարածության տարրերի գծորեն կախյալությունն ու անկախությունը համարժեք են որևէ ֆիքսված բազիսում այդ տարրերի կոորդի-

նատներով կազմված սյուների գծորեն կախյալությանն ու անկախությանը (ինչու՞): Մեր դեպքում կդիտարկենք բազմանդամների կոորդինատները P_3 գծային տարածության տիպային՝ $1, t, t^2, t^3$ բազիսում՝

$$f_1(t) = t^3 + t^2 + t + 1 = (1,1,1,1),\ f_2(t) = t^2 + t + 1 = (1,1,1,0),$$
$$f_3(t) = t + 1 = (1,1,0,0),\ f_4(t) = 1 = (1,0,0,0):$$

Բազմանդամների կոորդինատների սյուներով կազմենք մատրից՝

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ վերջինիս որոշիչը հավասար չէ զրոյի՝ $\det A \neq 0$, ապա A մատրիցի սյուները, հետևաբար նաև բազմանդամների $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ համակարգը գծորեն անկախ է: ■

Խնդիր 6.6: B_3 գծային տարածության մեջ տրված են $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{f}_3 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ վեկտորները, որտեղ $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$-ն B_3 գծային տարածության տիպային բազիսն է: Ապացուցել, որ ա) վեկտորների $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ համակարգը կազմում է բազիս B_3-ում, բ) գտնել $\boldsymbol{e}$ բազիսից $\boldsymbol{f}$-ին անցման մատրիցը, գ) գտնել $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ վեկտորի կոորդինատները $\boldsymbol{f}$ բազիսում:

Լուծում: ա) Գտնենք $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ վեկտորների կոորդինատները $\boldsymbol{e}$ բազիսում՝ $\boldsymbol{f}_1 = (1,1,0), \boldsymbol{f}_2 = (1,-1,0), \boldsymbol{f}_3 = (-1,2,-1)$: Վեկտորի կոորդինատների սյուներով կազմենք մատրից՝ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: Քանի որ $\det A \neq 0$, ապա վեկտորների $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ համակարգը գծորեն անկախ է: Այն կազմում է բազիս B_3 գծային տարածության մեջ, քանի որ համակարգի վեկտորների քանակը համընկնում է B_3 գծային տարածության չափողականության հետ:

բ) Ըստ մի բազիսից մյուս բազիսից անցման մատրիցի սահմանման՝ A մատրիցը հենց $\boldsymbol{e}$ բազիսից $\boldsymbol{f}$ -ին անցման մատրիցն է:

գ) $\boldsymbol{x}$ վեկտորի կոորդինատները $\boldsymbol{e}$ բազիսում $(1,-2,2)$-ն են՝ $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$: Նշանակենք (x_1, x_2, x_3)-ով $\boldsymbol{x}$ վեկտորի կոորդինատները $\boldsymbol{f}$ բազիսում՝ $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$: Տեղադրելով $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}$ մատրիցները (6.5) բանաձևի մեջ՝ կստանանք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ մատրիցային տեսքով՝ $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}$, որտեղից $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}}$: Գտնելով $\boldsymbol{A}^{-1}$ մատրիցը և կատարելով $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}}$ բազմապատկումը՝ կստանանք մատրիցային հավասարման կամ որ նույնն է՝ համակարգի միակ լուծումը՝ $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}, x_3 = -2$: Այսպիսով՝ $\boldsymbol{x}$ վեկտորը $\boldsymbol{f}$ բազիսում կունենա $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2)$ կոորդինատներ:■

Խնդիր 6.7: Ապացուցել, որ n-րդ կարգի շեղսիմետրիկ մատրիցների բազմությունը n- րդ կարգի բոլոր քառակուսային մատրիցների $M_{n,n}$ գծային տարածության ենթատարածություն է: Գտնել այդ ենթատարածության բազիսը և չափողականությունը:

Լուծում: n-րդ կարգի շեղսիմետրիկ մատրիցների բազմությունը նշանակենք $K_{n,n}$-ով: Նախ ցույց տանք, որ $K_{n,n}$-ը $M_{n,n}$ գծային տարածության ենթատարածություն է: Դրա համար բավական է ստուգել երկու պայման՝

- ցանկացած $A, B \in K_{n,n}$ մատրիցների համար $A + B \in K_{n,n}$,
- ցանկացած $A \in K_{n,n}$ մատրիցի և ցանկացած λ իրական թվի համար $\lambda A \in K_{n,n}$:

Իրոք, դիցուք՝ $A, B \in K_{n,n}$ ցանկացած մատրիցներ են: Դա նշանակում է, որ $A^T = -A$ և $B^T = -B$: Ունենք՝

$$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B),$$

$$(\lambda A)^T = \lambda(A^T) = \lambda(-A) = -(\lambda A):$$

Այսինքն՝ $(A+B)^T = -(A+B)$, և $(\lambda A)^T = -(\lambda A)$, հետևաբար $A + B \in K_{n,n}$ և $\lambda A \in K_{n,n}$: Ապացուցվեց:

Այժմ որոշենք այդ ենթատարածության չափողականությունը: Նկատենք, որ $K_{n,n}$ գծային ենթատարածությանը պատկանող ցանկացած A մատրից ունի այսպիսի տեսք (ինչո՞ւ)՝

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1(n-1)} & -a_{2(n-1)} & -a_{3(n-1)} & \dots & 0 & a_{(n-1)n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & -a_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}:$$

Վերջինս կարելի է ներկայացնել հետևյալ գծային կոմբինացիայի տեսքով՝

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} X_{ij} \ ,$$

որտեղ X_{ij}-երը $(i = 1,\dots,n;\ j = i+1,\dots,n)$ n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցներ են, որոնց բոլոր տարրերը զրոներ են՝ բացի x_{ij} և x_{ji} տարրերից, ընդ որում՝ $x_{ij} = 1$, իսկ $x_{ji} = -1$՝

$$X_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & .0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & .0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots,\ X_{(n-1)n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}:$$

Այլ կերպ ասած՝ $K_{n,n}$ գծային տարածությունը իրենից ներկայացնում է X_{ij} տարրերի գծային թաղանթ, որոնք գծորեն անկախ են (ինչո՞ւ): Ըստ գծային թաղանթի բազիսի և չափողականության վերաբերյալ 6.8-րդ թեորեմի՝ կարող ենք պնդել, որ X_{ij} տարրերը կազմում են բազիս $K_{n,n}$-ում, և վերջինիս չափողականությունը հավասար է նրանց քանակին՝ $\dim K_{n,n}=1+2+3+\dots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$:■

Խնդիր 6.8: Գտնել $lin\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ գծային թաղանթի չափողականությունը և այդ գծային տարածության տարբեր բազիսներ, եթե՝

$$a_1=(1,0,0,-1), a_2=(2,1,1,0), a_3=(1,1,1,1), a_4=(1,2,3,4),$$
$$a_5=(0,1,2,3):$$

Լուծում: Ըստ գծային թաղանթի չափողականության և բազիսի վերաբերյալ 6.8-րդ թեորեմի՝ $V=lin\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ գծային տարածության չափողականությունը հավասար է $a_1,a_2,a_3,\ a_4,a_5$ համախմբի առավելագույն թվով գծորեն անկախ տարրերի քանակին, որոնք էլ հենց կազմում են V գծային թաղանթի բազիսը:

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 տարրերը ընդունելով որպես սյուներ՝ կազմենք մատրից՝

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}:$$

Մատրիցի ռանգը հավասար է նրա առավելագույն գծորեն անկախ սյուների (կամ տողերի) քանակին: Հետևաբար A մատրիցի ռանգը որոշելով՝ կգտնենք a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 համախմբի առավելագույն գծորեն անկախ տարրերի քանակը: Կատարելով տարրական տողային և սյունային ձևափոխություններ՝ A մատրիցը բերենք անկյունագծային տեսքի՝

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ակնհայտ է, որ $rangA = 3$, իսկ առաջին, երկրորդ և չորրորդ սյուները A մատրիցի բազիսային սյուներ են: Նկատենք, որ բազիսային կարող են լինել նաև մատրիցի առաջին, երկրորդ և հինգերորդ սյուները (ինչո՞ւ): Այսպիսով՝ $\dim V = rangA = 3$, իսկ $\{a_1, a_2, a_4\}$ կամ $\{a_1, a_2, a_5\}$ համախմբերը V գծային թաղանթի բազիսներ են: ■

Տիպային խնդիրներ

1. Գծային տարածությո՞ւն է արդյոք R^3-ը հետևյալ գործողություններով՝

ա) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \ \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

բ) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix}, \ \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix},$

գ) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \ \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} x_1 \\ \sqrt{\lambda} x_2 \\ \sqrt{\lambda} x_3 \end{pmatrix},$

դ) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{pmatrix}, \ \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}:$

2. Ցույց տալ, որ հետևյալ բազմությունները գծային տարածություններ չեն՝

1) դատարկ բազմությունը,
2) տարածության վեկտորների բազմությունը՝ առանց տրված ուղղին զուգահեռ վեկտորների,
3) n-րդ կարգի բոլոր բազմանդամների բազմությունը,
4) n-ից փոքր կամ հավասար կարգ ունեցող և դրական գործակիցներով բազմանդամների բազմությունը:

3. L գծային տարածության մեջ ուսումնասիրել տրված վեկտորների գծային կախյալությունը:

1) $L = R^3$, $a_1 = (1,5,2)$, $a_2 = (3,4,4)$, $a_3 = (1,2,1)$:
2) $L = R^4$, $a_1 = (-1,5,2,4)$, $a_2 = (3,3,3,5)$, $a_3 = (8,-4,2,2)$:

3) $L = R^5$, $a_1 = (2,-3,1,5,0)$, $a_2 = (3,1,-4,-9,4)$, $a_3 = (7,-5,-2,1,6)$:

4) $L = P_2$, $f_1(x) = 5x^2 - 14x + 1$, $f_2(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $f_3(x) = 2x^2 + x + 7$:

5) $L = P_3$, $f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$, $f_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 3$, $f_3(x) = 3x^3 + 8x^2 + 4x + 1$:

6) $L = C(R)$-ը իրական առանցքի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաների գծային տարածությունն է, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = shx$, $f_3(x) = chx$:

7) $L = C(R)$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos^3 x$, $f_3(x) = \cos 3x$:

8) $L = C(R)$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $f_3(x) = e^{3x}$:

9) $L = C(R)$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos 2x$, $f_3(x) = \cos 3x$:

10) $L = C(R)$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos 2x$,.., $f_n(x) = \cos nx$,

11) $L = C(R)$, $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$,.., $f_n(x) = \sin nx$:

4. Ապացուցել, որ գծային տարածության

1) երկու հավասար վեկտորներ ունեցող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,
2) համեմատական վեկտորներ ունեցող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,
3) զրոյական վեկտոր պարունակող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,
4) կախյալ ենթահամախումբ ունեցող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,
5) անկախ համախմբի ցանկացած ենթահամախումբ գծորեն անկախ է:

5. Ապացուցել, որ եթե $f_1(x), f_2(x), f_3(x),.., f_n(x)$ ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են $[a,b]$-ում, ապա դրանք գծորեն կախյալ են ցանկացած $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ հատվածում:

6. Դիցուք՝ $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x),.., f_n(x)\}$ ֆունկցիաների համախումբը գծորեն անկախ է $[a,b]$–ում: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ համախմբի մասին $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ հատվածում:

7. Դիցուք՝ ֆունկցիաների համախումբը գծորեն անկախ է $[a_1,b_1]\subset[a,b]$-ում: Ցույց տալ, որ այն գծորեն անկախ է $[a,b]$-ում:

8. Ցույց տալ, որ $\{x,|x|\}$ համախումբը գծորեն կախյալ է $C[0,1]$ գծային տարածությունում, սակայն գծորեն անկախ է $C[-1,1]$ -ում:

9. Ինչո՞ւ հետևյալ համախմբերը համապատասխան գծային տարածություններում բազիսներ չեն՝

ա) R^2 -ում՝

$$1)\left\{\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ 2)\left\{\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}\right\},\ 3)\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\},$$

բ) R^3 -ում՝

$$1)\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\qquad 2)\left\{\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix}\right\},$$

գ) P_2 -ում՝

$$1)\{1;2x;x^2-4;5x\},\qquad 2)\ \{1-x;1-x^2;3x^2-2x-1\},$$

դ) $M_{2,2}$ -ում՝

$$1)\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},\ 2)\ \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&2\\-2&4\end{pmatrix}\right\}:$$

10. Ցույց տալ, որ L գծային տարածության $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n$ տարրերը կազմում են բազիս այդ տարածության մեջ, և գտնել a վեկտորի կոորդինատները $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ բազիսում:

1) $L = R^3$, $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,2)$, $e_3 = (1,2,3)$,
$a = (6,9,14)$,

2) $L = R^3$, $e_1 = (2,1,-3)$, $e_2 = (3,2,-5)$, $e_3 = (1,-1,1)$,
$a = (6,2,-7)$,

3) $L = R^4$, $e_1 = (1,2,-1,-2)$, $e_2 = (2,3,0,-1)$, $e_3 = (1,2,1,4)$,
$e_4 = (1,3,-1,0)$, $a = (7,14,-1,2)$:

11. Ապացուցել, որ բազմանդամների $e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$ համակարգը բազիս է P_2 գծային տարածության մեջ, և գտնել $a(x)$ բազմանդամի կոորդինատները այդ բազիսում՝

1) $e_1(x) = (x+2)^2$, $e_2(x) = (x+2)$, $e_3(x) = 1$,
$a(x) = 4x^2 - 7x + 3$;

2) $e_1(x) = x^2 + 1$, $e_2(x) = -x^2 + 2x$, $e_3(x) = x^2 - x$,
$a(x) = -2x^2 + x - 1$:

12. Տրված են $\boldsymbol{a}$ տարրի կոորդինատները L գծային տարածության $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$ բազիսում: Գտնել նրա կոորդինատները L-ի տիպային բազիսում՝

1) $L = R^2$, $\boldsymbol{a} = (4,1)$, $\boldsymbol{e}_1 = (2,-1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$:

2) $L = R^3$, $\boldsymbol{a} = (2,3,1)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,1,1)$:

3) $L = R^4$, $\boldsymbol{a} = (1,-2,3,-1)$, $\boldsymbol{e}_1 = (0,0,0,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,0,1,1)$,
$\boldsymbol{e}_3 = (0,1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1,1,1,1)$:

13. Ապացուցել, որ $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$- ը և $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n)$-ը L գծային տարածության բազիսներ են: Գտնել $\boldsymbol{e}$-ից $\boldsymbol{f}$-ին անցման մատրիցը և միևնույն վեկտորի կոորդինատների կապը երկու բազիսներում՝

1) $L = R^3$, $\boldsymbol{e}_1 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2,3,3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3,7,1)$;
$\boldsymbol{f}_1 = (3,1,4)$, $\boldsymbol{f}_2 = (5,2,1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1,1,-6)$:

2) $L = R^4$, $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1,1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1,3,2,3)$; $\boldsymbol{f}_1 = (1,0,3,3)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-2,-3,-5,-4)$, $\boldsymbol{f}_3 = (2,2,5,4)$, $\boldsymbol{f}_4 = (-2,-3,-4,-4)$:

14. Ստուգել՝ արդյո՞ք L գծային տարածության L_1 ենթաբազմությունը ենթատարածություն է:

1) $L = R^4$, $L_1 = \{a = (a_1, a_2, a_3, 0) \in R^4\}$,

2) $L = R^4$, $L_1 = \{a = (a_1, a_2, a_3, 1) \in R^4\}$,

3) $L = R^3$, $L_1 = \{a = (a_1, a_2, 2a_1 - 5a_2) \in R^3\}$,

4) $L = R^n$, $L_1 = \{a = (a_1, \ldots a_n) \in R^n; a_1 + \ldots + a_n = 0\}$,

5) $L = R^n$, $L_1 = \{a = (a_1, \ldots a_n) \in R^n; a_1 + \ldots + a_n = 1\}$,

6) $L = R^\infty$ - հաջորդականությունների գծային տարածությունն է, $L_1 = \{\{a_n\} \in R^\infty; \{a_n\}$-ը զուգամետ է$\}$,

7) $L = R^\infty$, $L_1 = \{\{a_n\} \in R^\infty, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\}$,

8) $L = R^\infty$, $L_1 = \{\{a_n\} \in R^\infty; \{a_n\}$-ը մոնոտոն չնվազող է$\}$,

9) $L = R^\infty$, $L_1 = \{\{a_n\} \in R^\infty; \{a_n\}$-ը թվաբանական պրոգրեսիա է$\}$,

10) $L = R^\infty$, $L_1 = \{\{a_n\} \in R^\infty; \{a_n\}$-ը երկրաչափական պրոգրեսիա է$\}$,

11) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n};\ \det A = 0\}$,

12) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n};\ \det A \neq 0\}$,

13) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n};\ a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = 0\}$,

14) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(a) = 0\}$,

15) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(a) = f(b)\}$,

16) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]\}$,

17) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(x)$-ը դիֆերենցելի է$\}$,

18) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(x)$-ը ինտեգրելի է$\}$,

19) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(x)$-ը սահմանափակ է$\}$,

20) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(x)$-ը մոնոտոն չնվազող է:

21) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b]; f(x)$-ը մոնոտոն է:

15. Գտնել $lin\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ գծային թաղանթի չափողականությունը և այդ գծային տարածության տարբեր բազիսներ, եթե՝

1) $a_1 = (1,1,1,1,0), a_2 = (1,1,-1,-1,-1), a_3 = (2,2,0,0,-1)$, $a_4 = (1,1,5,5,2), a_5 = (1,-1,-1,0,0)$,

2) $a_1 = (1,0,0,-1), a_2 = (2,1,1,0), a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$,

3) $a_1 = (3,5,1,7), a_2 = (-1,-3,-3,-5), a_3 = (3,2,-5,1)$, $a_4 = (2,3,0,4)$, $a_5 = (5,4,-7,1)$,

4) $a_1 = (2,1,1), a_2 = (-4,-2,-2), a_3 = (3,1,4), a_4 = (-3,5,-34)$, $a_5 = (5,3,0)$,

5) $a_1 = (2,3,1,1), a_2 = (3,1,2,-4), a_3 = (1,4,3,-7)$, $a_4 = (-1,2,-1,5)$:

16. Ստուգել՝ արդյո՞ք L գծային տարածության L_1 ենթաբազմությունը ենթատարածություն է: Եթե այո, գտնել ենթատարածության բազիսը և չափողականությունը՝

1) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n}; A$-ն վերին եռանկյունաձև մատրից է$\}$,

2) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n}; A$-ն սիմետրիկ մատրից է$\}$,

3) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n}; A$-ն շեղսիմետրիկ մատրից է$\}$,

4) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n}; A$-ն անկյունագծային մատրից է$\}$,

5) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n}; A$-ն զրոյական առաջին տողով մատրից է$\}$,

6) $L = R^n$, $L_1 = \{a = (\alpha, \beta, \alpha, \beta, ..., \alpha, \beta,) \in R^n\}$,

7) $L = R^n$, $L_1 = \{a = (a_1, ...a_n) \in R^n$; a-ի առաջին և վերջին կոորդինատները հավասար են},

8) $L = R^n$, $L_1 = \{a = (a_1, ...a_n) \in R^n$; a-ի զույգ կարգահամարով կոորդինատները հավասար են զրոյի},

9) $L = R^n$, $L_1 = \{a = (a_1, ...a_n) \in R^n$; a-ի կենտ կարգահամարով կոորդինատները հավասար են}:

17. Դիցուք $(a_1, ...a_k)$ համախումբը գծորեն անկախ է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած a_k վեկտոր $(b_1, ...b_s)$ վեկտորների գծային կոմբինացիա է, ապա $r \le s$:

Թեմա 7: Գծային հավասարումների համակարգեր

Գծային համասեռ համակարգի ոչ տրիվիալ համատեղելիությունը, գծային ընդհանուր համակարգի համատեղելիությունը: Քառակուսային համակարգեր, Կրամերի թեորեմը: Համակարգերի լուծման եղանակներ

Դիտարկենք n անհայտներով m գծային հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (7.1)$$

որտեղ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-երը անհայտներն են, իսկ a_{ij} և b_j $(i = 1, \ldots, m;$ $j = 1, \ldots n)$ մեծությունները տրված թվեր են, որոնց անվանում են *համապատասխանաբար համակարգի գործակիցներ և ազատ անդամներ:*

Համակարգն անվանում են ***համասեռ***, եթե նրա բոլոր $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ազատ անդամները հավասար են զրոյի: Եթե $b_1, b_2, \ldots, b_m$ թվերից գոնե մեկը զրո չէ, համակարգն անվանում են ***անհամասեռ:***

n անհայտներով m գծային հավասարումների համասեռ համակարգն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}: \qquad (7.2)$$

Համակարգի ***լուծում*** անվանում են $c_1, c_2, \ldots, c_n$ թվերի այնպիսի համախումբը, որը տեղադրելով $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների փոխարեն՝ համակարգի բոլոր հավասարումները վերածվում են նույնությունների:

Համակարգն անվանում են ***համատեղելի***, եթե այն ունի գոնե մեկ լուծում: Համատեղելի համակարգն անվանում են ***որոշյալ***, եթե այն ունի միակ լուծում, և ***անորոշ***՝ եթե ունի գոնե երկու տարբեր լուծումներ:

Համասեռ համակարգի համատեղելիությունը: Դիտարկենք (7.2) համասեռ համակարգը: Այն միշտ համատեղելի է, քանի որ միշտ ունի $x_1 = x_2 =,...,= x_n = 0$ զրոյական լուծում:

Թեորեմ 7.1: Գծային հավասարումների համասեռ համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում (***ոչ տրիվիալ համատեղելի է***) այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրա *հիմնական մատրիցի ռանգը փոքր է այուների թվից:*

Հետևանք: n անհայտներով n գծային հավասարումների քառակուսային համասեռ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրա *հիմնական մատրիցի որոշիչը տարբեր է զրոյից.*

Դիտարկենք n անհայտով m գծային հավասարումների (7.2) համասեռ համակարգ, որի գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի:

Թեորեմ 7.2: Եթե (7.2) համասեռ համակարգի գործակիցներից կազմված մատրիցի r ռանգը փոքր է n անհայտների թվից (այսինքն՝ համակարգը ոչ տրիվիալ համատեղելի է), ապա նրա լուծումների L բազմությունը $n-r$ չափողականությամբ գծային տարածություն է:

Այսպիսով՝ (7.2) համասեռ համակարգի ցանկացած $n-r$ գծորեն անկախ լուծում կազմում է բազիս լուծումների L գծային տարածության մեջ, որը կոչվում է (7.2) *համասեռ համակարգի* ***լուծումների ֆունդամենտալ (հիմնարար) համախումբ:***

Դիցուք՝ $X^1, X^2,..., X^{n-r}$ ֆունկցիաները կազմում են (7.2) համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբ: Ըստ բազիսի սահմանման՝ *համասեռ համակարգի ցանկացած Y լուծում կներկայացվի այդ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի միջոցով՝*

$$Y = \alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 + ... + \alpha_{n-r1} X^{n-r}, \qquad (7.3)$$

որտեղ $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_{n-r}$ -ը որոշակի թվեր են: Այլ կերպ ասած՝ *(7.3)-ը (7.2) համակարգի* ***ընդհանուր լուծումն է:***

Ընդհանուր համակարգերի համատեղելիությունը: Կազմենք (7.1) համակարգի գործակիցներով կազմված A մատրիցը՝ ***հիմնական մատրից,*** և գործակիցներով ու ազատ անդամներով կազմված $A|B$ մատրիցը՝ ***ընդլայնված մատրից՝***

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A|B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}:$$

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 7.3 (Կրոնեկեր-Կապելիի): Որպեսզի (7.1) համակարգը լինի համատեղելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա հիմնական մատրիցի ռանգը հավասար լինի ընդլայնված մատրիցի ռանգին:

Հետևյալ երկու պնդումները ստուգվում են անմիջականորեն.

Պնդում 1: (7.1) անհամասեռ համակարգի ցանկացած լուծման և համապատասխան (7.2) համասեռ համակարգի ցանկացած լուծման գումարը (7.1) անհամասեռ համակարգի լուծում է:

Պնդում 2: (7.1) անհամասեռ համակարգի ցանկացած երկու լուծումների տարբերությունը համապատասխան (7.2) համասեռ համակարգի լուծում է:

Վերոհիշյալ պնդումներից հետևում է, որ *անհամասեռ համակարգի մասնակի լուծման և համապատասխան համասեռ համակարգի ընդհանուր լուծման գումարը որոշում է անհամասեռ համակարգի ընդհանուր լուծումը:*

Այժմ դիտարկենք n անհայտներով n գծային հավասարումների ***քառակուսային համակարգ***՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}, \qquad (7.4)$$

որի հիմնական մատրիցն է՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}: \qquad (7.5)$$

Կատարենք նշանակումներ: Նշանակենք Δ-ով A մատրիցի որոշիչը, իսկ Δ_j-ով $(j=1,2,...,n)$ այն մատրիցի որոշիչը, որը ստացվում է A մատրիցից, երբ նրա j-րդ սյան փոխարեն գրված է համակարգի ազատ անդամների սյունը: Այսպիսով՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}: \qquad (7.6)$$

Թեորեմ 7.4 (Կրամերի): Հավասարումների (7.4) համակարգը, որի հիմնական մատրիցի Δ որոշիչը հավասար չէ զրոյի, *ունի լուծում, այն միակն է և որոշվում է հետևյալ բանաձևերի միջոցով՝*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \left(j=1,2,...,n\right): \qquad (7.7)$$

(7.7) բանաձևերն անվանում են *Կրամերի բանաձևեր*:

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման օրինակներ:

Խնդիր 7.1: Տրված համակարգը լուծել Կրամերի մեթոդով՝

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}:$$

Լուծում: Կազմենք համակարգի գործակիցներից կազմված մատրիցը և հաշվենք նրա որոշիչը՝

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6+1 = -5:$$

$\Delta \neq 0$, հետևաբար համակարգը համատեղելի է և, ըստ Կրամերի թեորեմի, ունի միակ լուծում: Այն գտնելու համար հաշվենք $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ որոշիչները, որտեղ Δ_j-ն ստացվում է Δ-ից՝ j-րդ սյան փոխարեն գրելով ազատ անդամների սյունը (տե՛ս 7.6): Այսպիսով՝

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 25:$$

Ըստ Կրամերի (7.7) բանաձևերի՝ կորոշենք անհայտները՝

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -5: \blacksquare$$

Խնդիր 7.2: Տրված համակարգը լուծել հակադարձ մատրիցի միջոցով՝

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -13 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}:$$

Լուծում: Համակարգը ներկայացնենք մատրիցային հավասարման տեսքով՝

$$A \cdot X = B,$$

որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}:$$

Եթե A մատրիցը լինի հակադարձելի, ապա վերջին հավասարությունից կստանանք՝

$$X = A^{-1} \cdot B:$$

Հակադարձ մատրիցը գոյություն ունի ($\det A = 3 \neq 0$) և հավասար է՝

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix},$$

հետևաբար՝

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -24 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}:$$

Այսպիսով՝ $x_1=3; x_2=-8; x_3=6$:■

Խնդիր 7.3: Ապացուցել, որ համասեռ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում, գտնել համակարգի ընդհանուր լուծումը և լուծումների որևէ ֆունդամենտալ համախումբ՝

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=0 \\ 17x_1-4x_2-6x_3+8x_4=0 \\ 3x_1+4x_2-2x_3+8x_4=0 \end{cases}:$$

Լուծում: Համակարգը լուծենք հավասարումներից անհայտների հաջորդական արտաքսման կամ որ նույնն է՝ ***Գաուսի եղանակով:*** Գրենք հավասարումների գործակիցներից կազմված մատրիցը և կատարելով տարրական տողային ձևափոխություններ՝ այն բերենք եռանկյունաձև կամ սեղանաձև տեսքի (գլխավոր անկյունագծից ներքև ստանանք զրոներ)՝

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 17 & -4 & -6 & 8 \\ 3 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -55 & 11 & -77 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից հետևում է, որ A մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի, ինչը փոքր է անհայտների թվից՝ $n=4$, և հետևաբար ըստ թեորեմ 7.1-ի՝

համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում: Քանի որ ձևափոխված մատրիցի x_1 և x_2 անհայտների գործակիցներով կազմված $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$ մինորը ոչ զրոյական է և հետևաբար բազիսային, ապա որպես *գլխավոր անհայտներ* կարող ենք ընտրել x_1 և x_2-ը: Իսկ x_3 և x_4-ը ընդունելով որպես *ազատ անհայտներ*՝ կտեղափոխենք աջ մաս և կստանանք տրված համակարգին համարժեք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = x_3 - 5x_4 \\ 5x_2 = x_3 - 7x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{4}{5}x_4 \\ x_2 = \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{7}{5}x_4 \end{cases} :$$

x_3 և x_4 ազատ անհայտները նշանակելով C_1 և C_2-ով՝ կստանանք համակարգի ***ընդհանուր լուծումը***՝

$$\left(\frac{2C_1 - 4C_2}{5}; \frac{C_1 - 7C_2}{5}; C_1; C_2 \right)^T :$$

Այժմ ստանանք լուծումների որևէ ֆունդամենտալ համախումբ: Վերցնենք երկու գծորեն անկախ երկչափանի վեկտորներ՝ $(1;0)$ և $(0;1)$: Դրանցից յուրաքանչյուրի բաղադրիչները տեղադրելով ընդհանուր լուծման մեջ որպես C_1 և C_2 և հաշվելով x_1 և x_2-ի արժեքները՝ կստանանք տրված համակարգի լուծումների հետևյալ ֆունդամենտալ համախումբը.

$$E_1 = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; 1; 0 \right)^T, E_2 = \left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 0; 1 \right)^T :$$

Վերջինս անվանում են լուծումների ***նորմալ ֆունդամենտալ համախումբ:*** Համակարգի ընդհանուր լուծումը լուծումների ֆունդամենտալ համախմբի միջոցով կարտահայտվի հետևյալ կերպ՝

$$X = C_1E_1 + C_2E_2 :\blacksquare$$

Խնդիր 7.4: Ուսումնասիրել հավասարումների համակարգի համատեղելիությունը, գտնել նրա ընդհանուր լուծումը և որևէ մասնակի լուծում՝

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}:$$

Լուծում: Նախ գտնենք համակարգի հիմնական և ընդլայնված մատրիցների ռանգերը: Ընդլայնված մատրիցում կատարելով տարրական տողային ձևափոխություններ՝ այն բերենք հետազոտման համար հարմար տեսքի՝

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ & 15 & -21 & 33 & -39 & -36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \end{array}\right):$$

Ակնհայտ է, որ $r = rgA = rg(A|B) = 2$, հետևաբար ըստ Կրոնեկեր–Կապելիի թեորեմի՝ համակարգը համատեղելի է:

Այժմ, ելնելով ձևափոխված մատրիցից, վերականգնենք սկզբնականին համարժեք համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 5x_2 - 7x_3 + 11x_4 - 13x_5 = -12 \end{cases}:$$

Քանի որ ռանգը՝ $r = 2$, իսկ անհայտների թիվը՝ $n = 5$, ապա համակարգի *գլխավոր անհայտները* երկուսն են՝ հավասար r-ին, իսկ *ազատ անհայտները*՝ երեքը՝ հավասար $n - r$-ին: Որպես գլխավոր ան-

հայտներ կարող ենք ընտրել ասենք x_1 և x_2-ը, քանի որ նրանց գործակիցներով կազմված $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ մինորը ոչ զրոյական է և կարող է լինել բազիսային: Համապատասխանաբար x_3, x_4, x_5-երը կլինեն ազատ անհայտները: Արտագրենք վերջին համակարգը՝ ազատ անհայտները տեղափոխելով աջ մաս՝

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 - 3x_3 + 4x_4 - 6x_5 \\ 5x_2 = -12 + 7x_3 - 11x_4 + 13x_5 \end{cases}:$$

Բազիսային անհայտները արտահայտելով ազատ անհայտների միջոցով՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}:$$

Ազատ անհայտները նշանակենք $x_3 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3$:

Համակարգի ***ընդհանուր լուծումը կլինի***՝

$$\left(-\frac{C_1 + C_2 + 4C_3 - 1}{5}; \frac{7C_1 - 11C_2 + 13C_3 - 12}{5}; C_1; C_2; C_3 \right)^T:$$

Բոլոր ազատ անհայտներին կոնկրետ թվային արժեքներ վերագրելով՝ կստանանք համակարգի մասնակի լուծումներ: Վերցնենք բոլոր ազատ անհայտները հավասար ասենք զրոյի՝ $C_1 = C_2 = C_3 = 0$: Կստանանք հետևյալ ***մասնակի լուծումը***՝

$$\left(\frac{1}{5}; -\frac{12}{5}; 0; 0; 0 \right)^T: \blacksquare$$

Տիպային խնդիրներ

1. Հետևյալ համակարգերը լուծել Կրամերի եղանակով.

ա) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3 \end{cases}$,

գ) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11 \\ 2x_1+10_2+9x_3+7x_4=40 \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37 \end{cases}$, դ) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6 \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8 \end{cases}$,

ե) $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6 \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$, զ) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=3 \\ 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_3+4x_4=5 \end{cases}$:

2. Հետևյալ համակարգերը լուծել հակադարձ մատրիցի օգնությամբ.

ա) $\begin{cases} -x_1+x_2=4 \\ -2x_1+x_2=0 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} -x_1+x_2=-4 \\ -2x_1+x_2=5 \end{cases}$, գ) $\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ -2x_1+x_2=0 \end{cases}$,

դ) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=5 \\ -4x_1+4x_2+3x_3=2 \end{cases}$, ե) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=2 \\ -4x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$,

զ) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ -4x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$:

3. Հետևյալ համակարգերը լուծել անհայտների արտաքման Գաուսի եղանակով:

ա) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4-7=0 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3-3x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7 \end{cases}$,

գ) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_4=-3 \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=-6 \\ 3x_1+4x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=2 \end{cases}$, դ) $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7 \end{cases}$,

ե) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4=-4 \\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3 \\ 8x_1+6x_2+x_3+3x_4=-7 \end{cases}$, զ) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5 \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3 \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1 \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12 \end{cases}$,

է) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$, ը) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7 \\ 2x_1-x_2-5x_4=6 \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1 \end{cases}$,

թ) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=3 \\ 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_3+4x_4=5 \end{cases}$, ժ) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+x_2-5x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2-13x_3=-6 \end{cases}$:

4. Գտնել համասեռ համակարգերի ընդհանուր լուծումը և լուծումների որևէ ֆունդամենտալ համախումբ.

ա) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$,

գ) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0 \end{cases}$, դ) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$,

ե) $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0 \\ 6x_1+-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0 \end{cases}$, զ) $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=0 \\ 3x_1+5x_2-7x_3=0 \\ 4x_1-5x_2-6x_3=0 \end{cases}$:

5. Հետազոտել համակարգերի համատեղելիությունը, գտնել ընդհանուր լուծումը և որևէ մասնակի լուծում.

ա) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$,

գ) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}$, դ) $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases}$,

ե) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2 \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3 \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4 \end{cases}$, զ) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5 \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7 \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18 \end{cases}$,

է) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$, ը) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

թ) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$, ժ) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$,

հ) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$, լ) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$,

խ) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$, ծ) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$:

Թեմա 8: Էվկլիդեսյան տարածություններ

Էվկլիդեսյան տարածության սահմանումը, օրինակներ, Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը: Նորմավորված տարածության սահմանումը, տարրերի օրթոգոնալություն, օրթոնորմավորված բազիս և նրա հատկությունները, Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալիզացիայի եղանակը

Էվկլիդեսյան տարածության սահմանումը: R իրական գծային տարածությունն անվանում են էվկլիդեսյան տարածություն, եթե

1. ցանկացած երկու $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R$ տարրերի ինչ-որ օրենքով կամ կանոնով համապատասխանության մեջ է դրվում իրական թիվ, որն անվանում են $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրերի սկալյար արտադրյալ և նշանակում են հետևյալ սիմվոլով՝ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,
2. Վերը նշված համապատասխանությունը բավարարում է հետևյալ հատկություններին (աքսիոմներին)՝
   1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\ \forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$ (տեղափոխական հատկություն),
   2) $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\ \ \forall\ \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}\in E$ (բաշխական հատկություն),
   3) $(\boldsymbol{\lambda x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\ \ \forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$, $\forall\ \boldsymbol{\lambda}\in R$,
   4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$, եթե $\boldsymbol{x}$-ը ոչ զրոյական տարր է, և $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$, եթե $\boldsymbol{x}$-ը զրոյական տարր է:

Օրինակ 1: Ազատ վեկտորների B_3 գծային տարածությունը $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\alpha}$ սկալյար արտադրյալով էվկլիդեսյան տարածություն է: ($\boldsymbol{\alpha}$-ն $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է, $|\boldsymbol{a}|$ և $|\boldsymbol{b}|$-ն՝ նրանց երկարությունները):

Օրինակ 2: $a\le t\le b$ հատվածի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաների $C[a,b]$ գծային տարածությունը $x(t),y(t)\in C[a,b]$ ֆունկցիաների $(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$ սկալյար արտադրյալով էվկլիդեսյան տարածություն է:

Օրինակ 3: Իրական թվերի կարգավորված n-յակների R^n բազմությունը, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ $\in R^n$ տարրերի $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ սկալյար արտադրյալով էվկլիդեսյան տարածություն է, որը հաճախ նշանակում են E^n սիմվոլով:

Դիտողություն: R^n գծային տարածությունում $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ և $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ՝

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\omega_1x_1y_1+\omega_2x_2y_2+...+\omega_nx_ny_n,\ \omega_i>0,\ i=1,2,...,n:$$

Այս դեպքում $\omega_i>0$ թվերն անվանում են կշիռներ, իսկ նշված եղանակով կառուցված էվկլիդեսյան տարածությունն անվանում են ***կշռային էվկլիդեսյան տարածություն:***

Թեորեմ 8.1: Ցանկացած էվկլիդեսյան տարածության ցանկացած $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\le(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}), \tag{8.1}$$

որն անվանում են ***Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարություն:***

Նորմավորված տարածությունների սահմանումը: R գծային տարածությունն անվանում են նորմավորված տարածություն, եթե

1. ինչ-որ օրենքով կամ կանոնով R տարածության ցանկացած $\boldsymbol{x}$ տարրի համապատասխանության մեջ է դրված իրական թիվ, որն անվանում են $\boldsymbol{x}$ տարրի նորմ և նշանակում են $\|\boldsymbol{x}\|$ սիմվոլով,
2. վերը նշված համապատասխանությունը բավարարում է հետևյալ հատկություններին (աքսիոմներին)՝

1) $\|\boldsymbol{x}\|>0$, եթե $\boldsymbol{x}$-ը ոչ զրոյական տարր է, և $\|\boldsymbol{x}\|=0$, եթե այն զրոյական տարրն է,
2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ ցանկացած $\boldsymbol{x}$ տարրի և ցանկացած λ իրական թվի համար,
3) ցանկացած երկու $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|, \tag{8.2}$$

որն անվանում են ***եռանկյան կամ Մինկովսկու անհավասարություն:***

Թեորեմ 8.2: Ցանկացած էվկլիդեսյան տարածություն կլինի նորմավորված, եթե նրանում ցանկացած $\boldsymbol{x}$ տարրի նորմը սահմանվի հետևյալ կերպ՝

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}: \tag{8.3}$$

Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը կարելի է արտագրել նորմերի միջոցով հետևյալ կերպ՝

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|: \tag{8.4}$$

Ցանկացած էվկլիդեսյան տարածության մեջ սահմանենք այդ տարածության *երկու կամայական* $\boldsymbol{x}$ *և* $\boldsymbol{y}$ *տարրերի կազմած անկյան* գաղափարը՝

$\boldsymbol{x}$ *և* $\boldsymbol{y}$ *տարրերի կազմած անկյուն* ասելով կհասկանանք այն անկյունը, որի կոսինուսը որոշվում է

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}}, \ \varphi \in [0, \pi]$$

առնչությամբ: Այսպիսի սահմանումը կոռեկտ է, քանի որ, ըստ Կոշի-Բունյակովսկու (8.4) անհավասարության, $\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$ կոտորակը մոդուլով չի գերազանցում մեկ թիվը:

Սահմանում: E էվկլիդեսյան տարածության ցանկացած $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրեր անվանում են օրթոգոնալ, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի:

Սահմանում: E էվկլիդեսյան տարածության $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ ոչ զրոյական տարրերի համախումբն անվանում են օրթոգոնալ, եթե նրա ցանկացած երկու տարր օրթոգոնալ են, այսինքն՝

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0; \text{երբ } i \ne j, i = 1,2,...,n; \ j = 1,2,...,n:$$

Սահմանում: էվկլիդեսյան տարածության $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ ոչ զրոյական տարրերի համախումբն անվանում են օրթոնորմալ, եթե նրա բոլոր տարրերը զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են, և յուրաքանչյուր տարրի նորմը հավասար է մեկի, այսինքն՝

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j \end{cases}, \quad i = 1,2,...,n; \ j = 1,2,...,n:$$

Թեորեմ 8.3: Ոչ զրոյական տարրերի ցանկացած $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ օրթոգոնալ (օրթոնորմալ) համախումբ գծորեն անկախ է:

Հետևանք: n չափանի էվկլիդեսյան տարածության n տարրերից բաղկացած ցանկացած օրթոգոնալ (օրթոնորմալ) համախումբ բազիս է նշված տարածության մեջ:

Սահմանում: Էվկլիդեսյան տարածության $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ բազիսն անվանում են օրթոգոնալ բազիս, եթե նրա տարրերը կազմում են օրթոգոնալ համակարգ, այսինքն՝

$$\left(e_i, e_j\right) = 0, \text{ երբ } i \neq j, i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n:$$

Սահմանում: Էվկլիդեսյան տարածության $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ բազիսն անվանում են օրթոնորմավորված բազիս, եթե նրա տարրերը կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ, այսինքն՝

$$\left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\right) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \quad i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n:$$

Օրթոնորմավորված բազիսների օրինակներ:

1. Ազատ վեկտորների B_2 և B_3 տարածություններում համապատասխանաբար i, j և i, j, k վեկտորների համակարգերը կազմում են օրթոնորմավորված բազիսներ:
2. R^n գծային տարածությունում $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0)$, $..., e_n = (0,0,...,1)$ տարրերը կազմում են օրթոնորմավորված բազիս:

Ձևակերպենք հետևյալ հիմնական թեորեմը.

Թեորեմ 8.4: Ցանկացած n չափանի էվկլիդեսյան տարածությունում գոյություն ունի օրթոնորմավորված բազիս:

Ստորև կնկարագրենք, թե ինչպես կարելի է էվկլիդեսյան տարածության կամայական $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ բազիսի տարրերի գծային կոմբինացիաների միջոցով կառուցել այդ նույն տարածության $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ օրթոնորմավորված բազիս: Նշված ալգորիթմն անվանում են ***Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալիզացման եղանակ:***

Եվ այսպես՝ դիցուք՝ $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$-ը էվկլիդեսյան տարածության կամայական բազիս է: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ տարրերը կառուցենք հետևյալ եղանակով.

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{f_1}}{\sqrt{(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1})}},$$

$$\boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{g_2}}{\sqrt{(\boldsymbol{g_2}, \boldsymbol{g_2})}}, \text{որտեղ } \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{e_3} = \frac{\boldsymbol{g_3}}{\sqrt{(\boldsymbol{g_3}, \boldsymbol{g_3})}}, \text{որտեղ } \boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1,$$

.....

$$\boldsymbol{e_n} = \frac{\boldsymbol{g_n}}{\sqrt{(\boldsymbol{g_n}, \boldsymbol{g_n})}}, \text{որտեղ } \boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{f}_n - (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_{n-1})\boldsymbol{e}_{n-1} - \ldots - (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1:$$

Վերոհիշյալ եղանակով կառուցված $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g_n}$ տարրերը օրթոգոնալ են, այսինքն՝ կազմում են էվկլիդեսյան տարածության *օրթոգոնալ բազիս*, իսկ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ տարրերը օրթոնորմավորված են, այսինքն՝ կազմում են էվկլիդեսյան տարածության *օրթոնորմավորված բազիս:*

Նկատենք, որ յուրաքանչյուր n *չափանի* E *էվկլիդեսյան տարածության մեջ գոյություն ունեն տարբեր օրթոնորմավորված բազիսներ:* Իսկապես, եթե օրինակ Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալիզացման եղանակով կառուցենք օրթոնորմավորված բազիսներ միևնույն $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f_n}$ գծորեն անկախ տարրերով, ապա ամեն անգամ օրթոգոնալիզացիան սկսելով տարբեր $\boldsymbol{f_k}$ տարրերից՝ կստանանք տարբեր օրթոնորմավորված բազիսներ:

Օրթոնորմավորված բազիսի հատկությունները:

1. Դիցուք՝ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e_n}$-ը n չափանի E էվկլիդեսյան տարածության կամայական օրթոնորմավորված բազիս է, $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրերը այդ տարածության ցանկացած տարրեր են: Ընդ որում՝ $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրերի սկալյար արտադրյալը հավասար կլինի հետևյալ թվին՝

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i : \qquad (8.5)$$

2. Ցանկացած վեկտորի կոորդինատները օրթոնորմավորված բազիսում հավասար են այդ վեկտորի և բազիսի համապատասխան տարրերի սկալյար արտարյալին, այսինքն՝ եթե $x_1, x_2, \ldots, x_n$-երը $\boldsymbol{x}$ տարրի կոորդինատներն են $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ օրթոնորմավորված բազիսում, ապա

$$x_k = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_k),\ k = 1,2,\ldots,n :$$

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 8.1: Կարելի՞ է արդյոք

ա) R^2 գծային տարածության մեջ $X = (x_1, x_2)$ և $Y = (y_1, y_2)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ կերպ՝

$$(X,Y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 :$$

բ) R^3 գծային տարածությունում $X = (x_1, x_2, x_3)$ և $Y = (y_1, y_2, y_3)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ կերպ՝

$$(X,Y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 :$$

Լուծում: **ա)** Ստուգենք սկալյար արտադրյալի 1-4 աքսիոմները.

1) $(X,Y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 = 2y_1x_1 + 5y_2x_2 = (Y,X)$,

2) $(X+Y,Z) = 2(x_1+y_1)z_1 + 5(x_2+y_2)z_2 =$
$= (2x_1z_1 + 5x_2z_2) + (2y_1z_1 + 5y_2z_2) = (X,Z) + (Y,Z)$,

3) $(\lambda X,Y) = = 2\lambda x_1y_1 + 5\lambda x_2y_2 = \lambda(2x_1y_1 + 5x_2y_2) = \lambda(X,Y)$,

4) $(X,X) = 2x_1^2 + 5x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0 \Leftrightarrow X = \theta$:

Բոլոր աքսիոմները տեղի ունեն, հետևաբար R^2 գծային տարածության մեջ վերոհիշյալ ձևով կարելի է սահմանել սկալյար արտադրյալ:

բ) Ստուգենք սկալյար արտադրյալի 1-4 հատկությունները: Ունենք՝

1) $(X,Y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 = y_1x_1 + 3y_2x_2 = (Y,X)$,

2) $(X+Y,Z) = (x_1+y_1)z_1 + 3(x_2+y_2)z_2 =$

$$= x_1z_1 + y_1z_1 + 3x_2z_2 + 3y_2z_2 = x_1z_1 + 3x_2z_2 + y_1z_1 + 3y_2z_2 =$$
$$= (X,Z) + (Y,Z),$$

3) $(\lambda X, Y) = \lambda x_1 y_1 + 3\lambda x_2 y_2 = \lambda(x_1y_1 + 3x_2y_2) = \lambda(X,Y)$:

Ինչպես տեսանք, առաջին երեք հատկությունները տեղի ունեն: Ստուգենք չորրորդ հատկությունը: Ունենք՝

4) $(X,X) = x_1^2 + 3x_2^2 \geq 0$:

Նկատենք սակայն, որ գոյություն ունեն ոչ զրոյական $Z = (0,0,a) \in$ $\in R^3$, $a \neq 0$ տարրեր, որոնց համար $(Z,Z) = 0$, մինչդեռ ըստ չորրորդ հատկության՝ (Z,Z) արտադրյալը կարող է հավասար լինել զրոյի այն և միայն այն ժամանակ, երբ Z -ը զրոյական տարրն է՝ $Z = (0,0,0)$:

Այսպիսով՝ չորրորդ հատկությունը մասամբ տեղի չունի, և հետևաբար R^3 գծային տարածությունում նման ձևով չի կարելի սահմանել սկալյար արտադրյալ:■

Խնդիր 8.2: Ցույց տալ, որ սկալյար արտադրյալ կարելի է սահմանել ցանկացած վերջավոր չափանի գծային տարածությունում:

Լուծում: Դիցուք՝ R -ը n չափանի ցանկացած գծային տարածություն է: Դիտարկենք այդ գծային տարածության որևէ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ բազիս: Դիցուք՝ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R$ ցանկացած տարրեր են և $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$: Որպես $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ տարրերի սկալյար դիտարկենք հետևյալ թիվը՝

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ այս ձևով սահմանված սկալյար արտադրյալը բավարարում է 1-4 աքսիոմներին: Հետևաբար ցանկացած վերջավոր չափանի գծային տարածություն, վերոհիշյալ եղանակով սահմանված սկալյար արտադրյալով, էվկլիդեսյան տարածություն է:■

Խնդիր 8.3: Հաշվել $\boldsymbol{x} = (1,2,3,4)$ և $\boldsymbol{y} = (5,6,7,8)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն ու նորմերը R^4 գծային տարածությունում:

Լուծում: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 70$,

$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$, $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2} = \sqrt{174}$:■

Խնդիր 8.4: Հաշվել $f(x)=x+1$ և $g(x)=x^2+x$ ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալն ու նորմերը $C[0,1]$ գծային տարածությունում:

Լուծում:

$$(f,g)=\int_0^1 (x+1)(x^2+x)dx=\int_0^1 (x^3+2x^2+x)dx=\frac{17}{12},$$

Հաշվենք $\|f(x)\|$ և $\|g(x)\|$ նորմերը: Ըստ սահմանման՝

$$\|f(x)\|=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_0^1 (x+1)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\|g(x)\|=\sqrt{(g,g)}=\left(\int_0^1 (x^2+x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{31}{30}}:\blacksquare$$

Խնդիր 8.5: Նորմավորել $\boldsymbol{x}=(1,2,3,4)$-տարրը R^4-ում:

Լուծում: $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30}$

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{3}{\sqrt{30}},\frac{4}{\sqrt{30}}\right):\blacksquare$$

Խնդիր 8.6: Գտնել $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ և $g(x)=x^{\frac{3}{4}}$ ֆունկցիաների կազմած անկյունը $C[a,b]$ էվկլիդեսյան տարածության մեջ:

Լուծում:

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{2},\quad \|f(x)\|=\sqrt{\int_0^1\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2dx}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|g(x)\|=\sqrt{\int_0^1\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^2dx}=\sqrt{\frac{2}{5}},\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}=\frac{\sqrt{15}}{4},\varphi=\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}:\blacksquare$$

Խնդիր 8.7.: Ստուգել R^3 գծային տարածության $\boldsymbol{f}_1=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{f}_2=(3,3,-1,-1)$ և $\boldsymbol{f}_3=(-2,0,6,8)$ տարրերի գծորեն անկախությունը և դրանց վրա կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալիզացիայի պրոցեսը:

Լուծում: $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ տարրերի կոորդինատներն ընդունելով որպես սյուներ՝ կազմենք մատրից՝

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}:$$

Կատարելով տարրական տողային ձևափոխություններ՝ հաշվենք A մատրիցի ռանգը՝

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, $rgA = 3$, և քանի որ մատրիցն ունի ճիշտ երեք սյուն, ապա նրա սյուները , հետևաբար նաև $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ համախումբը, գծորեն անկախ են: Այժմ կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալիզացիայի պրոցեսը երեք քայլով՝՝

1) $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (1,1,1,1)$,

2) $(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1) = 4,\ (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 4,\ \dfrac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)} = 1,$

$$e_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} \cdot e_1 = (2,2,-2,-2),$$

3) $(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1) = 12, \quad (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 4, \quad \dfrac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)} = 3$,

$(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2) = -32, \quad (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 16, \quad \dfrac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)} = -2,$

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)} \cdot \boldsymbol{e}_1 - \frac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)} \cdot \boldsymbol{e}_2 = (-1,1,-1,1):$$

Այսպիսով՝ $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2,2,-2,-2)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-1,1,-1,1)$:■

Խնդիր 8.8: Գտնել այնպիսի $a \in R$ թիվ, որ $C[0,\pi]$ էվկլիդեսյան տարածության մեջ $f(x)=3\sin x+2\cos x$ ֆունկցիան լինի օրթոգոնալ $g(x)=\sin x+a\cos x$ ֆունկցիային, այնուհետև նորմավորել $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները:

Լուծում: $C[0,\pi]$ էվկլիդեսյան տարածության մեջ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$(f,g)=\int_0^{\pi} f(x)g(x)dx:$$

Մեր դեպքում ունենք՝

$$(f,g)=\int_0^{\pi}(3\sin x+2\cos x)(\sin x+a\cos x)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(3\sin^2 x+(2+3a)\cos x\sin x+2a\cos^2 x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(3+(2a-3)\cos^2 x+(2+3a)\cos x\sin x\right)dx=$$

$$=\left(3x+\frac{2a-3}{4}\sin 2x+\frac{2a-3}{2}x+\frac{2+3a}{2}\sin^2 x\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=3\pi+\frac{2a-3}{2}\pi=\frac{(3+2a)\pi}{2}:$$

Որպեսզի $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները լինեն օրթոգոնալ, անհրաժեշտ է, որ նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝ $3+2a=0$, որտեղից՝ $a=-3/2$:

Հաշվենք $\|f(x)\|$ և $\|g(x)\|$ նորմերը: Ըստ սահմանման՝

$$\|f(x)\|=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_0^{\pi}(3\sin x+2\cos x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\int_0^{\pi}\left(9\sin^2 x+12\sin x\cos x+4\cos^2 x\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\left(\frac{13}{2}x-\frac{5}{4}\sin 2x+6\sin^2 x\right)\Bigg|_0^{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{13}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}}:$$

$$\|g(x)\|=\sqrt{(g,g)}=\left(\int_0^{\pi}\left(\sin x-\frac{3}{2}\cos x\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\int_0^{\pi}\left(\sin^2 x-3\sin x\cos x+\frac{9}{4}\cos^2 x\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\left(\frac{13}{8}x+\frac{5}{16}\sin 2x-\frac{3}{2}\sin^2 x\right)\Bigg|_0^{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{13}{8}\pi\right)^{\frac{1}{2}}:$$

Նորմավորված ֆունկցիաներ ստանալու համար $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները պետք է բաժանել իրենց նորմերի վրա՝

$$f_1(x)=\frac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{\left(\frac{13}{2}\pi\right)}},\quad g_1(x)=\frac{\sin x-\frac{3}{2}\cos x}{\sqrt{\left(\frac{13}{8}\pi\right)}}:$$

Այսպիսով՝ ստացված $f_1(x)$ և $g_1(x)$ ֆունկցիաները օրթոգոնալ են և նորմավորված: ■

Խնդիր 8.9: Ստուգել տրված տարրերի օրթոգոնալությունը R^4 էվկլիդեսյան տարածության մեջ և համախումբը լրացնել մինչև այդ տարածության օրթոգոնալ բազիս՝

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \blacksquare$$

Լուծում: Նախ քանի որ $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 2 - 2 - 3 + 3 = 0$, ապա $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ տարրերը օրթոգոնալ են R^4-ում: Գտնենք e_3 տարր, որն օրթոգոնալ լինի $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ տարրերին: $e_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ տարրը պետք է բավարարի

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 0 \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0 \end{cases}$$

պայմաններին, այսինքն՝ նրա կոորդինատները պետք է լինեն

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

համակարգի լուծումներ: Լուծելով համակարգը՝ կստանանք նրա ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall c_1, c_2 :$$

Որպես $\boldsymbol{e}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ տարր կարելի է վերցնել համակարգի ցանկացած ոչ զրոյական լուծում, ասենք՝

$$\boldsymbol{e}_3 = (1,1,1,0) \, (\boldsymbol{c}_1 = 1, \boldsymbol{c}_2 = 0):$$

Այնուհետև գտնենք $\boldsymbol{e}_4$ տարր, որն օրթոգոնալ լինի $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ տարրերին: $\boldsymbol{e}_4 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ տարրը պետք է բավարարի

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4) = 0 \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4) = 0 \\ (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) = 0 \end{cases}$$

պայմաններին, այսինքն՝ նրա կոորդինատները պետք է լինեն

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 + 3y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

համակարգի լուծումներ: Լուծելով համակարգը՝ կստանանք՝

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \lambda :$$

Որպես $\boldsymbol{e}_4 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ տարր կարելի է վերցնել համակարգի ցանկացած ոչ զրոյական լուծում, ասենք՝ $\boldsymbol{e}_4 = (-1,1,0,1)(\lambda = 1)$:
Այսպիսով՝

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,-2,1,3), \boldsymbol{e}_2 = (2,1,-3,1), \boldsymbol{e}_3 = (1,1,1,0), \boldsymbol{e}_4 = (-1,1,0,1)$$

տարրերի համախումբը R^4 գծային տարածության որոնելի բազիսն է: ■

Տիպային խնդիրներ

1. Կարելի՞ է արդյոք R^2 գծային տարածությունում $X = (x_1, x_2)$ և $Y = (y_1, y_2)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ կերպ՝
   ա) $(X,Y) = x_1y_1 - 3x_2y_2$,
   բ) $(X,Y) = 3x_1y_1 + 4x_2y_2$,
   գ) $(X,Y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$,
   դ) $(X,Y) = x_2y_2$,
   ե) $(X,Y) = x_1^2y_1^2 + x_2y_2$:
2. Կարելի՞ է արդյոք $M_{2,2}$ գծային տարածությունում

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ և } B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ կերպ՝

ա) $(A,B)=a_1a_2-b_1b_2+c_1c_2-d_1d_2$,

բ) $(A,B)=2a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+2d_1d$,

գ) $(A,B)=a_1a_2+d_1d_2$:

3. Կարելի՞ է արդյոք ազատ վեկտորների B_3 գծային տարածության մեր $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ կերպ՝ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\alpha$, որտեղ α-ն $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է, $|\boldsymbol{a}|$ և $|\boldsymbol{b}|$-ն՝ նրանց երկարությունները:

4. $C[-1,1]$ գծային տարածությունում f,g տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ՝

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx:$$

$f(x)=x^2, g(x)=x^2+1$ ֆունկցիաների համար հաշվել $(f,g), \|f\|, \|g\|$ մեծությունները:

5. $C[-2,2]$ գծային տարածությունում f,g տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ՝

$$2\int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx:$$

$f(x)=3x^2, g(x)=3x^2-5$ ֆունկցիաների համար հաշվել $(f,g), \|f\|, \|g\|$ մեծությունները:

6. P_2 գծային տարածությունում

$p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2, \quad q(x)=q_0+q_1x+q_2x^2$

տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ՝

$$(p,q)=p_0q_0+p_1q_1+p_2q_2:$$

$p(x)=1-x+3x^2, \quad q(x)=x-x^2$ տարրերի համար հաշվել $(p,q), \|p\|, \|q\|$ մեծությունները:

7. P_2 գծային տարածությունում

$p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2, \quad q(x)=q_0+q_1x+q_2x^2$

տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ՝

$$(p,q)=p_0q_0+3p_1q_1+p_2q_2:$$

$p(x)=4-2x+x^2, \quad q(x)=4+6x-x^2$ տարրերի համար հաշվել $(p,q), \|p\|, \|q\|$ մեծությունները:

8. Ապացուցել անհավասարությունը ցանկացած $x_1....,x_n$ և $y_1,...,y_n$ իրական թվերի համար՝

ա) $(x_1y_1+...+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+...+x_n^2)(y_1^2+...+y_n^2)$,

բ) $\sqrt{(x_1+y_1)^2+...+(x_n+y_n)^2} \le \sqrt{x_1{}^2+...+x_n{}^2}+\sqrt{y_1{}^2+...+y_n{}^2}$:

9. Ապացուցել անհավասարությունը ցանկացած $f,g \in C[a,b]$ ֆունկցիաների համար՝

ա) $\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt$,

բ) $\sqrt{\int_a^b (x(t)+y(t))^2 dt} \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}+\sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}$:

10. R^5 էվկլիդեսյան տարածության մեջ գտնել $a=(3,-5,1,5,-2)$ և $b=(4,0,-4,4,1)$ տարրերի կազմած անկյունը:

11. $C[0,1]$ էվկլիդեսյան տարածության մեջ գտնել $f(x)=\sqrt[3]{x}$ և $g(x)=x^4$ ֆունկցիաների կազմած անկյունը:

12. Գտնել տրված վեկտորների կազմած անկյունը՝

ա) $u=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$, եթե $(u,v)=u_1v_1+u_2v_2$,

բ) $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$, եթե $(u,v)=u_1v_1+2u_2v_2+u_3v_3$:

13. Էվկլիդեսյան տարածության մեջ գտնել $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե $\|\boldsymbol{a}\|=3$, $\|\boldsymbol{b}\|=1$ և $\|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\|^2+$ $+\|2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\|^2=60$:

14. Էվկլիդեսյան տարածության մեջ գտնել $\|4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|$, եթե $\|\boldsymbol{a}\|=2$, $\|\boldsymbol{b}\|=1$ և $\|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\|=4$:

15. Դիցուք՝ $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$: Ցույց տալ, որ $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ տարրերը օրթոգոնալ են, եթե $(u,v)=u_1v_1+2u_2v_2$:

16. $C[-l,l]$ Էվկլիդեսյան տարածության մեջ տրված են $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները: Ընդ որում՝ $f(x)$-ը զույգ է, $g(x)$-ն՝ կենտ: Ապացուցել, որ $f(x)$ ֆունկցիան օրթոգոնալ է $g(x)$-ին:

17. $C[0,\ln 2]$ Էվկլիդեսյան տարածության մեջ գտնել $a\in R$, որի դեպքում $f(x)=e^{2x}$ ֆունկցիան օրթոգոնալ է $f(x)=e^x+a$ ֆունկցիային:

18. Գտնել $x=(1,1,1,1), y=(1,-1,-1,1), z=(2,1,1,3)$ տարրերին օրթոգոնալ և նորմավորված տարր:

19. Ապացուցել, որ էվկլիդեսյան տարածության ոչ զրոյական տարրերի ցանկացած օրթոգոնալ համակարգ կարելի է լրացնել մինչև այդ տարածության օրթոգոնալ բազիս:

20. Ցույց տալ հետևյալ տարրերի օրթոգոնալությունը և համախումբը լրացնել մինչև օրթոգոնալ բազիս:

ա) $x=(1,-2,2,-3), y=(2,-3,2,4)$,

բ) $x=(1,1,1,2), y=(1,2,3,-3)$:

21. Գտնել x տարրի կոորդինատները B օրթոնորմալ բազիսում՝

1) $x=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ B\left\{\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\\ \dfrac{3\sqrt{13}}{13}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\\ \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\end{pmatrix}\right\},$

2) $x=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ B=\left\{\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\0\\ \dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\\0\\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\right\}:$

22. Հետևյալ համախմբերի նկատմամբ կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալիզացիա՝

ա) $\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},$ բ) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\},$

գ) $\left\{\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right\},$ դ) $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}:$

23. Դիցուք՝

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}:$$

Օրթոնորմավորել $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ և $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_2\}$ համախմբերը:

24. R^2–ում $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է $(U,V)=2u_1v_1+u_2v_2$ օրենքով: Օրթոնորմավորել $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}\right\}$ համախումբը:

25. R^3–ում $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_{31}\end{pmatrix}$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է $(U,V)=u_1v_1+2u_2v_2+3u_3v_3$ օրենքով: Օրթոնորմավորել $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ համախումբը:

26. P_2 գծային տարածությունում p,q տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ՝

$$\int_0^1 p(x)q(x)dx:$$

Օրթոնորմավորել $\{1,x,x^2\}$ համախումբը:

27. Կառուցել հետևյալ տարրերով ծնված գծային թաղանթի օրթոգոնալ բազիսը՝

ա) $(1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$,

բ) $(1,1,-1,-2),(5,8,-2,-3),(3,9,3,8)$,

գ) $(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(1,1,-6,0),(5,7,7,8)$:

Թեմա 9: Գծային օպերատորներ

Սահմանումը, օրինակներ, գծային օպերատորի մատրից, գործողություններ գծային օպերատորների հետ, գծային օպերատորի մատրիցի ձևափոխումը նոր բազիսին անցնելիս, գծային օպերատորի սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ, գծային օպերատորի մատրիցի ձևափոխումը անկյունագծային տեսքի

Դիցուք՝ տրված է $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ արտապատկերումը L_1 գծային տարածությունից L_2 գծային տարածություն, որը L_1-ի յուրաքանչյուր $\boldsymbol{x}$ տարրին համապատասխանեցնում է միակ $\boldsymbol{Ax}$ տարրը L_2-ից: Վերջինս անվանում են $\boldsymbol{x}$ տարրի պատկեր L_2-ում:

Սահմանում: $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ արտապատկերումը L_1 գծային տարածությունից L_2 գծային տարածություն անվանում են գծային օպերատոր, եթե ցանկացած $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ տարրերի և ցանկացած $\lambda \in R$ իրական թվի համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները.

1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ay}$ (տարրերի գումարի պատկերը հավասար է նրանց պատկերների գումարին),

2) $\boldsymbol{A}(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{Ax}$ (տարրի և թվի արտադրյալի պատկերը հավասար է այդ տարրի պատկերի և այդ թվի արտադրյալին):

1) և 2) պայմաններից հետևում են հետևյալ պնդումները.

1. Գծային օպերատորը պահպանում է գծային կոմբինացիաները, այսինքն՝ տարրերի գծային կոմբինացիան արտապատկերում է նրանց պատկերների գծային կոմբինացիային միևնույն գործակիցներով. $\boldsymbol{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{Ax}_i \quad \forall \boldsymbol{x}_i \in L_1, \forall \lambda_i \in R$, $i = 1,2,\ldots,k$:
2. Գծային օպերատորը L_1 գծային տարածության զրոյական տարրը արտապատկերում է L_2 գծային տարածության զրոյական տարրին. $\boldsymbol{A}(\theta_{L_1}) = \theta_{L_2}$, որտեղ $\theta_{\boldsymbol{L}_1}, \theta_{\boldsymbol{L}_2}$-ը համապատաս-

խանաբար L_1 և L_2 գծային տարածությունների զրոյական տարրերն են:

3. Գծային փոխմիարժեք օպերատորը պահպանում է տարրերի գծային կախվածությունը (անկախությունը), այսինքն՝ գծորեն կախված (անկախ) տարրերի համախումբը արտապատկերում է գծորեն կախված (անկախ) տարրերի համախմբի:

Դիցուք՝ L_1-ը և L_2-ը համապատասխանաբար n և m չափանի գծային տարածություններ են: Դիցուք՝ $\boldsymbol{A}$-ն L_1-ից L_2 գործող գծային օպերատոր է: L_1 գծային տարածության մեջ ֆիքսենք $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ բազիս, իսկ L_2-ում՝ $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,...,\boldsymbol{f}_m)$ բազիս: Դիտարկենք $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի գործողությունը $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ բազիսի վեկտորների վրա: $\boldsymbol{Ae}_1,\boldsymbol{Ae}_2,...,\boldsymbol{Ae}_n\in L_2$ տարրերը վերլուծենք ըստ $\boldsymbol{f}$ բազիսի.

$$\boldsymbol{Ae}_1=a_{11}\boldsymbol{f}_1+a_{21}\boldsymbol{f}_2+...a_{m1}\boldsymbol{f}_m,$$
$$\boldsymbol{Ae}_2=a_{12}\boldsymbol{f}_1+a_{22}\boldsymbol{f}_2+...a_{m2}\boldsymbol{f}_m,$$
$$.....$$
$$\boldsymbol{Ae}_n=a_{1n}\boldsymbol{f}_1+a_{2n}\boldsymbol{f}_2+...a_{mn}\boldsymbol{f}_m:$$

Այս վերլուծությունների a_{ij} գործակիցներով կազմենք մատրից՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

որն իրենից ներկայացնում է *$\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{e}$ և $\boldsymbol{f}$ բազիսների զույգում*: Նշենք, որ այդ մատրիցի i-րդ սյունը ($i=1,2,...,n$) $\boldsymbol{Ae}_i$ վեկտորի կոորդինատներն են $\boldsymbol{f}$ բազիսում:

Դիցուք՝ $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորը գործում է L գծային տարածությունից հենց նույն L գծային տարածության մեջ: Դիցուք՝ L-ի չափողականությունը n է: L-ում ֆիքսենք $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\in L$ բազիս: Դիտարկենք $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի գործողությունը $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ բազիսի վեկ-

տորների վրա: $\boldsymbol{Ae}_1, \boldsymbol{Ae}_2, ..., \boldsymbol{Ae}_n \in L$ վեկտորները վերլուծենք ըստ նույն՝ $\boldsymbol{e}$ բազիսի.

$$\boldsymbol{Ae}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + ...a_{n1}\boldsymbol{e}_n,$$
$$\boldsymbol{Ae}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + ...a_{n2}\boldsymbol{e}_n,$$
$$...$$
$$\boldsymbol{Ae}_n = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + ...a_{nn}\boldsymbol{e}_n:$$

Այս վերլուծությունների a_{ij} գործակիցներով կազմված մատրիցը՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

իրենից ներկայացնում է $\boldsymbol{A}$ *գծային օպերատորի մատրիցը* $\boldsymbol{e}$ *բազիսում:* Նշենք, որ այդ մատրիցի i-րդ սյունը ($i = 1,2,...,n$) $\boldsymbol{Ae}_i$ վեկտորի կոորդինատներն են $\boldsymbol{e}$ բազիսում:

Թեորեմ 9.1: Դիցուք՝ $\boldsymbol{A}$-ն L գծային տարածությունից L-ի մեջ գործող գծային օպերատոր է՝ $\boldsymbol{A}: L \to L$, $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$-ն բազիս է L-ում: Այդ դեպքում ցանկացած $\boldsymbol{x} \in L$ տարրի համար $\boldsymbol{Ax}$ վեկտորը $\boldsymbol{e}$ բազիսում կունենա $A \cdot X$ կոորդինատներ, որտեղ A-ն $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցն է $\boldsymbol{e}$ բազիսում, X-ը $\boldsymbol{x}$ տարրի կոորինատների մատրից-սյունն է $\boldsymbol{e}$ բազիսում:

Թեորեմ 9.2: Դիցուք՝ $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$-ն բազիս է L-ում, A-ն n-րդ կարգի քառակուսային մատրից է: Այդ դեպքում գոյություն ունի միակ $\boldsymbol{A}: L \to L$ գծային օպերատոր, որի մատրիցը $\boldsymbol{e}$ բազիսում համընկնում է A մատրիցի հետ:

Գործողություններ գծային օպերատորների հետ: Դիցուք՝ L_1-ը և L_2-ը ցանկացած գծային տարածություններ են:

Սահմանում: $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ և $\boldsymbol{B}: L_1 \to L_2$ օպերատորներն անվանում են հավասար, եթե $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Bx}$, $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$ տարրի համար:

Սահմանում: $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ և $\boldsymbol{B}: L_1 \to L_2$ օպերատորների գումար անվանում են այն $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}): L_1 \to L_2$ օպերատորը, որը գործում է $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ օրենքով $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$ տարրի համար:

Սահմանում: $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ օպերատորի և λ թվի արտադրյալ անվանում են այն $(\lambda\boldsymbol{A}): L_1 \to L_2$ օպերատորը, որը գործում է $(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ օրենքով $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$ տարրի համար:

Սահմանում: $\boldsymbol{A}: L_2 \to L_3$ և $\boldsymbol{B}: L_1 \to L_2$ օպերատորների արտադրյալ անվանում են այն $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}): L_1 \to L_3$ օպերատորը, որը գործում է $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})$ օրենքով $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$ տարրի համար:

Սահմանում: $\boldsymbol{A}: L \to L$ օպերատորի աստիճան սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n-1},$$

որտեղ $\boldsymbol{E}$-ն L-ից L գործող գործող միավոր օպերատորն է ($\forall \boldsymbol{x} \in L$ տարրի համար $\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$):

Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հետևյալ պնդումները.

Պնդում 1: Եթե $\boldsymbol{A}$-ն և $\boldsymbol{B}$-ն գծային օպերատորներ են իսկ, λ-ն իրական թիվ է, ապա $\lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ օպերատորները նույնպես գծային օպերատորներ են (եթե իհարկե դրանք որոշված են):

Պնդում 2: *Վերջավոր չափանի գծային տարածություններում* թվի և օպերատորի արտադրյալին, օպերատորների գումարին, օպերատորների արտադրյալին համապատասխանում են նույնպիսի գործողություններ նրանց մատրիցների հետ:

Գծային օպերատորի մատրիցի ձևափոխությունը նոր բազիսին անցնելիս:

Դիցուք՝ $\boldsymbol{A}$-ն L-ից L գործող գծային օպերատոր է՝ $\boldsymbol{A}: L \to L$; $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$-ն և $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_m)$-ը L գծային տարածության երկու բազիսներ են, A_e-ն և A_f-ը $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցներն են համապատասխանաբար $\boldsymbol{e}$ և $\boldsymbol{f}$ բազիսներում:

Թեորեմ 9.3: $\boldsymbol{A}: L \to L$ գծային օպերատորի A_e և A_f մատրիցները $\boldsymbol{e}$ և $\boldsymbol{f}$ տարբեր բազիսներում կապված են հետևյալ առնչություններով.

$$A_f = T_{e \to f}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e \to f},$$

$$A_e = T_{e\to f} \cdot A_f \cdot T_{e\to f}^{-1}, \qquad (9.1)$$

որտեղ $T_{e\to f}$-ն $\boldsymbol{e}$-ից և $\boldsymbol{f}$ բազիսին անցման մատրիցն է:

Գծային օպերատորի սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ:

Դիցուք՝ $\boldsymbol{A}$-ն L գծային տարածությունից L գծային տարածության մեջ գործող գծային օպերատոր է՝ $\boldsymbol{A}: L \to L$:

Սահմանում: $\boldsymbol{x} \in L$ *ոչ զրոյական* վեկտորն անվանում են $\boldsymbol{A}: L \to L$ գծային օպերատորի *սեփական վեկտոր*, եթե գոյություն ունի λ իրական թիվ այնպիսին, որ $\boldsymbol{Ax} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$: λ թիվն անվանում են $\boldsymbol{A}$ օպերատորի $\boldsymbol{x}$ սեփական վեկտորին համապատասխանող *սեփական արժեք:*

Դիտողություն: $\boldsymbol{Ax} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$ հավասարությունը կարելի է արտագրել $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \theta$ տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{E}: L \to L$-ն $\forall \boldsymbol{x} \in L$ տարրի համար $\boldsymbol{Ex} = \boldsymbol{x}$ օրենքով գործող միավոր օպերատոր է:

Պնդում 3: Եթե $\boldsymbol{x}$-ը $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտոր է՝ λ սեփական արժեքին համապատասխանող, ապա ցանկացած $k \neq 0$ թվի համար $k\boldsymbol{x}$-ը նույնպես $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտոր է՝ λ սեփական արժեքին համապատասխանող:

Իրոք, $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = k \cdot \boldsymbol{Ax} = k \cdot (\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$:

Պնդում 4: Եթե $\boldsymbol{x}$-ը և $\boldsymbol{y}$-ը $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտորներ են λ սեփական արժեքին համապատասխանող, ապա $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$-ը նույնպես $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտոր է՝ λ սեփական արժեքին համապատասխանող:

Իրոք, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ay} = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$:

Դիտողություն: Տրված սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորների բազմությունը դեռևս L գծային տարածության ենթատարածություն չէ, քանի որ այն չի պարունակում L-ի զրոյական տարրը: Այդ բազմությանն ավելացնելով զրոյական տարրը՝ կստանանք L գծային տարածության ենթատարածություն, որն անվանում են *գծա-յին օպերատորի սեփական ենթատարածություն:*

Պնդում 5: $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի սեփական վեկտորը կարող է լինել միայն մեկ λ սեփական արժեքին համապատասխանող:

Թեորեմ 9.4: Տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են:

Հետևանք: n չափանի գծային տարածության մեջ գործող գծային օպերատորը չի կարող ունենալ ավելի, քան n հատ տարբեր սեփական արժեքներ:

Սահմանում: Դիցուք՝ A-ն $\boldsymbol{A}: L \to L$ գծային օպերատորի մատրիցն է որոշակի բազիսում իսկ E-ն միավոր մատրից է: *λ թվի նկատմամբ $\boldsymbol{A}$ օպերատորի բնութագրիչ հավասարում են անվանում $P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = |A - \lambda E|$ տեսքի բազմանդամը:*

Պնդում 6: $\boldsymbol{A}$ օպերատորի բնութագրիչ հավասարումը կախված չէ բազիսի ընտրությունից:

Սահմանում: $|A - \lambda E| = 0$ հավասարումն անվանում են *$\boldsymbol{A}$ օպերատորի բնութագրիչ հավասարում:*

Թեորեմ 9.5: Որպեսզի λ թիվը լինի $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական արժեք, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն հանդիսանա $\boldsymbol{A}$ օպերատորի բնութագրիչ հավասարման իրական արմատ:

Դիտողություն: Որպեսզի գտնենք λ սեփական արժեքին համապատասխանող $\boldsymbol{x}$ սեփական վեկտորը, անհրաժեշտ է լուծել $(A - \lambda E)X = O$ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ X-ը $\boldsymbol{x}$ վեկտորի կոորդինատների մատրից-սյունն է, O-ն զրոյական մատրից սյունն է:

Գծային օպերատորի մատրիցի ձևափոխումը անկյունագծային տեսքի: Դիցուք՝ L-ը կամայական վերջավոր չափանի գծային տարածություն է:

Թեորեմ 9.6: $\boldsymbol{A}: L \to L$ գծային օպերատորի մատրիցը որոշակի բազիսում լինում է անկյունագծային տեսքի այն և միայն այն դեպքում, երբ տվյալ բազիսի բոլոր վեկտորները $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտորներ են:

Դիտողություն: Եթե $\boldsymbol{A}: L \to L$ գծային օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ բազիսում անկյունագծային է, ապա նրա անկյունագծի վրա ընկած են $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական արժեքները՝ կրկնվող այնքան անգամ, որքան որ նրանց պատիկությունն է:

Հետևանք 1: Եթե n չափանի գծային տարածության մեջ գործող գծային օպերատորի բնութագրիչ հավասարումը ունի n հատ միմյանցից տարբեր իրական արմատներ, ապա գոյություն ունի բազիս, որտեղ գծային օպերատորի մատրիցը անկյունագծային է:

Դիտողություն: Եթե գծային օպերատորի բնութագրիչ հավասարումը ունի բազմապատիկ իրական արմատներ, ապա կարող է գոյություն չունենալ այնպիսի բազիս, որտեղ օպերատորի մատրիցը կլինի անկյունագծային:

Հետևանք 2: Որպեսզի գոյություն ունենա բազիս, որտեղ $\boldsymbol{A}: L \to L$ գծային օպերատորի մատրիցը կլինի անկյունագծային, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $\boldsymbol{A}$ օպերատորի բոլոր սեփական ենթատարածությունների չափողականությունների գումարը հավասար լինի L գծային տարածության չափողականությանը:

Խնդիրների լուծման օրինակներ

Խնդիր 9.1: Դիցուք՝ $\boldsymbol{A}: B_3 \to B_3$ օպերատորը գործում է $\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e}$ օրենքով, որտեղ $\boldsymbol{e}$-ն ֆիքսված միավոր վեկտոր է: Համոզվելով, որ $\boldsymbol{A}$ օպերատորը գծային է, գտնել նրա մատրիցը $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ բազիսում:

Լուծում: Տրված օպերատորի գծայնությունը հետևում է սկալյար արտադրյալի գծայնությունից.

1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ay}$,
$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in B_3$,

2) $\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = (\lambda \boldsymbol{x},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = \lambda (\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = \lambda \cdot \boldsymbol{Ax}$, $\forall \boldsymbol{x} \in B_3, \forall \lambda \in R$:

$\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը կառուցելու համար կիրառենք այն բազիսային վեկտորների նկատմամբ և գտնենք նրանց պատկերները: $\boldsymbol{e}$ միավոր վեկտորի կոորդինատները գրենք ուղղորդ կոսինուսների օգնությամբ՝ $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, որտեղ α, β, γ անկյունները $\boldsymbol{e}$ վեկտորի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ բազիսային վեկտորների հետ: Այս դեպքում՝

$$\mathbf{Ai} = (\mathbf{i},\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \cos\alpha \cdot \mathbf{e} = \left(\cos^2\alpha, \cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\cos\gamma\right),$$

$$\mathbf{Aj} = (\mathbf{j},\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = \cos\beta\cdot\mathbf{e} = \left(\cos\beta\cos\alpha, \cos^2\beta, \cos\beta\cos\gamma\right),$$
$$\mathbf{Ak} = (\mathbf{k},\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = \cos\gamma\cdot\mathbf{e} = \left(\cos\gamma\cos\alpha, \cos\gamma\cos\beta, \cos^2\gamma\right):$$

Ստացված վեկտորներով կազմենք գծային օպերատորի մատրիցը.

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\gamma\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}: \quad \blacksquare$$

Խնդիր 9.2: Դիցուք՝ $L\left(a^x, xa^x, x^2a^x\right)$-ը a^x, xa^x, x^2a^x ֆունկցիաների վրա ձգված գծային թաղանթն է, իսկ $\boldsymbol{A}$ դիֆերենցման օպերատորը գործում է այդ թաղանթի մեջ: Պահանջվում է գտնել $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մատրիցը a^x, xa^x, x^2a^x ֆունկցիաներից կազմված բազիսում:

Լուծում: Դիֆերենցման օպերատորը կիրառենք երեք բազիսային վեկտորների նկատմամբ՝

$$\boldsymbol{A}\left(a^x\right) = \left(a^x\right)' = a^x\ln a,\ \boldsymbol{A}\left(xa^x\right) = \left(xa^x\right)' = a^x + xa^x\ln a,$$
$$\boldsymbol{A}\left(x^2a^x\right) = \left(x^2a^x\right)' = 2xa^x + x^2a^x\ln a:$$

Բազիսային վեկտորների պատկերները դիտարկվող բազիսում ունեն այսպիսի կոորդինատներ.

$$\boldsymbol{A}\left(a^x\right) = (\ln a, 0, 0),\ \boldsymbol{A}\left(xa^x\right) = (1, \ln a, 0),\ \boldsymbol{A}\left(x^2a^x\right) = (0, 2, \ln a):$$

Կազմենք $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մատրիցը՝ բազիսային վեկտորների կոորդինատները գրելով որպես սյուներ: Կստանանք՝

$$A = \begin{pmatrix} \ln a & 1 & 0 \\ 0 & \ln a & 2 \\ 0 & 0 & \ln a \end{pmatrix}:$$

Դիտողություն: Ելնելով թեորեմ 9.1-ից՝ կարելի է ցանկացած $f(x) = a^x\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$ տեսքի ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվել՝ առանց անմիջականորեն ածանցում կատարելու: Դրա համար անհրաժեշտ է բազմապատկել a^x, xa^x, x^2a^x բազիսում $\boldsymbol{A}$ դիֆերենցման օպերատորի մատրիցը նույն՝ a^x, xa^x, x^2a^x բազիսում

ֆունկցիայի կոորդինատների մատրից-սյան վրա: Կստացվի այսպիսի արդյունք.

$$\begin{pmatrix} \ln a & 1 & 0 \\ 1 & \ln a & 2 \\ 0 & 0 & \ln a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \ln a + \beta \\ \beta \ln a + 2\alpha \\ \alpha \ln a \end{pmatrix},$$

այսինքն՝ $f(x) = a^x\left(\alpha \ln a x^2 + (\beta \ln a + 2\alpha)x + \gamma \ln a + \beta\right)$: ■

Խնդիր 9.3: Դիցուք՝ R^2 գծային տարածությունում տրված են երկու օպերատորներ՝ $\boldsymbol{A}: R^2 \to R^2$ և $\boldsymbol{B}: R^2 \to R^2$, որոնք գործում են հետևյալ օրենքով.

$\boldsymbol{Ax} = (-x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$, $\boldsymbol{Bx} = (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$: Գտնել $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ օպերատորի մատրիցը և բացահայտ տեսքը:

Առաջին եղանակ: $\boldsymbol{B}$ օպերատորը ցանկացած $\boldsymbol{x} \in R^2$ վեկտոր արտապատկերում է $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Bx} = (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$ վեկտորի: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ օպերատորը գործում է հետևյալ օրենքով.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Cx} &= (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}) = \boldsymbol{Ay} = (-y_1 + y_2, y_1 + 2y_2) = \\ &= (-(3x_1 + x_2) + (2x_1 - x_2), (3x_1 + x_2) + 2(2x_1 - x_2)) = \\ &= (-x_1 - 2x_2, 7x_1 - x_2), \end{aligned}$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{Cx} = (-x_1 - 2x_2, 7x_1 - x_2), \forall \boldsymbol{x} \in R^2$:

$\boldsymbol{C}$ գծային օպերատորի մատրիցը ստանալու համար գտնենք R^2 գծային տարածության $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ և $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ բազիսային վեկտորների պատկերները՝ $\boldsymbol{Ce}_1 = (-1,7), \boldsymbol{Ce}_2 = (-2,-1)$: Որոնելի մատրիցը կլինի.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}:$$

Երկրորդ եղանակ: $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը ստանալու համար գտնենք R^2 գծային տարածության $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ և $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ բազիսային վեկտորների պատկերները՝ $\boldsymbol{Ae}_1 = (-1,1), \boldsymbol{Ae}_2 = (1,2)$: Ստացված վեկտորներով կառուցենք $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի A մատրիցը՝ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: Նույն ձևով կստացվի $\boldsymbol{B}$ օպերատորի մատ-

րիցը $\boldsymbol{e}$ բազիսում՝ $\boldsymbol{Be}_1 = (3,2), \boldsymbol{Be}_2 = (1,-1)$ և հետևաբար $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$: Այսպիսով՝ $\boldsymbol{C}$ օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{e}$ բազիսում կլինի՝

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}:$$

Ըստ $\boldsymbol{e}$ բազիսում գծային օպերատորի մատրիցի սահմանման՝ C մատրիցի սյուները իրենցից ներկայացնում են բազիսային վեկտորի պատկերների կոորդինատները այդ նույն բազիսում: Այսպիսով՝

$$\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{C}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1\boldsymbol{Ce}_1 + x_2\boldsymbol{Ce}_2 = (-x_1 - 2x_2, 7x_1 - x_2), \forall \boldsymbol{x} \in R^2:$$

Դիտողություն: $\boldsymbol{C}$ օպերատորի բացահայտ տեսքը կարելի է ստանալ՝ ելնելով թեորեմ 9.1-ից: Ըստ այդ թեորեմի $\boldsymbol{Cx}$ վեկտորը սկզբնական բազիսում ունի այսպիսի կոորդինատներ.

$$C \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ 7x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{Cx} = (-x_1 - 2x_2, 7x_1 - x_2), \forall \boldsymbol{x} \in R^2$: ■

Խնդիր 9.4: Դիցուք՝ L_2 գծային տարածության մեջ գործող $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ բազիսում հետևյալն է՝ $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, իսկ $\boldsymbol{B}$ օպերատորինը $\boldsymbol{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ բազիսում հետևյալը՝ $B_f = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$: Գտնել $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{g}$ բազիսում:

Լուծում: Քանի որ անցման մատրիցը բաղկացած է հին բազիսում նոր բազիսի վեկտորների կոորդինատներից՝ գրված սյուներով, ապա $\boldsymbol{e}$-ից $\boldsymbol{f}$-ին և $\boldsymbol{e}$-ից $\boldsymbol{g}$-ին անցման մատրիցներն ունեն համապատասխանաբար այսպիսի տեսքեր՝ $T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$T_{e\to g}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$: $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{g}$ բազիսում գտնելու համար օգտվենք (9.1) բանաձևից՝ $A_g=T^{-1}_{f\to g}\cdot A_f\cdot T_{f\to g}$: $\boldsymbol{f}$ -ից $\boldsymbol{g}$ -ին անցման մատրիցը գտնելու համար օգտվենք հետևյալ բանաձևից՝ $T_{e\to g}=T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}$: Այսպիսով՝ $T_{f\to g}=T^{-1}_{e\to f}\cdot T_{e\to g}$: Այսպիսով՝

$$T^{-1}_{e\to f}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, T_{f\to g}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix},$$

$$T^{-1}_{f\to g}=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2}\end{pmatrix},\ A_g=T^{-1}_{f\to g}\cdot A_f\cdot T_{f\to g}=\begin{pmatrix}40 & 38\\ -\frac{71}{2} & -34\end{pmatrix},$$

$A_g+B_g=\begin{pmatrix}44 & 44\\ -\frac{59}{2} & -25\end{pmatrix}$: A_g+B_g -ն $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ օպերատորի որոնելի մատրիցն է $\boldsymbol{g}$ բազիսում:■

Խնդիր 9.5: Դիցուք՝ $\boldsymbol{A}: B_3\to B_3$ օպերատորը գործում է հետևյալ օրենքով՝ $\boldsymbol{Ax}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{x}]$: Գտնել $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները:

Լուծում: Նախ գտնենք $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ բազիսում: Ունենք՝

$$\boldsymbol{Ai}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}]=\boldsymbol{O}=(0,0,0),\ \boldsymbol{Aj}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]=\boldsymbol{k}=(0,0,1),$$
$$\boldsymbol{Ak}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}]=-\boldsymbol{j}=(0,-1,1),$$

և հետևաբար $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}:$$

Կազմելով բնութագրիչ հավասարումը և լուծելով այն՝ կգտնենք $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական արժեքները՝

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}=-\lambda\left(\lambda^2+1\right)=0,$$

որտեղից կստանանք բնութագրիչ հավասարման միակ իրական արմատը՝ $\lambda=0$, այսինքն՝ օպերատորի միակ սեփական արժեքը: Նրան համապատասխանող սեփական վեկտորի կոորդինատները գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել $(A-\lambda E)X=O$ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը $\lambda=0$ դեպքում: Այսպիսով՝ համակարգը կստացվի

$$\begin{cases}0x_1+0x_2+0x_3=0\\ 0x_1+0x_2-x_3=0\\ 0x_1+x_2+0x_3=0\end{cases},$$

որի լուծումը կլինի $X=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}, \forall\alpha\in R$: Այսպիսով՝ ցանկացած իրական $\alpha\neq 0$ թվի համար $X=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$-ն $\lambda=0$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է:■

Խնդիր 9.6: $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորը գործում է $R^3\to R^3$ գծային տարածությունում հետևյալ օրենքով՝

$$\boldsymbol{A}\cdot X=\left(5x_1+2x_2-3x_3, x_1+5x_2-4x_3, 6x_1+4x_2-4x_3\right),$$

որտեղ $X=\left(x_1x_2, x_3\right)\in R^3$ ցանկացած տարր է:

- Գտնել $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մատրիցը կանոնական բազիսում:
- Ապացուցել, որ $X=(1,2,2)$ տարրը $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտորն է, գտնել նրան համապատասխանող λ_0 սեփական արժեքը:
- Գտնել $\boldsymbol{A}$ օպերատորի բոլոր մյուս սեփական արժեքները և սեփական ենթատարածությունների բազիսները:

Լուծում: Դիցուք՝

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$$

վեկտորները R^3 գծային տարածության կանոնական բազիսի տարրերն են: Ունենք՝

$$\boldsymbol{Ae}_1=(5,4,6),\ \boldsymbol{Ae}_2=(2,5,4),\ \boldsymbol{Ae}_3=(-3,-4,-6):$$

Ստացված վեկտորների կոորդինատները արտագրելով որպես մատրիցի սյուներ՝ կստանանք $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մատրիցը տիպային բազիսում՝

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}:$$

Ստուգենք, որ $X=(1,2,2)$ տարրը $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտորն է: Ունենք՝

$$AX=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+4-6\\5+10-8\\6+8-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}:$$

Քանի որ $AX=3X$, ապա $X=(1,2,2)$ տարրը սեփական վեկտոր է՝ $\lambda_0=3$ սեփական արժեքին համապատասխանող:

Որպեսզի այժմ գտնենք $\boldsymbol{A}$ օպերատորի մյուս սեփական արժեքները, կազմենք բնութագրիչ հավասարումը՝

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & -3\\ 4 & 5-\lambda & -4\\ 6 & 4 & -4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0:$$

Քանի որ $\lambda_0=3$-ը սեփական արժեք է, հետևաբար այն բնութագրիչ հավասարման լուծում է: Հավասարման մյուս լուծումները գտնելու համար

$-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$ բազմանդամը բաժանենք $(\lambda-3)$-ի վրա: Կստանանք՝

$$\lambda^2-3\lambda+2=0, \lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}, \lambda_1=1, \lambda_2=2:$$

Այսպիսով՝ սեփական արժեքներն են $1,2,3$:

Գտնենք այժմ սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները: $\lambda=1$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորները պետք է բավարարեն

$$AX=X \Rightarrow (A-E)X=0$$

մատրիցային հավասարմանը կամ որ նույնն է՝ հետևյալ գծային համասեռ հավասարումների համակարգին՝

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 4x_1+4x_2-4x_3=0: \\ 6x_1+4x_2-5x_3=0 \end{cases}$$

Ստացված համակարգի լուծումների L գծային տարածությունը հենց $\lambda=1$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածությունն է, իսկ նրա լուծումների ֆունդամենտալ համախումբն էլ այդ ենթատարածության բազիսն է:

Այժմ լուծենք համակարգը և գտնենք նրա ընդհանուր լուծումը: Գրենք համակարգի հիմնական մատրիցը և կատարելով տարրական տողային ձևափոխություններ՝ այն բերենք եռանկյունաձև տեսքի՝

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ակնհայտ է, որ $rangB=2$ և $\dim L=n-r=3-2=1$, այսինքն՝ ԼՖՀ-ն կամ որ նույնն է՝ $\lambda=1$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածության ցանկացած բազիս, բաղկացած է մեկ տարրից:

Վերականգնենք համակարգը ըստ ձևափոխված մատրիցի: Որպես գլխավոր անհայտներ կարող ենք ընտրել ասենք x_1 և x_3 անհայտները,

քանի որ նրանց գործակիցներով կազմված $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ ոչ զրոյական մինորը կարող է լինել որպես բազիսային մինոր՝

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 = -2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}:$$

x_2-ին վերագրելով կամայական c արժեք՝ այստեղից կստանանք համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_3 = 2c \end{cases},$$

որտեղից, վերցնելով ասենք $c = 1$, կստանանք համակարգի ԼՖՀ կամ $\lambda = 1$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածության բազիս՝ $X = (1,1,2)$:

Նույնությամբ կարելի է ցույց տալ, որ $\lambda = 2$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածությունը ևս միաչափ է, և օրինակ $X = (1,0,1)$ սեփական վեկտորը բազիս է այդ ենթատարածությունում (կատարե՛ք ինքնուրույն): ■

Խնդիր 9.7: Դիցուք՝ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$-ն գծային օպերատորի մատրիցն է որոշակի $\boldsymbol{e}$ բազիսում: Պահանջվում է գտնել այն $\boldsymbol{f}$ բազիսը, որտեղ գծային օպերատորի մատրիցը կունենա անկյունագծային տեսք, և ստանալ այդ տեսքը:

Լուծում: Գտնենք $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները: Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը և լուծենք այն.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3) = 0:$$

Բնութագրիչ հավասարման արմատներն են $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$: Որպեսզի կառուցենք սեփական վեկտորներից կազմված բազիս, անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր λ սեփական արժեքի համար գտնել $(A - \lambda E)\cdot X = O$ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ արժեքի համար համակարգն ունի այսպիսի տեսք՝

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}:$$

Համակարգի ընդհանուր լուծումն է՝

$X = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha, \beta$, որտեղ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$-ը

լուծումների ֆունդամենտալ համախումբն է:

$\lambda_3 = 3$ դեպքում ստացվում է $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ համակարգը, որի

ընդհանուր լուծումն է՝

$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha$, որտեղ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$-ը համակարգի ԼՖՀ-ն է:

Այսպիսով՝ ստացված երեք վեկտորները՝ $\boldsymbol{f}_1 = (-1,1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1,0,1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1,1,1)$-ը, կազմում են որոնելի բազիսը՝ կազմված $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական վեկտորներից: Գծային օպերատորի մատրիցը այդ բազիսում ունի այսպիսի տեսք՝ $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$: A_f մատրիցի անկյունագծի

վրա ընկած են $\boldsymbol{A}$ օպերատորի սեփական արժեքները՝ կրկնվող այնքան անգամ, որքան նրանց պատիկությունն է:

Դիտողություն: $\boldsymbol{e}$ -ից $\boldsymbol{f}$ բազիսին անցման մատրիցը ունի հետևյալ տեսքը՝ $T_{e\to f}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, ընդ որում՝ $A_f=T_{e\to f}^{-1}\cdot A\cdot T_{e\to f}$:■

Տիպային խնդիրներ

1. Ապացուցել, որ ցանկացած գծային օպերատոր վեկտորների գծորեն կախյալ համակարգը արտապատկերում է գծորեն կախյալ համակարգի:
2. Դիցուք՝ $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_k$ -ն L գծային տարածության գծորեն անկախ տարրերի համախումբ է, $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,...,\boldsymbol{f}_k$ -երը L_1 գծային տարածության կամայական վեկտորներ են: Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{L}_1$ գծային օպերատոր, որ տեղի ունի $\boldsymbol{Ae_i}=\boldsymbol{f_i},\forall\boldsymbol{i}=1,...,\boldsymbol{k}$:
3. Գծայի՞ն են արդյոք հետևյալ օպերատորները.

   ա) $\boldsymbol{A}:R^n\to R^n:\ \forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$,

   $\boldsymbol{Ax}=(x_1,x_2,...,x_k,0,...0),\ 1\le k\le n$ (պրոյեկտման օպերատոր),

   բ) $\boldsymbol{A}:R^n\to R^n:\ \forall\boldsymbol{x}=(x_1,..,x_n)\in R^n,\ \boldsymbol{Ax}=\left(x_1^{\ 2},x_2^{\ 2},...,x_n^{\ 2}\right)$,

   գ) $\boldsymbol{A}:R^n\to R:\quad\forall\boldsymbol{x}=(x_1,..,x_n)\in R^n,\ \boldsymbol{Ax}=a_1x_1+...+a_nx_n$,

   $a_1,...,a_n$ ֆիքսված արժեքների դեպքում,

   դ) $\boldsymbol{A}:B^3\to R:\ \ \forall\boldsymbol{x}\in B^3,\ \boldsymbol{Ax}=(a,x)$, a ֆիքսված վեկտորի դեպքում,

   ե) $\boldsymbol{A}:B^3\to B^3:\ \forall\boldsymbol{x}\in B^3,\ \boldsymbol{Ax}=(a,x)x$, a ֆիքսված վեկտորի դեպքում,

զ) $\boldsymbol{A}: L \to R$, որտեղ L-ը զուգամետ հաջորդականությունների գծային տարածությունն է, $\forall \{a_n\} \in L$, $A(\{a_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

է) $\boldsymbol{A}: L \to R$, որտեղ L-ը թվաբանական պրոգրեսիաների գծային տարածությունն է, $\forall \{a_n\} \in L$, $A(\{a_n\}) = d$, որտեղ d–ն տվյալ պրոգրեսիայի տարբերությունն է,

ը) $\boldsymbol{A}: L \to L$, որտեղ L-ը բոլոր հաջորդականությունների գծային տարածությունն է, $\forall \{a_n\} \in L$, $A(\{a_n\}) = \{b_n\}$, որտեղ $b_n = a_{n+m}$, $m-$ի ֆիքսված արժեքի դեպքում (տեղաշարժման օպերատոր),

թ) $\boldsymbol{A}: L \to L$, որտեղ L-ը բոլոր հաջորդականությունների գծային տարածությունն է, $\forall \{a_n\} \in L$, $A(\{a_n\}) = \{b_n\}$, որտեղ $b_n = a_{n+1} - a_n$, (տարբերության օպերատոր),

ժ) $\boldsymbol{A}: C[a,b] \to R$, $\forall f(x) \in C[a,b], A(f(x)) = f(a)$,

ի) $\boldsymbol{A}: C[a,b] \to R$, $\forall f(x) \in C[a,b]$, $A(f(x)) = \int\limits_a^b f(x)dx$,

լ) $\boldsymbol{A}: C^1(R) \to C(R)$, որտեղ $C^1(R)$–ը R-ի վրա անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների գծային տարածությունն է, $\forall f(x) \in C^1(R)$, $A(f(x)) = f'(x)$ (դիֆերենցման օպերատոր),

խ) $\boldsymbol{A}: C(R) \to C(R)$, $\forall f(x) \in C(R)$, $A(f(x)) = f(x-a)$ a-ի ֆիքսված արժեքի դեպքում (զուգահեռ տեղափոխման օպերատոր),

ծ) $\boldsymbol{A}: M_{n\times n} \to R$, $\forall B \in M_{n\times n}, A(B) = \det B$,

կ) $\boldsymbol{A}: M_{n\times n} \to R^n$, $\forall B \in M_{n\times n}, A(B) = (b_{11},\ldots,b_{nn})$,

հ) $\boldsymbol{A}: M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, $\forall B \in M_{n\times n}, A(B) = BC$, $n \times n$ չափի ֆիքսված C մատրիցի դեպքում:

4. Կազմել L գծային տարածության մեջ գործող $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը տիպային բազիսում՝

ա) $L = B_3$, $\boldsymbol{A}$-ն oy առանցքի նկատմամբ φ անկյունով պտտման օպերատորն է,

բ) $L = B_3$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{Ax} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}]$, որտեղ $\boldsymbol{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$-ն ֆիքսված վեկտոր է,

գ) $L = R^n$, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $\boldsymbol{Ax} = (x_2, x_3 ..., x_n, x_1)$, $1 \le k \le n$ (ցիկլային տեղափոխման օպերատոր),

դ) $L = P_3$, $\boldsymbol{A}$-ն դիֆերենցման օպերատորն է,

ե) $L = P_2$, $\boldsymbol{A}$-ն ox առանցքի երկայնքով a-ով զուգահեռ տեղափոխման օպերատորն է՝ $\forall f(x) \in P_2$, $A(f(x)) = f(x-a)$ ֆիքսված a-ի դեպքում,

զ) $L = M_{2\times 2}, \forall B \in M_{2\times 2}, A(B) = BC,$ որտեղ $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-ն ֆիքսված մատրից է:

5. Կազմել տրված ֆունկցիաների L գծային թաղանթի մեջ գործող $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը այդ ֆունկցիաներից կազմված բազիսում՝

ա) L-ը $\{a^x, \sin bx, \cos bx\}$ ֆունկցիաների գծային թաղանթն է, $\boldsymbol{A}$-ն դիֆերենցման օպերատորն է,

բ) L-ը $\{a^x, \sin bx, \cos bx\}$ ֆունկցիաների գծային թաղանթն է, $\boldsymbol{A}$-ն կրկնակի ածանցման օպերատորն է,

գ) L-ը $\{a^x, \sin bx, \cos bx\}$ ֆունկցիաների գծային թաղանթն է, $\boldsymbol{A}$-ն ox առանցքի երկայնքով c-ով զուգահեռ տեղափոխման օպերատորն է,

դ) L-ը $\{e^{\alpha x}\cos \beta x, e^{\alpha x}\sin \beta x\}$ ֆունկցիաների գծային թաղանթն է, $\boldsymbol{A}$-ն դիֆերենցման օպերատորն է,

ե) $L = P_2$, A-ն ox առանցքի երկայնքով a-ով զուգահեռ տեղափոխման օպերատորն է,

զ) L-ը $\{a^x, xa^x, x^2a^x\}$ ֆունկցիաների գծային թաղանթն է, $\boldsymbol{A}$-ն ox առանցքի երկայնքով c–ով զուգահեռ տեղափոխման օպերատորն է:

6. Գտնել $\boldsymbol{BA}$ և $\boldsymbol{AB}$ գծային օպերատորների մատրիցները և բացահայտ տեսքերը տիպային բազիսում, եթե

ա) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$,

բ) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$,

գ) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 0 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

7. Գտնել $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը $\boldsymbol{f}$ բազիսում՝

ա) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$,

բ) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

գ) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

8. Ապացուցել, որ λ ոչ զրոյական թիվը A չվերասերվող քառակուսային մատրիցի սեփական արժեք է այն և միայն այն դեպքում, երբ λ^{-1}-ը սեփական արժեք է A^{-1} մատրիցի համար: Ինչպե՞ս են կապված A և A^{-1} մատրիցների սեփական վեկտորները այդ դեպքում:

9. Ցույց տալ, որ $\lambda = 0$-ն A մատրիցի սեփական արժեք է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն հակադարձելի չէ:

10. Ցույց տալ, որ եռանկյունաձև մատրիցի սեփական արժեքները գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերն են:

11. Դիցուք՝ x-ը A մատրիցի սեփական վեկտորն է, λ-ն՝ համապատասխան սեփական արժեքը: Ապացուցել, որ x-ը կլինի նաև A^k մատրիցի սեփական վեկտորը: Ո՞ր սեփական արժեքին այն կհամապատասխանի:

12. Դիցուք՝ $p(\lambda)$-ն $A_{2\times 2}$ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամն է: Ապացուցել, որ $p(A) = O$, որտեղ O-ն զրոյական մատրիցն է:

13. R-ի վրա որոշված և անվերջ դիֆերենցելի $C^{\infty}(R)$ ֆունկցիաների գծային տարածության մեջ գտնել կրկնակի ածանցման օպերատորի բոլոր սեփական վեկտորները:

14. A չվերասերվող մատրիցի յուրաքանչյուր տողի տարրերի գումարը հավասար է λ: Ապացուցել, որ A^{-1} մատրիցի յուրաքանչյուր տողի տարրերի գումարը հավասար է λ^{-1}:

15. Գտնել գծային օպերատորի սեփական արժեքները և սեփական ենթատարածությունների բազիսները, եթե նրա մատրիցը որոշակի $\boldsymbol{e}$ բազիսում ունի այսպիսի տեսք՝

ա) $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{pmatrix}$, **բ)** $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, **գ)** $A=\begin{pmatrix}-2 & -7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,

դ) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, **ե)** $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, **զ)** $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -6 & -2 & 0\\ 19 & 5 & -4\end{pmatrix}$,

է) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ -4 & 13 & -1\end{pmatrix}$, **ը)** $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

թ) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10 & -9 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$:

16. Հաշվել $A^{10}b$ արտադրյալը, եթե

1) $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 2 & 2 & -2\\ -4 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$,

2) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$:

17. Գտնել այնպիսի բազիս, որտեղ $\boldsymbol{A}$ գծային օպերատորի մատրիցը անկյունագծային է՝

ա) $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1+x_2\end{pmatrix}$, **բ)** $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_1+2x_2-3x_3\\ 2x_1+x_2-6x_3\\ -x_1-2x_2\end{pmatrix}$:

18. Դիցուք՝ A -ն գծային օպերատորի մատրիցն է որոշակի $\boldsymbol{e}$ բազիսում: Գտնել այն $\boldsymbol{f}$ բազիսը, որտեղ գծային օպերատորի մատրիցը կունենա անկյունագծային տեսք և ստանալ այդ տեսքը:

ա) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, **բ)** $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, **գ)** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$:

Պատասխաններ և ցուցումներ:

Թեմա 1.

1. $\overrightarrow{AB}=\{-4;3;-1\}, \overrightarrow{BA}=\{4;-3;1\}, \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{26}$: **2.** $(-1;2;3)$:

3. $\cos\alpha=12/25; \cos\beta=-3/5; \cos\gamma=-16/25$: **4.** 60° կամ 120° :

5. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$: **7.** $\overrightarrow{AB}=1/2\boldsymbol{a}-1/2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=1/2\boldsymbol{a}+1/2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD}=$
$=-1/2\boldsymbol{a}+1/2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DA}=-1/2\boldsymbol{a}-1/2\boldsymbol{b}$: **8.** $\{1;-1;6\}, \{5;-3;6\}, \{6;-4;12\}$, $\{1;-1/2;0\}, \{0;-2;12\}, \{3;-5/3;2\}$: **11.** $\{3/7;-2/7;6/7\}$: **12.** $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=6$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=14$: **13.** $\{-3;15;12\}$: **14.** $\{3;4;-3\}, \{0;-5;3\}, \{-3;1;0\}$: **15.** $\boldsymbol{a}=$
$=2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}=1/2\boldsymbol{a}-1/2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$: **16.** $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$: **17.** $-61;73$:
18. $-62;373$: **19.** $-3/2$: **20.** -13 : **21.** 10 : **23.** $\alpha=\pm 3/5$: **24.** $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$: **25.** $\dfrac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{c}|^2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$: **26.** $\alpha=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$: **27.** $22;-200$: **28.** 31 : **29.** 13: **30.**
$\cos\varphi=\ =5/21$: **31.** 45^0 : **32.** $\{-24;32;30\}$: **33.** $\{2;-3;0\}$:
34. $\{-4;-6;12\}$: **35.** 6 : **36.** -5 : **37.** 5 : **38.** $\boldsymbol{ab}=\pm 30$: **39.** 1) 24, 2) 60:
40. 300 : **41.** Պետք է լինեն համագիծ: **44.** $\{5;1;7\}, \{10;2;14\}$: **45.** $\{-4;3;4\}$:
46. $28; (-3/7;-6/7;2/7)$:
47. $\sqrt{66}, \cos\alpha=1/\sqrt{66}, \cos\beta=-4/\sqrt{66}, \cos\alpha=-7/\sqrt{66}$: **48.** 14 :
49. $\{-6;-24;8\}$: **50.** $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=24$: **51.** $\pm 60\sqrt{3}$: **53.** ա) համահարթ են, բ) համահարթ չեն: **55.** 3 : **56.** 11:

Թեմա 2.

1. $-5/3; 3/5$: **2.** $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$: **3.** $(2;1), (4;2)$, $(-1;4), (1;8)$: **4.** $(-2;-1)$: **5.** $(11;-11)$: **6.** $5x-2y-33=0$;
$x+4y-11=0$; $7x+6y+33=0$: **7.** $7x-2y-12=0$; $5x+y-28=0$;
$2x-3y-18=0$: **8.** $4x+3y-11=0$; $x+y+2=0$; $3x+2y-13=0$:

9. $4x+y-3=0$: **10.** $x-5=0$: **11.** $(1;3)$: **12.** $2x-y+3=0$; $2x-5y-26=0$; $7x-3y-33=0$: **13.** $5x+y-3=0$; $x-5y-11=0$: **14.** $(-12;5)$: **15.** $(10;-5)$: **16.** $(5/3;0)$: **17.** $(0;11)$: **18.** $4x+3y+1=0$; $3x-4y+32=0$; $4x+3y-24=0$; $3x-4y+7=0$; $x+7y-$ $-31=0$: **19.** $3x-4y+15=0$; $4x+3y-30=0$; $3x-4y-10=0$; $4x+3y-5=0$: **20.** $(6;-6)$: **21.** $4x-y-13=0$, $x-y=0$, $x+8y+5=0$: **22.** $3x+4y-22=0$, $2x-7y-5=0$, $3x+5y-$ $-23=0$: **23.** $2x-y+3=0$, $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$: **24.** $4x+7y-1=0$, $y-3=0$, $4x+3y-5=0$: **25.** $3x+y-5=0$, $3x+2y-10=0$, $9x+11y+5=0$: **26.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+$ $+19=0$, $4x+3y+13=0$: **27.** $x+y-7=0$, $x+7y+5=0$, $x-8y+20=0$: **28.** $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-\ -41=0$: **29.** $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-2=0$; $(1+\sqrt{2})\boldsymbol{x}+(1-\sqrt{2})\boldsymbol{y}-2=0$; $(1-\sqrt{2})\boldsymbol{x}+(1+\sqrt{2})\boldsymbol{y}-2=0$: **30.** 1) $\frac{4}{5}\boldsymbol{x}-\frac{3}{5}\boldsymbol{y}-2=0$, 2) $-\frac{4}{5}\boldsymbol{x}+\frac{3}{5}\boldsymbol{y}-10=0$, 3) $-\frac{12}{13}\boldsymbol{x}+\frac{5}{13}\boldsymbol{y}-1=0$: **31.** 1) $\delta=-3, d=3$, 2) $\delta=1, d=1$, 3) $\delta=-4, d=4$: **32.** 1) միևնույն կողմում, 2) տարբեր կողմերում, 3) միևնույն կողմում, 4) տարբեր կողմերում: **34.** Ուռուցիկ չէ: **35.** ա) $d=3$, բ) $d=0{,}5$: **36.** $5x+12y-94=0$, $y-7=0$: **37.** $3x+4y-13=0$: **38.** ա) $4x-4y+3=0$; $2x+2y-7=0$, բ) $14x-8y-3=0$; $64x+112y-23=0$: **39.** ա) Միևնույն անկյունում, բ) հակադիր անկյուններում, գ) կից անկյուններում: **40.** ա) Հակադիր անկյուններում, բ) միևնույն անկյունում, գ) կից անկյուններում: **41.** Եռանկյան ներսում: **42.** Եռանկյան դրսում: **43.** Սուր անկյուն: **44.** Բութ անկյուն: **45.** $x+3y-2=0$: **46.** $10x-10y-\ -3=0$: **47.** $7x+56y-40=0$: **48.** $x+y+5=0$: **49.** $5x-y-5=0$, $x-y+3=0$, $3x-y-1=0$: **50.** $x-y-7=0$, $5x+y+17=0$, $10x+7y-13=0$:

Թեմա 3.

1. $x-2y+3z+3=0$: **2.** $x-y-3z+2=0$: **3.** $x+4y+7z+16=0$:

4. $x-y-z=0$: **5.** $3x+3y+z-8=0$: **6.ա)** $l=3, m=-4$, **բ)** $l=-3\frac{1}{3}$,

$m=-1\frac{1}{5}$: **7. ա)** 6 , **բ)** $-\frac{1}{7}$: **8. ա)** $\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$, **բ)** $\arccos\frac{2}{15}, \pi-\arccos\frac{2}{15}$:

9. $2x-3z-27=0$: **10.** $7x-1y-5z=0$: **11.** $x+2z-4=0$:

12. $4x-y-2z-9=0$: **13.1)** $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6=0$, **2)** $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-$

$-\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}=0$, **3)** $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$: **14. 1)** $-3;3$ **2)** $1;1$ **3)** $0;0$: **15.** 4: **17. 1)**

2 **2)** $3,5$: **18. 1)** $4x-5y+z-2=0$, $2x+y-3z+8=0$,

2) $3x-6y+7z+2=0$, $x+4y+3z+4=0$: **19.** 1) կից անկյուններում,

2) հակադիր անկյուններում: **20.** Բութ անկյան մեջ:

21. 1) $23x-2y+21z-33=0$, **2)** $y+z-18=0$, **3)** $x-y+15=0$:

22. $5x+5z-8=0$: **23.** $11x-2y-15z-3=0$:

24. $\alpha(5x-y-2z-3)+\beta(3x-2y-5z+2)=0$: **25.** Պատկանում է:

26. $l=-5, m=-11$: **27. 1)** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$, **2)** $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$:

28. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$, **2)** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{0}$:

29. 1) $x=2t+1,\ \ y=-3t-1,\ \ z=4t-3,$

2) $x=2t+1, y=4t-1, z=-3,$ **3)** $x=3t+1, y=-2t-1,\ \ z=5t-3$:

30. $x=5t+4, y=-11t-7, z=-2$: **31.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}$:

32. $x=3t+3, y=15t+1, z=19t-3$: **33.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$: **36.** 60:

38. 3: **40. 1)** $(2;-3;6)$, **2)** ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը:

41. $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$: **42.** $2x-3y+4z-1=0$: **43.** $x+2y+3z=0$:

44. $(3;-2;4)$: **45.** $(2;-3;2)$: **46.** $(-5;1;0)$: **47.** 1) 21, 2)6, 3)15:
48. $9x+11y+5z-16=0$: **49.** $4x+6y+5z-1=0$:
50. $6x-20y-11z+1=0$: **51.** $(2;-3;-5)$:
52. $13x-14y+11z+51=0$: **53.** $x-8y-13z+9=0$: **54.** 1)3; 2)7:

Թեմա 4.

1. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$, 4) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$,
5) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$, 6) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ 7) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$, 8) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$,
9) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$, 10) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$, 11) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$, 12) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$:
2. 15: **3.** $r_1=2{,}6; r_2=7{,}4$: **4.** 20 : **5.** $\left(-5;3\sqrt{3}\right),\left(-5;-3\sqrt{3}\right)$:
6. $\left(-2;\frac{\sqrt{21}}{2}\right);\left(-2;-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$: **7.** $2x-y-12=0$, $2x-y+12=0$,
$d=\frac{24\sqrt{5}}{5}$: **8.** $x+y-5=0,\ x+4y-10=0$: **9.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$,
2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, 3) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, 4) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$, 5) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$,
6) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 7) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{1}=1$, 8) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$ 9) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1$,
10) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, 11) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$: **10.** 10 : **11.** $r_1=2\frac{1}{4}, r_2=10\frac{1}{4}$: **12.**
12 : **13.** $\left(10;\frac{9}{2}\right);\left(10;-\frac{9}{2}\right)$: **14.** $\left(-6;4\sqrt{3}\right),\left(-6;-4\sqrt{3}\right)$:
15. $10x-3y-32=0,\ 10x-3y+32=0$: **16.** $3x-4y-10=0$,
$3x-4y+10=0$: **17.** 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$: **18.** $F(6;0), x+6=0$:

19. 12: **20.** 6: **21.** $(9;12);(9;-12)$: **22.** $y^2=-28x$: **23.** $x+y+2=0$: **24.** $d=2\sqrt{13}$: **25.** $3x-y+3=0$, $3x-2y+12=0$:

Թեմա 5.

1. ա) $(4,4,0,1)$, **բ)** $(1,0,0,0)$, **գ)** $\begin{pmatrix}-3 & 9 & -3\\ 16 & 1 & 6\end{pmatrix}$: **2. ա)** $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$,

բ) $\begin{pmatrix}-9 & 13\\ 15 & 4\end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}$, **դ)** $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, **ե)** $\begin{pmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}$, **զ)** $\begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$, **ը)** (13): **3. ա)** $\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ 9 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix}15 & 20\\ 20 & 35\end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$: **4. ա)** $AB=\begin{pmatrix}3\\ 10\\ 26\end{pmatrix}$, **բ)** $AB=\begin{pmatrix}-1 & 19\\ 4 & -27\\ 0 & 14\end{pmatrix}$,

գ) $AB=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{pmatrix}$: **6. ա)** $\begin{pmatrix}a & 2b\\ 3b & a+2b\end{pmatrix}$,

բ) $\begin{pmatrix}a & 3b\\ -5b & a+9b\end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$: **7.** $\begin{pmatrix}18 & 21\\ 21 & 27\end{pmatrix}$: **9. ա)** շեղսիմետրիկ,

բ) սիմետրիկ, **գ)**սիմետրիկ, **դ)**շեղսիմետրիկ: **15. ա)** 5, **բ)** 3, **գ)** 1, **դ)** 1, **ե)** 2, **զ)** $2a^2x+2a^3$ **է)** 1: **16. ա)** $3a-b+2c+d$, **բ)** $4t-x-y-z$, **գ)** $2a-b-c-d$: **18. ա)** -3, **բ)** -9, **գ)** 18, **դ)** 18, **ե)** 4, **զ)** -21, **է)** -8,

ը) 90, **թ)** 17, **ժ)** -6, **ի)** -10, **լ)** 100: **19. ա)** $n!$, **բ)** $2n+1$, **գ)** $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

դ) $(n-1)!$, ե) $(a_0+a_1+\ldots+a_n)x^n$, զ) $x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{a_1}{x_1}+\ldots+\frac{a_n}{x_n}\right)$,

է) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}x(x-1)\ldots(x-n)$, ը) $(x+a_1+\ldots+a_n)(x-a_1)\ldots(x-a_n)$,

թ) $(-1)^{n-1}(x-a_1)\ldots(x-a_n)\left(\frac{x}{x-a_1}+\ldots+\frac{x}{x-a_n}-1\right)$, ժ) 1, ի) $n(-1)^{n-1}$,

լ) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$: **21.** Կբազմապատկվի $(-1)^{n-1}$-ով: **22.** Կբազմապատկվի $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$-ով: **26.** Կդառնա 0: **27.** Զույգ կարգի որոշիչը կդառնա 0, իսկ կենտ կարգի որոշիչը կկրկնապատկվի:
28. ա) բացասական, **բ)** դրական: **29. ա)** ոչ, **բ)** այո: **30.** $i=1; k=4$:
31. ա) $(n-1)!(n-1)$, **բ)** $(n-1)!(n-1)$, **գ)** $(n-1)!(n-k)$:

32.ա) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$, **գ)** $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$, **ե)** $\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$, **զ)** $\begin{pmatrix}-7/8 & 2 & -1/3\\ 5/3 & -1 & -1/3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

է) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, **ը)** $\begin{pmatrix}22 & -6 & -26 & 17\\ -17 & 5 & 20 & -13\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & -5 & 3\end{pmatrix}$,

թ) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}$, **ժ)** $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-1}\\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}$,

ի) $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$, լ) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$:

33. ա) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, **դ)** $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, **զ)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$: **37. ա)** $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 35 & 17 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$,

$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^{-2} = \begin{pmatrix} -31 & 40 \\ -56 & 1 \end{pmatrix}$, $(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -7/2 & 3 \end{pmatrix}$:

բ) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -25 & 24 \\ -6 & 10 & 7 \\ 17 & 7 & 15 \end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^{-2} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -8 \\ 12 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & 15 \end{pmatrix}$, $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

44. ա) 3, **բ)** 3, **գ)** 2, **դ)** 2, **ե)** 3, **զ)** 2: **45. ա)** 3, եթե $\lambda = \pm 3$, իսկ մնացած դեպքերում՝ 4: **բ)**1, եթե $\lambda = 1$; 3, եթե $\lambda = -3$, իսկ մնացած դեպքերում՝ 4: **գ)** 4, եթե $\lambda \neq 1$ և $\frac{1}{4}$; իսկ մնացած դեպքերում՝ 3:

Թեմա 6.

1. ա) ոչ , **բ)** ոչ, **գ)** ոչ, **դ)**ոչ: **3.** 1) անկախ են, 2) կախյալ են, 4) կախյալ են,

6) կախյալ են, 8) անկախ են, 9) անկախ են, 10) անկախ են, 11) անկախ են: **6.** ոչինչ չի կարելի ասել: **10.** 1) $(1,2,3)$, 2) $(1,1,1)$, 3) $(0,2,1,2)$: **12.**1) $(8,-3)$, 2) $(5,4,3)$, 3) $(-1,2,0,1)$:

13. 1) $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'$, $x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'$, $x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$, 2) $x_1 = 2x_1' + x_3' - x_4'$, $x_2 = -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4'$, $x_3 = 4x_1' - 2x_2' + 2x_3' - x_4'$, $x_4 = x_1' - x_2' + x_3' - x_4'$: **14.** 1) այո, 2) ոչ, 3) այո, 4) այո, 5) ոչ, 6) այո, 8) ոչ, 11) ոչ, 12) ոչ, 13) այո, 14) այո, 16) ոչ, 17) այո, 18) այո, 19) այո, 20) ոչ, 21) ոչ: **15.** 1) չափողականությունը՝ 3, բազիս են կազմում օրինակ առաջին, երկրորդ և հինգերորդ վեկտորները, 2) չափողականությունը՝ 3, բազիս են կազմում օրինակ առաջին, երկրորդ և չորրորդ վեկտորները: **16.** 1) այո, չափողականությունը՝ $\frac{n(n+1)}{2}$, 2) այո, չափողականությունը՝ $\frac{n(n+1)}{2}$, 3) այո, չափողականությունը՝ $\frac{n(n-1)}{2}$, 4) այո, չափողականությունը՝ n, 5) այո, չափողականությունը՝ $n(n-1)$, 6) այո, չափողականությունը՝ 2, 7) այո, չափողականությունը՝ $n-1$:

Թեմա 7.

1. ա) $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1,$ **բ)** $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1,$ **գ)** $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = 0,$ **դ)** $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1,$ **ե)** $x_1 = -0{,}4; x_2 = -1{,}2; x_3 = 3{,}4; x_4 = 1$: **2. ա)** $x_1 = 4, x_2 = 8,$ **բ)** $x_1 = -8, x_2 = -11,$ **գ)** $x_1 = 0, x_2 = 0,$ **դ)** $x_1 = -5, x_2 = -40, x_3 = 48,$ **ե)** $x_1 = -3, x_2 = -24, x_3 = 8,$ **զ)** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$: **3. ա)** $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2,$ **բ)** $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 1,$ **գ)** $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 3,$ **դ)** $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1/3, x_4 = -3/2,$

զ) $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4, x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, **է)** $x_1 = \frac{1}{10}(6 - 15x_2 - x_4)$, $x_3 = \frac{1}{5}(1 + 4x_4)$, **ը)** լուծում չունի, **թ)** լուծում չունի: **4. ա)** ԼՖՀ-ն՝ $\{(8,-6,1,0),(-7,5,0,1)\}$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$, **բ)** ԼՖՀ-ն՝ $\{(1,0,-5/2,7/2),(0,1,5,-7)\}$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = -5/2\,x_1 + 5x_2, x_4 = 7/2\,x_1 - 7x_2$, **գ)** ԼՖՀ-ն՝ $\{(1,0,0,-9/4,3/4),(0,1,0,-3/2,1/2)\}$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_4 = -9/4\,x_1 + 3/2\,x_2 + 2x_3, x_5 = 3/4\,x_1 + 1/2\,x_2 + x_3$ **դ)** համակարգը ունի միայն զրոյական լուծում: **5. ա)** մասնակի լուծումը՝ $(-1,1,0,1)$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2), x_2 = \frac{1}{11}(5x_3 - x_4 - 10)$, **բ)** մասնակի լուծումը՝ $(2,1,0,0)$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = -11 + 22x_1 - \ -33x_2, x_4 = 8 - 16x_1 + 24x_4$, **գ)** մասնակի լուծումը՝ $(-1,1,0,1)$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2, x_4 = 1$, **դ)** համակարգն ունի միակ լուծում՝ $(3,2,1)$, **ե)** մասնակի լուծումը՝ $(1,1,1,-1)$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2, x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_4$, **զ)** մասնակի լուծումը՝ $(2,1,22/5,8/5)$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = \frac{1}{5}(34x_1 - 17x_2 - 29)$, $x_4 = \frac{8}{5}(2x_1 - x_2 - 2)$, **է)** մասնակի լուծումը՝ $(1,1,8/13,-11/13)$, ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = \frac{1}{13}(-27x_1 + 9x_2 + 26)$, $x_4 = \frac{1}{13}(3x_1 - x_2 - 13)$:

Թեմա 8.

1. ա) ոչ, **բ)** այո, **գ)** այո, **դ)** ոչ: **2. ա)** ոչ, **բ)** այո, **գ)** ոչ: **3.** ոչ:
4. $\frac{16}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{168}{5}$: **6.** $-4, \sqrt{11}$: **12. ա)** $\approx 120{,}5^0$, **բ)** $\pi/2$:

18. $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$: **20. ա)** $(2,2,1,0),(5,-2,-6,-1)$,

բ) $(1,-2,1,0),(25,4,-17,-6)$: **21. 1)** $\left(\frac{4\sqrt{13}}{13},\frac{7\sqrt{13}}{13}\right)$,

2) $\left(\frac{\sqrt{10}}{2},-2,-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$: **22. ա)** $\left\{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)\right\}$,

բ) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$, **գ)** $\left\{\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5},0\right),\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right),(0,0,1)\right\}$,

դ) $\left\{\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$:

23. $\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$; $\{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$:

24. $\left\{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$:

25. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},0\right)\right\}$:

26. $\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$:

Թեմա 9.

3. ա) այո, **բ)** ոչ, **գ)** այո, **դ)** այո, **ե)** այո, **զ)** այո, **ժ)** այո, **ի)** այո, **լ)** այո, **խ)** այո, **ծ)** ոչ, **կ)** այո, **հ)** այո: **6. ա)** $BA=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & -5\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 7 & -3\end{pmatrix}$,

գ) $BA=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$: **7. ա)** $\begin{pmatrix}4&-3\\\frac{5}{3}&-1\end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ **գ)** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$: **12.** *Յուցում:* Դիցուք՝ $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$: Այդ դեպքում $p(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$: Այնուհետև անհրաժեշտ է անմիջականորեն գտնել $p(\lambda)$-ն: **14.** *Յուցում:* Նկատենք, որ $\boldsymbol{x}=(1,1,\ldots,1)$ վեկտորը A մատրիցի սեփական վեկտոր է՝ λ սեփական արժեքին համապատասխանող: Մնում է ապացուցել, որ $\boldsymbol{x}=(1,1,\ldots,1)$ վեկտորը միաժամանակ A^{-1} մատրիցի սեփական վեկտորն է՝ λ^{-1} սեփական արժեքին համապատասխանող: **15. ա)** $\lambda=3$ բազիսը՝ $\{(1/2,1)\}$, $\lambda=-1$ բազիսը՝ $\{(0,1)\}$, **բ)** $\lambda=\sqrt{12}$ բազիսը՝ $\{(3/\sqrt{12},1)\}$, $\lambda=-\sqrt{12}$ բազիսը՝ $\{(-3/\sqrt{12},1)\}$, **գ)** սեփական արժեք չունի, **դ)** $\lambda=1$ բազիսը՝ $\{(1,0),(0,1)\}$, **ե)** $\lambda=1$ բազիսը՝ $\{(0,1,0)\}$, $\lambda=2$ բազիսը՝ $\{(-1/2,1,1)\}$, $\lambda=3$ բազիսը՝ $\{(-1,1,1)\}$, **զ)** $\lambda=-8$ բազիսը՝ $\{(-1/6-1/6,1)\}$, **է)** $\lambda=2$ բազիսը՝ $\{(-1/3-1/3,1)\}$ **ը))** $\lambda=1$ բազիսը՝ $\{(0,0,0,1),(2,3,1,0)\}$, $\lambda=-2$ բազիսը՝ $\{(-1,0,1,0)\}$, $\lambda=-1$ բազիսը՝ $\{(-2,1,1,0)\}$ **թ)** $\lambda=4$ բազիսը՝ $\{(3/2,1,0,0)\}$: **16. ա)** $(59049,0,59049)$, **բ)** $(1048576,1048576,1048576)$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **А. Г. Курош,** Курс высшей алгебры, М., Наука, 1971.
2. **В. А. Ильин, Э. Г. Позняк,** Аналитическая геометрия, М., 2006.
3. **В. А. Ильин, Э. Г. Позняк,** Линейная алгебра, М., 1978.
4. **Д. В. Беклемишев**, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1987.
5. **Д. В. Клетеник**, Сборник задач по аналитической геометрии, М., 1980.
6. **Д. К. Фадеев, И. С. Соминский,** Задачи по высшей алгебре, Санкт Петербург, 1998.
7. **Е. Б. Павельева, В. Я. Томашпольский,** Линейная алгебра, М., 2010.
8. **И. В. Проскуряков,** Сборник задач по линейной алгебре, М., 1974.
9. **И. И. Привалов**, Аналитическая геометрия, М., 1970.
10. **О. Н. Цупербиллер**, Задачи и упражнения по аналитической геометрии., М., 1970.
11. **П. С. Моденов, А. С. Пархоменко,** Сборник задач аналитической геометрии, М., 1981.
12. **Գ. Գ. Ղազարյան,** Վերլուծական երկրաչափություն (դասախոսություններ), Եր., 2010:
13. **Գ. Հ. Հակոբյան, Ա. Վ. Պողոսյան, Գ. Գ. Ղազարյան,** Գծային հանրահաշիվ և կիրառություններ, Եր., 2005:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Առաջաբան 3
Թեմա 1: Վեկտորական հանրահաշիվ..... 4
Խնդիրների լուծման օրինակներ 14
Տիպային խնդիրներ..... 24
Թեմա 2: Հարթության վրա ուղղի տարբեր տեսքի
հավասարումներ 30
Խնդիրների լուծման օրինակներ 33
Տիպային խնդիրներ..... 42
Թեմա 3: Հարթություն, ուղիղը տարածության մեջ..... 48
Խնդիրների լուծման օրինակներ 51
Տիպային խնդիրներ..... 60
Թեմա 4: Երկրորդ կարգի կորեր 67
Խնդիրների լուծման օրինակներ 72
Տիպային խնդիրներ..... 77
Թեմա 5: Մատրիցներ և որոշիչներ..... 82
Խնդիրների լուծման օրինակներ 89
Տիպային խնդիրներ..... 99
Թեմա 6: Գծային տարածություններ 110
Խնդիրների լուծման օրինակներ 120
Տիպային խնդիրներ.....129
Թեմա 7: Գծային հավասարումների համակարգեր 136
Խնդիրների լուծման օրինակներ 139
Տիպային խնդիրներ.....145
Թեմա 8: Էվկլիդեսյան տարածություններ 149
Խնդիրների լուծման օրինակներ 154
Տիպային խնդիրներ.....161
Թեմա 9: Գծային օպերատորներ.....167
Խնդիրների լուծման օրինակներ 173
Տիպային խնդիրներ.....183
Պատասխաններ և ցուցումներ.....189
Գրականություն 200

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԳԱՅԱՆԵ ԳՐԻԳՈՐԻ ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

Խնդիրների լուծման ուղեցույց և տիպային խնդիրների ընտրանի

(ուսումնամեթոդական ձեռնարկ)

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Հ. Ասլանյանի

Տպագրված է «Վարդան Մկրտչյան» ԱՁ տպագրատանը:
Երվանդ Քոչար 7-62

Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլը՝ 12.625:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն,
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2015