Կ.Վ. Գասպարյան

ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կ. Վ. Գասպարյան

ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2017

ՀՏԴ 519.22(076.1)
ԳՄԴ 22.172g7
Գ 316

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը

Խմբագիր՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Գրախոսներ՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ռ. Գ. ԱՐԱՄՅԱՆ
ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ
Ս. Մ. ՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ

Գասպարյան Կ.Վ.

Գ 316 Վիճակագրության խնդիրների ժողովածու / Կ. Վ. Գասպարյան: - Եր.,: ԵՊՀ հրատ., 2017, 208 էջ:

Խնդիրների ժողովածուն կազմված է «Մաթեմատիկական վիճակագրություն» և «Կիրառական վիճակագրություն» առարկաների ծրագրերին համապատասխան, պարունակում է 440 տեսական և կիրառական բնույթի խնդիրներ ու վարժություններ:

Խնդրագրքում ներառված է հետևյալ նյութը՝ նկարագրական վիճակագրություն, կետային և միջակայքային գնահատման տեսություն, պարամետրական և ոչ պարամետրական վարկածների ստուգում, երկու փոփոխականով գծային ռեգրեսիա:

Խնդիրների ժողովածուն նախատեսված է մաթեմատիկայի և մեխանիկայի (ներառյալ ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկայի), ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետների բակալավրիատի և մագիստրատուրայի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ԵՊՀ տնտեսագիտության և կառավարման, ֆիզիկայի, ռադիոֆիզիկայի և այլ բնագիտական ֆակուլտետների բակալավրիատի ուսանողներին:

ՀՏԴ 519.22(076.1)
ԳՄԴ 22.172g7

ISBN 978-5-8084-2232-2

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նախաբան

Խնդրագիրքը կազմված է Կ. Վ. Գասպարյանի «Տեսական և կիրառական վիճակագրություն» 1 (2015) և հրատարակման պատրաստվող «Տեսական և կիրառական վիճակագրություն» 2 դասագրքերի հիման վրա, որտեղ խնդիրների ընտրությունը կատարված է գրականության ցանկում բերված աղբյուրներից (դասագրքեր և խնդրագրքեր): Խնդիրները լուծելու համար ցանկալի է ծանոթանալ այդ դասագրքերում բերված տեսական նյութի հետ, որտեղ նաև լուծված են բազմաթիվ տիպային օրինակներ:

Խնդիրների ժողովածուն կազմված է հետևյալ կերպ՝ յուրաքանչյուր պարագրաֆի սկզբնամասում տրվում է անհրաժեշտ տեսական նյութը, որից հետո բերվում են անհրաժեշտ ցուցումներով մեկտեղ տեսական և կիրառական բնույթի խնդիրներ ու վարժություններ: Խնդրագիրքը պարունակում է հետևյալ նյութը. նմուշային տեսության ներառական մասը (կարգային վիճականիներ, նմուշային բաշխման և խտության ֆունկցիաներ, նմուշային բնութագրիչներ), գնահատման տեսությունը (կետային և միջակայքային գնահատականներ), վարկածների ստուգումը (պարամետրական և ոչ պարամետրական վարկածներ) և զույգային ռեգրեսիայի տեսությունը (երկու փոփոխականով գծային ռեգրեսիա):

Խնդրագիրքը նախատեսված է ԵՊՀ - ի մաթեմատիկայի ֆակուլտետի «Մաթեմատիկական վիճակագրություն» առարկայի, ինչպես նաև նույն ֆակուլտետի «Ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկա» մասնագիտությամբ «Կիրառական վիճակագրություն» առարկայի գործնական դասընթացների համար: Համապատասխան խնդիրները բերվում են (մ) և (կ) նշումներով, իսկ երկու առարկաներին վերաբերող խնդիրները նշումներ չեն պարունակում: Առավել բարդ խնդիրները նշանակված են (*) - ով, որոնց լուծումները բերվում են խնդրագրքի վերջնամասում: Զույգային ռեգրեսիային վերաբերող խնդիրները օգտակար կլինեն «Տնտեսաչափություն» առարկայի ներառական մասը ուսումնասիրելու համար:

Խնդրագիրքը նախատեսված է նաև «Ինֆորմատիկա և կիրառական մաթեմատիկա» ֆակուլտետի համար և կարող է օգտակար լինել «Ֆիզիկայի», «Ռադիոֆիզիկայի», ինչպես նաև «Տնտեսագիտության և կառավարման» ֆակուլտետների բակալավրիատի ուսանողներին:

Կ. Վ. Գասպարյան

§ 1. Կարգային վիճականիներ (մ)

Դիցուք $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ - ը X պատահական մեծությանը համապատասխանող նմուշ է: Ցանկացած $S = S(X^n)$ չափելի ֆունկցիա X^n նմուշից կոչվում է **վիճականի**: X^n նմուշից ստացված և աճման կարգով վերադասավորված

$$X_{(\mathbf{1})} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(k)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$$

շարքը կոչվում է **վարիացիոն շարք**, որտեղ

$$X_{(1)} := \min\{X_1, \ldots, X_n\} \quad \text{և} \quad X_{(n)} := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

վիճականիները կոչվում են, համապատասխանաբար, **մինիմալ** և **մաքսիմալ** (**էքստրեմալ**) **կարգային վիճականիներ**, իսկ $X_{(k)}$ - ն՝ **k - րդ կարգային վիճականի**:

$$R_n := X_{(n)} - X_{(\mathbf{1})} \quad \text{և} \quad M_n := \frac{1}{2}\left(X_{(\mathbf{1})} + X_{(n)}\right)$$

վիճականիները կոչվում են, համապատասխանաբար, **նմուշի լայնք** և **լայնքի միջնակետ**:

$$\nu_n^*(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,x)}(X_i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,x)}\left(X_{(k)}\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad \left(\mathbb{1}_B\,(x) := \begin{cases} 1, & \text{եթե } x \in B \\ 0, & \text{եթե } x \notin B \end{cases}\right)$$

պատահական ֆունկցիան կոչվում է **նմուշային** կամ **էմպիրիկ հաճախություն**:

1. Դիցուք X^n նմուշը համապատասխանում է $\mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիա ունեցող X պատահական մեծությանը: Ապացուցել, որ

ա) *մինիմալ* և *մաքսիմալ* կարգային վիճականիների $\mathbb{F}_1(x)$ և $\mathbb{F}_n(x)$ բաշխման ֆունկցիաները տրվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$\mathbb{F}_1(x) = \mathbb{P}\left(X_{(1)} < x\right) = 1 - \left(1 - \mathbb{F}(x)\right)^n, \qquad \mathbb{F}_n(x) = \mathbb{P}\left(X_{(n)} < x\right) = \left(\mathbb{F}(x)\right)^n,$$

բ) *բացարձակ անընդհատ* $\left(\mathbb{F}'(x) = f(x)\right)$ բաշխման ֆունկցիայի դեպքում $X_{(1)}$ և $X_{(n)}$ կարգային վիճականիների խտության ֆունկցիաները հավասար են՝

$$f_1(x) = n\left(1 - \mathbb{F}(x)\right)^{n-1} f(x), \qquad f_n(x) = n\left(\mathbb{F}(x)\right)^{n-1} f(x):$$

2. Ցույց տալ, որ $[0,1]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից*** $X^n \sim \mathbb{U}(0,1)$ նմուշի դեպքում $X_{(1)}$ կարգային վիճականին ունի $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(1, n)$ ***բետա բաշխում***, իսկ $X_{(n)}$ վիճականին՝ $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(n, 1)$ ***բետա բաշխում*** :

3. Դիցուք X^n - ը $\mathbb{F}(x)$ *անընդհատ* բաշխման ֆունկցիայից նմուշ է: Ցույց տալ, որ $Y_{(1)} = \mathbb{F}\left(X_{(1)}\right)$ վիճականին ունի $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(1, n)$ ***բետա բաշխում***, իսկ $Y_{(n)} = \mathbb{F}\left(X_{(n)}\right)$ - ը՝ $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(n, 1)$ ***բետա բաշխում*** :

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 2 :

4. Դիցուք X^n- ը նմուշ է $\mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիայից: Ապացուցել, որ $X_{(1)}$ և $X_{(n)}$ կարգային վիճականիների $\mathbb{F}_{1,n}(x,y)$ համատեղ բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathbb{F}_{1,n}(x,y) = \mathbb{F}^n(y) - \left(\mathbb{F}(y) - \mathbb{F}(x)\right)^n, \qquad \text{եթե} \ \ x < y,$$

$$\mathbb{F}_{1,n}(x,y) = \mathbb{F}^n(y), \ \ \text{եթե} \ \ x \geq y \ :$$

Ցուցում՝ $\left(X_{(1)} < x, \ X_{(n)} < y\right) = \ (\nu_n^*(y) = n)\backslash(\nu_n^*(y) - \nu_n^*(x) = n)$, եթե $x < y$, $\left(X_{(1)} < x, \ X_{(n)} < y\right) =$ $= (\nu_n^*(y) = n)$, եթե $x \geq y$:

5. Դիցուք X^n նմուշին համապատասխանող $\mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիան *բացարձակ անընդհատ* է $\left(\mathbb{F}'(x) = f(x)\right)$: Ցույց տալ, որ $X_{(1)}$ և $X_{(n)}$ կարգային վիճականիների $f_{1,n}(x,y)$ համատեղ խտության ֆունկցիան՝ կլինի

$$f_{1,n}(x,y) = n(n-1)(\mathbb{F}(y) - \ \mathbb{F}(x) \,)^{n-2} f(x) f(y), \ \ \text{եթե} \ \ \ x < y \ :$$

6. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(a,b)$ նմուշ է $[a,b]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից***: Ապացուցել, որ

$$\mathbb{E}X_{(1)} = \frac{na+b}{n+1}, \ \ \mathbb{E}X_{(n)} \ = \frac{a+nb}{n+1} \ , \ \ \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{(1)}) \ = \ \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{(n)}) = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)} \ :$$

Ցուցում՝ դիտարկել $\eta = \dfrac{X-a}{b-a} \sim \mathbb{U}(0,1)$ պատահական մեծությունը և օգտվել խնդիր 2 - ից:

7. Դիցուք X^n նմուշը համապատասխանում է $\mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիային: Ցույց տալ, որ $X_{(k)}$ կարգային վիճականու $\mathbb{F}_k(x)$ բաշխման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\mathbb{F}_k(x) := \mathbb{P}\left(X_{(k)} < x\right) = \sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}_n(m),$$

որտեղ $\mathbb{P}_n(m) = C_n^m \, (\mathbb{F}(x))^m \, (1 - \mathbb{F}(x))^{n-m}$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $\left(X_{(k)} < x\right) = (\nu_n^*(x) \ \geq \ k)$:

8*. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(0,1)$ նմուշ է $[0,1]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից***: Ցույց տալ, որ $X_{(k)}$ կարգային վիճականու $f_k(x)$ խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f_k(x) = nC_{n-1}^{k-1}\, x^{k-1} \, (1-x)^{n-k} \ :$$

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

9*. Դիցուք $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ նմուշը համապատասխանում է $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x)$ *անընդհատ* բաշխման ֆունկցիային: Ցույց տալ, որ

ա) $X_{(k)}$ կարգային վիճականու $F_k(x)$ բաշխման ֆունկցիան ներկայացվում է

$$\mathbb{F}_k(x) = \mathrm{B}(\mathbb{F}(x);\ k\ ,\ n-k+1)$$

տեսքով, որտեղ $\mathrm{B}(z;\ a, b) := \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \displaystyle\int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \quad (0 < z \le 1,\ \ a,\ \ b > 0)$՝ $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(a, b)$ ***բետա բաշխում*** ունեցող պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է,

բ) $Y_{(k)} = \mathbb{F}(X_{(k)})$ կարգային վիճականին ունի $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(k\ ,\ n-k+1)$ ***բետա բաշխում***,

գ) եթե $\mathbb{F}(x)$ - ը *բացարձակ անընդհատ* է ($\mathbb{F}'(x) = f(x)$), ապա $X_{(k)}$ կարգային վիճականու $f_k(x)$ խտության ֆունկցիան՝ կլինի

$$f_k(x) = nC_{n-1}^{k-1}\,(\mathbb{F}(x))^{k-1}(1-\mathbb{F}(x))^{n-k}f(x)\ :$$

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

10. Տրված է $X^n \sim \mathbb{E}(m, \alpha)$ նմուշ ***երկպարամետրական ցուցչային բաշխումից***: Ապացուցել, որ $X_{(1)}$ կարգային վիճականին ունի $\mathbb{E}(m,\ \alpha n)$ բաշխում և

$$\mathbb{E}X_{(1)} = m + \frac{1}{n\alpha}\ , \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{(1)}) = \frac{1}{n^2\alpha^2}\ :$$

11. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{W}\,(m,\ \alpha,\ \lambda)$ նմուշ է ***Վեյբուլի բաշխումից***: Ապացուցել, որ $X_{(1)}$ կարգային վիճականին ունի $\mathbb{W}\left(m,\ n^{1/\lambda}\alpha,\ \lambda\right)$ բաշխում և

$$\mathbb{E}X_{(1)} = m + \frac{1}{\alpha n^{1/\lambda}}\,\Gamma(1+1/\lambda), \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{(1)}) = \frac{1}{\alpha^2 n^{2/\lambda}}\,[\Gamma(1+2/\lambda) - \{\Gamma(1+1/\lambda)\}^2]\ :$$

12. Ապացուցել, որ $X^n \sim \mathbb{P}\mathrm{ow}\,(m,\ \alpha,\ \lambda)$ ***աստիճանային բաշխումից*** նմուշի համար $X_{(n)}$ կարգային վիճականին ունի $\mathbb{P}\mathrm{ow}\,(m,\ \alpha,\ \lambda n)$ բաշխում և

$$\mathbb{E}X_{(n)} = m + \frac{\lambda\alpha n}{\lambda n + 1}\ , \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{(n)}) = \frac{\lambda n\alpha^2}{(\lambda n+1)^2(\lambda n+2)}\ :$$

13. Ապացուցել, որ $X^n \sim \mathbb{P}\mathrm{ar}\,(m,\ \alpha,\ \lambda)$ ***Պարետոյի բաշխումից*** նմուշի համար $X_{(1)}$ կարգային վիճականին ունի $\mathbb{P}\mathrm{ar}\,(m,\ \alpha,\ \lambda n)$ բաշխում և

$$\mathbb{E}X_{(1)} = m + \frac{\lambda\alpha n}{\lambda n - 1}\ , \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{(1)}) = \frac{\lambda n\alpha^2}{(\lambda n-1)^2(\lambda n-2)}\ :$$

14*. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(a,\ b)$ նմուշ է $[a,\ b]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից***: Ցույց տալ, որ ա) $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ *նմուշի լայնքը* ներկայացվում է $R_n = (b-a)\, R_n'$ տեսքով, որտեղ $R_n' = X_{(n)}' - X_{(1)}'$ վիճականին ունի $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(n-1, 2)$ ***բետա բաշխում***, իսկ $X_{(1)}'$- ը և $X_{(n)}'$- ը՝ $X' = \dfrac{X-a}{b-a}$ պատահական մեծությանը համապատասխանող նմուշի *էքստրեմալ վիճականիներն* են և

$$\mathbb{E}R_n = \frac{n-1}{n+1}\,(b-a), \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(R_n) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}\,(b-a)^2\,,$$

բ) $M_n = \frac{1}{2}\big(X_{(1)} + X_{(n)}\big)$ *լայնքի միջնակետի* համար ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը՝

$$\mathbb{E}M_n = \frac{a+b}{2}\,, \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(M_n) = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}\ :$$

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

15*. Դիցուք X^n նմուշն ունի $\mathbb{F}(x)$ *բացարձակ անընդհատ* բաշխման ֆունկցիա: Ապացուցել, որ ցանկացած $m,\ k = 0, 1, \ldots, n$ թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ զուգամիտությունները, երբ $n \to \infty$՝

ա) $Z_{(m)}^n := n\,\mathbb{F}\big(X_{(m)}\big) \xrightarrow{d} \Gamma(1,\ m)$, բ) $W_{(n-k+1)}^n := n\,\big[1 - \mathbb{F}\big(X_{(n-k+1)}\big)\big] \xrightarrow{d} \Gamma(1,\ k)$:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

16. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(1)$ - ը նմուշ է $\lambda = 1$ պարամետրով ***ցուցչային բաշխումից***: Ապացուցել, որ ա) $n\,X_{(1)} \xrightarrow{d} \mathbb{E}(1)$, բ) $X_{(n)} - \ln n \xrightarrow{d} \mathbb{Z}$, երբ $n \to \infty$, որտեղ $\mathbb{Z}$ - ը $F(x) = e^{-e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$ բաշխման ֆունկցիայով պատահական մեծություն է:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 15* :

§ 2. Նմուշային բաշխման ֆունկցիա: Հաճախությունների սյունապատկեր (հիստոգրամ) և բազմանկյուն (պոլիգոն)

Դիցուք $X^n = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathbb{P}$ նմուշ է *անհայտ* $\mathbb{P}$ բաշխումից: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ տարածության վրա

$$\mathbb{P}_n^*(B) := \frac{\nu_n^*(B)}{n}, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

բանաձևով սահմանված **պատահական բաշխումը**, որտեղ

$$\nu_n^*(B) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(X_i)$$

B բազմության **նմուշային հաճախությունն** է, կոչվում է **նմուշային** (էմպիրիկ) **բաշխում**:

$\mathbb{P}_n^*(B)$ նմուշային բաշխմանը համապատասխանող

$$\mathbb{F}_n^*(x) = \mathbb{P}_n^*\big((-\infty, x)\big) = \frac{\nu_n^*(x)}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

ֆունկցիան կոչվում է **նմուշային (էմպիրիկ) բաշխման ֆունկցիա**, որտեղ $\nu_n^*(x)$ - ը՝ **նմուշային հաճախությունն** է :

Դիսկրետ դեպք

Դիցուք $\mathcal{X} = \{b_k\}_{k\geq 1}$ $(b_k < b_{k+1})$ **դիսկրետ** X պատահական մեծության արժեքների բազմությունն է և $x^n = (x, \ldots, x_n)$ - ը՝ համապատասխան թվային նմուշը:

(b_k, ν_k) և (b_k, f_k), $k = 1, \ldots, r$ զույգերի հաջորդականությունները կոչվում են x^n թվային նմուշին համապատասխանող **բացարձակ** և **հարաբերական հաճախությունների վիճակագրական շարքեր**, իսկ

x_i	b_1	b_2	$\cdots$	b_r
ν_i	ν_1	ν_2	$\ldots$	ν_r

,

x_i	b_1	b_2	$\cdots$	b_r
f_i	f_1	f_2	$\ldots$	f_r

աղյուսակները՝ **բացարձակ** և **հարաբերական հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակներ**, որտեղ

$$\nu_k := \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{b_k\}}(x_j), \qquad \sum_{k=1}^{r} \nu_k = n, \qquad f_k = \frac{\nu_k}{n}:$$

(b_k, ν_k) և (b_k, f_k), $k = 1, \ldots, r$ կետերին համապատասխանող **ուղղաձիգ հատվածների գծապատկերները** կոչվում են **բացարձակ** և **հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերներ**, իսկ այդ կետերը միացնող բեկյալները՝ **բացարձակ և հարաբերական հաճախությունների բազմանկյուններ** կամ **պոլիգոններ**:

x^n նմուշին համապատասխանող

$$\mathbb{F}_n(x) := \sum_{k=1}^{r} \omega_k \, \mathbb{1}_{(b_k,\, b_{k+1}]}(x) \ \ (b_{r+1} = \infty) \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \omega_k := \sum_{i=1}^{k} f_i \quad (\omega_r = 1)$$

ֆունկցիան կոչվում է **նմուշային** կամ **էմպիրիկ բաշխման ֆունկցիա**:

Միջակայքային դեպք

Դիցուք **դիսկրետ** կամ **անընդհատ** X պատահական մեծության $x^n = (x, \ldots, x_n)$ նմուշի x_i անդամները պատկանում են $\mathcal{X} = (a,\ b],\ a,\ b < \infty$ միջակայքին, որը տրոհված է

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k=1}^{r} \Delta_k\,, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$h = b_{k+1} - b_k$ *հավասար* երկարությամբ $\Delta_k = (b_k,\ b_{k+1}]$ միջակայքերի:

x^n նմուշին համապատասխանող **բացարձակ** և **հարաբերական հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակներ** կոչվում են

Δ_i	Δ_1	Δ_2	$\cdots$	Δ_r
ν_i	ν_1	ν_2	$\ldots$	ν_r

և

Δ_i	Δ_1	Δ_2	$\cdots$	Δ_r
f_i	f_1	f_2	$\ldots$	f_r

աղյուսակները, որտեղ $\nu_k := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\Delta_k}(x_i)$՝ Δ_k միջակայքի **նմուշային հաճախությունն** է, $\sum_{i=1}^{r} \nu_k = n$:

Δ_k միջակայքերի վրա $\dfrac{\nu_k}{nh}$ բարձրություններով կառուցված ուղղանկյունների պատկերը կոչվում է **հարաբերական հաճախությունների սյունապատկեր** կամ **հիստոգրամ**, իսկ

$$(x_1^0 - h\,, 0), \quad \left(x_k^0\,,\ \frac{\nu_k}{nh}\right), \quad k = 1, \ldots, r \quad \text{և} \quad (x_r^0 + h\,, 0)$$

կետերը միացնող բեկյալը $\left(x_k^o := \frac{1}{2}(b_k + b_{k+1})\right)$ կոչվում է **հարաբերական հաճախությունների բազմանկյուն** կամ **պոլիգոն**:

Նմուշային բաշխման ֆունկցիան այս դեպքի համար՝ կլինի

$$\mathbb{F}_n(x) := \sum_{k=1}^{r} \omega_k \mathbb{1}_{[x_k^0,\, x_{k+1}^0)}(x) \quad \left(\omega_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \nu_i\ ,\ \ x_{r+1}^0 = \infty\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

ֆունկցիան:

$$\widehat{\mathbb{F}}_n(x) := \sum_{k=1}^{r+1} \left[\omega_{k-1} + \frac{\nu_k}{nh}(x - b_k)\right] \mathbb{1}_{\Delta_k}(x)\,, \quad (\omega_0 = 0,\ \ \nu_{r+1} = 0,\ \ b_{r+2} = \infty)$$

անընդհատ *կտոր առ կտոր գծային* ֆունկցիան, որի գագաթները գտնվում են $(b_k\,, \omega_{k-1})$, $k = 1, \ldots, r+1$ կետերում կոչվում է **կուտակված հարաբերական հաճախությունների ֆունկցիա** (**կումուլյատա**):

17. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիայից: Ապացուցել $\mathbb{F}_n^*(x)$ նմուշային բաշխման ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունները՝

$$\mathbb{E}\mathbb{F}_n^*(x) = \mathbb{F}(x), \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\mathbb{F}_n^*(x)\big) = \frac{\mathbb{F}(x)}{n}\,\big(1 - \mathbb{F}(x)\big),$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\big(\mathbb{F}_n^*(x_1),\ \mathbb{F}_n^*(x_2)\big) = \frac{1}{n}\ \mathbb{F}(x_1)\big(1 - \mathbb{F}(x_2)\big)\ (\,x_1 \leq x_2,\ \ \mathbb{F}(x_1) \neq 0,\ \ \mathbb{F}(x_2) \neq 1),$$

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}(x)| \geq \varepsilon/\sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2}\ (\varepsilon > 0):$$

18. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիայից: Ապացուցել, որ ցանկացած $x \in \mathbb{R}$ - ի համար տեղի ունի զուգամիտություն՝

$$\mathbb{F}_n^*(x) \to \mathbb{F}(x) \quad \mathbb{P}\text{ - h.h.}, \quad n \to \infty :$$

19. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիայից: Ապացուցել զուգամիտությունը՝

$$\sqrt{n}\left(\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}(x)\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ \mathbb{F}(x)(1 - \mathbb{F}(x)), \quad n \to \infty, \quad x \in \mathbb{R} :$$

20. Ենթադրենք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{P}$ բաշխումից: Ապացուցել զուգամիտությունը՝

$$\mathbb{P}_n^*(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{P}\,(B), \quad n \to \infty, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}):$$

21. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{P}$ բաշխումից: Ապացուցել զուգամիտությունը՝

$$\sqrt{n}\left(\mathbb{P}_n^*(B) - \mathbb{P}\,(B)\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\Big(0,\ \mathbb{P}\,(B)\big(1 - \mathbb{P}\,(B)\big)\Big), \quad n \to \infty, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}):$$

22. Դիցուք $(X^n, Y^n) = \big((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\big)$- ը $\mathbb{F}(x,\ y)$ համատեղ բաշխման ֆունկցիայով $(X,\ Y)$ պատահական վեկտորի անկախ դիտումներ են: Սահմանենք $(X,\ Y)$ պատահական վեկտորի համատեղ նմուշային բաշխման ֆունկցիան՝

$$\mathbb{F}_n^*(x, y) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, x)\times(-\infty, y)}(X_i, Y_i) :$$

Ապացուցել, որ ցանկացած $x\,, y \in \mathbb{R}$ - ից՝

$$\mathbb{F}_n^*(x, y) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{F}(x, y), \quad \mathbb{E}\mathbb{F}_n^*(x, y) = \mathbb{F}(x, y), \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\mathbb{F}_n^*(x, y)\big) = \frac{1}{n}\mathbb{F}(x, y)\big(1 - \mathbb{F}(x, y)\big):$$

23. Բերված են դիսկրետ պատահական մեծություններին համապատասխանող նմուշային բացարձակ հաճախությունների բաշխման աղյուսակները՝

(1)

x_i	3	5	6	9	10
ν_i	1	4	5	4	2

և

(2)

x_i	-2	0	1	3	4	7
ν_i	3	2	1	5	2	4

Կառուցել՝

ա) հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունները (պոլիգոնները),

բ) նմուշային բաշխման ֆունկցիաների գծապատկերները:

24. Կառուցել միջակայքային աղյուսակներով տրված անընդհատ պատահական մեծությունների հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերները (հիստոգրամները), բազմանկյունները (պոլիգոնները) և նմուշային բաշխման ֆունկցիաները՝

ա)

Միջակայքեր	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)
Հաճախություններ	1	5	8	15	12	7	2

բ)

Միջակայքեր	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)
Հաճախություններ	1	2	7	18	12	8	2

25. X և Y դիսկրետ պատահական մեծություններն ընդունել են արժեքներ՝

$$x^n: \quad 5, \quad 4, \quad 7, \quad 9, \quad 3, \quad 3, \quad 4, \quad 7, \quad 1, \quad 4, \quad 3, \quad 5$$
$$y^m: \quad -3, \quad 0, \quad 1, \; -1, \quad 0, \quad 1, \; -3, \quad 2, \; -3:$$

ա) Բերել բացարձակ և հարաբերական հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակները,

բ) կառուցել հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերները և բազմանկյունները,

գ) կառուցել նմուշային բաշխման ֆունկցիաների գծապատկերները:

26 (կ). Բերված է 20 դիմորդի «Մաթեմատիկա» առարկայից ընդունելության քննությունների ժամանակ ստացած միավորների հետևյալ շարքը՝

16, 5, 12, 10, 14, 8, 11, 5, 0, 3, 20, 18, 4, 8, 11, 20, 19, 5, 20, 3 :

ա) Ներկայացնել տվյալները վարիացիոն շարքի տեսքով,

բ) կազմել բացարձակ հաճախությունների բաշխման աղյուսակը,

գ) կառուցել բացարձակ հաճախությունների սյունապատկերը և բազմանկյունը,

դ) կառուցել նմուշային բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերը:

27 (կ). Ներկայացված են երաժշտական խանութում մեկ օրվա ընթացքում դասական երաժշտության ձայնասկավառակներ գնողների տարիքային տվյալները՝

26	37	40	18	14	45	32	68	31	37
20	32	15	27	46	44	62	58	30	42
22	26	44	41	43	55	50	63	29	22 :

ա) Ներկայացնել տվյալները «ցողուն և տերևներ» տեսքով՝ որպես «ցողուն» վերցնելով 1, 2, 3, … թվերը,

բ) կառուցել բացարձակ հաճախությունների *միջակայքային* բաշխման աղյուսակը՝ վերցնելով վեց հավասար երկարություն ունեցող միջակայքեր,

գ) պատկերել *միջակայքային* բաշխման աղյուսակի միջոցով հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը (պոլիգոնը) և սյունապատկերը (հիստոգրամը),

դ) կառուցել (*միջակայքային*) նմուշային բաշխման ֆունկցիայի և *անընդհատ* կուտակված հարաբերական հաճախությունների (*կումուլյատայի*) գծապատկերները. վերջինի օգնությամբ գտնել՝

1. ո՞ր տարիքից է մեծ ձայնասկավառակներ գնողների 70 % - ը,

2. որքա՞ն է այն գնորդի (մոտավոր) տարիքը, որից տարիքով մեծ և փոքր գնորդների թվերը հավասար են:

28 (կ). Բերված են 40 նավթատար լցանավերի ջրատարողությունների վերաբերյալ հետևյալ տվյալները (*հազարական տոննաներով*)՝

229	232	239	232	259	361	220	260	231	229
249	254	257	214	237	253	274	230	223	253
195	269	231	268	189	290	218	313	220	270
277	374	222	290	231	258	227	269	220	224 :

ա) Բերել տվյալների «ցողուն և տերևներ» տեսքի ներկայացումը՝ որպես «ցողուն» վերցնելով 18, 19, 20, … թվերը,

բ) օգտվելով ստացված ներկայացումից՝ կառուցել հաճախությունների *միջակայքային* վիճակագրական բաշխման աղյուսակը վերցնելով ութ հավասար երկարություն ունեցող միջակայքեր, որոնցից առաջինը [175, 200) միջակայքն է,

գ) բերել հարաբերական հաճախությունների բազմանկյան (պոլիգոնի) և սյունապատկերի (հիստոգրամի) գծապատկերները,

դ) կառուցել (միջակայքային) բաշխման ֆունկցիայի ($\mathbb{F}_n(x)$) և կուտակված հարաբերական հաճախությունների՝ *կումուլյատայի* ($\widehat{\mathbb{F}}_n(x)$) գրաֆիկները:

29 (կ). Տարբեր լցակայաններից հետազոտության նպատակով վերցված բենզինի նմուշներում «օկտանային» թվերն ընդունել են հետևյալ արժեքները՝

88.5 87.7 83.4 86.7 87.5 91.5 88.6 100.3 95.6 93.3
94.7 91.1 91.0 94.2 87.8 89.9 88.3 87.6 84.3 86.7
88.2 90.8 88.3 98.8 94.2 92.7 93.2 91.0 90.3 93.4 :

ա) Ներկայացնել տվյալները «ցողուն և տերևներ» տեսքով՝ վերցնելով որպես «ցողուն» 83, 84, … արժեքները,

բ) կառուցել բացարձակ և հարաբերական հաճախությունների *միջակայքային* բաշխման աղյուսակները՝ վերցնելով վեց հավասար երկարությամբ միջակայքեր, որոնցից առաջինը [83, 86) միջակայքն է,

գ) պատկերել *միջակայքային* հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը (պոլիգոնը) և սյունապատկերը (հիստոգրամը),

դ) կառուցել կուտակված (*միջակայքային*) հարաբերական հաճախությունների ֆունկցիան (կումուլյատան), որի միջոցով գտնել «օկտանային» թվի այն արժեքը, որը շարքը բաժանում է երկու հավասար մասի (գտնել *միջնարժեքը*):

30 (կ). Ներկայացված է Լոնդոնի 166 ավտոբուսների վարորդների մեկ (հինգ) տարվա ընթացքում ավտովթարների թվի հաճախականային բաշխումը՝

Ավտովթարների թիվը		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	≥15
Վարորդների թիվը	(1 տ)	45	36	40	19	12	8	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
	(5 տ)	1	2	3	14	17	21	17	14	14	12	13	9	6	2	6	15

ա) Կազմել բացարձակ հաճախությունների սյունապատկերները և բազմանկյունները (պոլիգոնները),

բ) կառուցել նմուշային բաշխման ֆունկցիաների գծապատկերները:

31 (կ). Բերված են 190 միջքաղաքային ավտոբուսների անխափան անցած (մինչև դրանց շարժիչի առաջին լուրջ խափանումը) ճանապարհների միջակայքային բացարձակ հաճախությունները (a_k – ՝ նշանակում է $[a_k,\ a_{k+1})$ միջակայքը)՝

Անխափան անցած ճանապարհը (10^3 կմ)	0 –	0.2 –	0.4 –	0.6 –	0.8 –	1.0 –	1.2 –	1.4 –	1.6 –	1.8–
Հաճախությունը	5	11	16	25	34	46	33	16	2	2

ա) Կառուցել հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը և սյունապատկերը,

բ) կառուցել նմուշային բաշխման ֆունկցիայի և կուտակված հարաբերական հաճախությունների (կումուլյատայի) գծապատկերները:

32 (կ). Հիվանդանոցում դիտարկվել է պատահականորեն ընտրված 200 հիվանդի բաշխումն ըստ հիվանդանոցում անցկացրած հետվիրահատական օրերի՝

Հետվիրահատական օրերը	1 –	4 –	7 –	10 –	13 –	16 –	19 –	22 –
Հաճախությունը	18	90	44	21	9	9	4	5

ա) Կառուցել բացարձակ հաճախությունների սյունապատկերը և բազմանկյունը,

բ) կառուցել ($\widehat{\mathbb{F}}_n(x)$) կուտակված հարաբերական հաճախությունների (կումուլյատայի) գծապատկերը, և դրա օգնությամբ գտնել հետվիրահատական այն օրերի թիվը, որից քիչ և շատ ժամանակ մնացած հիվանդների թվերը հավասար են (գտնել *միջնարժեքը*):

§ 3. Նմուշային բնութագրիչներ

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{F}$ - ը նմուշ է $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիայից:

I տիպի նմուշային բնութագրիչներ կոչվում են հետևյալ բնութագրիչները՝

$\overline{X^n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ՝ **միջինը,**

$a_k^* := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ ՝ $\boldsymbol{k}$ **- րդ կարգի** (**սկզբնական**) **մոմենտը** ($\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{1}$),

$m_k^* := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X^n})^k$ ՝ $\boldsymbol{k}$ **- րդ կարգի կենտրոնական մոմենտը,**

$S_n^2 := m_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X^n})^2 = a_2^* - (\overline{X^n})^2$ ՝ **ցրվածքը** (**դիսպերսիան**),

$S_n := \sqrt{S_n^2}$ ՝ **միջին քառակուսային** (**ստանդարտ**) **շեղումը,**

$g_1^* := \frac{m_3^*}{S_n^3}$ ՝ **անհամաչափության գործակիցը,**

$g_2^* := \frac{m_4^*}{S_n^4} - 3$ ՝ **կուտակվածության** (**էքսցեսի**) **գործակիցը,**

$V_n^* := (S_n/\overline{X^n}) \cdot 100\ \%$ ՝ **փոփոխականության** (**վարիացիայի**) **գործակիցը**:

II տիպի նմուշային բնութագրիչներն են՝

$\zeta_p^*(n) := \sup\,(x \in \mathbb{R}\colon\ \mathbb{F}_n^*(x) \leq p) = X_{([np]+1)},\ 0 < p < 1$՝ $\boldsymbol{p}$ **–քանորդիչը** (**քվանտիլը**),
$[np]$- ն ՝ $\boldsymbol{np}$ թվի ամբողջ մասն է,

$X_{med}^* := \begin{cases} X_{(k)}, & \text{եթե } n = 2k-1 \\ \frac{1}{2}\left(X_{(k)} + X_{(k+1)}\right), & \text{եթե } n = 2k \end{cases}$ ՝ **միջնարժեքը** (**մեդիանը**),

$\zeta_{1/4}^* := Q_1^*$ և $\zeta_{3/4}^* := Q_3^*$ ՝ **ստորին և վերին քվարտիլները,**
$\zeta_{0,1}^*, \dots, \zeta_{0,9}^*$ ՝ **տասնորդիչները,**
$F_1 := \mathrm{med}\left\{x_{(1)}, \dots, x_{(k)}\right\},\ \ F_3 := \mathrm{med}\left\{x_{(k+1)}, \dots, x_{(2k)}\right\},$ եթե $n = 2k,$
$F_1 := \mathrm{med}\left\{x_{(1)}, \dots, x_{(k)}\right\},\ \ F_3 := \mathrm{med}\left\{x_{(k)}, \dots, x_{(2k-1)}\right\},$ եթե $n = 2k-1,$
ստորին (F_1) **և վերին** (F_3) **քառորդիչները,**
$F_3 - F_1$՝ **միջքառորդչային լայնքը,**
$T := \left(x_{(1)},\ F_1,\ x_{med},\ F_3,\ x_{(n)}\right)$ ՝ «**հինգթվանի ամփոփագիրը**» (***Տյուկիի*** **բնութագրիչը**):

Միջակայքային բաշխումների նմուշային բնութագրիչներ

Դիցուք տրված է x^n թվային նմուշի բացարձակ հաճախությունների միջակայքային աղյուսակը՝

Δ_i	Δ_1	$\dots$	Δ_k	$\dots$	Δ_r
ν_i	ν_1	$\dots$	ν_k	$\dots$	ν_r

:

Նշանակենք $x_k^0 := \frac{1}{2}(b_k + b_{k+1})$՝ $\Delta_k = (b_k,\ b_{k+1}]$ միջակայքի միջնակետը: Սահմանենք հետևյալ նմուշային բնութագրիչները՝

$a_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i^0)^k \nu_i$ ՝ **k - րդ կարգի (սկզբնական) մոմենտը**, $k \geq 1$,

$\overline{x^n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^0 \nu_i$ ՝ **միջինը**,

$m_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i^0 - \overline{x^n})^k \nu_i$ ՝ **k - րդ կարգի կենտրոնական մոմենտը**,

$s^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i^0 - \overline{x^n})^2 \nu_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i^0)^2 \nu_i - (\overline{x^n})^2$ ՝ **ցրվածքը (դիսպերսիան)**,

$s := \sqrt{s^2}$ ՝ **միջին քառակուսային (ստանդարտ) շեղումը**:

«***Շեպպարդի*** **ուղղումները** » որոշվում են հետևյալ բանաձևերից՝

$$a_1' := a_1\,,\quad a_2' := a_2 - \frac{1}{12}\,h^2,\quad a_3' := a_3 - \frac{1}{4}\,a_1 h^2,\quad a_4' := a_4 - \frac{1}{2}\,a_2 h^2 + \frac{7}{240}\,h^4\,,$$

որտեղ $h := |\Delta_k|$ - ն՝ Δ_k միջակայքի երկարությունն է:

Այն Δ_k միջակայքերը, որոնց համար $\nu_k > \nu_{k-1}$ և $\nu_k > \nu_{k+1}$, կոչվում են **մոդալ** միջակայքեր: $\Delta_k = (b_k,\, b_{k+1}\,]$ *մոդալ միջակայքում* գտնվող միջակայքային **մոդը** որոշվում է հետևյալ բանաձևից՝

$$x_{mod} := b_k + \frac{\nu_k - \nu_{k-1}}{2\nu_k - (\nu_{k-1} + \nu_{k+1})}\,(b_{k+1} - b_k):$$

Միջակայքային **միջնարժեքը (մեդիանը)** որոշվում է

$$x_{med} := b_k + \frac{1}{\nu_k}\left(\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^{k-1}\nu_j\right)(b_{k+1} - b_k)$$

բանաձևից, որտեղ $\Delta_k = (b_k,\, b_{k+1}\,]$ - ը՝ *միջնարժեքը* պարունակող միջակայքն է:

Միջակայքային **ստորին** և **վերին քվարտիլները** որոշվում են, համապատասխանաբար, հետևյալ բանաձևերից՝

$$Q_1 := b_k + \frac{1}{\nu_k}\left(\frac{n}{4} - \sum_{j=1}^{k-1}\nu_j\right)(b_{k+1} - b_k),\quad Q_3 := b_k + \frac{1}{\nu_k}\left(\frac{3n}{4} - \sum_{j=1}^{k-1}\nu_j\right)(b_{k+1} - b_k),$$

որտեղ $\Delta_k = (b_k,\, b_{k+1}\,]$ - երը, համապատասխանաբար, *ստորին* և *վերին քվարտիլները* պարունակող միջակայքերն են:

33. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից և $\alpha_{2k} := \mathbb{E}X^{2k} < \infty$ $(k \geq 1)$: Ապացուցել $\sqrt{n}\,(a_k^* - \alpha_k) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\, \alpha_{2k} - \alpha_k^2)$ զուգամիտությունը, երբ $n \to \infty$: Մասնավորապես՝ $\sqrt{n}\,(\overline{X^n} - m) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\, \sigma^2)$, եթե $\sigma^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) < \infty$ $(m := \mathbb{E}X)$:

Ցուցում՝ տե՛ս [2, թեորեմ 4.60]:

34. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից և $m = \mathbb{E}X \neq 0$, $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) < \infty$: Ապացուցել, որ $\sqrt{n}\,((\overline{X^n})^{-1} - m^{-1}) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\, \sigma^2/m^4)$, երբ $n \to \infty$:

35. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից և $\mu_4 := \mathbb{E}(X-m)^4 < \infty$: Ապացուցել S_n^2 նմուշային ցրվածքի ասիմպտոտիկ նորմալությունը՝

$$\sqrt{n}\,(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ \mu_4 - \mu_2^2), \quad n \to \infty :$$

36* **(մ).** Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից և $\mu_4 = \mathbb{E}(X-m)^4 < < \infty$: Ապացուցել հետևյալ զուգամիտությունը՝

$$\sqrt{n}\,(V_n^* - V) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ \sigma_V^2), \quad n \to \infty,$$

որտեղ V - ն տեսական վարիացիայի գործակիցն է, իսկ $\sigma_V^2 = \dfrac{\mu_4 - \mu_2^2}{4m^2\mu_2} - \dfrac{\mu_3}{m^3} + \dfrac{\mu_2^2}{m^4}$:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

37. Ստանալ կենտրոնական և սկզբնական նմուշային մոմենտների միջև հետևյալ կապերը՝ $m_k^* = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (\overline{X^n})^j a_{k-j}^*$, $a_k^* = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (\overline{X^n})^j m_{k-j}^*$, $k \in \mathbb{N}$:

Ցուցում՝ կիրառել հետևյալ արտահայտություններում *Նյուտոնի երկանդամի* բանաձևը՝

$$m_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X^n})^k, \quad a_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - \overline{X^n}) + \overline{X^n}]^k :$$

38. X^n նմուշի գրառման ժամանակ կատարվել է միևնույն (սիստեմատիկ) c սխալը՝ «*գերագնահատում*», երբ $c > 0$, կամ «*թերագնահատում*», երբ $c < 0$: Ինչպե՞ս կփոխվեն նմուշային միջինը, մոդան (մոդաները), միջնարժեքը և ցրվածքը, եթե՝

ա) սխալն ունի *գծային* տեսք.

$$Y_i = X_i + c, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{որտեղ} \quad c \gtrless 0,$$

բ) սխալն ունի *մասշտաբային* տեսք.

$$Y_i = c\,X_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{որտեղ} \quad c \gtrless 1:$$

39 (կ). Ըստ խնդիր 25 - ի տվյալների յուրաքանչյուր նմուշի համար գտնել՝

ա) միջինը, ցրվածքը, միջին քառակուսային շեղումը,

բ) միջնարժեքը, քվարտիլները և քառորդիչները, լայնքը, լայնքի միջնակետը, միջքառորդչային լայնքը, «հինգթվանի ամփոփագիրը»,

գ) անհամաչափության, կուտակվածության և վարիացիայի գործակիցները:

40 (կ). Ըստ խնդիր 26 - ի տվյալների գտնել հետևյալ նմուշային բնութագրիչները՝

ա) միջինը և ստանդարտ շեղումը,

բ) միջնարժեքը, լայնքը, քվարտիլները և քառորդիչները, $\zeta_{0.1}$ և $\zeta_{0.9}$ տասնորդիչները, *Տյուկիի* բնութագրիչը:

41. Ըստ խնդիր 23 - ի տվյալների գտնել նմուշային
ա) միջինները, ցրվածքները, ստանդարտ շեղումները,
բ) միջնարժեքները, քվարտիլները և քառորդիչները,
գ) համեմատել (1) և (2) տվյալների վարիացիայի գործակիցները:

42. Ըստ խնդիր 24 - ի տվյալների օգտվելով «*Շեպպարդի* ուղղումներից» գտնել նմուշային
ա) միջինը, ցրվածքը, միջին քառակուսային շեղումը,
բ) անհամաչափության, կուտակվածության և վարիացիայի գործակիցները,
գ) միջնարժեքը, մոդաները, քվարտիլները:

43 (կ). Ըստ խնդիր 27 - ի *խմբավորված* տվյալների օգտվելով «*Շեպպարդի* ուղղումներից» գտնել նմուշային
ա) միջինը, ցրվածքը, ստանդարտ շեղումը և համեմատել իրական (չխմբավորված) տվյալների միջինի և ցրվածքի հետ,
բ) միջնարժեքը, մոդան, քվարտիլները և համեմատել իրական (չխմբավորված) տվյալների համապատասխան բնութագրիչների հետ:

44 (կ). Ըստ խնդիր 31 - ի տվյալների գտնել նմուշային
ա) միջնարժեքը, մոդան, քվարտիլները, $\zeta_{0.1}$ և $\zeta_{0.9}$ տասնորդիչները,
բ) միջինը, ցրվածքը և վարիացիայի գործակիցը:

45 (կ). Բերված են երկու տարբեր շրջաններում խնձորենիների տերևների մեջ *պրոտեինի* պարունակության վերաբերյալ տվյալներ (*մգ / 1 գ*)՝

x^n :	11.7	16.1	14.0	6.1	5.1	4.9
y^n :	6.4	5.9	6.1	5.8	6.6	6.0 :

Գտնել նմուշային
ա) միջինները, ստանդարտ շեղումները, լայնքերը, վարիացիայի գործակիցները և համեմատել դրանք,
բ) անհամաչափության և կուտակվածության գործակիցները:

Նմուշային բնութագրիչների մոմենտներ

46. Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{P}$ բաշխումից: Ցույց տալ, որ

ա) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\overline{X^n}, S^2) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\mu_3$, բ) $\mathbb{E}m_3^* = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\mu_3$:

Եթե $X^n \sim \mathbb{N}(m, \sigma^2)$ նմուշ է ***նորմալ բաշխումից***, ապա

ա) $\mu_{2k-1}(\overline{X^n}) = 0$, $\mu_{2k}(\overline{X^n}) = (2k-1)!!\,\dfrac{\sigma^{2k}}{n^k}$ $(k \geq 1)$, բ) $\mu_2(S^2) = \dfrac{2}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\sigma^4$:

47(մ). Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{P}$ բաշխումից: Ապացուցել $a_k^* = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ բնութագրիչի մոմենտների հետևյալ ներկայացումները ($k \geq 1$)՝

$$\alpha_m(a_k^*) = \mathbb{E}(a_k^*)^m = \frac{m!}{n^m} \cdot \sum_{m_i \in \mathbb{Z}_+ : \sum_{i=1}^n m_i = m} \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{km_i}}{m_i!}, \quad \alpha_{km_i} = \mathbb{E}X^{km_i}$$

$$\left(\alpha_2(a_k^*) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha_k^2 + \frac{\alpha_{2k}}{n}\right),\ \mu_m(a_k^*) = \mathbb{E}(a_k^* - \alpha_k)^m = \frac{m!}{n^m} \sum_{m_i \in \mathbb{Z}_+ : \sum_{i=1}^n m_i = m} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_{m_i}\left(X_i^k\right)}{m_i!},$$

$$\mu_{m_i}\left(X_i^k\right) = \mathbb{E}\left(X_i^k - \alpha_k\right)^{m_i} \left(\mu_2(a_k^*) = \frac{1}{n}(\alpha_{2k} - \alpha_k^2)\right),\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(a_k^*, a_r^*) = \frac{1}{n}(\alpha_{k+r} - \alpha_k\alpha_r):$$

48* **(մ).** Ապացուցել, որ կուտակվածության $g_2 = \dfrac{m_4}{m_2^2} - 3$ գործակիցը բավարարում է $|g_2| < n$ պայմանը, երբ $n > 3$ և $\mathbb{E}g_2 = \gamma_2 + O(n^{-1})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(g_2) = C/n + O\left(n^{-3/2}\right)$:

Ցուցում՝ տե՛ս [2, օրինակ 4.94]:

49* **(մ).** Ապացուցել, որ $X > 0$ պատահական մեծության նմուշային վարիացիայի $V_n^* = \dfrac{S}{\overline{X^n}}$ գործակիցը բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

$$\mathbb{E}V_n^* = V + O(n^{-1}), \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(V_n^*) = O(n^{-1}),$$

որտեղ $V = \dfrac{\sigma}{m}$ - ն տեսական վարիացիայի գործակիցն է:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

50* **(մ).** Ապացուցել, որ նմուշային միջին քառակուսային շեղումը $S_n = \sqrt{m_2^*}$ բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

$$\mathbb{E}S_n = \sigma + O(n^{-1}), \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \frac{1}{4n}\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\mu_2} + O(n^{-2}):$$

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

§ 4. Կետային գնահատականներ և դրանց հատկությունները

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}$ «*թույլատրելի*» բաշխումների $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}\}$ դասից որոշակի $\mathbb{P}$ բաշխում ունեցող նմուշ է, իսկ $\theta \in \Theta$ - ին՝ $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ *պարամետրական* բազմությունից *անհայտ* պարամետր:

Θ բազմությունից արժեքներ ընդունող և θ - ից անկախ կամայական $\theta_n^* = \theta^*(X^n)$ վիճականին (X^n նմուշից չափելի ֆունկցիան), կոչվում է $\theta \in \Theta$ պարամետրի համար (**կետային**) **գնահատական**: Որպես պարամետրեր հաճախ դիտարկվում են $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}\}$ դասի վրա որոշված $\theta = G(\mathbb{P})$ *ֆունկցիոնալները*:

$\theta_n^* = \theta^*(X^n)$ գնահատականը կոչվում է **ունակ** (**խիստ ունակ**) θ պարամետրի համար, եթե

$$\theta_n^* \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta \ \ (\theta_n^* \to \theta \quad \mathbb{P}\text{ - h.h.}), \quad n \to \infty:$$

$\theta_n^* = \theta^*(X^n)$ գնահատականը կոչվում է **անշեղ** (**ասիմպտոտիկ անշեղ**) θ պարամետրի համար, եթե

$$\mathbb{E}\theta_n^* = \theta \ \ (\mathbb{E}\theta_n^* \to \theta, \quad n \to \infty):$$

$b_n(\theta) = \mathbb{E}\theta_n^* - \theta$ մեծությունը կոչվում է θ_n^* գնահատականի **շեղում**:

Ունակության հայտանիշ

Թեորեմ 4.1: $\mathbb{E}(\theta_n^* - \theta)^2 \to 0, \ \ n \to \infty$ *պայմանը բավարարող* $\theta \in \Theta$ *պարամետրի* θ_n^* *գնահատականը* ***ունակ*** *է*:

Հետևանք 4.2: *Եթե* θ *պարամետրի* θ_n^* *գնահատականն* ***ասիմպտոտիկ անշեղ*** *է՝* $b_n(\theta) \to 0$ *և* $Var\,(\theta_n^*) \to 0$, *երբ* $n \to \infty$, *ապա այն* ***ունակ*** *է:*

$\theta_n^* = \theta^*(X^n)$ գնահատականը կոչվում է $\sigma_0^2 > 0$ գործակցով **ասիմպտոտիկ նորմալ** θ պարամետրի համար, եթե տեղի ունի ըստ բաշխման զուգամիտությունը՝

$$\sqrt{n}\,(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, \sigma_0^2), \qquad n \to \infty,$$

այսինքն, եթե θ_n^* - ները (մեծ n - ի համար) **ասիմպտոտիկ նորմալ** պատահական մեծություններ են՝ $\theta_n^* \rightsquigarrow \mathbb{N}(\theta, \ \sigma_0^2/n)$:

Թեորեմ 4.3: *Դիցուք* $X^n \sim \mathbb{F}_0$, *որտեղ* $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_0(x) \in \mathcal{F} = \{\mathbb{F}(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ *բաշխման ֆունկցիան* $\zeta_p^0 := \mathbb{F}_0^{-1}(p)$ *կետում* ***անընդհատ*** *է և* ***խիստ մոնոտոն աճող****: Այդ դեպքում տեղի ունի*

$$\zeta_p^*(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \zeta_p^0\,, \qquad n \to \infty$$

զուգամիտությունը:

Թեորեմ 4.4: *Դիցուք* $X^n \sim \mathbb{F}_0 \in \mathcal{F} = \{\mathbb{F}(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$, *որտեղ* $\mathbb{F}_0 := \mathbb{F}_0(x)$ *բաշխման ֆունկցիան* ***բացարձակ անընդհատ*** *է* ($\mathbb{F}_0'(x) = f_0(x)$), *իսկ* $f_0(x)$ *խտության ֆունկցիան* ***անընդհատ դիֆերենցելի*** $\zeta_p^0 := \mathbb{F}_0^{-1}(p)$ *կետում և* $f_0(\zeta_p^0) > 0$: *Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ զուգամիտությունը՝*

$$\sqrt{n}\,\big(\zeta_p^*(n) - \zeta_p^0\big) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\big(0, \ p(1-p)/f_0^2(\zeta_p^0)\big), \quad n \to \infty,$$

մասնավորապես՝

$$\sqrt{n}\,(X_{med}^*(n) - X_{med}^0) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, \ [2f_0(X_{med}^0)]^{-2}), \quad n \to \infty \ \ (X_{med}^0 := \mathbb{F}_0^{-1}(1/2)\,):$$

51. Անհայտ θ պարամետրը որոշելու նպատակով կատարվել են n *անկախ չափումներ*, որի արդյունքում ստացվել են՝

$$X_i = \theta + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n$$

արժեքներ, որտեղ ε_i- երը՝ չափումների պատահական սխալներն են (չափման արդյունքների վրա ազդում են, օրինակ, չափման գործիքի ճշգրտությունը, չափողի մասնագիտական պատրաստվածությունը, տվյալների գրանցման արդյունքում ստացված մոտարկման սխալները և այլն)։ Համարվում է, որ ε_i պատահական մեծություններն *անկախ* են և ունեն միևնույն ***նորմալ բաշխում*** 0 միջինով՝ $\mathbb{E}\,\varepsilon_i = 0$ և $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\varepsilon_i) = \sigma^2 > 0$, $i = 1,\dots,n$ ցրվածքով։ Ցույց տալ, որ $\theta_n^* = \overline{X^n}$ նմուշային միջինը **խիստ ունակ**, **անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական է θ պարամետրի համար։

52. Ենթադրենք X^n նմուշը համապատասխանում է բաշխման ֆունկցիաների $\mathcal{F}$ դասից որոշակի $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիայի։ Ապացուցել, որ $\theta_n^* = \mathbb{F}_n^*(x_0)$ վիճականին ($x_0 \in \mathbb{R}$ *ֆիքսված է*) **ունակ**, **անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական է $\theta = \mathbb{F}(x_0)$, $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ պարամետրի համար։

53. Դիցուք $\mathcal{X} = \{b_k\}$ $(k = 1, \dots, N)$ $p(k) = \mathbb{P}\,(X = b_k)$ հավանականություններով դիսկրետ X պատահական մեծության արժեքների բազմությունն է, իսկ X^n- ը՝ համապատասխան նմուշը։ X^n նմուշում b_k արժեքի բացարձակ հաճախությունը նշանակենք $\nu_k^* := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{b_k\}}(X_i)$, որտեղ $\sum_{k=1}^{N} \nu_k = n$ ։ Ապացուցել, որ $f_k^* = \nu_k^*/n$ հարաբերական հաճախությունը **անշեղ** և **ունակ** ($n \to \infty$) գնահատական է $p(k)$ - ի համար։

54. Ենթադրենք X^n նմուշը համապատասխանում է $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ բաշխումով X պատահական մեծությանը։ Ապացուցել, որ $T_n = \nu_n^*/n$ վիճականին **անշեղ** և **ունակ** գնահատական է $p := \mathbb{P}\,(X \in \Delta)$ պարամետրի համար ($\mathbb{P} \in \mathcal{P}$), որտեղ $\Delta \subset \mathbb{R}$ տրված միջակայքն է, իսկ $\nu_n^* := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\Delta}(X_i)$՝ Δ - ի բացարձակ հաճախությունը։

55. Դիցուք X^n - ը $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ բաշխում ունեցող X պատահական մեծության նմուշ է։ Ցույց տալ, որ $a_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ $(k \geq 1)$ նմուշային մոմենտը **ունակ**, **անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական է $\alpha_k = \mathbb{E}X^k < \infty$ տեսական *մոմենտի* համար ($\alpha_{2k} < \infty$)։

56. Դիցուք X - ը *հայտնի* $m = \mathbb{E}X$ միջինով և *անհայտ* $\theta^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) < \infty$ ցրվածքով պատահական մեծություն է, իսկ X^n - ը՝ համապատասխան նմուշը։ Ապացուցել, որ $S_{1n}^2 := S_1^2(X^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$ վիճականին **ունակ**, **անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական է θ^2 պարամետրի համար ($\mu_4 < \infty$)։

57. Ենթադրենք X^n - ը *անհայտ* $\theta_1 = \mathbb{E}X$ միջինով և $\theta_2^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ ցրվածքով X պատահական մեծության նմուշ է ։ Ստուգել՝ կլինի՞ արդյոք $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)^2$ նմուշային ցրվածքը **ունակ**, **անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական θ_2^2 պարամետրի համար ($\mu_4 < \infty$):

Ցուցում՝ ունակությունը ստուգելու համար ներկայացնել նմուշային ցրվածքը $S_n^2 = a_2^* - (\overline{X^n})^2$ տեսքով: Ասիմպտոտիկ նորմալությունը բխում է խնդիր 35 - ից:

58 (**մ**). Ցույց տալ, որ $m_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)^k, k > 1$ նմուշային կենտրոնական մոմենտը **ունակ** և **ասիմպտոտիկ անշեղ** գնահատական է տեսական $\mu_k = \mathbb{E}(X - m)^k$ մոմենտի համար:

Ցուցում՝ տե՛ս [2, պնդում 4.91] և հետևանք 4.2 ։

59 (մ). Ցույց տալ, որ

ա) նմուշային անհամաչափության (g_1^*) և կուտակվածության (g_2^*) գործակիցներն **ունակ** և **ասիմպտոտիկ անշեղ** գնահատականներ են, համապատասխանաբար, γ_1 և γ_2 տեսական գործակիցների համար,

բ) նմուշային փոփոխականության (վարիացիայի) V^* գործակիցն **ունակ**, **ասիմպտոտիկ անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական է տեսական փոփոխականության (վարիացիայի) V գործակցի համար:

Ցուցում՝ տե՛ս՝ ա) [2, օրինակ 4.94], բ) խնդիրներ 36* և 49*:

60 (մ). Ցույց տալ, որ նմուշային ζ_p^* $(0 < p < 1)$ քանորդիչն **ունակ**, **ասիմպտոտիկ անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական է տեսական ζ_p քանորդիչի համար:

Ցուցում՝ տե՛ս թեորեմներ 4.3 և 4.4 ։

61. Դիցուք $\left((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)\right)$ - ը $\mathcal{F}$ դասից $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x, y)$ համատեղ բաշխման ֆունկցիայով (X, Y) երկչափ պատահական մեծության անկախ դիտումներ են: Ապացուցել, որ

ա) $\theta_n^* = \mathbb{F}_n^*(x_0, y_0)$ վիճականին $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$ **խիստ ունակ**, **անշեղ** և **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատական է $\theta := \mathbb{F}_0 = \mathbb{F}(x_0, y_0)$ $(\mathbb{F} \in \mathcal{F})$ պարամետրի համար, որտեղ

$\mathbb{F}_n^*(x, y) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(-\infty;\, x)\times(-\infty; y)}(X_i, Y_i)$՝ երկչափ նմուշային բաշխման ֆունկցիան է,

բ) $S_{XY}^0 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)\left(Y_i - \overline{Y^n}\right)$ «ուղղված» նմուշային կովարիացիան **անշեղ** և **խիստ ունակ** գնահատական է տեսական $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ կովարիացիայի համար, գ) $r_{X,Y} := \dfrac{S_{XY}}{\sqrt{S_X^2 \cdot S_Y^2}}$ նմուշային կոռելյացիայի գործակիցը **խիստ ունակ** գնահատական է $\rho_{X,Y}$ տեսական կոռելյացիայի գործակցի համար, որտեղ $S_{XY} := \left(1-\frac{1}{n}\right) S_{XY}^0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)\left(Y_i - \overline{Y^n}\right)$՝ նմուշային կովարիացիան է, իսկ $S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)^2$ և $S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y^n}\right)^2$՝ նմուշային ցրվածքները:

Ցուցում՝ ա) օգտվել այն փաստից, որ $\mathbb{1}_{(-\infty;\,x)\times(-\infty;y)}(X_i,\, Y_i) \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\mathbb{F}_0)$ անկախ *Բեռնուլիի* պատահական մեծություններ են, բ) S_{XY}^0 - ի *խիստ ունակությունն* ապացուցելու համար ներկայացնել այն

$$S_{XY}^0 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k - \frac{n}{n-1}\,\overline{X^n}\,\overline{Y^n}$$

տեսքով և կիրառել *ուժեղացված մեծ թվերի օրենքը*: *Անշեղությունն* ապացուցելու համար դիտարկել $Z = X + Y$ պատահական մեծությունը և հաշվի առնել, որ դրա $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Z) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y) + 2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y)$ ցրվածքի *անշեղ գնահատականը*

$$S_{Z0}^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z^n}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X^n})^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y^n})^2 + \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X^n})(Y_i - \overline{Y^n})$$

վիճականին է, գ) օգտվել բ) կետից, խնդիր 57 - ից և *անընդհատության* թեորեմներից (տե՛ս [2]):

62. Անհայտ θ պարամետրով $\mathbb{B}\mathrm{in}(\theta,\ k)$ $(0 < \theta < 1)$ ***բինոմական բաշխում*** ունեցող X պատահական մեծության նկատմամբ կատարվում է *մեկ փորձ*: Ցույց տալ, որ $T(X^1) := \frac{1}{k-1}\,X_1 - \frac{1}{k(k-1)}\,X_1^2$ վիճականին **անշեղ** գնահատական է $g(\theta) = \theta\,(1-\theta)$ պարամետրական ֆունկցիայի համար:

63. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$ նմուշ է անհայտ θ $(0 < \theta < 1)$ պարամետրով ***Բեռնուլիի բաշխումից***: Ապացուցել, որ **անշեղ** և **ունակ** գնահատականը $g(\theta) = \theta\,(1-\theta)$ պարամետրական ֆունկցիայի համար $T(X^n) := \frac{n}{n-1}\,\overline{X^n}\,(1 - \overline{X^n})$ վիճականին է:

Ցուցում՝ նկատել, որ $n\,\overline{X^n} \sim \mathbb{B}\mathrm{in}(\theta,\ n)$ և կիրառել խնդիր 62 - ը:

64 (մ). $\mathbb{\Pi}(\theta)$ ***Պուասոնի բաշխում*** ունեցող պատահական մեծության նկատմամբ կատարված է *մեկ փորձ*: Ցույց տալ, որ $T_k(X) := (X)_k = X(X-1)\ldots(X-k+1)$ վիճականին **անշեղ** գնահատական է $g(\theta) = \theta^k$ $(k \geq 1)$ ֆունկցիայի համար:

Ցուցում՝ օգտվել $\mathbb{E}T_k(X) = \sum_{m=0}^{\infty} (m)_k e^{-\theta}\,\frac{\theta^m}{m!}$ ներկայացումից:

65 (մ). Դիցուք X^n - ը նմուշ է *անհայտ* θ պարամետրով ***Պուասոնի բաշխումից***: Ապացուցել, որ **անշեղ** և **ունակ** գնահատականը $g(\theta)=\theta^k$ $(k\geq 1)$ ֆունկցիայի համար $g_n^*:=n^{-k}(\mathcal{S}_n)_k=n^{-k}\mathcal{S}_n(\mathcal{S}_n-1)\dots(\mathcal{S}_n-k+1)$ վիճականին է, որտեղ $\mathcal{S}_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$:

Ցուցում՝ օգտվել $\Pi(\theta)$ դասի *վերարտադրվող* լինելու $\mathcal{S}_n(X)\sim\Pi(n\theta)$ հատկությունից, և, դիտարկելով այն որպես $\mathcal{S}_n=\mathcal{S}_n(X)$ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված *մեկ փորձի* արդյունքը՝ կիրառել խնդիր 64 - ը:

66. Դիցուք $X^n\sim\mathbb{N}(\theta,\sigma^2)$ նմուշ է ***նորմալ բաշխումից*** (θ - *ն անհայտ է*, σ^2 - *ն՝ հայտնի*): Ցույց տալ, որ $T(X^n):=(\overline{X^n})^2-\dfrac{\sigma^2}{n}$ վիճականին **անշեղ** և **խիստ ունակ** գնահատական է $g(\theta)=\theta^2$ պարամետրական ֆունկցիայի համար:

67. Դիցուք $X^n\sim\mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ նմուշ է ***նորմալ բաշխումից*** (θ^2 - ն *անհայտ է*, m - ը՝ *հայտնի*): Ապացուցել, որ $T_n:=\dfrac{1}{n}\sqrt{\pi/2}\cdot\sum_{i=1}^{n}|X_i-m|$ վիճականին **անշեղ** և **ունակ** գնահատական է θ *ստանդարտ շեղման* համար:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ $\mathbb{E}|X_i-m|=\sqrt{2/\pi}\cdot\theta,\ \mathbb{V}\mathrm{ar}|X_i-m|=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\theta^2$ և օգտվել հետևանք 4.2 - ից:

68. Դիցուք $X^n\sim\mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$ նմուշ է *անհայտ* θ_1 և θ_2^2 պարամետրերով ***նորմալ բաշխումների դասից***: Ապացուցել, որ

ա) $T_1(X^n):=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\quad\left(\sum_{i=1}^{n}c_i=1\ ,\ \sum_{i=1}^{n}c_i^2=O(1/n)\right)$

վիճականին **անշեղ** և **ունակ** գնահատական է θ_1 պարամետրի համար,

բ) (**մ**) $T_2(X^n):=\sqrt{n/2}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,S_n\quad\left(S_n:=\left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X^n})^2\right]^{1/2}\right)$

վիճականին **անշեղ** և **խիստ ունակ** գնահատական է θ_2 պարամետրի համար:

Ցուցում՝ բ) *անշեղությունն* ապացուցելու համար օգտվել *Ֆիշերի թեորեմից*, համաձայն որի՝ $\eta:=nS_n^2/\theta_2^2\sim\mathbb{H}^2(n-1)$ (տե՛ս թեորեմ 12.1), որտեղից $\mathbb{E}\eta^t=\frac{\Gamma(t+\lambda)}{\alpha^t\,\Gamma(\lambda)},\ t\in\mathbb{R}$ (տե՛ս [2, § 2.1]): *Խիստ ունակությունն* ապացուցելու համար օգտվել *Էյլեր - Գաուսի* $\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)}\,n^{-a}=1$ $(a\in\mathbb{R})$ բանաձևից:

69 (մ). Ենթադրենք $X^n\sim\Gamma(\theta,\ \lambda)$ նմուշ է ***գամմա բաշխումից***: Ցույց տալ, որ

$$T_n(X):=\frac{\Gamma(\lambda n)}{\Gamma(\lambda n-a)}\,(n\overline{X^n}\ )^{-a}\quad(a<\lambda n)$$

վիճականին **խիստ ունակ** և **անշեղ** գնահատական է $g_a(\theta)=\theta^a$ ֆունկցիայի համար:

Ցուցում՝ օգտվել $n\overline{X^n}\sim\Gamma(\theta,\ n\lambda)$ հատկությունից և խնդիր 68 - ից:

70 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{C}(\theta,\ 1)$ նմուշ է ***Կոշիի բաշխումից***: Ցույց տալ, որ $T_n(X) = \overline{X^n}$ գնահատականն **ունակ չէ** θ պարամետրի համար: Ապացուցել, որ **ունակ** և **ասիմպտոտիկ անշեղ** գնահատականը՝ X^*_{med} նմուշային միջնարժեքն է:

Ցուցում՝ օգտվել $\overline{X^n} \sim \mathbb{C}(\theta,\ 1)$ պայմանից և թեորեմ 4.4 - ից:

71 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(\theta_1,\ \theta_2)\ (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$՝ $[\theta_1,\ \theta_2]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից*** նմուշ է: Ցույց տալ, որ

$$T_1(X) := M_n = \frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right) \quad \text{և} \quad T_2(X) := \frac{n+1}{n-1} R_n = \frac{n+1}{n-1}\left(X_{(n)} - X_{(1)}\right)$$

վիճականիներն **անշեղ** և **ունակ** գնահատականներ են, համապատասխանաբար, $[\theta_1,\ \theta_2]$ միջակայքի $\bar{\theta} := \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ *միջնակետի* և $l = \theta_2 - \theta_1$ *երկարության* համար:

Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 14*- ից:

72. Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta,\ \alpha)\ (\ \theta > 0,\ \alpha > 0\ )$ նմուշը վերցված է ***երկպարամետրական ցուցչային բաշխումից***: Համարելով *մասշտաբի* α պարամետրը *հայտնի*՝ ապացուցել, որ **անշեղ** և **ունակ** գնահատականը *տեղաշարժի* θ պարամետրի համար $\theta^*_n := X_{(1)} - \frac{1}{n\alpha}$ վիճականին է:

Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 10 - ից:

73. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(m,\ \theta)\ (m > 0,\ \theta > 0)$ նմուշը վերցված է ***երկպարամետրական ցուցչային բաշխումից***: Համարելով *տեղաշարժի* m պարամետրը *հայտնի*՝ ապացուցել, որ **անշեղ** և **ունակ** գնահատականը $g(\theta) = \theta^{-1}$ պարամետրական ֆունկցիայի համար $(g(\theta))^*_n := \overline{X^n} - m$ վիճականին է :

74* (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta_1,\ \theta_2)$ նմուշը վերցված է ***երկպարամետրական ցուցչային բաշխումից*** ($\theta_1 \in \mathbb{R}$ և $\theta_2 > 0$՝ *անհայտ են*): Ցույց տալ, որ **ունակ** և **անշեղ** գնահատականները θ_1 և θ_2^{-1} պարամետրերի համար հետևյալ վիճականիներն են՝

$$\theta_1^* := \frac{1}{n-1}\left(nX_{(1)} - \overline{X^n}\right), \qquad (\theta_2^{-1})^* := \frac{n}{n-1}\left(\overline{X^n} - X_{(1)}\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\left(X_{(i)} - X_{(1)}\right) :$$

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

75* (մ). Սափորից, որը պարունակում է *անհայտ* թվով համարակալված (1, 2, …, N) գնդիկներ, պատահական *վերադարձումի* եղանակով վերցվում է n հատը: Դիցուք $X^n = (X_1,\ X_2, \ldots, X_n)$ - ը՝ ստացված նմուշն է: Ապացուցել, որ

$$T_n := T\left(X_{(n)}\right) = \frac{1-\left(1-X_{(n)}^{-1}\right)^{n+1}}{1-\left(1-X_{(n)}^{-1}\right)^{n}}\, X_{(n)}$$

վիճականին **անշեղ** գնահատական է $\theta = N$ պարամետրի համար:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

76* **(մ).** Ցույց տալ, որ եթե նախորդ խնդրի պայմաններում կատարվում է *անվերադարձ* նմուշահանում, ապա **անշեղ** գնահատականն անհայտ $\theta = N$ գնդիկների թվի համար կլինի $\theta_n^* := S\left(X_{(n)}\right) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)X_{(n)} - 1$ վիճականին:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

§ 5. Մոմենտների մեթոդ

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$ նմուշին համապատասխանող բաշխումը պատկանում է *պարամետրական բաշխումների* $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ դասին: Դիտարկենք $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ տարածության վրա որոշված այնպիսի $g(x)$ *ինտեգրելի բորելյան* ֆունկցիա, որի համար

$$m_g(\theta) := \mathbb{E}_\theta g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_\theta(x), \quad F_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X < x)$$

մաթեմատիկական սպասումը, որպես ֆունկցիա θ - ից, լինի *խիստ մոնոտոն* և *անընդհատ*, որտեղից կհետևի, որ այն *անընդհատ հակադարձելի է* $m_g(\Theta)$ տիրույթում:

Մոմենտների գնահատական θ պարամետրի համար կոչվում է

$$m_g(\theta) = \bar{g} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

հավասարման (ըստ θ - ի) θ_n^* լուծումը $\left(\text{եթե } \bar{g} \in m_g(\Theta)\right)$:

Թեորեմ 5.1: θ_n^* *մոմենտների գնահատականը* ***խիստ ունակ*** *է, և, եթե* $m_g(\theta)$ *ֆունկցիան* ***դիֆերենցելի*** *է* $\theta \in \Theta$ *կետում,*

$$m_g'(\theta) > 0 \;\text{ և }\; \mathbb{E}_\theta g^2(X) = \int_{\mathbb{R}} g^2(x)\, \mathbb{P}_\theta(dx) < \infty\,,$$

ապա այն նաև $\bar{\sigma}^2(\theta) := \left(m_g'(\theta)\right)^{-2} \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta\left(g(X)\right)$ *գործակցով* ***ասիմպտոտիկ նորմալ*** *է, այսինքն՝*

$$\sqrt{n}\,(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0, \bar{\sigma}^2(\theta)\right), \quad n \to \infty:$$

Բազմաչափ $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ պարամետրի դեպքում **մոմենտների գնահատական** θ պարամետրի համար կոչվում է

$$m_{g_j}(\theta) := \mathbb{E}_\theta g_j(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g_j(X_i), \quad j = 1, \dots, k$$

հավասարումների համակարգի $\theta_n^* = (\theta_{1n}^*, \dots, \theta_{kn}^*)$ *լուծումը*, որտեղ $g_1(x), \dots, g_k(x)$ բորելյան ֆունկցիաներն ընտրվում են այնպես, որ

$$m_{g_j}(\theta) = t_j, \quad j = 1, \dots, k$$

հավասարումները *միարժեք* և *անընդհատ հակադարձվեն* ըստ θ - ի կամայական $t = (t_1, \dots, t_k) \in$ $\in m_g(\Theta)$ - ից:

Քանի որ մոմենտների գնահատականը կախված է $g_1(x), \dots, g_k(x)$ ֆունկցիաների ընտրությունից, ապա այն որոշվում է ***ոչ միարժեք ձևով***: Սովորաբար, որպես $g_j(x)$ ֆունկցիաներ վերցվում են $g_j(x) =$ $= x^j$, $j = 1, \dots, k$ տեսքի ֆունկցիաները:

77. $[0, \theta]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխում*** ունեցող X պատահական մեծության X^n նմուշի միջոցով գտնել θ $(\theta > 0)$ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* վերցնելով $g(x) = x$ և ստուգել գնահատականի **անշեղությունը**, **խիստ ունակությունը** և **ասիմպտոտիկ նորմալությունը** :

78. $[\theta_1, \theta_2]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխված*** X պատահական մեծության X^n նմուշի միջոցով գտնել $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* և ստուգել դրա **խիստ ունակությունը** :

79. $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$՝ n անկախ ***Բեռնուլիի փորձերին*** համապատասխանող նմուշ է: Գտնել θ պարամետրի *մոմենտների գնահատականները* ($g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2$):

80. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta,\ k)$ նմուշ է ***բինոմական բաշխումից***: Գտնել «*հաջողության*» θ հավանականության *մոմենտների գնահատականը* համարելով $g(x) = x$:

81. ***Պուասոնի բաշխումից*** $X^n \sim \Pi(\theta)$ նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի երկու տարբեր *մոմենտների գնահատականներ*՝ վերցնելով $g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2$, և ստուգել ստացված գնահատականների **խիստ ունակությունը**:

82. $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1^k}{k!}\,e^{-\theta_1} + \frac{\theta_2^k}{k!}\,e^{-\theta_2}\right),\ \ k = 0, 1, \dots\ ,\ \ 0 < \theta_1 < \theta_2$$
«կրկնապատիկ» Պուասոնի բաշխումից $X^n \sim \Pi(\theta_1,\ \theta_2)$ նմուշի միջոցով գտնել $\theta = (\theta_1,\ \theta_2)$ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* ($g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2$):

83. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ - ը նմուշ է ***ցուցչային բաշխումից***: *Մոմենտների մեթոդով* գտնել θ պարամետրի գնահատականները վերցնելով $g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2$: Ստուգել այդ գնահատականների **խիստ ունակությունը** և **ասիմպտոտիկ նորմալությունը**:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 5.1 - ից:

84. $$f_\theta(x) = \theta(\theta + 1)x^{\theta - 1}(1 - x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
խտության ֆունկցիայով ***բետա բաշխում*** ունեցող $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{et}\,(\theta,\ 2),\ \theta > 0$ նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* վերցնելով $g(x) = x$ ու ստուգել դրա **խիստ ունակությունը** և **ասիմպտոտիկ նորմալությունը**:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 5.1 - ից:

85. $$f_\theta(x) = \frac{{\theta_1}^{\theta_2}}{\Gamma(\theta_2)}\ x^{\theta_2 - 1}e^{-\theta_1 x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\ \ (\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0)$$
խտության ֆունկցիայով ***գամմա բաշխում*** ունեցող $X^n \sim \Gamma(\theta_1,\ \theta_2)$ նմուշի միջոցով գտնել $\theta = (\theta_1,\ \theta_2)$ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* համարելով $g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2$ և ապացուցել դրա **խիստ ունակությունը**:

86. Տրված է նմուշ ***Պարետոյի բաշխումից***: *Մոմենտների մեթոդով* գտնել θ պարամետրի գնահատականը և ցույց տալ դրա **խիստ ունակությունը**, եթե ա) $X^n \sim \mathbb{P}\mathrm{ar}\,(\theta,\ c),\quad \theta > 0,\quad c > 1\ \ (g(x) = x)$

$$f_\theta(x) = c\theta^c x^{-(1+c)} \mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

բ) $X^n \sim \mathbb{P}\mathrm{ar}\,(c,\ \theta),\quad c > 0,\quad \theta > 1\ \ (g(x) = x)$

$$f_\theta(x) = \theta c^\theta x^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(c,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

գ) $X^n \sim \mathbb{P}\mathrm{ar}\,(\theta_1,\ \theta_2),\quad \theta = (\theta_1,\ \theta_2),\quad \theta_1 > 0,\ \ \theta_2 > 2\ \ (g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2)$

$$f_\theta(x) = \theta_2 {\theta_1}^{\theta_2} x^{-(1+\theta_2)} \mathbb{1}_{(\theta_1,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}:$$

87. ***Երկպարամետրական ցուցչային բաշխումից*** նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* և ցույց տալ դրա **խիստ ունակությունը**, եթե

ա) $X^n \sim \mathbb{E}(\theta,\ c),\quad \theta \in \mathbb{R},\quad c > 0\ \ (g(x) = x)$

$$f_\theta(x) = c\,\exp\{-c(x-\theta)\}\,\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

բ) $X^n \sim \mathbb{E}(c,\ \theta),\quad c \in \mathbb{R},\quad \theta > 0\ \ (g(x) = x)$

$$f_\theta(x) = \theta\,\exp\{-\theta(x-c)\}\,\mathbb{1}_{[c,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

գ) $X^n \sim \mathbb{E}(\theta_1,\ \theta_2),\quad \theta = (\theta_1, \theta_2),\quad \theta_1 \in \mathbb{R},\ \ \theta_2 > 0\ \ (g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2)$

$$f_\theta(x) = \theta_2\,\exp\{-\theta_2(x-\theta_1)\}\,\mathbb{1}_{[\theta_1,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}:$$

88. Տրված է նմուշ ***երկկողմանի ցուցչային (Լապլասի) բաշխումից***: Գտնել θ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* և ստուգել դրա **խիստ ունակությունը**, եթե

ա) $X^n \sim \mathbb{L}(\theta,\ c),\quad \theta \in \mathbb{R},\quad c > 0\ \ (g(x) = x)$

$$f_\theta(x) = \frac{c}{2}\,\exp\{-c|x-\theta|\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

բ) $X^n \sim \mathbb{L}(c,\ \theta),\quad c \in \mathbb{R},\quad \theta > 0\ \ (g(x) = x^2)$

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{2}\,\exp\{-\theta|x-c|\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

գ) $X^n \sim \mathbb{L}(\theta_1,\ \theta_2),\quad \theta = (\theta_1,\ \theta_2),\quad \theta_1 \in \mathbb{R},\ \ \theta_2 > 0\ \ (g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2)$

$$f_\theta(x) = \frac{\theta_2}{2}\exp\{-\theta_2|x-\theta_1|\}, \qquad x \in \mathbb{R}:$$

89. Դիցուք տրված է նմուշ ***Ռելեյի բաշխումից***: *Մոմենտների մեթոդով* գտնել θ պարամետրի գնահատականը և ստուգել դրա **խիստ ունակությունը**, եթե

ա) $X^n \sim \mathbb{R}(c,\, \theta^2)$, $c \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ $(g(x) = x)$

$$f_\theta(x) = \frac{2(x-c)}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{1}{\theta^2}(x-c)^2\right\} \mathbb{1}_{[c,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

բ) $X^n \sim \mathbb{R}(\theta,\, c^2)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $c > 0$ $(g(x) = x)$

$$f_\theta(x) = \frac{2(x-\theta)}{c^2} \exp\left\{-\frac{1}{c^2}(x-\theta)^2\right\} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

գ) **(մ)** $X^n \sim \mathbb{R}(\theta_1,\, \theta_2^2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 > 0$ $(g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2)$

$$f_\theta(x) = \frac{2(x-\theta_1)}{\theta_2^2} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_2^2}(x-\theta_1)^2\right\} \mathbb{1}_{[\theta_1,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}:$$

90 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{et}\,(\theta_1,\, \theta_2)$ $(\theta_1 > 0, \theta_2 > 0)$ նմուշ է ***բետա բաշխումից***: Գտնել $\theta = (\theta_1,\, \theta_2)$ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը*:

91. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}\mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta,\, r)$ նմուշ է ***բացասական բինոմական բաշխումից*** $(0 < \theta < 1,\ r \in \mathbb{N})$: Գտնել θ պարամետրի *մոմենտների գնահատականը* և ստուգել դրա **խիստ ունակությունն** ու **ասիմպտոտիկ նորմալությունը** $(g(x) = x)$:

92. Սափորից, որը պարունակում է *անհայտ* θ թվով համարակալված գնդիկներ, կատարվում է նմուշահանում *վերադարձի* եղանակով: Նշանակենք $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$- ով ստացված n ծավալի նմուշը: *Մոմենտների մեթոդով* գնահատել $\theta \in \mathbb{N}$ պարամետրը և ստուգել դրա **անշեղությունը**:

Ցուցում՝ X_i պատահական մեծությունները ունեն ***հավասարաչափ դիսկրետ բաշխում*** $[0, \theta]$ միջակայքում՝ $\mathbb{P}_\theta(X_i = k) = \theta^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, \theta$:

§ 6. Ճշմարտանմանության մաքսիմումի մեթոդ

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta$ նմուշը համապատասխանում է $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ բաշխումների դասից $\mathbb{P}_\theta$ բաշխմանը, ընդ որում $\big((A_\mu) -$ *պայման*$\big)$ ցանկացած բաշխում այդ դասից *բացարձակ անընդհատ* է $\big(\mathcal{X},\ \mathcal{B}(\mathcal{X})\big)$ $(\mathcal{X} = X(\Omega) \subseteq \mathbb{R})$ տարածության վրա տրված որոշ $\sigma -$ *վերջավոր* μ *չափի* նկատմամբ (սովորաբար այն *հաշվող* կամ *Լեբեգի չափ* է)։ Նշանակենք

$$f_\theta(x) := \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x) \geq 0, \qquad \theta \in \Theta$$

$\mathbb{P}_\theta$ բաշխումների *խտություններն* ըստ այդ չափի։

X^n նմուշին համապատասխանող

$$f_\theta(x^n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i), \qquad x^n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

համատեղ խտության ֆունկցիան (որը դիտարկվում է որպես ֆունկցիա θ - ից), կոչվում է **ճշմարտանմանության ֆունկցիա**։

$$L_\theta(x^n) := \ln f_\theta(x^n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta(x_i)$$

ֆունկցիան կոչվում է **լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիա**։

Այն $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X^n) \in \Theta$ վիճականին, որի դեպքում $f_\theta(X^n)$ (կամ $L_\theta(X^n)$) պատահական ֆունկցիան ընդունում է իր *մեծագույն* արժեքը, այսինքն

$$f_{\hat{\theta}_n}(X^n) = \max_{\theta \in \Theta} f_\theta(X^n) \ \left(\text{կամ}\ \ L_{\hat{\theta}_n}(X^n) = \max_{\theta \in \Theta} L_\theta(X^n)\right),$$

կոչվում է θ պարամետրի **ճշմարտանմանության մաքսիմումի** (**ՃՄ**) **գնահատական** և նշանակվում է՝

$$\hat{\theta}_n := \arg\max_{\theta \in \Theta} f_\theta(X^n) \ \left(\text{կամ}\ \ \hat{\theta}_n := \arg\max_{\theta \in \Theta} L_\theta(X^n)\right)\text{։}$$

1. Դիցուք բոլոր $x^n \in \mathcal{X}^n$ - ի համար $f_\theta(x^n)\,\big(L_\theta(x^n)\big)$ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է Θ բազմության *ներքին* կետում (կետերում), և այդ բազմության վրա այն ունի *առաջին* և *երկրորդ կարգի ածանցյալները*։ Այդ ֆունկցիայի «*ստացիոնար*» կետերը (գոյության դեպքում) բավարարում են հետևյալ հավասարմանը (*էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը*)՝

$$f'_\theta(X^n) = 0 \quad (L'_\theta(X^n) = 0)\text{։}$$

$f_\theta(x^n)$ $\big(L_\theta(x^n)\big)$ ֆունկցիայի համար «*ստացիոնար*» $\tilde{\theta}$ կետը *լոկալ մաքսիմումի* կետ լինելու բավարար պայմանն է՝

$$f''_{\tilde{\theta}}(X^n) < 0 \quad \left(L''_{\tilde{\theta}}(X^n) < 0\right)\text{։}$$

θ պարամետրի ***ՃՄ գնահատականն*** այդ լոկալ մաքսիմումների արժեքներից *մեծագույն* արժեքին համապատասխանող «*ստացիոնար*» կետն է։

2. Օրինակի վրա դիտարկենք այն դեպքը, երբ $f_\theta(X^n)$ ճշմարտանմանության ֆունկցիան *դիֆերենցելի չէ* (ըստ θ - ի)։

Օրինակ 6.1: Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(0,\ \theta)$ $(\theta > 0)$ նմուշը համապատասխանում է

$$f_\theta(x) = \theta^{-1}\, \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

խտության ֆունկցիայով $[0, \theta]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխված*** X պատահական մեծությանը։ $f_\theta(X^n)$ *ճշմարտանմանության ֆունկցիայի* համար՝ կստանանք

$$f_\theta(X^n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i) = \theta^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(X_i) = \theta^{-n}\, \mathbb{1}_{[X_{(n)},\infty)}(\theta)$$

(քանի որ $X_i \le \theta$ պայմանից բոլոր $i = 1,\ldots,n$ - ի համար բխում է $0 \le X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)} \le \theta$ պայմանը, որը համարժեք է $\theta \ge X_{(n)}$ անհավասարությանը)։ Պարզ է, որ $\theta = X_{(n)}$ կետում $f_\theta(X^n)$ ֆունկցիան *դիֆերենցելի չէ* (այդ կետում այն նույնիսկ *անընդհատ չէ*) և ընդունում է իր *մեծագույն* θ^{-n} արժեքը։ Հետևաբար՝ $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$ - ը θ պարամետրի ***ՃՄ գնահատականն*** է ։ ■

Այժմ դիտարկենք *բազմաչափ* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ պարամետրի դեպքը։

Այն $\hat{\theta}_n = \left(\hat{\theta}_{1n}, \ldots, \hat{\theta}_{kn}\right)$ վիճականին $\left(\hat{\theta}_{jn} := \hat{\theta}_j(X^n)\right)$ որի դեպքում $f_\theta(X^n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$ **ճշմարտանմանության ֆունկցիան** կամ $L_\theta(X^n) := \ln f_\theta(X^n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta(X_i)$ **լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիան** ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, կոչվում է $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ պարամետրի **ճշմարտանմանության մաքսիմումի (ՃՄ) գնահատական**։

Եթե կամայական $x^n \in \mathcal{X}^n$- ի համար $f_\theta(x^n)$ $\left(L_\theta(x^n)\right)$ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ բազմության *ներքին* կետում (կետերում), և այդ բազմության վրա *գոյություն ունեն* $\frac{\partial f_\theta(x^n)}{\partial \theta_j}$ $\left(\frac{\partial L_\theta(x^n)}{\partial \theta_j}\right)$ և $\frac{\partial^2 f_\theta(x^n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ $\left(\frac{\partial^2 L_\theta(x^n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)$, $i, j = 1, \ldots, k$ ածանցյալները, ապա այդ ֆունկցիայի «*ստացիոնար*» կետերը (գոյության դեպքում) բավարարում են հետևյալ հավասարումներին (*էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններ*)՝

$$\frac{\partial f_\theta(x^n)}{\partial \theta_j} = 0 \quad \left(\frac{\partial L_\theta(x^n)}{\partial \theta_j} = 0\right), \qquad j = 1, \ldots, k:$$

$\tilde{\theta}$ «*ստացիոնար*» կետի համար $f_\theta(x^n)$ $\left(L_\theta(x^n)\right)$ ֆունկցիայի *լոկալ մաքսիմումի* կետ լինելու ***բավարար*** պայմանն է

$$f''_{\tilde{\theta}}(x^n) := \left\| \frac{\partial^2 f_{\tilde{\theta}}(x^n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\|_{i,j=1}^{k} \quad \left(L''_{\tilde{\theta}}(x^n) := \left\| \frac{\partial^2 L_{\tilde{\theta}}(x^n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\|_{i,j=1}^{k}\right)$$

մատրիցի *բացասական որոշվածությունը*՝

$$f''_{\tilde{\theta}}(x^n) < 0 \quad \left(L''_{\tilde{\theta}}(x^n) < 0\right),$$

որը նշանակում է համապատասխան *քառակուսային ձևի* բացասական որոշված լինելը՝ այսինքն

$$t\, f''_{\tilde{\theta}}(x^n)\, t^T = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f_{\tilde{\theta}}(x^n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\, t_i t_j < 0 \quad \left(t\, L''_{\tilde{\theta}}(x^n)\, t^T = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 L_{\tilde{\theta}}(x^n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\, t_i t_j < 0\right)$$

բոլոր $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ - ի համար (t^T - ն՝ *վեկտոր – սյուն* է)։

ՃՄ գնահատականը բավարարում է ***անփոփոխության (ինվարիանտության)*** հատկությանը.

Թեորեմ 6.2: *Դիցուք տրված է որոշ* $\tau(\theta)$: $\Theta \to \mathcal{T}$ *ֆունկցիա* $\left(\mathcal{T} = \tau(\Theta)\right)$, *որտեղ* $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ *և* $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^r$ ՝ *միջակայքեր են* $(1 \le r \le k)$: *Այդ դեպքում, եթե* $\hat{\theta}_n$ *- ը* θ *պարամետրի* ***ՃՄ գնահատականն*** *է, ապա* $\tau(\hat{\theta}_n)$ *- ը կլինի* $\tau(\theta)$ *պարամետրական ֆունկցիայի* ***ՃՄ գնահատականը***, *այսինքն՝* $\widehat{\tau(\theta)}_n = \tau(\hat{\theta}_n)$:

93. ***Բինոմական բաշխում*** ունեցող $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta,\ k)$ նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*։

94. ***Պուասոնի բաշխում*** ունեցող $X \sim \Pi(\theta)$ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված են անկախ $X_1, \ldots, X_n$ դիտարկումներ։ Գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*։

95. ***Բացասական բինոմական բաշխում*** ունեցող $X^n \sim \mathbb{NB}\mathrm{in}\,(\theta,\ r)$ նմուշի միջոցով գտնել $g(\theta) = \dfrac{\theta}{1-\theta}$ ֆունկցիայի *ՃՄ գնահատականը*:

96. Դիցուք $X^n \sim\ \mathbb{E}(\theta)$ նմուշն ունի ***ցուցչային բաշխում***: Գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*:

97. $X\ \sim\ \mathbb{P}_\theta$ բաշխում ունեցող պատահական մեծության X^n նմուշի միջոցով գտնել $\mathbb{F}_c(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X < c)$ բաշխման ֆունկցիայի որպես ֆունկցիա θ - ից *ՃՄ գնահատականը* ($c \in \mathbb{R}$՝ *հաստատուն* թիվ է), եթե ա) $X \sim\ \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$, բ) $X \sim\ \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$:

98. Դիցուք $X^n \sim\ \mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$ նմուշ է *անհայտ* $\theta = (\theta_1,\ \theta_2^2)$ պարամետրով ***նորմալ բաշխումից***: Գտնել $\mathbb{F}_c(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X < c)$ բաշխման ֆունկցիայի որպես ֆունկցիա θ - ից ($c \in \mathbb{R}$՝ *հաստատուն* թիվ է) *ՃՄ գնահատականը*:

99. $X^n \sim\ \mathbb{N}(\theta,\ 2\theta)\ (\theta > 0)$ նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* և ցույց տալ այդ գնահատականի **ունակությունը**:

100. Դիցուք X^n նմուշը վերցված է

$$f_\theta(x) = \frac{g'(x)}{\theta_2\sqrt{2\pi}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\left(g(x) - \theta_1\right)^2\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}\ \ (\theta_1 \in \mathbb{R},\ \theta_2 > 0)$$

խտության ֆունկցիայով ***Կեպտայնի բաշխումների դասից***, որտեղ $g(x)$ - ը մոնոտոն աճող ($g(+\infty) = +\infty,\ g(-\infty) = -\infty$) դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Գտնել $\theta = (\theta_1,\ \theta_2^2)$ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* և ցույց տալ այդ գնահատականի **ունակությունը**:

101. $$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta}e^{-x^2/\theta}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (\theta > 0)$$

խտության ֆունկցիայով ***Ռելեյի օրենքով*** բաշխված X^n նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* և ցույց տալ դրա **ունակությունն** ու **անշեղությունը**:

102. Դիցուք $X^n \sim\ \Gamma(\theta,\ \lambda)$ նմուշ է $\lambda > 0$ *հայտնի* պարամետրով

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\ x^{\lambda-1}e^{-\theta x}\ \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\ \ (\theta > 0)$$

խտության ֆունկցիայով ***գամմա բաշխումների դասից***: Գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* և ցույց տալ այդ գնահատականի **ասիմպտոտիկ անշեղությունը** և **խիստ ունակությունը**:

103. Գտնել $\theta > 0$ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*, եթե X^n նմուշին համապատասխանող պատահական մեծության խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

ա) $f_\theta(x) = \theta^{1/2} x^{\theta^{1/2}-1}\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, բ) $f_\theta(x) = \dfrac{2}{\theta^2}\, x\, \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$,

գ) $f_\theta(x) = \dfrac{\theta}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2x}\theta^2\right\} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, դ) $f_\theta(x) = \dfrac{\theta}{x} (\ln x)^{\theta-1} \mathbb{1}_{[1,e]}(x)$ ։

104 (մ). Գտնել՝

ա) $[-\theta,\ 0]$, $\theta > 0$, բ) $[-\theta,\ \theta]$, $\theta > 0$, գ) $[\theta,\ \theta+2]$, $\theta \in \mathbb{R}$, դ) $[\theta,\ 2\theta]$, $\theta > 0$ միջակայքերում ***հավասարաչափ բաշխում*** ունեցող նմուշի միջոցով θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*։

105. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(\theta,\ 1+\theta)$ $(\theta > 0)$ նմուշ է $[\theta,\ 1+\theta]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից***։ Գտնել θ պարամետրի *անշեղ ՃՄ գնահատականը*։

Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 6 - ից: Տե՛ս նաև օրինակ 6.1 ։

106. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}\mathrm{ar}\,(\theta,\ c)$ նմուշ է

$$f_\theta(x) = \theta c^\theta x^{-(1+\theta)}\, \mathbb{1}_{(c,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \ \ (\theta > 0)$$

խտության ֆունկցիայով ***Պարետոյի բաշխումից*** ($c > 0$ *հայտնի* է)։ Գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*։

107.
$$f_\theta(x) = \alpha\theta^\alpha x^{-(1+\alpha)}\, \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \ \ (\theta > 0)$$

խտության ֆունկցիայով $X^n \sim \mathbb{P}\mathrm{ar}\,(\alpha,\ \theta)$ ($\alpha > 0$ *հայտնի* պարամետր է) ***Պարետոյի բաշխումից*** նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականն* ու պարզել այդ գնահատականի **անշեղության** և **ունակության հարցերը**։

Ցուցում՝ նկատել, որ $f_\theta(x)$ ֆունկցիան *դիֆերենցելի չէ* ըստ θ - ի և ներկայացնել X^n նմուշը *վարիացիոն շարքի* տեսքով։

108. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta_1,\ \theta_2^{-1})$ նմուշ է

$$f_\theta(x) = \theta_2^{-1} \exp\{-\theta_2^{-1}(x-\theta_1)\}\, \mathbb{1}_{[\theta_1,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \ \ (\theta_1 \in \mathbb{R},\ \theta_2 > 0)$$

խտության ֆունկցիայով ***երկպարամետրական ցուցչային բաշխումից***։ Գտնել $\theta = (\theta_1,\ \theta_2)$ պարամետրի *ՃՄ գնահատականն* ու ցույց տալ այդ գնահատականի **ասիմպտոտիկ անշեղությունը** և **ունակությունը**։

Ցուցում՝ Նախ գտնել θ_1 պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*, այնուհետև՝ θ_2 - ինը։ Օգտվել նաև խնդիր 10 - ից։

109. θ հատ *անհայտ թվով* համարակալված գնդիկներ պարունակող սափորից կատարում են նմուշահանում *վերադարձի* եղանակով: Դիցուք $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ - ը համապատասխան n ծավալի պատահական նմուշն է: Ապացուցել, որ θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* $\widehat{\theta}_n = X_{(n)}$ վիճականին է:

110* (մ). Տրված է $X^n \sim \mathbb{M}(n\,;\, \theta_1, \ldots, \theta_N)$ նմուշ ***բազմանդամային (պոլինոմական) բաշխումից***, որտեղ $0 < \theta_i < 1$, $\sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1$: Գտնել $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ պարամետրի *ՃՄ գնահատականն* ու ստուգել դրա **անշեղությունը** և **ունակությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

111* (մ). Որպեսզի գնահատվի լճի ձկների $\theta = N$ անհայտ թիվը, *անվերադարձ* նմուշահանման եղանակով կատարվում է հետևյալ փորձը՝ բռնում են m_1 հատ ձկներ, նրանց վրա հատուկ *նշումներ* են անում և վերադարձնում լիճ: Այնուհետև կրկին բռնում են m_2 հատ ձկներ և հաշվում *նշված* ձկների $\mu = m$ թիվը: Ցույց տալ, որ θ - ի *ՃՄ գնահատականը* $\widehat{\theta} = \left[\frac{m_1\, m_2}{m}\right]$ վիճականին է ($[\cdot]$ ՝ թվի ամբողջ մասն է):

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

112* (մ). (*Նմուշային հսկողություն*). N հատ արտադրանքներից բաղկացած խմբաքանակը, որը պարունակում է *անհայտ* θ թվով անորակ արտադրատեսակ, գտնվում է հսկիչի մոտ: Որպեսզի գնահատվի θ պարամետրը, հսկիչը պատահականորեն (*անվերադարձ* եղանակով) լրիվ խմբաքանակից վերցնում է n հատը $(n < N)$ և հաշվում անորակ արտադրատեսակների d թիվը: Ցույց տալ, որ *ՃՄ գնահատականը* θ - ի համար $\widehat{\theta}_n = \left[\frac{(N+1)\,d}{n}\right]$ վիճականին է:

113. Դիցուք $X_j^{n_j} = \left(X_{j1}, \ldots, X_{jn_j}\right)$ - երը $(j = 1, \ldots, k)$ համապատասխանաբար $\mathbb{N}\left(\theta_{j1}, \theta_2^2\right)$ ***նորմալ բաշխումներից*** միմյանցից անկախ n_j - ծավալի նմուշներ են:

Նշանակենք նմուշային միջինները և ցրվածքները՝

$$\overline{X}_j := \overline{X_j^{n_j}} = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} X_{jm} \quad \text{և} \quad S_j^2 := S_{jn_j}^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} \left(X_{jm} - \overline{X}_j\right)^2 :$$

Ապացուցել, որ

ա) $\theta = (\theta_{11}, \ldots, \theta_{k1}, \theta_2)$ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*՝ $\widehat{\theta} = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k, S)$ վիճականին է, որտեղ $S^2 := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} n_j S_j^2$, $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$, բ) θ_2^2 ընդհանուր ցրվածքի **անշեղ** գնահատականը՝ $\widetilde{\theta_2^2} := \widetilde{S}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{k} n_j S_j^2$ վիճականին է :

§ 7. Գնահատականների համեմատություն

Ֆիքսված ծավալի նմուշներ

Կասենք, որ $\theta \in \Theta$ պարամետրի համար θ_1^* գնահատականը θ_2^* գնահատականից (միջին քառակուսային իմաստով) **ավելի «լավն է»** կամ **առավել ճշգրիտ** է, եթե բոլոր $\theta \in \Theta$ - ի համար

$$R_2(\theta, \theta_1^*) := \mathbb{E}_\theta(\theta_1^* - \theta)^2 \le \mathbb{E}_\theta(\theta_2^* - \theta)^2 := R_2(\theta, \theta_2^*),$$

և, գոյություն ունի θ պարամետրի համար առնվազն մեկ արժեք, որի դեպքում այդ անհավասարությունը **խիստ** է ($R(\theta, \theta^*)$ ֆունկցիան կոչվում է (*քառակուսային*) **ռիսկի ֆունկցիա**):

Ներմուծենք θ պարամետրից **միևնույն** $b(\theta)$ շեղում ունեցող

$$\mathbb{K}_b := \{\theta^*:\ \mathbb{E}_\theta \theta^* = \theta + b(\theta)\}$$

գնահատականների դասը:

$\theta_0^* \in \mathbb{K}_b$ գնահատականը կոչվում է θ պարամետրի համար **օպտիմալ** $\mathbb{K}_b$ դասում, եթե θ-ի ցանկացած այլ $\theta^* \in \mathbb{K}_b$- ից գնահատականի և բոլոր $\theta \in \Theta$ - ի համար տեղի ունի

$$R_2(\theta, \theta_0^*) = \mathbb{E}_\theta(\theta_0^* - \theta)^2 \le \mathbb{E}_\theta(\theta^* - \theta)^2 = R_2(\theta, \theta^*)$$

անհավասարությունը:

Օպտիմալ գնահատականը $\mathbb{K}_b$ դասում $\mathbb{P}_\theta$- հ.հ. իմաստով **միակն** է՝ այսինքն, եթե θ_1^* - ը և θ_2^* - ը երկու օպտիմալ գնահատականներ են $\mathbb{K}_b$ դասից, ապա բոլոր $\theta \in \Theta$ - ի համար

$$\mathbb{P}_\theta(\theta_1^* \ne \theta_2^*) = 0 :$$

Օպտիմալ θ_0^* գնահատականն անշեղ գնահատականների $\mathbb{K}_0$ դասում կոչվում է ուղղակի **օպտիմալ** կամ **հավասարաչափ փոքրագույն ցրվածքով անշեղ գնահատական** (**BLUE**): Այն բոլոր $\theta \in \Theta$ - ի և բոլոր $\theta^* \in \mathbb{K}_0$ - ից գնահատականների համար բավարարում է

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\theta_0^*) \le \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\theta^*)$$

անհավասարությանը:

Ասիմպտոտիկ դեպք

Ներմուծենք θ պարամետրի գնահատականների հետևյալ **դասերը**՝

$$\mathbb{K}_\Phi := \left\{\theta^*:\ \eta_n = \sqrt{n}\,(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d} \eta \sim \mathbb{N}\big(0,\ \sigma^2(\theta)\big),\ \ n \to \infty\right\}՝$$

$\sigma^2(\theta)$ գործակցով **ասիմպտոտիկ նորմալ գնահատականների դասը** և

$$\mathbb{K}_{\Phi,2} := \{\theta^* \in \mathbb{K}_\Phi:\ \mathbb{E}_\theta(\eta_n)^i \to \mathbb{E}_\theta(\eta)^i\ ,\ \ i = 1, 2\}:$$

Կասենք, որ θ պարամետրի համար $\theta_1^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}$ գնահատականը $\theta_2^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}$ գնահատականից **ասիմպտոտիկ իմաստով «վատը չէ»** (**ավելի «լավն է»**), եթե

$$\sigma_1^2(\theta) \le \sigma_2^2(\theta)$$

բոլոր $\theta \in \Theta$-ի համար, և, գոյություն ունի առնվազն մեկ $\theta' \in \Theta$ արժեք, այնպիսին, որ $\sigma_1^2(\theta') < \sigma_2^2(\theta')$ ($\sigma_1^2(\theta)$ -ն և $\sigma_2^2(\theta)$ - ն θ_1^* և θ_2^* գնահատականների ասիմպտոտիկ նորմալության գործակիցներն են):

$\theta_0^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}$ գնահատականը կոչվում է **ասիմպտոտիկ օպտիմալ** θ պարամետրի համար, եթե $\mathbb{K}_{\Phi,2}$ դասից ցանկացած այլ θ^* գնահատականի համար՝

$$\sigma_0^2(\theta) \le \sigma^2(\theta)$$

բոլոր $\theta \in \Theta$ - ի համար, որտեղ $\sigma_0^2(\theta)$ - ն և $\sigma^2(\theta)$ - ն θ_0^* և θ^* գնահատականների ասիմպտոտիկ նորմալության գործակիցներն են:

$\mathbb{K}_{\Phi,2}$ դասի սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած $\theta^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}$ գնահատականի համար՝

$$b_n(\theta) = o\big(1/\sqrt{n}\big) \qquad \text{և} \qquad \mathbb{E}_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 = \sigma^2(\theta)/n + o(1/n),$$

այսինքն՝ θ_n^* գնահատականն ***ասիմպտոտիկ անշեղ*** է և ***ունակ***:

114. Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ նմուշ է *հայտնի* $m \in \mathbb{R}$ միջինով ***նորմալ բաշխումների դասից***: Դիտարկենք *անհայտ* θ^2 ցրվածքի համար հետևյալ գնահատականները՝ $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)^2$, $S_0^2 = \frac{n}{n-1}S^2$, $S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$ ։ Գտնել այդ գնահատականներից (*միջին քառակուսային իմաստով*) **առավել ճշգրիտը**:

Ցուցում՝ $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(S^2) = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\theta^4$ (տե՛ս խնդիր 46), բացի այդ՝ $\mu_4 = 3\theta^4$ ։ Օգտվել նաև $\mathbb{E}_\theta(X - a)^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X) + (\mathbb{E}_\theta X - a)^2$ $(a \in \mathbb{R})$ ներկայացումից:

115* (մ). Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$ նմուշ է ***նորմալ բաշխումների դասից***:

$$\mathcal{T}\left(S_0^2\right) := \left\{T_\lambda:\ T_\lambda(X^n) := \lambda S_0^2 = \frac{\lambda}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

վիճականիների դասում դիտարկենք θ_2^2 ցրվածքի գնահատման հարցը: Ցույց տալ, որ

ա) $T_\lambda \in \mathcal{T}(S_0^2)$ գնահատականի *քառակուսային ռիսկի ֆունկցիան* հավասար է՝

$$R_2(\theta_2^2,\ T_\lambda) = \mathbb{E}_\theta(T_\lambda - \theta_2^2)^2 = \left[(\lambda - 1)^2 + \frac{2}{n-1}\lambda^2\right]\theta_2^4,$$

բ) $T_\lambda \in \mathcal{T}(S_0^2)$ գնահատականը S_0^2 գնահատականից **առավել ճշգրիտ** է, եթե $\frac{n-3}{n+1} < \lambda < 1$,

գ) $\mathcal{T}(S_0^2)$ դասում θ_2^2 պարամետրի համար **օպտիմալ** գնահատականը T_{λ_0} վիճականին է ($\lambda_0 := \frac{n-1}{n+1}$):

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 ։

116. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta,\ \alpha^{-1})$ նմուշ է ***երկպարամետրական ցուցչային բաշխումից***: Գտնել $\theta > 0$ պարամետրի համար $T_n^1 := \overline{X^n} - \alpha$ և $T_n^2 := X_{(1)} - \frac{\alpha}{n}$ գնահատականներից (*միջին քառակուսային իմաստով*) **առավել ճշգրիտը**:

Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 10 - ից:

117 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(\theta_1,\ \theta_2)$ նմուշ է $[\theta_1,\ \theta_2]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից*** $(\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R})$: Գտնել այդ միջակայքի $M(\theta) = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ միջնակետի համար $M_1^* := \frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right)$ և $M_2^* := \overline{X^n}$ գնահատականներից *միջին քառակուսային իմաստով* **լավագույնը**:

Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 14* - ից:

118 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշ է ***ցուցչային բաշխումից***: Գտնել θ պարամետրի համար $\theta_1^* := (\overline{X^n})^{-1}$ և $\theta_2^* := \left(1-\frac{1}{n}\right)(\overline{X^n})^{-1}$ գնահատականներից *միջին քառակուսային իմաստով* **լավագույնը**:

Ցուցում՝ օգտվել $T_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbb{\Gamma}(\theta, n)$ հատկությունից և $\mathbb{E}_\theta T_n^t = \frac{\Gamma(n+t)}{\Gamma(n)}\,\theta^{-t}$ բանաձևից:

119 (մ). Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշ է ***ցուցչային բաշխումից***: Գտնել θ պարամետրի համար *մոմենտների գնահատականներից* $(g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2)$ *ասիմպտոտիկ իմաստով* **լավագույնը** :

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 5.1 - ից:

120. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ նմուշ է *հայտնի* $m \in \mathbb{R}$ միջինով ***նորմալ բաշխումից***: Գտնել անհայտ θ^2 ցրվածքի համար $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X^n}\right)^2$, $S_{0n}^2 = \frac{n}{n-1}\ S_n^2$ և $S_{1n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$ գնահատականներից *ասիմպտոտիկ իմաստով* **լավագույնը**:

Ցուցում՝ գնահատականների ասիմպտոտիկ նորմալության գործակիցներն են՝ $\sigma^2(\theta) = \sigma_0^2(\theta) = \sigma_1^2(\theta) = 2\theta^4$:

121. Գտնել $[0,\ \theta]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխված*** X պատահական մեծության X^n նմուշի միջոցով θ պարամետրի *մոմենտների գնահատականները* $(g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2)$ և ընտրել *ասիմպտոտիկ իմաստով* **լավագույնը**:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 5.1 - ից:

122 (մ). Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{\Gamma}(\theta,\ \lambda)$ նմուշ է *հայտնի* λ պարամետրով ***գամմա բաշխումների դասից***: Գտնել θ պարամետրի *մոմենտների գնահատականները* $(g_1(x) = x\ ,\ g_2(x) = x^2)$ և որոշել *ասիմպտոտիկ իմաստով* **լավագույնը**:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 5.1 - ից:

123 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ նմուշը վերցված է *հայտնի* $m \in \mathbb{R}$ միջինով ***նորմալ համախմբությունից***: $\theta > 0$ *ստանդարտ շեղման* համար դիտարկվում են $\theta_1^* := S_1 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right]^{1/2}$ և $\theta_2^* := \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i - m|$ գնահատականները: Գտնել՝ ո՞րն է այդ գնահատականներից *ասիմպտոտիկ իմաստով* **գերադասելի**:

Ցուցում՝ օգտվել ԿՍԹ - ից, խնդիր 67 - ից և թեորեմ 4.60 - ից (տե՛ս [2]):

§ 8. Արդյունավետ (էֆեկտիվ) գնահատականներ

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$ նմուշը համապատասխանում է (A_μ) - *պայմանը* բավարարող $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta\colon \theta \in \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ բաշխումների դասից $\mathbb{P}_\theta$ բաշխմանը: Նշանակենք $f_\theta(x) := \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x)$ ըստ μ չափի $\mathbb{P}_\theta$ բաշխման խտության ֆունկցիան:

X^n նմուշի **ներդրման ֆունկցիա** կոչվում է հետևյալ վիճականին՝

$$U(X^n, \theta) := L'_\theta(X^n) = \sum_{i=1}^{n} l'(X_i, \theta) \left(L_\theta(X^n) := \ln f_\theta(X^n) = \sum_{i=1}^{n} l(X_i, \theta),\ l(x, \theta) = \ln f_\theta(x) \right):$$

$U(X_i,\ \theta) := l'(X_i,\ \theta)$ վիճականիները կոչվում են X_i նմուշային անդամների **ներդրման ֆունկցիաներ**:
$\mathbb{I}^n(\theta) := \mathbb{I}^{X^n}(\theta) = \mathbb{E}_\theta[U(X^n,\ \theta)]^2$ ֆունկցիան կոչվում է θ պարամետրի վերաբերյալ X^n նմուշում պարունակվող **Ֆիշերի տեղեկատվության (ինֆորմացիայի) քանակ**:

Կամայական X_i նմուշային անդամի մեջ θ պարամետրի վերաբերյալ պարունակվող **Ֆիշերի տեղեկատվության (ինֆորմացիայի) քանակ** կամ ուղղակի **տեղեկատվության ֆունկցիա** կոչվում է $\mathbb{I}(\theta) := \mathbb{I}^{X_i}(\theta) = \mathbb{E}_\theta[U(X_i,\ \theta)]^2$ ֆունկցիան:

Ճիշտ է $\mathbb{I}^n(\theta) = n\mathbb{I}(\theta)$ *ադիտիվության* հատկությունը:

Բաշխումների $\mathcal{P}$ դասը բավարարում է **ռեգուլյարության** $(\boldsymbol{R})$ - **պայմանները**, եթե՝

R1. $\mathbb{P}_\theta$ բաշխումների $N_{\mathbb{P}_\theta} := \{x \in \mathcal{X}\colon\ f_\theta(x) > 0\}$ *կրիչները* **կախված չեն** θ - ից,

R2. $f_\theta(x)$ խտության ֆունկցիան μ - h.h. ըստ $x \in \mathcal{X}$ - ի **անընդհատ դիֆերենցելի** է ըստ θ - ի,

R3. $\mathbb{I}(\theta)$ տեղեկատվության ֆունկցիան բոլոր $\theta \in \Theta$ - ի համար **գոյություն ունի**, **դրական** է $(0 < \mathbb{I}(\theta) < \infty)$ և **անընդհատ**:

Դիտարկենք θ պարամետրից $b(\theta)$ շեղում ունեցող θ^* գնահատականների դասը.

$$\mathbb{K}_b := \{\theta^*\colon\ \tau(\theta) := \mathbb{E}_\theta\theta^* = \theta\ +\ b(\theta)\}:$$

Թեորեմ 8.1 (***Տեղեկատվական (Ֆրեշե - Ռաո - Կրամերի) անհավասարություն***):
Դիցուք բավարարվում են $(\boldsymbol{R})$ - ***պայմանները***, *և,* θ *պարամետրի* $\theta^* \in \mathbb{K}_b$ *գնահատականն այնպիսին է, որ* $\mathbb{E}_\theta(\theta^*)^2 < c < \infty$ *բոլոր* $\theta \in \Theta$ *- ի համար: Այդ դեպքում տեղի ունի անհավասարություն՝*

$$\mathbb{V}ar_\theta(\theta^*)\ \geq\ \frac{[1 + b'(\theta)]^2}{n\mathbb{I}(\theta)}, \qquad \theta \in \Theta: \tag{8.1}$$

Եթե $\theta^* \in \mathbb{K}_0$ (***անշեղ*** *գնահատական է*), *ապա*

$$\mathbb{V}ar_\theta(\theta^*)\ \geq\ \frac{1}{n\mathbb{I}(\theta)}, \qquad \theta \in \Theta:$$

$\mathbb{K}_b$ դասից θ պարամետրի այն θ^* գնահատականը, որի համար (8.1) անհավասարությունում *ստորին եզրը* հասանելի է, այսինքն՝

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\theta^*) = \frac{[1 + b'(\theta)]^2}{n\ \mathbb{I}(\theta)}, \qquad \theta \in \Theta,$$

կոչվում է **արդյունավետ (էֆեկտիվ) գնահատական**, իսկ

$$e_n := \frac{[1 + b'(\theta)]^2}{n\ \mathbb{I}(\theta)\ \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\theta^*)} \qquad (0 \leq e_n \leq 1)$$

մեծությունը կոչվում է θ^* գնահատականի **արդյունավետություն (էֆեկտիվություն)**:

Արդյունավետ գնահատականների համար $e_n = 1$:

Արդյունավետության հայտանիշ

Թեորեմ 8.2: *Դիցուք բավարարվում են* $(\boldsymbol{R})$- ***պայմանները****, և,* θ *պարամետրի* $\theta^* \in \mathbb{K}_b$ *գնահատականն այնպիսին է, որ* $\mathbb{E}_\theta(\theta^*)^2 < c < \infty$ *բոլոր* $\theta \in \Theta$*-ի համար: Այդ դեպքում, որպեսզի* θ^* *գնահատականը լինի* ***արդյունավետ*** θ *պարամետրի համար,* ***անհրաժեշտ*** *է և* ***բավարար****, որ տեղի ունենա հետևյալ համարժեք պայմաններից մեկը՝*

1. ***ներդրման ֆունկցիան*** *ներկայացվի*
$$U(X^n, \theta) = c(\theta)\big(\theta^* - \tau(\theta)\big),$$
տեսքով, որտեղ $c(\theta)$*- ն որոշակի պարամետրական ֆունկցիա է,*
2. ***ճշմարտանմանության ֆունկցիան*** *բերվի*
$$f_\theta(X^n) = h(X^n)\exp\{A(\theta)\theta^* + B(\theta)\}$$
ցուցչային տեսքի, որտեղ $A(\theta)$*- ն և* $B(\theta)$*- ն դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են* :

Դիցուք Θ բազմության վրա տրված է որոշակի սկալյար դիֆերենցելի $\tau = \tau(\theta)$ ֆունկցիա: Նշանակենք $\mathbb{K}_b(\tau) := \{\tau^*\colon \tau_b(\theta) := \mathbb{E}_\theta\tau^* = \tau(\theta) + b(\theta)\}$ - ով $\tau(\theta)$ ֆունկցիայից $b(\theta)$ շեղում ունեցող $\tau^* = (\tau_n^*)_{n\ge1}$ գնահատականների դասը:

$(\boldsymbol{R})$- ***պայմանների*** դեպքում ճիշտ է թեորեմ 8.2 - ի տարբերակը, համաձայն որի՝ *եթե* $\tau^* \in \mathbb{K}_b(\tau)$ *գնահատականն այնպիսին է, որ* $\tau_b(\theta) = \mathbb{E}_\theta\tau^*$ *ֆունկցիան դիֆերենցելի է (ըստ* θ*- ի),* $\mathbb{E}_\theta\,(\tau^*)^2 \le c$ *բոլոր* $\theta \in \Theta$ *- ի համար, ապա տեղի ունի անհավասարություն* ՝

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\tau^*) \ \ge\ \frac{\left[\tau_b'(\theta)\right]^2}{n\mathbb{I}(\theta)}, \qquad \theta \in \Theta:$$

$\tau^* \in \mathbb{K}_b(\tau)$ *դասից* $\tau = \tau(\theta)$ *ֆունկցիայի այն գնահատականը, որի համար այդ անհավասարությունում ստորին եզրը հասանելի է, կոչվում է* ***արդյունավետ*** $\mathbb{K}_b(\tau)$ ***դասում****, իսկ*

$$e_n := e(\tau_n^*) = \frac{\left[\tau_b'(\theta)\right]^2}{n\,\mathbb{I}(\theta)\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\tau^*)}$$

մեծությունը կոչվում է τ^* *գնահատականի* ***արդյունավետություն*** (***էֆեկտիվություն***):
Ակնհայտ է, որ $0 \le e_n \le 1$, իսկ արդյունավետ գնահատականի համար $e_n = 1$:

Թեորեմ 8.2 - ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

Թեորեմ 8.3: *Դիցուք բավարարվում են* $(\boldsymbol{R})$- ***պայմանները****, և* $\tau = \tau(\theta)$ *ֆունկցիայի* $\tau^* \in \mathbb{K}_b(\tau)$ *գնահատականն այնպիսին է, որ* $\mathbb{E}_\theta\,(\tau^*)^2 \le c$ *բոլոր* $\theta \in \Theta$ *- ի համար: Այդ դեպքում, որպեսզի* τ^* *գնահատականը լինի* $\tau = \tau(\theta)$ *ֆունկցիաի համար* ***արդյունավետ****,* ***անհրաժեշտ*** *է և* ***բավարար****, որ տեղի ունենա հետևյալ համարժեք պայմաններից մեկը՝*

1. $U(X^n,\ \theta) = c(\theta)\big(\tau^* - \tau_b(\theta)\big)$,
2. $f_\theta(X^n) = h(X^n)\exp\{A(\theta)\,\tau^* + B(\theta)\}$,

որտեղ $A(\theta)$ *- ն և* $B(\theta)$ *- ն դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:*

$U(X^n,\ \theta)$ ներդրման ֆունկցիան *միարժեք* է որոշվում $\mathcal{P}$ մոդելի միջոցով, այնպես, որ $(a\tau_b(\theta) + d$ գծային ձևափոխության ճշտությամբ)՝ *1.* ներկայացումով *միարժեք* որոշվում է և այն $\tau_b(\theta)$ ֆունկցիան, որի արդյունավետ գնահատականը τ^* վիճականին է:

$\tau_b := \tau_b(\theta)$ *ֆունկցիայի* ***անշեղ արդյունավետ*** $\tau^* \in \mathbb{K}_0(\tau_b)$ ***գնահատականի ցրվածքը*** *և* ***Ֆիշերի տեղեկատվության ֆունկցիան*** *որոշվում են հետևյալ բանաձևերից՝*

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\tau^*) = \frac{\tau_b'(\theta)}{c(\theta)}, \quad \mathbb{I}(\theta) = \frac{1}{n}\,c(\theta)\tau_b'(\theta):$$

$(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ տարածության վրա տրված $\mathcal{E} := \{\mathbb{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ բաշխումների դասը կոչվում է **1 - պարամետրական ցուցչային** (**էքսպոնենտական**) **դաս**, եթե $\mathbb{P}_\theta \in \mathcal{E}$ բաշխումները *բացարձակ անընդհատ* են ըստ այդ տարածության վրա տրված որոշ σ – վերջավոր μ չափի (սովորաբար այն ***Լեբեգի*** կամ ***հաշվող չափ*** է), որի նկատմամբ $\mathbb{P}_\theta$ բաշխումների $f_\theta(x) = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x)$ խտության ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ ներկայացումը՝

$$f_\theta(x) = h(x)\exp\{\,A(\theta)\,T(x) + B(\theta)\}\ :$$

Այս բանաձևում մասնակցող բոլոր ֆունկցիաները վերջավոր են և չափելի ըստ համապատասխան փոփոխականների:

Թեորեմ 8.4: *Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{E}$ նմուշ է $\mathbb{P}_\theta$ բաշխումից և բավարարվում են* $(\boldsymbol{R})$- ***պայմանները:*** *Այդ դեպքում այն (գծային ձևափոխության ճշտությամբ միակ) $\tau(\theta)$ ֆունկցիան, որն ունի* ***անշեղ արդյունավետ*** *$\tau^* \in \mathbb{K}_0(\tau)$* ***գնահատական*** *և* ***այդ գնահատականը*** *գտնվում են հետևյալ բանաձևերից՝*

$$\tau(\theta) = -\ \frac{B'(\theta)}{A'(\theta)}\ \ (A'(\theta) \neq 0), \qquad \tau^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i):$$

Բացի այդ՝

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\tau^*) = \frac{\tau'(\theta)}{n\,A'(\theta)}, \qquad \mathbb{I}(\theta) = A'(\theta)\,\tau'(\theta):$$

124. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta,\ k)$ նմուշը վերցված է ***բինոմական բաշխումից***: Ցույց տալ, որ $T_n(X) = \dfrac{1}{k}\,\overline{X^n}$ վիճականին **արդյունավետ** գնահատական է θ պարամետրի համար և գտնել **Ֆիշերի տեղեկատվության** $\mathbb{I}(\theta)$ **ֆունկցիան**:

125. Անհայտ θ պարամետրով ***Պուասոնի բաշխում*** ունեցող $X \sim \mathbb{\Pi}(\theta)$ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված են $X_1, X_2, \ldots, X_n$ պատահական արդյունքներով n անկախ փորձեր: Ցույց տալ, որ $T_n(X) = \overline{X^n}$ վիճականին **արդյունավետ գնահատական** է θ պարամետրի համար: Գտնել նաև $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[T_n(X)]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

126. Ցույց տալ, որ $\mathbb{G}(\theta)$ ***երկրաչափական բաշխումից*** վերցված X^n նմուշի միջոցով կառուցված $T_n(X) = \overline{X^n}$ վիճականին **արդյունավետ գնահատական** է $\tau(\theta) = \dfrac{1}{\theta} - 1$ ֆունկցիայի համար: Գտնել նաև $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[T_n(X)]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

127. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta^{-1})$ նմուշը վերցված է θ^{-1} պարամետրով ***ցուցչային բաշխումից***: Ցույց տալ, որ $T_n(X) = \overline{X^n}$ վիճականին **արդյունավետ գնահատական** է θ պարամետրի համար: Գտնել $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[T_n(X)]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

128. Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$ նմուշը վերցված է *անհայտ* θ միջինով ***նորմալ բաշխումից***: Գտնել **Ֆիշերի տեղեկատվության** $\mathbb{I}(\theta)$ **ֆունկցիան** և ստուգել θ պարամետրի համար $\theta_n^* = \overline{X^n}$ վիճականու **արդյունավետությունը**:

129. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ նմուշը վերցված է *անհայտ* θ^2 ցրվածքով ***նորմալ բաշխումների դասից***: Ցույց տալ, որ **Ֆիշերի տեղեկատվության ֆունկցիան** հավասար է $\mathbb{I}(\theta) = \dfrac{2}{\theta^2}\left(\mathbb{I}\left(\theta^2\right) = \dfrac{1}{2\theta^4}\right)$, և ապացուցել, որ $S_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$ վիճականին **արդյունավետ գնահատական** է $\tau(\theta) = \theta^2$ ցրվածքի համար:

130. Գտնել $\mathbb{NB}\mathrm{in}\,(\theta,\ r)$ ***բացասական բինոմական բաշխումների դասից*** վերցված X^n նմուշի միջոցով **անշեղ արդյունավետ** τ_n^* **գնահատական** ունեցող $\tau(\theta)$ պարամետրական ֆունկցիան: Գտնել նաև $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

131. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Gamma}(\theta,\ \lambda)$ նմուշ է *անհայտ* θ պարամետրով ***գամմա բաշխումից***: Գտնել **անշեղ արդյունավետ** τ_n^* **գնահատական** ունեցող $\tau(\theta)$ ֆունկցիան և այդ գնահատականը: Ստանալ նաև $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

132. Դիցուք X^n նմուշը վերցված է

$$f_\theta(x) = e^{-\,(x\,-\,\theta)}\,\mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x), \qquad \theta > 0$$

խտության ֆունկցիայով «***շեղված***» ***ցուցչային բաշխումից***: Ուսումնասիրել $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$ ***ՃՄ գնահատականի*** **արդյունավետության** հարցը:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 10 :

133. $$f_\theta(x) = c^{\theta^{-1}}\theta^{-1}x^{-(1\,+\,\theta^{-1})}\,\mathbb{1}_{(c,\infty)}(x), \qquad c > 0,\ \ \theta > 0$$

խտության ֆունկցիայով ***Պարետոյի բաշխումների դասից*** X^n նմուշի միջոցով գտնել այն $\tau(\theta)$ ֆունկցիան, որն ունի **անշեղ արդյունավետ** τ_n^* **գնահատական**: Գտնել նաև $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

134 (մ). $$f_\theta(x) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\ \exp\left\{-\frac{\theta}{2m^2x}(x-m)^2\right\}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad m > 0, \quad \theta > 0$$

խտության ֆունկցիայով ***հակադարձ Գաուսի բաշխումների դասից*** վերցված նմուշի միջոցով գտնել **անշեղ արդյունավետ** τ_n^* **գնահատական** ունեցող $\tau(\theta)$ ֆունկցիան, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

135. $$f_\theta(x) = \lambda\theta^{-\lambda}x^{\lambda\,-\,1}\exp\left\{-\theta^{-\lambda}x^{\lambda}\right\}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \lambda > 0,\ \theta > 0$$

խտության ֆունկցիայով ***Վեյբուլի բաշխումից*** X^n նմուշի միջոցով գտնել՝

ա) այն $\tau(\theta)$ ֆունկցիան, որի համար գոյություն ունի **անշեղ արդյունավետ** τ_n^* **գնահատականը**, բ) $\mathbb{E}_\theta\tau_n^*$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*]$ և $\mathbb{I}(\theta)$:

§ 9. Ասիմպտոտիկ արդյունավետ գնահատականներ

$\tau(\theta)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար $\tau_n^* := \tau^*(X^n) \in \mathbb{K}_b(\tau)$ գնահատականը կոչվում է **ասիմպտոտիկ արդյունավետ**, եթե

$$e_0(\tau^*) := \lim_{n\to\infty} \frac{[\tau_b'(\theta)]^2}{n\mathbb{I}(\theta)\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*]} = 1,$$

որտեղ $\tau_b(\theta) := \mathbb{E}_\theta\tau_n^* = \tau(\theta) + b_n(\theta)$: $e_0(\tau^*)$ մեծությունը կոչվում է τ_n^* գնահատականի **ասիմպտոտիկ արդյունավետություն** $(0 \le e_0(\tau^*) \le 1)$:

Եթե $\tau(\theta) = \theta$ և $\theta_n^* \in \mathbb{K}_0$ (*անշեղ* գնահատական է θ - ի համար), ապա **ասիմպտոտիկ արդյունավետությունը** նշանակում է, որ

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\theta_n^*] = \frac{1+o(1)}{n\mathbb{I}(\theta)},$$

այսինքն՝ $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\theta_n^*] \sim \frac{1}{n\,\mathbb{I}(\theta)}$ (մեծ n - ի համար) կամ $n\mathbb{I}(\theta)\,\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\theta_n^*] \to 1$, երբ $n \to \infty$:

Նշանակենք՝ $\mathbb{K}_\Phi(\tau) := \left\{\tau_n^*:\ \eta_n = \sqrt{n}\left(\tau_n^* - \tau(\theta)\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0,\ \sigma_\tau^2(\theta)\right),\quad n\to\infty\right\}$

$\tau(\theta)$ ֆունկցիայի **ասիմպտոտիկ նորմալ** գնահատականների դասը և

$$\mathbb{K}_{\Phi,2}(\tau) := \{\tau_n^* \in \mathbb{K}_\Phi(\tau):\ \mathbb{E}_\theta\eta_n \to 0,\ \mathbb{E}_\theta\eta_n^2 \to \sigma_\tau^2(\theta),\quad n\to\infty\}:$$

Պնդում 9.1: *$\tau = \tau(\theta)$ ֆունկցիայի համար **ասիմպտոտիկ նորմալ** $\tau_n^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}(\tau)$ գնահատականը **ասիմպտոտիկ արդյունավետ** է, եթե $\sigma_\tau^2(\theta) = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{\mathbb{I}(\theta)}$, $\theta \in \Theta$, այսինքն, եթե տեղի ունի զուգամիտություն՝*

$$\sqrt{n}\left(\tau_n^* - \tau(\theta)\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0,\ \frac{[\tau'(\theta)]^2}{\mathbb{I}(\theta)}\right),\qquad n\to\infty:$$

*θ պարամետրի համար **ասիմպտոտիկ նորմալ** և **անշեղ** $\theta_n^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}$ գնահատականը կլինի **ասիմպտոտիկ արդյունավետ**, եթե $\sigma^2(\theta) = [\mathbb{I}(\theta)]^{-1}$, այսինքն՝*

$$\sqrt{n}\,(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ [\mathbb{I}(\theta)]^{-1}),\qquad n\to\infty:$$

Ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատականի ասիմպտոտիկ արդյունավետությունը

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$ նմուշ է $\mathbb{P}_\theta$ բաշխումից, որտեղ

$$\mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta:\ \theta \in \Theta = (\theta_1,\ \theta_2),\ -\infty \le \theta_1 < \theta_2 \le +\infty\}:$$

Բաշխումների $\mathcal{P}$ դասը բավարարում է **ռեգուլյարության** $(\boldsymbol{RR})$ **- պայմանները**, *եթե*

RR 1. Առկա են **ռեգուլյարության** $(\boldsymbol{R})$ **- պայմանները**,

RR 2. $f_\theta(x)$ խտության ֆունկցիան $\mu-$ h.h. ըստ $x \in \mathcal{X}$ - ի **երեք անգամ անընդհատ դիֆերենցելի** է (ըստ θ- ի), և, գոյություն ունի այնպիսի $H(x)$ ֆունկցիա, որ

$$\left|\frac{\partial^3 l(x,\ \theta)}{\partial\theta^3}\right| \le H(x),\ \text{որտեղ}\ \mathbb{E}_\theta H(X) < M,\qquad \theta\in\Theta\ \left(l(x,\theta) = \ln f_\theta(x)\right),$$

RR 3. $\int\limits_{\mathcal{X}} f_\theta(x)\mu(dx) = 1$ հավասարությունը կարելի է **երկու անգամ դիֆերենցել** (ըստ θ - ի) **ինտեգրալի նշանի տակ**, այսինքն՝ ճիշտ են հետևյալ առնչությունները՝

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f_\theta'(x)\mu(dx) = 0 \quad \text{և} \quad \int\limits_{\mathcal{X}} f_\theta''(x)\mu(dx) = 0:$$

$(\boldsymbol{RR})$**- պայմանների** դեպքում **ՃՄ գնահատականը** բավարարում է հետևյալ սահմանային հատկությունները՝

1. $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \theta, \quad n \to \infty$ (**ունակություն**),
2. $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0,\ \sigma^2(\theta)\right), \quad n \to \infty$ (**ասիմպտոտիկ նորմալություն**),
3. $\sigma^2(\theta) = [\mathbb{I}(\theta)]^{-1}$ (**ասիմպտոտիկ արդյունավետություն**)։

Եթե $\tau = \tau(\theta)$- ն $\Theta = (\theta_1,\ \theta_2)$ միջակայքի վրա որոշված *դիֆերենցելի ֆունկցիա* է, և $\hat{\tau}_n := \tau(\hat{\theta}_n)$ - ը այդ ֆունկցիայի **ՃՄ գնահատականը**, ապա՝

1. $\hat{\tau}_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \tau(\theta), \quad n \to \infty,$
2. $\sqrt{n}\left(\hat{\tau}_n - \tau(\theta)\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0,\ \frac{[\tau'(\theta)]^2}{\mathbb{I}(\theta)}\right), \quad n \to \infty$։

Ցրվածքը կայունացնող ձևափոխություն կոչվում է այնպիսի $\tau(\theta)$ պարամետրական ֆունկցիան, որի **ՃՄ գնահատականի** $\sigma_n^2(\tau)$ **ասիմպտոտիկ ցրվածքը** *կախված չէ θ պարամետրից*, այսինքն, եթե

$$\sigma_n^2(\tau) := \frac{\sigma_\tau^2(\theta)}{n} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{n\mathbb{I}(\theta)} = const,$$

որտեղից հետևում է, որ $\tau(\theta) = c\int_0^\theta \sqrt{\mathbb{I}(t)}\ dt,\ \ c = const$։

136. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ *անհայտ* θ^2 ցրվածքով ***նորմալ բաշխումների դասից*** վերցված նմուշ է։ Ցույց տալ, որ $S_0^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X^n}\right)^2$ վիճականին **ասիմպտոտիկ արդյունավետ գնահատական** է θ^2 ցրվածքի համար։

Ցուցում՝ օգտվել S_0^2 վիճականու *ասիմպտոտիկ նորմալությունից* և խնդիր 129 - ից։

137 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Gamma}(\theta,\ \lambda)$ նմուշը վերցված է *անհայտ* θ պարամետրով ***գամմա բաշխումների դասից***։ Գտնել $\theta_n^* = \dfrac{\lambda}{\overline{X^n}}$ *ՃՄ գնահատականի* $b_n(\theta)$ **շեղումը**։ «*Վերացնել*» այդ *շեղումը* և ցույց տալ, որ ստացված $\tilde{\theta}_n$ **անշեղ** գնահատականն **ասիմպտոտիկ արդյունավետ** է ։

Ցուցում՝ օգտվել $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathbb{\Gamma}(\theta, n\lambda)$ հատկությունից։

138. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$ - ը *անհայտ* θ միջինով ***նորմալ բաշխումների դասից*** վերցված նմուշ է։ Կլինի՞, արդյոք $\theta_n^* = X_{med}^*(n)$ նմուշային միջնարժեքը **ասիմպտոտիկ արդյունավետ գնահատական** θ պարամետրի համար։

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 4.4 - ից։

139 (մ). Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{C}\,(\theta,\ 1)$ ***Կոշիի բաշխումից*** վերցված նմուշ է։ Կլինի՞, արդյոք $\theta_n^* = X_{med}^*(n)$ նմուշային միջնարժեքը **ասիմպտոտիկ արդյունավետ գնահատական** θ պարամետրի համար։

Ցուցում՝ տե՛ս թեորեմ 4.4 ։

140 (մ). Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ *անհայտ* θ^2 ցրվածքով ***նորմալ բաշխումների դասից*** վերցված նմուշ է: Ցույց տալ, որ $S_1 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right]^{1/2}$ վիճականին **ասիմպտոտիկ անշեղ**, **ունակ** և **ասիմպտոտիկ արդյունավետ** գնահատական է θ *ստանդարտ շեղման* համար:

Ցուցում՝ օգտվել **1**. S_1 վիճականու *ասիմպտոտիկ նորմալությունից*՝ $\sqrt{n}\,(S_1 - \theta) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0,\ \frac{\theta^2}{2}\right)$, **2**. $\eta := \frac{nS_1^2}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \sim \mathbb{H}^2(n)$ (տե՛ս [2, § 2.2]), որտեղից՝ $\mathbb{E}_\theta S_1 = \frac{\theta}{\sqrt{n}}\ \mathbb{E}_\theta \eta^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{n}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\theta$, օգտվել նաև *Էյլեր - Գաուսի* $\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} \sim n^k$ *բանաձևից* («մեծ» n - ի դեպքում, k - ն այստեղ ֆիքսված է):

141. Դիցուք $X^n \sim \Pi(\theta)$ նմուշը վերցված է ***Պուասոնի բաշխումից***: Գտնել այն $g(\theta)$ ֆունկցիան, որի $\hat{g}_n$ *ՃՄ գնահատականի* $\sigma_n^2(g) := \frac{\sigma_g^2(\theta)}{n}$ ասիմպտոտիկ ցրվածքը *կախված չէ* θ պարամետրից:

Ցուցում՝ բերել $\hat{\theta}_n = \overline{X^n}$ *ՃՄ գնահատականի* համար *ասիմպտոտիկ էֆեկտիվության* պայմանը:

142 (մ). $$f_\theta(x) = 2\theta^{-2}xe^{-x^2/\theta^2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0$$

խտության ֆունկցիայով ***Ռելեյի բաշխումից*** նմուշի միջոցով գտնել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը*, բերել այդ գնահատականի **ասիմպտոտիկ արդյունավետության պայմանը**, և, գտնել այն $g(\theta)$ ֆունկցիան, որի *ՃՄ գնահատականի* $\sigma_n^2(g)$ ***ասիմպտոտիկ ցրվածքը*** *կախում չունենա* θ պարամետրից:

143. Համոզվել, որ ***ցուցչային բաշխումից*** $X^n \sim \mathbb{E}(\theta^{-1})$ նմուշի միջոցով ստացված θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* $\mathbb{N}\left(\theta,\ \frac{\theta^2}{n}\right)$ - ասիմպտոտիկ նորմալ է, գտնել այն $\tau(\theta)$ ֆունկցիան, որի $\hat{\tau}_n$ *ՃՄ գնահատականի* $\sigma_n^2(\tau)$ ասիմպտոտիկ ցրվածքը *կախված չլինի* θ պարամետրից: Ներկայացնել $\hat{\tau}_n$ գնահատականի համար **ասիմպտոտիկ նորմալության պայմանը**:

144. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{C}\,(\theta,\ 1)$ նմուշը վերցված է ***Կոշիի բաշխումից***: Կազմել θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* գտնելու համար հավասարումը: Ստանալ այդ գնահատականի **ասիմպտոտիկ ցրվածքը** և պարզել՝ այդ գնահատակա՞նն է **առավել արդյունավետ** θ պարամետրի համար (մեծ n - ի համար), թե՝ *նմուշային միջնարժեքը*:

§ 10. Ճշգրիտ վստահության միջակայքեր (մ)

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$ նմուշ է $\mathbb{P}_\theta$ բաշխումից, որտեղ $\mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$:

θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ մակարդակի (երկկողմանի) **վստահության միջակայք** կոչվում է այնպիսի $\Delta_\alpha(X^n) := (\theta^-, \theta^+)$ պատահական միջակայքը $\left(\theta^\pm \equiv \theta^\pm(X^n, \alpha)\right)$, որի համար

$$\mathbb{P}_\theta(\theta^- < \theta < \theta^+) \geq \gamma : \tag{10.1}$$

Բանաձևում մասնակցող հավանականությունը պետք է հասկանալ որպես (θ^-, θ^+) *պատահական* միջակայքի անհայտ θ պարամետրը «ծածկելու» հավանականություն: Եթե (10.1) անհավասարությունում տեղի ունի հավասարության նշան, ապա (θ^-, θ^+) միջակայքը կոչվում է **γ մակարդակի ճշգրիտ վստահության միջակայք**:

γ թիվը կոչվում է **վստահության հավանականություն**, **վստահության մակարդակ**, **վստահության գործակից** կամ **հուսալիություն**, իսկ α թիվը՝ **նշանակալիության մակարդակ**: Սովորաբար, որպես α -ի արժեքներ վերցվում են **0.05**, **0.01** կամ **0.1** թվերը: θ^- և θ^+ վիճականիները կոչվում են, համապատասխանաբար, **ստորին** և **վերին վստահության սահմաններ**:

θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակի $(0 < \alpha < 1)$ **վերին (ստորին) վստահության միջակայք** կոչվում է $\Delta_\alpha^+(X^n) = (-\infty, \theta^+)$ (համապատասխանաբար՝ $\Delta_\alpha^-(X^n) = (\theta^-, +\infty)$) վստահության միջակայքը, այնպես, որ բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝

$$\mathbb{P}_\theta(-\infty < \theta < \theta^+) = \mathbb{P}_\theta(\theta < \theta^+) \geq \gamma,$$

համապատասխանաբար, $$\mathbb{P}_\theta(\theta^- < \theta < +\infty) = \mathbb{P}_\theta(\theta^- < \theta) \geq \gamma :$$

Վստահության միջակայքերի կառուցման մեթոդներ

1. Կենտրոնական վիճականիների մեթոդ

1. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ և $\mathcal{P}$ դասը բավարարում է $\left(A_\mu\right)$ - *պայմանը* :

Կենտրոնական վիճականի (θ պարամետրի համար) կոչվում է θ - ից կախված այնպիսի $\mathbb{G}_\theta(X^n)$ վիճականին, որը բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

1. ֆիքսված $x^n \in \mathcal{X}^n$ - ի համար $\mathbb{G}_\theta(x^n)$ ֆունկցիան **անընդհատ** է և **խիստ մոնոտոն** ըստ θ - ի,

2. $\mathbb{G}_\theta(X^n)$ վիճականու բաշխումը **կախված չէ** θ պարամետրից, այսինքն՝

$$\mathbb{P}_\theta(\mathbb{G}_\theta(X^n) \in B) := H(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}):$$

θ պարամետրից կախված $\mathbb{G}_\theta(X^n)$ վիճականին, որի **բաշխումը կախված չէ** θ - ից, կոչվում է **ոչ պարամետրական** կամ **բաշխումից** «**ազատ** » («**distribution free statistic** »):

Նշանակենք $h(y)$ - ով $\mathbb{G}_\theta(X^n)$ վիճականու $H(B)$ բաշխման ըստ μ չափի խտության ֆունկցիան (ենթադրենք՝ $\mu(dy) := dy$ - ը *Լեբեգի չափ է* $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$ տարածությունում):

Թեորեմ 10.1: *Դիցուք* $\mathbb{G}_\theta(X^n)$ *- ը **կենտրոնական վիճականի** է: Այդ դեպքում*

$$\int_{y^-}^{y^+} h(y)dy = 1 - \alpha \;\; (0 < \alpha < 1)$$

պայմանը բավարարող ցանկացած y^- *և* y^+ *թվերի համար*

$$\mathbb{G}_\theta(X^n) = y^- \quad \text{և} \quad \mathbb{G}_\theta(X^n) = y^+$$

հավասարումներով միարժեք որոշվում է $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* (θ^-, θ^+) ***վստահության միջակայքը:***

(θ^-, θ^+) **վստահության միջակայքը** կոչվում է **կենտրոնական**, եթե թեորեմում նշված y^- և y^+ թվերը բավարարում են հետևյալ պայմանը՝

$$\mathbb{P}_\theta(\mathbb{G}_\theta(X^n) \leq y^-) = \mathbb{P}_\theta(\mathbb{G}_\theta(X^n) \geq y^+) = \alpha/2 :$$

2. Որոշ մոդելների համար կենտրոնական վիճականիները *միշտ գոյություն ունեն* և գտնվում են բավականաչափ պարզ ձևով:

Թեորեմ 10.2: *Դիցուք $\mathbb{P}_\theta$ բաշխմանը համապատասխանող $\mathbb{F}_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X < x)$ բաշխման ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանները՝*

1. *ցանկացած ֆիքսված $\theta \in \Theta$- ի համար այն **անընդհատ** է ըստ x- ի ,*
2. *ցանկացած ֆիքսված $x \in \mathbb{R}$- ի համար **անընդհատ** է և **մոնոտոն** ըստ θ- ի :*

Այդ դեպքում

$$\mathbb{G}_\theta(X^n) := -\sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{F}_\theta(X_i)\text{ ՝}$$

կենտրոնական վիճականի *է :*

Եթե $y^- < y^+$ թվերը բավարարում են

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_{y^-}^{y^+} y^{n-1} e^{-y} dy = 1 - \alpha$$

պայմանը $(0 < \alpha < 1)$, ապա՝

$$\mathbb{G}_\theta(X^n) = y^- \quad \text{և} \quad \mathbb{G}_\theta(X^n) = y^+$$

*հավասարումների θ^- և θ^+ համապատասխան լուծումները կլինեն $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակի **վստահության միջակայքի սահմանները** :*

2. Տրված վիճականու բաշխման վրա հիմնված մեթոդ

Դիցուք $S = S(X^n)$ - ը որևէ վիճականի է, որի բաշխման ֆունկցիան նշանակենք՝

$$\mathbb{G}_\theta^S(x) := \mathbb{G}_\theta^S\big((-\infty\,, x)\big) = \mathbb{P}_\theta(S(X^n) < x):$$

S վիճականին **ըստ բաշխման մոնոտոն կախված** է θ պարամետրից, եթե ցանկացած $x \in \mathbb{R}$ և $\theta_1 < \theta_2$ համար տեղի ունի $\mathbb{G}_{\theta_1}^S(x) \geq \mathbb{G}_{\theta_2}^S(x)$ անհավասարությունը:

Դիցուք $\mathbb{G}_\theta^S(x)$ ֆունկցիան **անընդհատ** է ըստ x -ի և ըստ θ - ի: Այդ դեպքում, եթե այն նաև **ըստ բաշխման մոնոտոն կախված** է θ -ից, ապա ցանկացած $\gamma \in (0,\ 1)$ և $x \in \mathbb{R}$ համար

$$\mathbb{G}_\theta^S(x) = \gamma$$

հավասարումն ունի լուծում ըստ θ - ի: Նշանակենք այդ լուծումը $b(x,\ \gamma)$ - ով:

Թեորեմ 10.3: *Դիցուք $S = S(X^n)$ վիճականին բավարարում է հետևյալ պայմանները՝*

1. *այն **ըստ բաշխման մոնոտոն կախված** է θ պարամետրից,*
2. *$\mathbb{G}_\theta^S(x)$ ֆունկցիան **անընդհատ** է ըստ x - ի և ըստ θ - ի:*

Այդ դեպքում որոշ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ նշանակալիության մակարդակի համար $(0 < \alpha < 1)$

$$\mathbb{G}_\theta^S(\,S) = 1 - \alpha_2 \quad \text{և} \quad \mathbb{G}_\theta^S(\,S) = \alpha_1$$

*հավասարումների $\theta^- := b(S,\ 1 - \alpha_2)$ և $\theta^+ := b(S,\ \alpha_1)$ լուծումները կլինեն θ պարամետրի համար $(1 - \alpha)$ մակարդակի **վստահության սահմաններ**:*

Սովորաբար որպես S վիճականի վերցվում է θ պարամետրի որևէ գնահատական, օրինակ՝ *ՃՄ գնահատականը* :

Քանի որ $\mathbb{G}_\theta^S(S)$ վիճականին *կենտրոնական* է, ներկայացվող մեթոդը կենտրոնական վիճականիների մեթոդի *մասնավոր դեպքն* է, ընդ որում՝ $H(x) := \mathbb{U}_{0,1}(x)$:

145. Դիցուք X^n - ը նմուշ է

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x),\ \theta \in \mathbb{R}$$

խտության ֆունկցիայով «***շեղված***» ***ցուցչային բաշխումից***: Օգտվելով *կենտրոնական վիճակականիների* և *կետային գնահատականների* մեթոդներից՝ գտնել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* «**լավագույն**» (*փոքրագույն երկարություն ունեցող*) **վստահության միջակայքը**: Ինչպիսի՞ տեսք կունենա **կենտրոնական վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ $\mathbb{G}_\theta(X^n) := n\big(X_{(1)} - \theta\big)$ ՝ կենտրոնական վիճականի է:

146. Դիցուք X^n - ը նմուշ է θ պարամետրով ***ցուցչային բաշխումից***: Գտնել θ - ի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **ստորին** և **կենտրոնական վստահության միջակայքերը**:

147. Դիցուք X^n - ը նմուշ է θ պարամետրով ***ցուցչային բաշխումից***: Կառուցել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **ճշգրիտ վստահության միջակայքը** օգտվելով ա) $S_1(X^n) = X_1$ և բ) $S_2(X^n) = X_{(1)}$ վիճականիներից:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ $\mathbb{G}_\theta(X^n) := 2n\theta\overline{X^n}$ ՝ կենտրոնական վիճականի է :

148. Դիցուք X^n նմուշը վերցված է

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x), \quad \theta > 0$$

խտության ֆունկցիայով ***բետա բաշխումների դասից***: Գտնել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **ճշգրիտ վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ օգտագործել $\mathbb{G}_\theta(X^n) := -\sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{F}_\theta(X_i)$ կենտրոնական վիճականին:

149. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{W}(0,\ \theta,\ \lambda)$ նմուշ է *անհայտ* θ պարամետրով ***Վեյբուլի բաշխումից*** ($\lambda > 0$ - ն՝ *հայտնի է*): $\tau(\theta) = \theta^\lambda$ պարամետրական ֆունկցիայի համար գտնել $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **կենտրոնական վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ $\mathbb{G}_\theta(X^n) := 2\,\theta^\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i^\lambda$ ՝ կենտրոնական վիճականի է:

150. Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{F}$ նմուշը համապատասխանում է $\mathcal{F} = \{\mathbb{F}(x):\ x \in \mathbb{R}\}$ *անընդհատ բաշխման ֆունկցիաների դասից* $\mathbb{F} := \mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիային: Կառուցել **վստահության միջակայքը** $\theta := \zeta_p = \mathbb{F}^{-1}(p)$ ($\mathbb{F} \in \mathcal{F}$) p – քանորդիչի համար $(0 < p < 1)$ և գտնել նրա **վստահության մակարդակը**:

Ցուցում՝ օգտվել $\mathbb{P}\big(X_{(k)} < \zeta_p < X_{(m)}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\zeta_p \le X_{(k)}\big) - \mathbb{P}\big(X_{(m)} \le \zeta_p\big)$ ներկայացումից, որտեղ $k < m$ և խնդիր 9^*- ից:

151. Դիցուք X^n նմուշը վերցված է

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\, x^{\lambda-1} e^{-\theta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

խտության ֆունկցիայով *անհայտ* θ պարամետրով ***գամմա բաշխումների դասից*** ($\lambda >$ > 0 - ն՝ *հայտնի է*): Գտնել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **կենտրոնական վստահության միջակայքը** :

Ցուցում՝ օգտվել $g(\theta) = \theta^{-1}$ ֆունկցիայի $g^* = \overline{X^n}/\lambda$ *արդյունավետ գնահատականից* (տե՛ս խնդիր 131), և, ցույց տալ, որ $\mathbb{G}_\theta(X^n) := (n\theta\lambda) g^* = n\theta\overline{X^n} \sim \mathbb{\Gamma}(1\,,\, n\lambda)$՝ *կենտրոնական վիճականի* է :

152. Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{C}\,(\theta,\ \sigma)$ նմուշ է ***Կոշիի բաշխումից*** ($\sigma > 0$ - ն՝ *հայտնի* է): Գտնել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **կենտրոնական վստահության միջակայքը** (օգտագործել՝ ա) *կենտրոնական վիճականիների* մեթոդը, բ) $\overline{X^n}$ վիճականու բաշխման ֆունկցիան):

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ ա) $\mathbb{G}_\theta(X^n) := \frac{\overline{X^n} - \theta}{\sigma} \sim \mathbb{C}(0,\ 1)$, բ) $\mathbb{G}_\theta^{\overline{X^n}}(\overline{X^n}) \sim \mathbb{U}(0,\ 1)$, որտեղ $\mathbb{G}_\theta^{\overline{X^n}}(x) :=$ $= \mathbb{P}_\theta(\overline{X^n} < x)$:

153. $[0\,,\ \theta]$ միջակայքում *մեկ ծավալ* ունեցող ***հավասարաչափ բաշխումից*** (X_1) նմուշի միջոցով կառուցել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **ճշգրիտ վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ տե՛ս [2, օրինակ 7.19]:

154. Վերցնելով ***հավասարաչափ բաշխումից*** X^n նմուշին համապատասխանող $X_{(1)}$ կարգային վիճականին՝ կառուցել $\theta \in \mathbb{R}$ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **ճշգրիտ վստահության միջակայքը**, եթե՝ ա) $X^n \sim \mathbb{U}(\theta,\ \theta + 1)$, բ) $X^n \sim \mathbb{U}(\theta,\ 2\theta)$:

155. Ցույց տալ, որ ***հավասարաչափ բաշխումից*** վերցված $X^n \sim \mathbb{U}(\theta - 1/2\,,\ \theta +$ $+ 1/2)$ նմուշի միջոցով կառուցված $\left(X_{(1)},\, X_{(n)}\right)$ միջակայքը $\theta \in \mathbb{R}$ պարամետրի համար **վստահության միջակայք** է և գտնել նրա **վստահության մակարդակը**:

Ցուցում՝ օգտվել $\mathbb{P}_\theta\left(X_{(1)} < \theta < X_{(n)}\right) = \mathbb{F}_{X_{(1)}}(\theta) - \mathbb{F}_{X_{(n)}}(\theta)$ ներկայացումից:

156. Դիցուք X^n - ը նմուշ է

$$f_\theta(x) = 2\,\theta^{-2} x\, \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0$$

խտության ֆունկցիայով $\mathbb{P}_\theta$ բաշխումից: Գտնել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **վստահության միջակայքը** (օգտագործել՝ ա) *կենտրոնական վիճականիների* մեթոդը, բ) *ՃՄ գնահատականի* բաշխման ֆունկցիան):

Ցուցում՝ ա) օգտագործել $\mathbb{G}_\theta(X^n) =: -\sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{F}_\theta(X_i)$ *կենտրոնական վիճականին*, բ) օգտվել $\mathbb{G}_\theta^{T_n}(T_n) := \left(X_{(n)}/\theta\right)^{2n} \sim \mathbb{U}(0,\ 1)$ պայմանից, որտեղ $\mathbb{G}_\theta^{T_n}(x)$ - ը θ պարամետրի $T_n = X_{(n)}$ ՃՄ գնահատականի բաշխման ֆունկցիան է:

157. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}$ նմուշ է անհայտ $\mathbb{P}$ բաշխումից: Գտնել $\mu = X_{med}$ *միջնարժեքի* համար $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ **վստահության միջակայքի մակարդակը**:

Ցուցում՝ նկատել, որ $\left(X_{(n)} \le \mu\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \le \mu)$, $\left(X_{(1)} \ge \mu\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \ge \mu)$:

§ 11. Ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքեր

θ պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի $(0 < \alpha < 1)$ **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայք** կոչվում է

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(\theta_n^- < \theta < \theta_n^+) \geq 1-\alpha$$

պայմանը բավարարող (θ_n^-, θ_n^+) *պատահական միջակայքը* $\left(\theta_n^{\mp} := \theta^{\mp}(\alpha, X^n)\right)$: Եթե այդ անհավասարությունում տեղի **ունի հավասարության նշանը**, ապա (θ_n^-, θ_n^+) միջակայքը կոչվում է $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի **ճշգրիտ ասիմպտոտիկ վստահության միջակայք** (հետագայում կդիտարկվեն միայն **ճշգրիտ** ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքերը):

θ պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի $(0 < \alpha < 1)$ **վերին** (**ստորին**) **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայք** կոչվում է այնպիսի $(-\infty, \theta_n^+)$ (համապատասխանաբար՝ (θ_n^-, ∞)) *պատահական միջակայքը*, որը բավարարում է հետևյալ պայմանը՝

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(\theta < \theta_n^+) \geq 1-\alpha \text{ (համապատասխանաբար՝ } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(\theta_n^- < \theta) \geq 1-\alpha \text{):}$$

Ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքերի կառուցման մեթոդները

1. Ասիմպտոտիկ օպտիմալ գնահատականների վրա հիմնված մեթոդ

Թեորեմ 11.1: *Դիցուք $\theta_n^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}$ որոշակի **ասիմպտոտիկ նորմալ գնահատական** է θ պարամետրի համար, այսինքն՝*

$$\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0, \sigma^2(\theta)\right), \qquad n \to \infty,$$

*և ասիմպտոտիկ նորմալության $\sigma^2(\theta)$ գործակիցն **անընդհատ** է: Այդ դեպքում θ պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի $(0 < \alpha < 1)$ **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**՝ կլինի*

$$\Delta_\alpha(X^n) := \left(\theta_n^* \mp \frac{\sigma(\theta_n^*)}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right),$$

$z_{\alpha/2}$ - ը՝ $\mathbb{N}(0, 1)$ - ***ստանդարտ նորմալ բաշխման*** $\alpha/2$ մակարդակի ***կրիտիկական կետն*** *է, այսինքն՝*

$$\Phi\left(z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}:$$

*θ պարամետրի համար $\theta_n^* \in \mathbb{K}_{\Phi,2}$ գնահատականի միջոցով ստացված $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքի երկարությունը** հավասար է*

$$l_n := l(X^n) = \frac{2\,\sigma\left(\theta_n^*\right)}{\sqrt{n}}\, z_{\alpha/2}:$$

«**Լավագույն** » **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայք** θ պարամետրի համար կոչվում է $\mathbb{K}_{\Phi,2}$ դասից **ասիմպտոտիկ օպտիմալ** θ_n^* **գնահատականին** համապատասխանող **փոքրագույն** $\boldsymbol{l_n}$ **երկարություն** ունեցող միջակայքը:

$(\boldsymbol{RR})$ – ***պայմանների*** դեպքում θ պարամետրի $\hat{\theta}_n$ *ՃՄ գնահատականն* **ասիմպտոտիկ արդյունավետ** է, այսինքն ունի *նվազագույն* ասիմպտոտիկ նորմալության $\sigma^2(\theta) = [\mathbb{I}(\theta)]^{-1}$ գործակից, ուստի այն առաջացնում է «***լավագույն*** » ***ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը***՝

$$\Delta_\alpha(X^n) := \left(\hat{\theta}_n \mp \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n\mathbb{I}(\hat{\theta}_n)}}\right):$$

Այդ միջակայքի երկարությունը հավասար է $l_n = \frac{2z_{\alpha/2}}{\sqrt{n\mathbb{I}(\hat{\theta}_n)}}$, իսկ նմուշի **նվազագույն n_0 ծավալը**, որի դեպքում միջակայքի երկարությունը *չի գերազանցի* որոշակի l_0 թիվը, կլինի հավասար

$$n_0 = \left[\frac{4z_{\alpha/2}^2}{l_0^2 \cdot \mathbb{I}(\hat{\theta}_n)}\right] + 1,$$

որտեղ $[\cdot]$ - ը՝ թվի ամբողջ մասն է:

*Դիցուք բավարարվում են $(\boldsymbol{RR})$ - **պայմանները**, $\tau = \tau(\theta)$ - ն որոշակի սկալյար դիֆերենցելի ֆունկցիա է և $\tau'(\theta) \neq 0$, $\theta \in \Theta$: Այդ դեպքում $\tau(\theta)$ - ի **փոքրագույն երկարություն** ունեցող («**լավագույն**») $\gamma = 1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ մակարդակի **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**՝ կլինի*

$$\Delta_\alpha(X^n) = \left(\hat{\tau}_n \mp \frac{\tau'(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n\mathbb{I}(\hat{\theta}_n)}} z_{\alpha/2}\right) \tag{11.1}$$

*միջակայքը, որտեղ $\hat{\tau}_n := \tau(\hat{\theta}_n)$ - ը $\tau(\theta)$ ֆունկցիայի **ՃՄ գնահատականն** է:*

2. Ցրվածքը կայունացնող ձևափոխության վրա հիմնված մեթոդ

*Դիցուք բավարարվում են $(\boldsymbol{RR})$ - **պայմանները**: Եթե $\tau := \tau(\theta)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան **ցրվածքը կայունացնող ձևափոխություն** է (տես § 9), ապա $\tau(\theta)$ ֆունկցիայի $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակի **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**՝ կլինի*

$$\Delta_\alpha(X^n) = \left(\hat{\tau}_n \mp \frac{c}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right), \quad c = \frac{\tau'(\theta)}{\sqrt{\mathbb{I}(\theta)}} = const$$

միջակայքը:

3. Կենտրոնական սահմանային թեորեմի վրա հիմնված մեթոդ

Թեորեմ 11.2: *Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta$՝ նմուշ է $\mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ բաշխումից, $m(\theta) = \mathbb{E}_\theta X$ ֆունկցիան **անընդհատ հակադարձելի** է Θ բազմության կետերում և $\sigma^2(\theta) = \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X)$ ցրվածքն **անընդհատ** է: Այդ դեպքում $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակի **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը** θ պարամետրի համար՝ կլինի*

$$\Delta_\alpha(X^n) := \left(m^{-1}\left(\overline{X^n} \mp \frac{\sigma(\theta_n^*)}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)\right) \text{ կամ } \Delta_\alpha(X^n) := \left(m^{-1}\left(\overline{X^n} \pm \frac{\sigma(\theta_n^*)}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)\right)$$

միջակայքը:

Այդ ներկայացումները բխում են

$$\frac{\overline{X^n} - m(\theta)}{\sigma(\theta)}\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1), \qquad n \to \infty$$

կենտրոնական սահմանային թեորեմից:

158. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta,\ k)$ նմուշ է *անհայտ* θ պարամետրով ***բինոմական բաշխումից***: Գտնել θ - ի համար $\gamma = 1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**:

159. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{F} \in \mathcal{F} = \{\mathbb{F}(x)\colon\ x \in \mathbb{R}\}$ նմուշը համապատասխանում է $\mathcal{F}$ դասից $\mathbb{F} := \mathbb{F}(x)$ բաշխման ֆունկցիային: Գտնել $\theta = \mathbb{F}(x_0)$ ($\mathbb{F} \in \mathcal{F}, x_0 \in \mathbb{R}$՝ *ֆիքսված է*) պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ օգտվել θ - ի $\mathbb{F}_n^*(x_0) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,\,x_0)}(X_i)$ *ՃՄ գնահատականից*:

160. Օգտվելով $\mathbb{NB}\mathrm{in}\,(\theta,\ r)$ $(r \geq 1$ ՝ *հայտնի է*) ***բացասական բինոմական բաշխման*** X^n նմուշի միջոցով ստացված θ պարամետրի *ՃՄ գնահատականի ասիմպտոտիկ արդյունավետությունից*՝ կառուցել θ - ի համար $\gamma = 1-\alpha$ *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայք** :

Ցուցում՝ $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ [\mathbb{I}(\theta)]^{-1})$, որտեղ $\hat{\theta}_n = \frac{r}{r+\overline{X^n}}$, $\mathbb{I}(\theta) = \frac{r}{\theta^2(1-\theta)}$:

161. Կառուցել *հայտնի* m միջինով $\mathbb{N}(m,\ \theta^2)$ ***նորմալ մոդելի*** X^n նմուշի միջոցով θ *ստանդարտ շեղման* $\gamma = 1-\alpha$ *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայք**:

Ցուցում՝ օգտվել հետևյալ զուգամիտություններից, երբ $n \to \infty$.

ա) $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ [\mathbb{I}(\theta)]^{-1})$, որտեղ $\hat{\theta}_n := S_1 = \left[\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right]^{1/2}$, $\mathbb{I}(\theta) = \dfrac{2}{\theta^2}$,

բ) $\sqrt{n}\left(\ln\hat{\theta}_n - \ln\theta\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, գ) $\sqrt{n}\,(S_1^2 - \theta^2) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, 2\theta^4)$:

162. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$ նմուշ է *անհայտ* θ_1 և θ_2^2 պարամետրերով ***նորմալ բաշխումների դասից***: Օգտվելով *կենտրոնական սահմանային թեորեմից*՝ գտնել θ_2^2 պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ օգտվել $\sqrt{n}\,(S_n^2 - \theta_2^2) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ 2\theta_2^4)$ զուգամիտությունից:

163. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{C}(\theta,\ 1)$ $(\theta > 0)$ նմուշ է ***Կոշիի բաշխումից***: Գտնել θ պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 4.4 - ից:

164. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}$ նմուշ է $\mathbb{P}$ բաշխումից, որտեղ $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X) < \infty$ ։ Գտնել *անհայտ* $\theta = \mathbb{E}X$ միջինի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը** ։ Այնուհետև, ընդհանրացնելով խնդիրը՝ գտնել γ մակարդակի **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը** $\theta := \alpha_k = \mathbb{E}X^k$ սկզբնական մոմենտի համար ($\alpha_{2k} < \infty$):

Ցուցում՝ Ապացուցել, որ $\dfrac{\overline{X^n} - \theta}{S_n}\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1),\ \ S_n = \left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X^n})^2\right]^{1/2}$, տե՛ս նաև խնդիր 55 ։

165. ***n* *ազատության աստիճաններով*** $\boldsymbol{\chi^2}$ ***- բաշխում*** ունեցող պատահական մեծության նկատմամբ կատարվում է *մեկ դիտարկում*՝ $(X_1) \sim \mathbb{H}^2(n)$: Գտնել $\theta := n$ պարամետրի համար (մեծ n - ի դեպքում) $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **մոտավոր վստահության միջակայքը** ։

Ցուցում՝ օգտվել $\frac{X_1 - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1)$ զուգամիտությունից:

166 (կ). Սննդի ծառայության կառավարիչը ցանկանում է **95 %** *վստահությամբ* համոզվել, որ նախաճաշին իրացված սենդվիչների միջին քանակի *գնահատման սխալը* 10 - ից *ավելի չէ*: Որոշել այդ ենթադրությունը ստուգելու համար **նվազագույն անհրաժեշտ նմուշի ծավալը** ($\sigma = 40$):

167 (կ). Խանութի տնօրինությունը ցանկանում է իմանալ օրական հաճախորդների թվի *միջակայքային գնահատականը*: Հայտնի է, որ օրական հաճախորդների թվի *ստանդարտ շեղումը* հավասար է 15- ի: Քանի՞ օր կպահանջվի հետազոտությունները կատարելու համար, որպեսզի **95 %** *վստահությամբ* հնարավոր լինի պնդել, որ հաճախորդների *միջին թվի* գնահատականի **վստահության միջակայքի լայնությունը** հավասար է 8 - ի:

168 (կ). 400 էլեկտրական լամպերի ստուգման ժամանակ պարզվել է, որ դրանցից 40 - ը խոտանված են: Գտնել գլխավոր համախմբության *խոտանի հավանականության* **0.99** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը**:

169 (կ). 540 անգամ փորձեր կատարելիս դրանցից 216 - ում դիտվել է «դրական» արդյունք: Գտնել մեկ փորձում «դրական» արդյունքների թվի *ցրվածքի* **0.99** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ օգտվել (11.1) բանաձևից, որտեղ $\tau(\theta) := \sigma^2(\theta) = \theta(1-\theta)$:

170 (կ). Սոցիոլոգիական հարցման ժամանակ 300 մասնակցից 175 - ը իրենց ձայնը տվել են ներկա քաղաքապետի օգտին, իսկ մնացածը՝ ոչ: Գտնել սպասվող «կողմ » քվեարկողների *բաժնի* **0.99** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը**:

171 (կ). Կատարված են 100 անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում միաժամանակ նետվել են 4 մետաղադրամներ: Փորձերի ընթացքում «գերբ» - երի X_i *թվի բաշխումը* բերվում է հետևյալ աղյուսակում՝

x_i	0	1	2	3	4
ν_i	8	20	42	22	8

:

Գտնել «գերբ» - ը բացվելու *հավանականության* **95 %** - անոց **վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 158 :

172 (կ). Ուսումնասիրվում են տվյալ շրջանի 3 երեխա ունեցող ընտանիքները: Պատահական կերպով վերցված 160 այդպիսի ընտանիքներում տղա երեխա ունեցող ընտանիքների համար ստացվել է հետևյալ *հաճախականային բաշխումը*՝

Տղաների թիվը	0	1	2	3
Հաճախությունը	14	66	64	16

:

Ենթադրելով տվյալ շրջանում 3 երեխա ունեցող ընտանիքներում տղաների թվի ***բինոմական բաշխում*** ունենալու վարկածը՝ գտնել **0.99** *մակարդակով* այդ ընտանիքներում *տղա երեխա ունենալու հավանականության* **վստահության միջակայքը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 158 :

173 (կ). Որոշ տեսակի արտադրանքի մեծ խմբաքանակից հսկողության նպատակով պատահական կերպով վերցված 500 հատից 20 - ը *անորակ են* : Գտնել լրիվ խմբաքանակի *անորակ արտադրանքի բաժնի* **95 %** - անոց **վստահության միջակայքը**:

174 (կ). Որոշելու համար էլեկտրական լամպերի անխափան աշխատելու միջին տևողությունը՝ այդ խմբաքանակից պատահականության սկզբունքով վերցվել են 400 - ը, որոնց անխափան աշխատելու *միջին տևողությունը*՝ $\overline{x^n} = 1220$ ժամ է, իսկ *միջին քառակուսային շեղումը*՝ $s = 35$ ժամ: Գտնել լրիվ խմբաքանակի էլեկտրական լամպերի անխափան աշխատելու *միջին տևողության* **99 %** - անոց **վերին վստահության միջակայքը**:

175 (կ). 50 հրանոթից գնդակ արձակելու *միջին հեռավորությունը* 2500 մետր է, իսկ նմուշային *միջին քառակուսային շեղումը*՝ 45.7 մետր: Որոշել գնդակների արձակման *միջին հեռավորության* **95 %** - անոց **ստորին վստահության միջակայքը** :

176 (կ). Որոշակի պատահական մեծության $n = 40$ անկախ չափումների արդյունքում *նմուշային միջինի* և *ստանդարտ շեղման* վերաբերյալ ստացվել են հետևյալ տվյալները՝ $\overline{x^n} = 121$ և $s = 10.2$: Գտնել այդ պատահական մեծության *տեսական միջինի* **0.9** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը**:

177 (կ). Հսկողության բաժինը կատարել է որոշակի խմբաքանակից վերցված 200 գլանակի տրամագծերի չափումները: Արդյունքում ստացված տրամագծերի շեղումները իրական (*նոմինալ*) արժեքից բերված են հետևյալ աղյուսակում (*միկրոններով*)՝

Միջակայքեր	[-20,-15)	[-15,-10)	[-10,-5)	[-5,0)	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)
Գլանակների թիվը	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Համարելով *շեղումների* ***նորմալ բաշխվածությունը***՝ **0.99** *հուսալիությամբ* որոշել նմուշային s^2 ցրվածքի միջոցով *ամբողջ խմբաքանակի ցրվածքի* **գնահատման ճշգրտությունը** $(\delta := |s^2 - \sigma^2|)$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 162 :

178 (կ). Բերվում են 190 միջքաղաքային ավտոբուսների (մինչև դրանց շարժիչի առաջին լուրջ խափանումը) անխափան անցած ճանապարհների միջակայքային բացարձակ հաճախությունները.

Անխափան անցած ճանապարհը (10^3 կմ)	0 −	0.2−	0.4−	0.6−	0.8−	1.0−	1.2−	1.4−	1.6 -	1.8 -
Հաճախությունը	5	11	16	25	34	46	33	16	2	2

Գտնել (մինչև շարժիչի առաջին լուրջ խափանումը) տվյալ տեսակի ավտոբուսների համար նախատեսված (*տեսական*) *միջին անխափան անցնելու ճանապարհի* **95 % - - անոց վստահության միջակայքը**:

179 (կ). Անորակ պահածոներ հայտնաբերելու նպատակով ստուգել են պահածոների 250 արկղ: Արդյունքում ստացվել է հետևյալ շարքը՝

X_i	0	1	2	3	4	5
ν_i	150	50	30	10	7	3

որտեղ X_i - ն մեկ արկղում պարունակվող անորակ տուփերի թիվն է, որը ենթադրաբար ունի ***Պուասոնի բաշխում***, ν_i - ն՝ X_i հատ անորակ տուփ պարունակող արկղերի թիվն է: Գտնել մեկ արկղում պարունակվող *անորակ տուփերի միջին* (*տեսական*) *թվի* **95 %** - անոց **վստահության միջակայքը**:

180. Դիցուք $(X_1) \sim \mathbb{H}^2(n)$ ***n ազատության աստիճաններով*** χ^2 ***- բաշխում*** ունեցող պատահական մեծության *մեկ ծավալի* նմուշ է: Գտնել $\theta = n$ պարամետրի համար (*մեծ* n - ի դեպքում) **0.9** *մակարդակի* **մոտավոր վստահության միջակայքը**, եթե $x_1 = 157.4$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 165 :

§ 12. Նորմալ բաշխման պարամետրերի ճշգրիտ վստահության միջակայքեր

Թեորեմ 12.1 (*Ֆիշեր*): *Դիցուք* $X^n \sim \mathbb{N}(m,\sigma^2)$: *Ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝*

1. $\frac{\overline{X^n}-m}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathbb{N}(0,\ 1)$,
2. $\chi^2_{n-1} := \dfrac{(n-1)S_0^2}{\sigma^2} = \dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X^n})^2 \sim \mathbb{H}^2(n-1)$,
3. $\overline{X^n}$ *և* $S_0^2\ (S^2)$ *վիճակականիները* ***անկախ*** *են* :

Այստեղ $\chi^2_{n-1} \sim \mathbb{H}^2(n-1)$ ՝ $(\boldsymbol{n-1})$ ***ազատության աստիճաններով***

$$h_{n-1}(x) := \frac{1}{2^{(n-1)/2}\,\Gamma((n-1)/2)}\ x^{(n-1)/2\,-1}e^{-x/2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

խտության ֆունկցիայով $\boldsymbol{\chi^2}$**- բաշխում** ունեցող պատահական մեծություն է $\left(\mathbb{H}^2(n-1) := \Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)\right)$:

Թեորեմ 12.2 (*Ստյուդենտ*): *Դիցուք* $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \sigma^2)$: *Այդ դեպքում*

$$t_{n-1} := \frac{\overline{X^n}-m}{S_0}\sqrt{n} = \frac{\overline{X^n}-m}{S}\sqrt{n-1} \sim \mathbb{T}(n-1)$$

վիճակականին ունի $(\boldsymbol{n-1})$ ***ազատության աստիճաններով Ստյուդենտի*** (t-) ***բաշխում***, որի խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$s_{n-1}(x) := \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad x\in\mathbb{R} :$$

Ճշգրիտ վստահության միջակայքեր: *Մեկ նմուշի դեպք*

1. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$, $\theta\in\mathbb{R}$:

$\gamma = 1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ մակարդակի ***լավագույն*** (փոքրագույն երկարություն ունեցող) **կենտրոնական վստահության միջակայքը** θ պարամետրի համար $\Delta_\alpha(X^n) = \left(\overline{X^n} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,z_{\alpha/2}\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\overline{X^n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,z_{\alpha/2} < \theta < \overline{X^n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha : \tag{12.1}$$

$\left(\overline{X^n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,z_\alpha,\ \infty\right)$ և $\left(-\infty,\ \overline{X^n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,z_\alpha\right)$՝ **միակողմանի վստահության միջակայքերն** են՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\theta > \overline{X^n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,z_\alpha\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\theta < \overline{X^n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,z_\alpha\right) = 1-\alpha : \tag{12.2}$$

2. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$, $\theta>0$:

$\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի **կենտրոնական վստահության միջակայքը** θ^2պարամետրի համար $\Delta_\alpha(X^n) =$

$= \left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\ ,\ \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \theta^2 < \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right) = 1-\alpha, \quad S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2, \tag{12.3}$$

որտեղ $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ - ը և $\chi^2_{\alpha/2}(n)$ - ը **n ազատության աստիճաններով χ^2 - բաշխման** կրիտիկական կետերն են:

$\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_\alpha(n)}, \infty\right)$ և $\left(-\infty, \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}\right)$՝ **միակողմանի վստահության միջակայքերն** են՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\theta^2 > \frac{nS_1^2}{\chi^2_\alpha(n)}\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\theta^2 < \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}\right) = 1-\alpha : \tag{12.4}$$

3. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 > 0$:

ա) $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի **կենտրոնական վստահության միջակայքը** θ_2^2 պարամետրի համար $\Delta_\alpha(X^n) = \left(\frac{(n-1)\,S_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)\,S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\frac{(n-1)\,S_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \theta_2^2 < \frac{(n-1)\,S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha, \quad S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X^n})^2 : \tag{12.5}$$

$\left(\frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}, \infty\right)$ և $\left(-\infty, \frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$՝ **միակողմանի վստահության միջակայքերն** են՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_\alpha(n-1)} < \theta_2^2\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\theta_2^2 < \frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right) = 1-\alpha : \tag{12.6}$$

բ) $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի ***լավագույն*** **կենտրոնական վստահության միջակայքը** θ_1 պարամետրի համար $\Delta_\alpha(X^n) = \left(\overline{X^n} \mp \frac{S_0}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\overline{X^n} - \frac{S_0}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1) < \theta_1 < \overline{X^n} \mp \frac{S_0}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha, \tag{12.7}$$

որտեղ $t_{\alpha/2}(n-1)$ - ը $(\boldsymbol{n-1})$ **ազատության աստիճաններով Ստյուդենտի (t -) բաշխման** $\alpha/2$ մակարդակի կրիտիկական կետն է:

$\left(\overline{X^n} - \frac{S_0}{\sqrt{n}}\, t_\alpha(n-1), \infty\right)$ և $\left(-\infty, \overline{X^n} + \frac{S_0}{\sqrt{n}}\, t_\alpha(n-1)\right)$՝ **միակողմանի վստահության միջակայքերն** են՝

$$\mathbb{P}_\theta\left(\overline{X^n} - \frac{S_0}{\sqrt{n}}\, t_\alpha(n-1) < \theta_1\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\theta_1 < \overline{X^n} + \frac{S_0}{\sqrt{n}}\, t_\alpha(n-1)\right) = \gamma : \tag{12.8}$$

Ճշգրիտ վստահության միջակայքեր: *Երկու նմուշի դեպք*

1. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X, \sigma_X^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y, \sigma_Y^2)$ երկու *միմյանցից անկախ* նմուշներ են:

$\tau := \theta_X - \theta_Y$ պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի ***լավագույն*** **կենտրոնական վստահության միջակայքը** $\Delta_\alpha(X^n, Y^m) = \left(\overline{X^n} - \overline{Y^m} \mp \sigma\, z_{\alpha/2}\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\tau\left(\overline{X^n} - \overline{Y^m} - \sigma\, z_{\alpha/2} < \tau < \overline{X^n} - \overline{Y^m} + \sigma\, z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha :$$

2. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X,\ \theta^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y,\ \theta^2)$ ***անհայտ*** և ***հավասար ցրվածքներով*** երկու *միմյանցից անկախ* նմուշներ են:

$\tau = \theta_X - \theta_Y$ պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի ***լավագույն*** **կենտրոնական վստահության միջակայքը** $\Delta_\alpha(X^n, Y^m) = \left(\overline{X^n} - \overline{Y^m} \mp \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\ S_p t_{\alpha/2}(n+m-2)\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\tau\left(\tau \in \left(\overline{X^n} - \overline{Y^m} \mp \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\ S_p t_{\alpha/2}(n+m-2)\right)\right) = 1-\alpha,$$

որտեղ $S_p^2 := \frac{nS_X^2 + mS_Y^2}{n+m-2}$՝ θ^2 պարամետրի համար *ունակ* գնահատական է,

$$S_X^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X^n})^2,\ \ S_Y^2 := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y^m})^2 :$$

3. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X},\ \theta_{2X}^2)$ և $Y^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y},\ \theta_{2Y}^2)$ երկու *միմյանցից անկախ* ***միևնույն ծավալի*** նմուշներ են:

$\tau = \theta_X - \theta_Y$ պարամետրի համար $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի ***լավագույն*** **կենտրոնական վստահության միջակայքը** $\Delta_\alpha(X^n, Y^m) = \left(\overline{Z^n} \mp \frac{S_{0z}}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\tau\left(\overline{Z^n} - \frac{S_{0z}}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha/2}(n-1) < \tau < \overline{Z^n} + \frac{S_{0z}}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha, \quad S_{0z}^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z^n})^2,$$

$Z_i := X_i - Y_i$:

4. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X},\ \theta_{2X}^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y},\ \theta_{2Y}^2)$ երկու *միմյանցից անկախ* նմուշներ են:

$\tau := \theta_{2X}^2/\theta_{2Y}^2$ *ցրվածքների հարաբերության* համար $\gamma = 1-\alpha$ մակարդակի ***լավագուն*** **կենտրոնական վստահության միջակայքը** $\left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\ S_{1-\alpha/2}(m-1,\ n-1),\ \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\ S_{\alpha/2}(m-1,\ n-1)\right)$ միջակայքն է՝

$$\mathbb{P}_\tau\left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\ S_{1-\alpha/2}(m-1,\ n-1) < \tau < \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\ S_{\alpha/2}(m-1,\ n-1)\right) = 1-\alpha, \tag{12.9}$$

որտեղ

$$S_{0X}^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X^n})^2,\ \ S_{0Y}^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y^m})^2,$$

$S_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$ և $S_{\alpha/2}(m-1, n-1)$՝ ***F-բաշխման*** կրիտիկական կետերն են $\left(S_\alpha^{-1}(n,\ m) = \right.$
$\left. = S_{1-\alpha}(m,\ n)\right)$:

Մեկ նմուշի դեպք

181. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta, \sigma^2)$ նմուշը վերցված է *անհայտ* $\theta \in \mathbb{R}$ միջինով ***նորմալ բաշխումների դասից***: Գտնել դիտումների այն **նվազագույն** $n := n(l, \alpha)$ **ծավալը**, որի դեպքում $\gamma = 1 - \alpha$ *վստահության մակարդակով* θ պարամետրի գնահատման *ճըշտության չափը* (վստահության միջակայքի l_α երկարությունը) *չի գերազանցի* տվյալ l թիվը: Գտնել **վստահության մակարդակի կախվածությունը** l - ից և n - ից:

182* (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m, \theta^2)$ նմուշ է *անհայտ* θ^2 ցրվածքով ***նորմալ բաշխումների դասից***: Ցույց տալ, որ $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **վստահության միջակայքը** θ^2 պարամետրի համար $\Delta_\alpha(X^n) = \left(\frac{nS_1^2}{y_2}, \ \frac{nS_1^2}{y_1}\right)$ միջակայքն է, որտեղ $nS_1^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$, իսկ $y_1 < y_2$ թվերն ընտրվում են $\int_{y_1}^{y_2} h_n(y)dy = 1 - \alpha$ պայմանից ($h_n(y)$ - ը χ_n^2 - պատահական մեծության խտության ֆունկցիան է): Գտնել այդ միջակայքերից **փոքրագույն երկարություն** ունեցող $\Delta_\alpha^0(X^n)$ միջակայքը: Համընկնու՞մ է արդյոք այն *կենտրոնական վստահության միջակայքի* հետ:

Ցուցում՝ $\mathbb{G}_\theta(X^n) := \frac{nS_1^2}{\theta^2} \sim \mathbb{H}^2(n)$ - ը *կենտրոնական վիճականի* է: Այնուհետև, օգտվելով *Լագրանժի անորոշ գործակիցների* մեթոդից, մինիմալացնել $\int_{y_1}^{y_2} h_n(y)dy = 1 - \alpha$ պայմանի դեպքում y_2/y_1 հարաբերությունը (տե՛ս Հավելված 3):

183 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1, \theta_2^2)$: Ցույց տալ, որ $\Delta_\alpha^0(X^n) = \left(\overline{X^n} \mp \frac{S_0}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ *վստահության միջակայքը* θ_1 պարամետրի $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* բոլոր վստահության միջակայքերի մեջ **ունի փոքրագույն երկարությունը** :

Ցուցում՝ տե՛ս [2, օրինակ 7.10]:

184 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1, \theta_2^2)$: Ցույց տալ, որ $\left(\frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{\alpha_2^0}(n-1)}, \frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha_1^0}(n-1)}\right)$ միջակայքը, որտեղ α_1^0 և α_2^0 թվերը ($\alpha_1^0 > 0, \ \alpha_2^0 > 0, \ \alpha_1^0 + \alpha_2^0 = 1$) բավարարում են $\frac{\chi^2_{\alpha_2^0}(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha_1^0}(n-1)} = \exp\left\{\frac{1}{n}\left(\chi^2_{\alpha_2^0}(n-1) - \chi^2_{1-\alpha_1^0}(n-1)\right)\right\}$ պայմանը, θ_2^2 պարամետրի բոլոր $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* վստահության միջակայքերի մեջ **ունի փոքրագույն երկարությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 182* :

185. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ նմուշ է *անհայտ* $\theta_1 \in \mathbb{R}$ և $\theta_2 > 0$ պարամետրերով ***նորմալ բաշխումների դասից***: Ապացուցել, որ $\gamma = 1 - \alpha$ հավանականությունով հաջորդ $(n+1)$ - րդ փորձի X_{n+1} արդյունքը կգտնվի $\left(\overline{X^n} \mp \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\, S_n t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ միջակայքում, որտեղ S_n - ը՝ *նմուշային ստանդարտ շեղումն* է :

Ցուցում՝ օգտվել *Ֆիշերի թեորեմից*:

186. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta, \theta^2)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ ***նորմալ բաշխումների դասից*** նմուշ է: Գտնել θ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **կենտրոնական վստահության միջակայքը** (դիտարկել $\theta > 0$ և $\theta < 0$ դեպքերը):

187. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta, \sigma^2)$ նմուշը վերցված է *անհայտ* միջինով ***նորմալ բաշխումների դասից***: ա) Որքա՞ն պետք է լինի նմուշի **նվազագույն ծավալը**, որպեսզի θ պարամետրի **90 %** - անոց *վստահության միջակայքի երկարությունը չգերազանցի* $l = 1$ արժեքը $(\sigma = 3)$, բ) գտնել **վստահության մակարդակը**, եթե $n = 25$, $\sigma = l = 1$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 181:

188. X^n նմուշը վերցված է $\sigma = 3$ միջին քառակուսային շեղում ունեցող *անհայտ միջինով* ***նորմալ բաշխումների դասից*** : Գտնել այդ պատահական մեծության *միջինի* **95 %** - անոց **միակողմանի և երկկողմանի (կենտրոնական) վստահության միջակայքերը**, եթե նմուշի ծավալն է $n = 25$, իսկ նմուշային միջինը՝ $\overline{X^n} = 58$:

189. Դիտվել են $m = 9$ միջինով ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության

8.1, 10.4, 9.5, 8.9, 10.7

արժեքները: Գտնել այդ պատահական մեծության *անհայտ ցրվածքի* **95 %** - անոց **երկկողմանի կենտրոնական վստահության միջակայքը**:

190. Ըստ *անհայտ պարամետրերով* ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության

2.96, 3.07, 3.02, 2.98, 3.06

տվյալների գտնել *միջինի* և *ցրվածքի* համար **0.9** *մակարդակի* **միակողմանի** և **երկկողմանի (կենտրոնական) վստահության միջակայքերը** :

191. *Անհայտ* պարամետրերով ***նորմալ բաշխում*** ունեցող պատահական մեծության $n = 10$ ծավալի նմուշի միջոցով ստացված են հետևյալ բնութագրիչները՝ *միջինը*՝ 30.2, *միջին քառակուսային շեղումը*՝ 3.1: Գտնել այդ պատահական մեծության *միջինի* և *միջին քառակուսային շեղման* **99 %** - անոց **վստահության միջակայքերը**:

192 (կ). Որոշ ապրանքի *հինգ անգամ* անկախ կշռելու արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները (*գրամներով*)՝ 4.12, 3.92, 4.55, 4.04, 4.35: Համարելով չափման *սխալները* ***նորմալ բաշխված***՝ ստանալ նախատեսվող 6 - րդ կշռման **0.95** *մակարդակի* **կենտրոնական վստահության միջակայքը**:

193 (կ). Միատեսակ դիմադրությունների համախմբությունից հսկողության նպատակով ընտրված են 10 - ը: Չափումները տվել են իրական արժեքից *բացարձակ շեղումների* համար հետևյալ արժեքները (*կիլոօհմերով*)՝

Դիմադրության համարը	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Բացարձակ շեղումը	1	3	2	2	4	2	5	3	2	4

:

Համարելով, որ շեղումները բաշխված են ***նորմալ օրենքով***, գտնել **0.95 վստահությամբ** *նմուշային միջինի* միջոցով *տեսական միջինի* **գնահատման ճշտությունը**:

194 (կ). Մեկ օրվա ընթացքում ռեստորանում մատուցվող սննդի քանակը որոշելու համար ղեկավարությունը ցանկանում է իմանալ մեկ օրվա հաճախորդների միջին թիվը: Պատահականորեն ընտրված 25 օրերի ընթացքում օրական հաճախորդների միջին թիվը կազմել է 71 մարդ: Հաճախորդների թվի *տեսական ստանդարտ շեղումը*՝ $\sigma = 3.76$ (*գնահատվել է նախօրոք*): Գտնել հաճախորդների *միջին թվի* **99.7 %** - - անոց **վստահության միջակայքը** ենթադրելով այդ թվի ***նորմալ բաշխվածությունը*** :

195 (կ). Օդերևութաբանը պետք է ներկայացնի տվյալներ որոշակի օրվա սպասվող տեղումների քանակի վերաբերյալ: Պատահականորեն ընտրված նախորդ 16 տարիների այդ օրվա տեղումների մասին կատարված չափումների արդյունքներն են՝

11.75, 6.75, 3.25, 13.5, 0.00, 2.0, 18.75, 1.5,
0.00, 26.25, 8.5, 6.5, 4.25, 10.5, 12.5, 21.5 (*միլիմետր*):

Ենթադրելով տեղումների քանակի ***նորմալ բաշխվածությունը***՝ գտնել այդ օրվա համար *միջին սպասվող տեղումների քանակի* **95 %** - անոց **վստահության միջակայքը**:

196 (կ). Մարզահամալիրի նստատեղերն ավելացնելու համար անհրաժեշտ է որոշել մեկ միջոցառմանը մասնակցող հանդիսատեսների *միջին թիվը* և *փոփոխության աստիճանը* : Այդ նպատակով գրանցվել են պատահականորեն ընտրված 9 սպորտային միջոցառումների մասնակցող հանդիսատեսների թվերը՝

8.8, 14.0, 21.3, 7.9, 12.5, 20.6, 16.3, 14.1, 13.0 (*հազար մարդ*):

Ենթադրելով հանդիսատեսների թվի ***նորմալ բաշխվածությունը***՝ գտնել հանդիսատեսների *միջին թվի* և *ստանդարտ շեղման* **99 %** - անոց **վստահության միջակայքերը**:

Երկու նմուշի դեպք

197. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X,\ \sigma_X^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y,\ \sigma_Y^2)$ *հայտնի ցրվածքներով* ***նորմալ համախմբություններից*** երկու միմյանցից անկախ նմուշներ են: Գտնել $\tau = \theta_X - \theta_Y$ պարամետրի $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **միակողմանի վստահության միջակայքերը**:

198. $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X,\ \theta^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y,\ \theta^2)$ *անհայտ* և *հավասար ցրվածքներով* ***նորմալ բաշխումներից*** երկու միմյանցից անկախ նմուշներ են: Գտնել $\tau = \theta_X - \theta_Y$ պարամետրի $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **միակողմանի վստահության միջակայքերը**:

199. $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X},\ \theta_{2X}^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y},\ \theta_{2Y}^2)$ միմյանցից անկախ նմուշներ են: Գտնել $\tau = \theta_{2X}^2/\theta_{2Y}^2$ պարամետրի **միակողմանի վստահության միջակայքերը** ($\gamma = 1 - \alpha$):

200. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X},\ \theta_{2X}^2)$ և $Y^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y},\ \theta_{2Y}^2)$ երկու միմյանցից անկախ *միևնույն ծավալի* նմուշներ են: Գտնել $\tau = \theta_{1X} - \theta_{1Y}$ պարամետրի $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* **միակողմանի վստահության միջակայքերը**:

201. $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X,\ \theta^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y,\ \theta^2)$ երկու միմյանցից անկախ նմուշներ են, $n = 16$, $m = 9$, $\overline{x^n} = 12.57$, $s_x^2 = 0.85$, $\overline{y^m} = 11.87$, $s_y^2 = 0.84$: Գտնել **0.95** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը** $\tau = \theta_X - \theta_Y$ պարամետրի համար:

202. $n = 20$ և $m = 25$ ծավալներ ունեցող միմյանցից անկախ X^n և Y^m նմուշների համար ստացվել են $\overline{x^n} = 29.8$ և $\overline{y^m} = 34.7$ արժեքները: Ենթադրելով, որ նմուշները վերցված են $\sigma_X = 4.0$ և $\sigma_Y = 5.0$ *ստանդարտ շեղումներ* ունեցող ***նորմալ համախմբություններից***, գտնել **0.99** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը** $\mu_X - \mu_Y$ իրական *միջինների տարբերության* համար:

203. Տրված են $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X},\ \theta_{2X}^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y},\ \theta_{2Y}^2)$ միմյանցից անկախ նմուշներ: Գտնել **0.9** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը** θ_{2X}/θ_{2Y} *ստանդարտ շեղումների հարաբերության* համար, եթե $s_{0x}^2 = 4.5$, $s_{0y}^2 = 5.0$, $n = 10$, $m = 15$:

204. Համարելով, որ խնդիր 201 - ի տվյալները համապատասխանում են *միևնույն դասից* վերցված $X^n,\ Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$ նմուշներին, $Z^{n+m} = (X^n,\ Y^m)$ *միավորված* տվյալների օգնությամբ ստանալ *միջինի* և *ցրվածքի* **անշեղ գնահատականները** , ու կառուցել դրանց համար **0.95** *մակարդակի* **վստահության միջակայքերը**:

Ցուցում` $\overline{Z^{n+m}} := \frac{1}{n+m}(n\overline{X^n} + m\overline{Y^m})$, $S_Z^2 := \frac{1}{n+m-2}(nS_X^2 + mS_Y^2)$:

205 (կ). Գործարանն արտադրում է երկու տեսակի պլաստմասսա: Հայտնի է, որ այդ պլաստմասսաների ամրության աստիճանները բաշխված են ***նորմալ օրենքով*** $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ միավոր *ստանդարտ շեղումներով*: Պատահականորեն վերցված այդ երկու տիպի պլաստմասսաների $n_1 = 20$ և $n_2 = 25$ ծավալների նմուշների հետազոտությունը տվել է *միջին ամրության աստիճանների* համար հետևյալ արժեքները՝ $\overline{x^{n_1}} = 157$ և $\overline{x^{n_2}} = 155$: Գտնել այդ տեսակի պլաստմասսաների *իրական ամրության աստիճանների տարբերության* ($\mu_1 - \mu_2$ միջինների տարբերության) **95 %** - - անոց **վստահության միջակայքը**:

206 (կ). Մետաղի ամրությունը ստուգում են երկու տարբեր ծայրակալներ ունեցող սարքով: Բարձր ճնշման տակ ծայրակալները ներմղում են մետաղի մեջ, այնուհետև չափում առաջացած անցքի խորությունը: Ծայրակալները համեմատելու նպատակով վերցվել են 8 տարբեր մետաղյա նմուշներ, որոնցից յուրաքանչյուրը դակվել է այդ ծայրակալներով: Արդյունքում անցքերի խորությունների համար ստացվել են հետևյալ արժեքները (*պայմանական կոդավորված միավորներով*)՝

I ծայրակալ	4	3	3	4	4	3	2	2
II ծայրակալ	3	3	5	3	4	2	4	2

:

Ենթադրելով չափումների ***նորմալ բաշխվածությունը***՝ գտնել այդ ծայրակալների միջոցով ստացված *իրական անցքերի խորությունների տարբերության* **0.95 մակարդակի վստահության միջակայքը** (միջինների տարբերության *վստահության միջակայքը*):

207 (կ). Դիզելային վառելիքի որոշակի նմուշի մեջ ծծումբի պարունակության աստիճանը (% - ով) որոշելու համար երկու լաբորատորիայում կատարվել են հետազոտություններ: *Առաջինում* կատարված 6 անկախ չափումների արդյունքում ստացվել են հետևյալ արժեքները՝

0.869, 0.874, 0.867, 0.875, 0.870, 0.869 ($s_x^2 = 8.3 \cdot 10^{-4}$):

Երկրորդում կատարված նմանատիպ 5 չափումների արդյունքում ստացվել են՝

0.865, 0.870, 0.866, 0.871, 0.868 ($s_y^2 = 5.2 \cdot 10^{-4}$):

Ենթադրելով, որ չափումների սխալները բաշխված են ***նորմալ օրենքով***, ստանալ այդ լաբորատորիաներում կատարված չափումների *իրական* (*անհայտ*) *ցրվածքների հարաբերության* համար **0.9 մակարդակի վստահության միջակայքը** :

§ 13. Վարկածների ստուգում: Սկզբնական գաղափարներ

Ցանկացած ենթադրություն փորձի ընթացքում դիտվող պատահական մեծության (մեծությունների) **բաշխման տեսքի** կամ **բնութագրիչների** վերաբերյալ կոչվում է **վիճակագրական վարկած**, որն անվանվում է նաև **հիմնական** կամ **զրոյական վարկած** և նշանակվում է $\mathbb{H}_0$- ով: Հիմնական վարկածին հակադրվող վարկածը կոչվում է **երկընտրանքային (ալտերնատիվ)** կամ **մրցող վարկած** և նշանակվում է $\mathbb{H}_1$ - ով: Վարկածը կոչվում է **պարզ**, եթե այն միարժեք է որոշում պատահական մեծության (մեծությունների) $\mathbb{P}$ բաշխումը և **բարդ**՝ հակառակ դեպքում:

Բաշխման տեսքի վերաբերյալ $\mathbb{H}_0 : \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ վարկածը կոչվում է **պարամետրական**, եթե բաշխումների $\mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ դասը պարամետրական է : $\mathcal{P}_0$ և $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ դասերը կարելի է ներկայացնել

$$\mathcal{P}_0 := \{\mathbb{P}_\theta,\ \theta \in \Theta_0\} \quad \text{և} \quad \mathcal{P}_1 := \{\mathbb{P}_\theta,\ \theta \in \Theta_1\} \quad (\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1,\ \ \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset)$$

տեսքով, իսկ $\mathbb{H}_0$ և $\mathbb{H}_1$ վարկածները կգրվեն հետևյալ կերպ՝ $\mathbb{H}_0 :\ \theta \in \Theta_0$ և $\mathbb{H}_1 :\ \theta \in \Theta_1$:

$\mathbb{H}_0 :\ \theta \neq \theta_0$ վարկածը ($\theta_0 \in \mathbb{R}$) կոչվում է **երկկողմանի բարդ վարկած**, իսկ $\mathbb{H}_0^- :\ \theta < \theta_0$ և $\mathbb{H}_0^+ :\ \theta > \theta_0$՝ **միակողմանի** (համապատասխանաբար՝ **ձախակողմյան** և **աջակողմյան**) բարդ վարկածներ:

Ստուգել $\mathbb{H}_0 :\ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 :\ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1$ երկընտրանքայինը նշանակում է X պատահական մեծությանը համապատասխանող X^n նմուշի ընդունած x^n արժեքի հիման վրա կայացնել d_0 որոշում, որ այդ արժեքը *համաձայնեցվում* է $\mathbb{H}_0$ վարկածի հետ, կամ ընդունել d_1 որոշում՝ *հերքել* այդ վարկածը, այսինքն՝ ընդունել $\mathbb{H}_1$ վարկածը: Կամայական չափելի

$$\delta :\ \ \mathcal{X}^n \to \{d_0, d_1\} \quad (\mathcal{X} = X(\Omega))$$

արտապատկերում կոչվում է $\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$ - ի ստուգման **ոչ ռանդոմիզացված (ոչ պատահական) հայտանիշ**: $\delta -$ արտապատկերումն առաջացնում է $\mathcal{X}^n$ բազմության *տրոհում*՝

$$\mathcal{X}^n = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1, \qquad \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1 = \emptyset :$$

$\mathcal{X}_1 := \{x^n \in \mathcal{X}^n :\ \ \delta(x^n) = d_1\}$ բազմությունը կոչվում է ոչ ռանդոմիզացված հայտանիշին համապատասխանող **կրիտիկական տիրույթ**, իսկ $\mathcal{X}_0 := \{x^n \in \mathcal{X}^n :\ \ \delta(x^n) = d_0\}$ բազմությունը՝ **թույլատրելի տիրույթ**: $\varphi(x^n) := \mathbb{1}_{\mathcal{X}_1}(x^n)$ ֆունկցիան կոչվում է հայտանիշի **կրիտիկական ֆունկցիա**: Այսպիսով՝ եթե $x^n \in \mathcal{X}_1$ ($\varphi(x^n) = 1$), ապա ընդունվում է d_1 որոշում՝ հերքել $\mathbb{H}_0$ վարկածը: Հակառակ դեպքում, երբ $x^n \in \mathcal{X}_0$ կասենք, որ x^n արժեքը *չի հակասում* $\mathbb{H}_0$ վարկածը և ընդունվում է d_0 որոշումը:

$\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$ - ի ստուգման **հայտանիշը** կոչվում է **ռանդոմիզացված (պատահական)**, եթե նմուշի ընդունած x^n արժեքի հիման վրա $\mathbb{H}_0$ վարկածը *հերքելու* (d_1) կամ *ընդունելու* (d_0) որոշումների միջև ընտրությունը կատարվում է A և $\bar{A}$ երկու ելքով **լրացուցիչ փորձի (ռանդոմիզացիայի)** հիման վրա, ընդ որում այդ ընտրության հավանականությունը կախված է x^n - ից՝

$$\varphi(x^n) := \mathbb{P}(\delta(X^n) = d_1 |\ X^n = x^n), \qquad 1 - \varphi(x^n) = \mathbb{P}(\delta(X^n) = d_0 |\ X^n = x^n):$$

Եթե փորձն ավարտվում է A ելքով, ապա ընդունվում է d_1 որոշումը, հակառակ դեպքում՝ d_0 որոշումը:

$\varphi(x^n)$ *պայմանական հավանականությունը* կոչվում է ռանդոմիզացված հայտանիշի **կրիտիկական ֆունկցիա**: Մասնավորապես *ոչ ռանդոմիզացված դեպքում* $\varphi(x^n)$ ֆունկցիան ընդունում է միայն 0 և 1 արժեքներ և $\varphi(x^n) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_1}(x^n)$:

$\varphi(x^n)$ կրիտիկական ֆունկցիայով **ռանդոմիզացված** հայտանիշի **հզորության ֆունկցիա** կոչվում է $\mathcal{P}$ դասի վրա որոշված

$$W_\varphi(\mathbb{P}) := \mathbb{E}_\mathbb{P}\varphi(X^n) = \int\limits_{\mathcal{X}^n} \varphi(x^n)\mathbb{P}(dx^n) = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\mathbb{E}_\mathbb{P}\big(\mathbb{1}_{(\delta(X^n)=d_1)}|X^n\big)\right) = \mathbb{P}(\delta(X^n) = d_1), \qquad \mathbb{P} \in \mathcal{P}$$

ֆունկցիոնալը, որը ցույց է տալիս $\mathbb{H}_0$ վարկածը *հերքելու հավանականությունը*:

Ոչ ռանդոմիզացված դեպքում հզորության ֆունկցիան կլինի հավասար՝

$$W_\varphi(\mathbb{P}) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\varphi(X^n) = \mathbb{P}(X^n \in \mathcal{X}_1) = \mathbb{P}(\delta(X^n) = d_1):$$

Դիտարկված $\mathcal{P}_1$ դասի վրա $W_\varphi(\mathbb{P})$ հզորության ֆունկցիան կոչվում է **հայտանիշի հզորություն** և ցույց է տալիս երկընտրանքային վարկածը *հերքելու* հավանականությունը:

Դիցուք դիտարկվում է

$$\mathbb{H}_0: \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0 \ \text{ վարկածն ընդդեմ } \ \mathbb{H}_1: \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1$$

երկընտրանքայինը ստուգման հարցը: Այդ խնդիրը լուծելու ընթացքում հայտանիշի կիրառումը կարող է հանգեցնել *երկու տեսակի սխալների*.

$\mathbb{H}_0$ վարկածը **«հերքելու»** որոշում ընդունելը, երբ այն **իրականում ճիշտ** է **(I սեռի սխալ)** և $\mathbb{H}_0$ վարկածն «**ընդունելու**» որոշում կայացնելը, երբ այն **իրականում տեղի չունի (II սեռի սխալ)**: I և II սեռի սխալների հավանականությունները կոչվում են այդ **սխալների չափեր** և սահմանվում են հետևյալ ձևով

I սեռի սխալի չափը՝ $\alpha_\varphi(\mathbb{P}) := W_\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\varphi(X^n) = \mathbb{P}(\delta(X^n) = d_1), \quad \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0,$

II սեռի սխալի չափը՝ $\beta_\varphi(\mathbb{P}) := 1 - W_\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}(\delta(X^n) = d_0), \quad \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1$:

Ոչ ռանդոմիզացված դեպքում I և **II սեռի սխալների չափերը**՝ կլինեն.

I սեռի սխալի չափը՝ $\alpha_\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}(X^n \in \mathcal{X}_1), \quad X^n \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0,$

II սեռի սխալի չափը՝ $\beta_\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}(X^n \in \mathcal{X}_0), \quad X^n \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1$:

$\alpha := \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0} \alpha_\varphi(\mathbb{P})$ մեծությունը կոչվում է **հայտանիշի չափ**:

Դիտարկենք $\mathbb{K}_\alpha = \{\delta\colon \alpha_\varphi(\mathbb{P}) \le \alpha \text{ բոլոր } \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0\}$՝ α *չափի* **ռանդոմիզացված** հայտանիշների դասը:

$\varphi(x)$ կրիտիկական ֆունկցիայով $\mathbb{K}_\alpha$ դասից այն հայտանիշը, որը բոլոր երկընտրանքային բաշխումների համար **հերքում** է $\mathbb{H}_0$ վարկածը հայտանիշի α չափից *ոչ պակաս* հավանականությամբ, այսինքն՝

$$\begin{cases} W_\varphi(\mathbb{P}) \le \alpha\,, & \text{բոլոր } \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0 \\ W_\varphi(\mathbb{P}) \ge \alpha\,, & \text{բոլոր } \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1 \end{cases},$$

կոչվում է **անշեղ հայտանիշ** :

Հայտանիշը կոչվում է **ունակ**, եթե

$$\lim_{n\to\infty} W_\varphi(\mathbb{P}) = 1, \ \text{ բոլոր } \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1:$$

Վարկածների ստուգման հայտանիշի $\mathcal{X}_1$ կրիտիկական տիրույթը տրվում է որոշակի $T(X^n)$ վիճականու միջոցով և ունի հետևյալ տեսքերից մեկը՝

$$\{x^n \in \mathcal{X}^n\colon T(x^n) < c\}, \quad \{x^n \in \mathcal{X}^n\colon T(x^n) > c\} \ \text{ կամ } \ \{x^n \in \mathcal{X}^n\colon (T(x^n) < c_1) \cup (T(x^n) > c_2),\ c_1 < c_2\}:$$

$T_n := T(X^n)$ վիճականին կոչվում է **հայտանիշի վիճականի**, իսկ c, c_1 և c_2 թվերը՝ **կրիտիկական** կամ **եզրային կետեր**:

Հայտանիշի T_n վիճականին կոչվում է **ոչ պարամետրական** կամ «**բաշխումից ազատ**» (**ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական**), եթե նրա $\mathbb{H}$ բաշխումը (ասիմպտոտիկ բաշխումը) **կախված չէ** $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ բաշխումներից, այսինքն, եթե

$$\mathbb{G}^T(B) := \mathbb{P}(T(X^n) \in B) := \mathbb{H}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}^n), \quad \text{բոլոր } \ \mathbb{P} \in \mathcal{P} \text{ -ից}$$

$$\left(T_n \xrightarrow{d} \mathbb{H}\,, \quad n \to \infty\right):$$

Վարկածների ստուգման խնդիրներում գտնվում են հայտանիշի *ոչ պարամետրական* կամ *ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական* վիճականիներ և տվյալ *նշանակալիության* α $(0<\alpha<1)$ *մակարդակի* համար այնպիսի $c = c_\alpha$ *կրիտիկական* կամ *ասիմպտոտիկ կրիտիկական կետեր*, որ բոլոր $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_0$ բաշխումների համար բավարարվի

$$\mathbb{P}(X^n \in \mathcal{X}_{1\alpha}) \leq \alpha$$

պայմանը ($\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{1\alpha}$ կրիտիկական տիրույթն այստեղ ունի վերը նշված տեսքերից մեկը):

Այսպիսով՝ **վարկածների ստուգումը** կատարվում է հետևյալ կերպ՝
դիցուք x^n - ը X^n նմուշի դիտված արժեքն է: Եթե այդ արժեքը պատկանում է $\mathbb{P}(X^n \in \mathcal{X}_{1\alpha}) \leq \alpha$ պայմանը բավարարող կրիտիկական տիրույթին՝ $x^n \in \mathcal{X}_{1\alpha}$, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը *նշանակալիության* α *մակարդակով* **հերքվում** է (α - ն՝ 0 - ին շատ մոտ թիվ է), ընդ որում, եթե վարկածը իրականում *ճիշտ* է ($\mathbb{P} \in \mathcal{P}_0$), ապա հերքումը հայտանիշը կատարում է α - ի արժեքը *չգերազանցող* հավանականությամբ: Ընդհակառակը, եթե դիտված արժեքը պատկանում է *թույլատրելի տիրույթին*՝ $x^n \in \mathcal{X}_{0\alpha}$, ապա համարվում է, որ x^n արժեքը α *նշանակալիության մակարդակով* **համաձայնեցվում** է $\mathbb{H}_0$ վարկածի հետ:

Վարկածների ստուգումը կարելի է կատարել նաև օգտագործելով $\mathbb{P}$ - **արժեքի** գաղափարը.

$\mathbb{P}$ - **արժեք** ($\boldsymbol{P.V.}$) կամ **հասանելի նշանակալիության մակարդակ** կոչվում է նշանակալիության մակարդակի այն *փոքրագույն արժեքը*, որի դեպքում հայտանիշի $T_n := T(X^n)$ վիճականին **հերքում** է $\mathbb{H}_0$ վարկածը: Այլ կերպ ասած $\mathbb{P}$ - **արժեքը** $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ($\mathbb{P} \in \mathcal{P}_0$) սահմանվում է հետևյալ կերպ (պարամետրական վարկածների դեպքում)՝

ա) *աջակողմյան* $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > \theta_0$ (*ձախակողմյան* $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$) երկընտրանքային վարկածի դեպքում՝

$$\boldsymbol{P.V.} := \mathbb{P}(X^n \in \mathcal{X}_1) = \mathbb{P}(T_0 > t_0) = \mathbb{H}\big((t_0,\ \infty)\big)$$
$$\Big(\boldsymbol{P.V.} := \mathbb{P}(X^n \in \mathcal{X}_1) = \mathbb{P}(T_0 < t_0) = \mathbb{H}\big((-\infty,\ t_0)\big)\Big),$$

բ) *երկկողմանի* $\mathbb{H}_1 : \boldsymbol{\theta \neq \theta_0}$ երկընտրանքային վարկածի դեպքում՝

$$P.V. := 2\min\{\mathbb{P}(T_0 < t_0),\ \mathbb{P}(T_0 > t_0)\} = 2\min\big\{\mathbb{H}\big((-\infty, t_0)\big),\ \mathbb{H}\big((t_0, \infty)\big)\big\}$$
$\big(P.V. := 2\,\mathbb{H}\big((t_0,\ \infty)\big)$, եթե $\mathbb{H}$ բաշխումը *համաչափ է* 0 կետի նկատմամբ$\big)$,

որտեղ $T_0 \sim \mathbb{H}$՝ $\mathbb{H}$ բաշխում ունեցող պատահական մեծություն է, իսկ $t_0 = T(x^n)$ - ը՝ $T_n := T(X^n)$ վիճականու իրագործված արժեքն է, երբ $X^n(\omega) = x^n$:

Այսպիսով, եթե տվյալ α $(0<\alpha<1)$ *նշանակալիության մակարդակի* համար $\boldsymbol{P.V.} < \boldsymbol{\alpha}$, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է, հակառակ դեպքում՝ **չի հերքվում**:

208. Հետևյալ զույգերից որո՞նք **հիմնական** և **երկընտրանքային** վարկածների **զույգեր չեն**՝

ա) $\mathbb{H}_0: \mu = 10$, $\mathbb{H}_1: \mu > 10$, բ) $\mathbb{H}_0: \mu_1 - \mu_2 = 25$, $\mathbb{H}_1: \mu_1 - \mu_2 > 100$, գ) $\mathbb{H}_0: \mu = 120$, $\mathbb{H}_1: \mu = 150$, դ) $\mathbb{H}_0: p \neq 0.25$, $\mathbb{H}_1: p = 0.25$:

209. Դիցուք $X^1 = (X_1) \sim \mathbb{U}(0,\theta)$՝ $[0,\theta]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխված*** պատահական մեծության *մեկ ծավալի* դիտում է: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0: \theta = 2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta \neq 2$ երկընտրանքայինը: Ենթադրենք $\mathbb{H}_0$ վարկածը *հերքվում* է, եթե $X_1 \leq 0.1$ կամ $X_1 \geq 1.9$: Գտնել ա) **I սեռի սխալի չափը**, բ) **II սեռի սխալի չափը**, եթե $\theta = 2.5$, գ) $W_\varphi(\theta)$ **հզորության ֆունկցիան** և կառուցել դրա **գրաֆիկը**:

210. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից*** և ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > \theta_0$ երկընտրանքայինը: Ենթադրենք $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n\colon\ n \cdot \overline{x^n} \geq c\}$ կրիտիկական տիրույթով $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է: Կհերքվի՞, արդյոք այն ա) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$ մակարդակով, բ) $\boldsymbol{\alpha_1} = \mathbf{0.05}$ մակարդակով, եթե այն **հերքվում** է $\boldsymbol{\alpha_2} = \mathbf{0.01}$ *մակարդակով*:

211. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(0,\theta)$ նմուշ է $[0,\theta]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից***: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $\theta = 2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > 2$ երկընտրանքայինը: Ենթադրենք $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է, եթե $x_{(n)} \geq c$: Գտնել c - ի այն արժեքը, որի դեպքում **I սեռի սխալի չափը** լինի հավասար α - ի $(0 < \alpha < 1)$: Գտնել **հզորության ֆունկցիան** և ստուգել հայտանիշի **անշեղությունը** և **ունակությունը**:

212. ***Բետա բաշխում*** ունեցող $X^1 \sim \mathbb{B}\mathrm{et}(\theta,1)$ *մեկ ծավալի* նմուշի միջոցով ստուգվում է $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \leq 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > 1$ երկընտրանքայինի: Գտնել հայտանիշի **չափը** և **հզորության ֆունկցիան**, եթե $\mathbb{H}_0^-$ վարկածը **հերքվում** է $X_1 \geq 1-\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ դեպքում: Ստուգել հայտանիշի **անշեղությունը**:

213. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$, $n = 10$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \leq 1/2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > 1/2$ երկընտրանքայինը: Գտնել հայտանիշի **չափը** և **հզորության ֆունկցիան**, եթե կրիտիկական տիրույթն է՝ $\mathcal{X}_1 = \left\{x^n\colon\ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 6\right\}$:

Ցուցում՝ տե՛ս աղյուսակ 8 :

214. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$, $n = 20$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $\theta = 1/2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > 1/2$ երկընտրանքայինը: Վերցնելով որպես հայտանիշի կրիտիկական տիրույթ $\mathcal{X}_1 = \left\{x^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c\right\}$ բազմությունը, գտնել՝ ա) **I սեռի սխալի չափը**, երբ $c = 12$ $(c = 13)$, բ) $\boldsymbol{c}$ **կրիտիկական եզրը**, եթե *նշանակալիության մակարդակը* $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$:

Ցուցում՝ տե՛ս աղյուսակ 8 :

215. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$, $n = 20$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $\theta = 1/2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < 1/2$ երկընտրանքայինը: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* գտնել **II սեռի սխալի չափը** երբ $\theta = 0.3$, եթե կրիտիկական տիւույթը $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq c_\alpha\right\}$ բազմությունն է: Գտնել նաև $\boldsymbol{c_\alpha}$ – ն:

Ցուցում՝ տե՛ս աղյուսակ 8 :

216. Դիցուք $x^n = (-0.2,\ -0.9,\ -0.6,\ 0.1)$` $\mathbb{N}(\theta, 1)$ ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության նմուշ է: $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \leq 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > 0$ երկընտրանքայինը, համարելով որպես հայտանիշի կրիտիկական տիրույթ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > c_\alpha\right\}$ բազմությունը: Գտնել հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան** ու ստուգել նրա **անշեղությունը** և **ունակությունը**:

Ցուցում` օգտվել $T(X^n) = (\overline{X^n} - \theta)\sqrt{n} \sim \mathbb{N}(0,\ 1)$ պայմանից, օգտագործել $\mathbb{P}$ - արժեքը:

217. Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ *մակարդակով* 213 և 214 խնդիրներում բերված վարկածները, եթե $\overline{x^n} = 0.6$, և խնդիր 215 - ում բերված վարկածները, եթե $\overline{x^n} = 0.4$:

Ցուցում` 213 խնդրի պայմաններում որպես կրիտիկական տիրույթ վերցնել $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c_\alpha\right\}$:

§ 14. Երկու պարզ վարկածի ստուգում: Նեյման – Պիրսոնի ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}$ նմուշը համապատասխանում է բաշխումների $\mathcal{P}$ դասից որոշակի $\mathbb{P}$ բաշխմանը և $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$՝ $\mathcal{P}$ դասի որոշ ենթադաս է:

Ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0: \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0 \ \text{ վարկածն ընդդեմ } \ \mathbb{H}_1: \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1 \ \text{ երկընտրանքայինը,}$$

որտեղ $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ և α - ն $(0 < \alpha < 1)$ որոշակի *նշանակալիության մակարդակ* է :

Դիտարկենք α չափի **ռանդոմիզացված** հայտանիշների դասը

$$\mathbb{K}_\alpha := \left\{\delta: \ \alpha_\varphi(\mathbb{P}) \leq \alpha \ \text{ բոլոր } \ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0\right\}:$$

$\varphi^*(x)$ կրիտիկական ֆունկցիայով $\mathbb{K}_\alpha$ դասից այն δ^* – հայտանիշը, որի համար

$$\beta_\varphi(\mathbb{P}) = 1 - W_\varphi(\mathbb{P})$$

II սեռի սխալի չափը **բոլոր** $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_1$ - ից բաշխումների համար **փոքրագույնն** է (կամ $W_\varphi(\mathbb{P})$ հզորությունը՝ **մեծագույնը**) կոչվում է **օպտիմալ** կամ **հավասարաչափ** (ըստ բոլոր բաշխումների համար $\mathcal{P}_1$ դասից) **առավել հզոր (ՀԱՀ) հայտանիշ**:

Այսպիսով՝ $\varphi^*(x)$ կրիտիկական ֆունկցիայով **օպտիմալ հայտանիշը** բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

$$\begin{cases} W_{\varphi^*}(\mathbb{P}) := \mathbb{E}_\mathbb{P}\varphi^*(X^n) \leq \alpha\,, & \text{բոլոր} \quad \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0 \\ W_{\varphi^*}(\mathbb{P}) := \sup\limits_{\delta \in \mathbb{K}_\alpha} W_\varphi(\mathbb{P})\,, & \text{բոլոր} \quad \mathbb{P} \in \mathcal{P}_1 \end{cases}:$$

Այժմ ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}$ նմուշը համապատասխանում է ***երկու բաշխումից*** բաղկացած $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_0, \ \mathbb{P}_1\}$ դասից որոշակի բաշխմանը: Դիցուք $f_0(x)$ - ը ($p_0(x)$ - ը) և $f_1(x)$ - ը ($p_1(x)$ - ը)՝ $\mathbb{P}_0$ և $\mathbb{P}_1$ բաշխումների խտությունններն են, եթե X - ը *բացարձակ անընդհատ* պատահական մեծություն է (կամ $p_i(x) := \mathbb{P}_i(X = x)$, $i = 1, 2$ հավանականությունները, եթե X - ը՝ *դիսկրետ* պատահական մեծություն է):

Պահանջվում է կատարել ընտրություն

$$\mathbb{H}_0: \ \mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \quad \text{և} \quad \mathbb{H}_1: \ \mathbb{P} = \mathbb{P}_1$$

երկու ***պարզ*** վարկածների միջև:

Ճշմարտանմանության հարաբերության ֆունկցիա կոչվում է

$$\lambda^n := \lambda(x^n) = \frac{f_1(x^n)}{f_0(x^n)} \left(\frac{p_1(x^n)}{p_0(x^n)}\right), \qquad x^n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

ֆունկցիան, որտեղ $f_j(x^n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_j(x_i) \ \left(p_j(x^n) = \prod\limits_{i=1}^{n} p_j(x_i)\right)$, $j = 0, 1$՝ $\mathbb{P}_j$ բաշխումների ճշմարտանմանության ֆունկցիաներն են (համարվում է, որ $f_0(x^n) \ + \ f_1(x^n) > 0$):

Ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականի կոչվում է

$$\Lambda^n := \Lambda(X^n) = \frac{f_1(X^n)}{f_0(X^n)} \left(\frac{p_1(X^n)}{p_0(X^n)}\right)$$

պատահական մեծությունը:

Ճշմարտանմանության հարաբերության (ՃՀ) հայտանիշ կոչվում է

$$\varphi^*(x^n) := \begin{cases} 1, & \text{եթե } \lambda^n > c \\ \varepsilon, & \text{եթե } \lambda^n = c \quad (0 < \varepsilon < 1, \quad c > 0) : \\ 0, & \text{եթե } \lambda^n < c \end{cases}$$

կրիտիկական ֆունկցիայով *ռանդոմիզացված հայտանիշը* ($\lambda^n := \Lambda(x^n)$):

Թեորեմ 15.1 (***Նեյման – Է. Պիրսոնի ֆունդամենտալ լեմմա***): *Տրված α $(0 < \alpha < 1)$ նշանակալիության մակարդակի համար ($\mathbb{P}_0(\Lambda^n > 0) \geq \alpha$ պայմանի դեպքում) գոյություն ունեն $c_\alpha > 0$ և ε_α $(0 \leq \leq \varepsilon_\alpha \leq 1)$ թվերն այնպիսին, որ φ^* կրիտիկական ֆունկցիայով **ՃՀ հայտանիշը** (որտեղ $c := c_\alpha$, $\varepsilon := \varepsilon_\alpha$) α չափ ունեցող հայտանիշների $\mathbb{K}_\alpha^0 := \{\delta\colon W_\varphi(\mathbb{P}_0) = \alpha\}$ դասում **օպտիմալ** է (**առավել հզոր**), այսինքն՝*

$$\begin{cases} W_{\varphi^*}(\mathbb{P}_0) := \mathbb{E}_0\varphi^*(X^n) = \alpha, \\ W_{\varphi^*}(\mathbb{P}_1) = \sup\limits_{\delta\in\mathbb{K}_\alpha^0} W_\varphi(\mathbb{P}_1), \end{cases}$$

*որտեղ նշանակված է՝ $\mathbb{E}_0 := \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}$: Բացի այդ φ^*- հայտանիշն **անշեղ** է՝ $W_{\varphi^*}(\mathbb{P}_1) > \alpha$:*

218. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta, \sigma^2)$: Կառուցել α *չափի* **Նեյման – Պիրսոնի** հայտանիշը, որը ստուգի $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինը $(\theta_1 < \theta_0)$: Գտնել **II սեռի սխալի չափը**, հայտանիշի **հզորությունը** ու ստուգել նրա **անշեղությունը** և **ունակությունը**:

Ցուցում՝ (ոչ ռանդոմիզացված) հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն է՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n\colon \lambda^n \geq c\} = \{x^n\colon \overline{x^n} \leq c_1\}$, որտեղ $c_1 := \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1) + \frac{\sigma^2 \ln c}{n(\theta_1 - \theta_0)}$:

219. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m, \theta^2)$: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0: \theta^2 = \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta^2 = \theta_1^2$ երկընտրանքայինը, եթե $\theta_1^2 > \theta_0^2$ $(\theta_1^2 < \theta_0^2)$:

ա) Կառուցել այդ վարկածները ստուգող α *չափի* **առավել հզոր Նեյման – Պիրսոնի հայտանիշը**, բ) գտնել **I և II սեռի սխալների չափը**, գ) ստուգել հայտանիշի **անշեղությունը**:

220* (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\text{er}(\theta)$ $(0 < \theta < 1)$: Դիտարկվում է $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ երկընտրանքային վարկածը ստուգման խնդիրը $(\theta_1 < \theta_0)$:

ա) Կառուցել այդ վարկածները ստուգող α *չափի* **Նեյման - Պիրսոնի հայտանիշը**, բ) գտնել այդ հայտանիշի **հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

221. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\text{er}(\theta)$ $(0 < \theta < 1)$: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինը, երբ $\theta_1 < \theta_0$: Կառուցել այդ վարկածները ստուգող **ասիմպտոտիկ** α *չափի* $(0 < \alpha < 1)$ **հայտանիշը** և գտնել դրա **հզորությունը**:

Ցուցում՝ օգտվել *Մուավր – Լապլասի* ինտեգրալային սահմանային թեորեմից:

222* **(մ).** Դիցուք X^n - ը նմուշ է $\mathbb{P}(\theta)$ ***Պուասոնի բաշխումից***: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* **Նեյման - - Պիրսոնի հայտանիշը** $(\theta_1 > \theta_0)$: Գտնել հայտանիշի **հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 220* :

223. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}(\theta)$: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինը ստուգող **ասիմպտոտիկ** α *չափի* **հայտանիշը** և գտնել դրա **հզորությունը**, երբ $\theta_1 > \theta_0$: Ի՞նչ տեղի կունենա $\theta_1 < \theta_0$ դեպքում:

224* **(մ).** Տրված է $X^n \sim \mathbb{B}\text{in}\,(\theta,\ k),\ 0 < \theta < 1$ նմուշ ***բինոմական բաշխումից***: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* **Նեյման – Պիրսոնի հայտանիշը** և գտնել դրա **հզորությունը** $(\theta_1 > \theta_0)$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 220* :

225 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշ է ***ցուցչային բաշխումից***: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* **Նեյման – – Պիրսոնի հայտանիշը** $(\theta_1 > \theta_0)$ և գտնել դրա **հզորությունը**:

Ցուցում՝ օգտվել $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbb{H}^2(2n)$ հատկությունից:

226 (մ). ***Կոշու բաշխումից*** $(X_1) \sim \mathbb{C}(\theta, 1)$ *մեկ դիտումի* միջոցով կառուցել $\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R} : \lambda(x) \geq c\}$ կրիտիկական տիրույթով $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* **ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը**: Գտնել $\mathcal{X}_1$- ի տեսքը և **I** ու **II** **սեռի սխալների չափը**, երբ $c = 1$ և $c = 2$:

227 (մ). $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1,\ \sigma_1^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_2,\ \sigma_2^2)$ ***նորմալ բաշխումների*** դասերից նմուշներ են: $T_{n,m} \coloneqq \frac{1}{\sigma}(\overline{X^n} - \overline{Y^m})$ վիճականու օգնությամբ $(\sigma^2 \coloneqq \frac{1}{n}\,\sigma_1^2\ +\ \frac{1}{m}\,\sigma_2^2\ )$ ՝

ա) կառուցել $\mathbb{H}_0 :\ \Delta = \theta_1 - \theta_2 = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \Delta > 0$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* **հայտանիշը**,

բ) X^n նմուշի *հաստատուն* n ծավալի դեպքում և *տվյալ* α և β թվերի համար $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1)$ գտնել Y^m նմուշի այն **նվազագույն m_0 ծավալը**, որի դեպքում **I և II սեռի սխալների չափը** *չի գերազանցի*, համապատասխանաբար, α և β թվերը:

Ցուցում՝ նկատել, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում $T_{n,m} \sim \mathbb{N}(0,\ 1)$, իսկ $\mathbb{H}_1$ վարկածի դեպքում՝ $T_{n,m} \sim \mathbb{N}(\Delta/\sigma\ ,\ 1)$, և, օգտվել խնդիր 218 - ից, համարելով $T \coloneqq T_{n,m}$ վիճականին որպես T պատահական մեծության ***նորմալ բաշխումների դասից*** $T^1 \coloneqq T \sim \mathbb{N}(\theta,\ 1)$ *մեկ ծավալի* նմուշ:

228. $\mathbb{P}$ բաշխում ունեցող պատահական մեծության $n = 1$ *ծավալի* (X_1) նմուշի միջոցով ստուգվում է այդ բաշխման $f(x)$ խտության ֆունկցիայի վերաբերյալ $\mathbb{H}_0$: $f(x) = f_0(x)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $f(x) = f_1(x)$ երկընտրանքայինը: Կառուցել այդ վարկածները ստուգող α *չափի* $(0 < \alpha < 1)$ **առավել հզոր հայտանիշը** և գտնել դրա **հզորությունը**, եթե $f_0(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, $f_1(x) = 2(1 - x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$:

229. Դիցուք (X_1) - ը $f(x)$ խտության ֆունկցիայով $\mathbb{P}$ բաշխումից *միավոր ծավալի* նմուշ է: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $f(x) = f_0(x)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $f(x) = f_1(x)$ երկընտրանքայինը, որտեղ $f_0(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, $f_1(x) = 2x\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$: Կառուցել այդ վարկածները ստուգող α *չափի* **առավել հզոր հայտանիշը** և գտնել **II սեռի սխալի չափը**:

230. Դիցուք (X_1) - ը *միավոր ծավալի* նմուշ է $\mathbb{P}$ բաշխումից: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $X_1 \sim \mathbb{U}(0,1)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $X_1 \sim \mathbb{E}(1)$ երկընտրանքայինը: Կառուցել այդ վարկածները ստուգող α *չափի* **առավել հզոր հայտանիշը** և գտնել դրա **հզորությունը**:

231. θ պարամետրով ***ցուցչային բաշխումից*** $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշի միջոցով կառուցել **առավել հզոր ասիմպտոտիկ** α *չափի* $(0 < \alpha < 1)$ **հայտանիշը**, որը տարբերի $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածը $\mathbb{H}_1$: $\theta = \theta_1$ երկընտրանքայինից, որտեղ $\theta_1 > \theta_0$: Գտնել կառուցված հայտանիշի **հզորության սահմանը**, երբ $n \to \infty$:

232. θ $(0 < \theta < 1)$ պարամետրով ***երկրաչափական բաշխումից*** $X^n \sim \mathbb{G}(\theta)$ նմուշի միջոցով կառուցել **առավել հզոր ասիմպտոտիկ** α *չափի* հայտանիշ, որը տարբերի $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածը $\mathbb{H}_1$: $\theta = \theta_1$ երկընտրանքայինից, որտեղ $\theta_1 > \theta_0$: Գտնել կառուցված հայտանիշի **հզորության սահմանը**, երբ $n \to \infty$:

233. Դիցուք (X_1) - ը $\mathbb{B}\mathrm{et}(\theta, 1)$ ***բետա բաշխումից*** *միավոր ծավալի* նմուշ է: Կառուցել $\mathbb{H}_0$: $\theta = 2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta = 1$ երկընտրանքայինը ստուգող **Նեյման – Պիրսոնի** α *չափի* **առավել հզոր հայտանիշը** և գտնել դրա **հզորության ֆունկցիան**:

234. Դիցուք (X_1) - ը

$$f_\theta(x) = (1 + \theta)x^\theta\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \quad (\theta > -1)$$

խտության ֆունկցիայով $\mathbb{B}\mathrm{et}(\theta + 1, 1)$ ***բետա բաշխումից*** *միավոր ծավալի* դիտում է: Գտնել α *չափի* **առավել հզոր հայտանիշը**, որը տարբերի $\mathbb{H}_0$: $\theta = 0$ վարկածը $\mathbb{H}_1$: $\theta = 1$ մրցող վարկածից և գտնել դրա **հզորության ֆունկցիան**:

235. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}(\theta)$, $n = 10$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***: Գտնել $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.055}$ *չափի* **առավել հզոր հայտանիշը**, որը տարբերի $\mathbb{H}_0$: $\theta = 1/2$ վարկածը $\mathbb{H}_1$: $\theta = 1/4$ երկընտրանքայինից: Հաշվել հայտանիշի **հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 220* :

236. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}(\theta)$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $\theta = 0.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta = 0.7$ երկընտրանքայինը, եթե $n = 20$, $\sum_{i=1}^{20} x_i = 12$: Գտնել **II սեռի սխալի չափը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 220* :

237. $n = 100$ ծավալ ունեցող $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}(\theta)$ նմուշի միջոցով $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$ և $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ *նշանակալիության մակարդակներով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta = 1/2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta = 3/4$ մրցող վարկածը, եթե $\sum_{i=1}^{20} x_i = 60$ և հաշվել **II սեռի սխալի չափը** :

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 221 :

238. Կատարվում են անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում *դրական* ելքի հավանականությունը հավասար է p - ի: Կառուցել **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $p = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta = 0.01$ երկընտրանքայինը ստուգող **հայտանիշը**, գտնել **I և II սեռի սխալների չափը**, և, նմուշի այն **նվազագույն ծավալը**, որի դեպքում *I և II սեռի սխալների չափը* **չգերազանցի 0.01** թիվը:

239 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\theta)$ նմուշ է ***Պուասոնի բաշխումից***: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $\theta = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta = 2$ երկընտրանքայինը, եթե $n = 10$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 16$: Գտնել հայտանիշի **հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 222* :

240. Տրված է $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\theta)$ նմուշը ***Պուասոնի բաշխումից***, որտեղ $n = 100$: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta = 9$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta = 16$ երկընտրանքայինը, եթե $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1000$:

241 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\theta)$՝ նմուշ է ***Պուասոնի բաշխումից***, որտեղ $n = 10$: Գտնել $\mathbb{H}_0$: $\theta = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta = 2$ երկընտրանքայինը ստուգող $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$ *չափի* **Նեյման - Պիրսոնի (ռանդոմիզացված) հայտանիշը** և դրա **հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 222* :

242. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ 9),\ n = 25,\ \overline{x^n} = 17.5$: Դիտարկվում է $\mathbb{H}_0 :\ \theta = 15$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 :\ \theta = 20$ երկընտրանքայինը ստուգման խնդիրը: Պահանջվում է՝

ա) կառուցել այդ վարկածները ստուգող $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *չափի* **առավել հզոր հայտանիշը** և գտնել **I և II սեռի սխալների չափը**,

բ) գտնել նմուշի այն **նվազագույն ծավալը**, որի դեպքում **I սեռի սխալի չափը** լինի հավասար **0.01** - ի, իսկ **II սեռի սխալի չափը**՝ **0.05** - ի:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 218 :

243. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}\left(3,\ \theta^2\right),\ n = 40,\ \overline{x^n} = 2.7,\ \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x^n}\right)^2 = 250$: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0 :\ \theta^2 = 9$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 :\ \theta^2 = 4$ երկընտրանքայինը և հաշվել **հայտանիշի հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 219 :

244. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$: Ստուգել $\mathbf{0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0 :\ \theta = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 :\ \theta = 1/2$ երկընտրանքայինը, եթե $n = 10,\ n\,\overline{x^n} = 15$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 225 :

245. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշ է ***ցուցչային բաշխումից***, $n = 100$: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0 :\ \theta = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 :\ \theta = 2$ երկընտրանքայինը, եթե $\overline{x^n} = 0.7$: Գտնել **հայտանիշի հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 231 :

§ 15. Միակողմանի բարդ վարկածների ստուգում

Դիտարկենք վարկածների ստուգման խնդիրը, երբ $\mathbb{H}_0$ և $\mathbb{H}_1$ վարկածները *միակողմանի բարդ վարկածներ* են՝

$$\mathbb{H}_0^-:\ \theta \le \theta_0 \ \text{ ընդդեմ }\ \mathbb{H}_1^+:\ \theta > \theta_0 \quad \text{կամ} \quad \mathbb{H}_0^+:\ \theta \ge \theta_0 \ \text{ ընդդեմ }\ \mathbb{H}_1^-:\ \theta < \theta_0 \ :$$

Բաշխումների $\mathcal{P}$ դասն ունի **մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն**, եթե գոյություն ունի այնպիսի $T(x^n)$ ֆունկցիա, որ $\theta > \theta'$ պայմանը բավարարվելու դեպքում $\lambda(x^n) := \frac{f_\theta(x^n)}{f_{\theta'}(x^n)} \left(\frac{p_\theta(x^n)}{p_{\theta'}(x^n)}\right)$ ճշմարտանմանության հարաբերությունը **մոնոտոն** ֆունկցիա է $T(x^n)$ - ից (որոշակիության համար կհամարենք, որ $\lambda(x^n)$ - ը՝ **մոնոտոն աճող** ֆունկցիա է $T(x^n)$ - ից):

Սահմանումից հետևում է, որ կամայական $c > 0$ - ի և $\theta > \theta'$- ի համար ճիշտ է համարժեքությունը՝

$$(x^n:\ \lambda(x^n) \ge c) \ \Leftrightarrow \ (x^n:\ T(x^n) \ge c_1),$$

որտեղ $c_1 := c_1(n, c, \theta, \theta')$:

Թեորեմ 15.1: *Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$ և $\mathcal{P}$ դասն ունի **մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն** ըստ $T(x^n)$ ֆունկցիայի: Այդ դեպքում $\mathbb{K}_\alpha := \{\delta:\ \alpha_\varphi(\theta) \le \alpha,\ \ \theta \le \theta_0\}$ դասում **գոյություն ունի** $\mathbb{H}_0^-: \theta \le \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+:\ \theta > \theta_0$ երկընտրանքայինը ստուգող*

$$\varphi^*(x^n) := \begin{cases} 1, & \text{եթե } \ T(x^n) > c_1 \\ \varepsilon, & \text{եթե } \ T(x^n) = c_1 \\ 0, & \text{եթե } \ T(x^n) < c_1 \end{cases}, \tag{15.1}$$

*կրիտիկական ֆունկցիայով **օպտիմալ** (հավասարաչափ առավել հզոր) **ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ (ՃՀՀ)**, որտեղ $c_1 := c_1(\alpha) \in \mathbb{R}$ և $\varepsilon := \varepsilon(\alpha)$ թվերը $(0 < \varepsilon < 1)$ որոշվում են*

$$\mathbb{E}_0\varphi^*(X^n) = \mathbb{P}_0(T(X^n) > c_1) \ + \ \varepsilon\mathbb{P}_0(T(X^n) = c_1) = \ \alpha$$

պայմանից:

$\mathbb{H}_0^+:\ \theta \ge \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-:\ \theta < \theta_0$ երկընտրանքայինը ստուգող *հավասարաչափ առավել հզոր* հայտանիշն ունի

$$\varphi^*(x^n) := \begin{cases} 1, & \text{եթե } \ T(x^n) < c_1 \\ \varepsilon, & \text{եթե } \ T(x^n) = c_1 \\ 0, & \text{եթե } \ T(x^n) > c_1 \end{cases} \tag{15.2}$$

տեսքը, որտեղ

$$\mathbb{E}_0\varphi^*(X^n) = \ \mathbb{P}_0(T(X^n) < c_1) \ + \ \varepsilon\mathbb{P}_0(T(X^n) = c_1) = \ \alpha :$$

Մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն ունեցող բաշխումների դասի կարևոր մասնավոր դեպքն է **ցուցչային** $\mathcal{E} = \{\mathbb{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ **դասը**, որի $f_\theta(x)$ խտության ֆունկցիան ($p_\theta(x)$ հավանականությունը) ունի հետևյալ ներկայացում՝

$$f_\theta(x)\ \big(p_\theta(x)\big) = h(x)\exp\{A(\theta)S(x) + B(\theta)\}, \quad x \in \mathcal{X} : \tag{15.3}$$

Եթե $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{E}$, ապա $\lambda(x^n)$ **ճշմարտանմանության հարաբերությունը** բոլոր $\theta > \theta'$ - ների համար կներկայացվի

$$\lambda(x^n) := \frac{f_\theta(x^n)}{f_{\theta'}(x^n)}\left(\frac{p_\theta(x^n)}{p_{\theta'}(x^n)}\right) = \exp\{\big(A(\theta) - A(\theta')\big)T(x^n) + n\big(B(\theta) - B(\theta')\big)\}$$

տեսքով և այն կլինի **մոնոտոն կախված** $T(x^n) := \sum_{i=1}^{n} S(x_i)$ - ից, եթե $A(\theta)$ - ն **մոնոտոն ֆունկցիա** է :

Հետևանք 15.2: *Դիցուք* $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{E}$*, որտեղ* $A(\theta)$ *- ն* ***մոնոտոն ֆունկցիա*** *է*: Այդ դեպքում՝

$\mathbb{H}_0^-$: $\theta \le \theta_0$ *վարկածն ընդդեմ* $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > \theta_0$ *երկընտրանքայինը ստուգող* ***հավասարաչափ առավել հզոր (օպտիմալ) ՃՀՀ*** *- ը* ***մոնոտոն աճող*** $A(\theta)$ *ֆունկցիայի դեպքում ունի* (15.1) *տեսքը, իսկ եթե այն* ***մոնոտոն նվազող*** *է՝ ապա* (15.2) *տեսքը* :

$\mathbb{H}_0^+$: $\theta \ge \theta_0$ *վարկածն ընդդեմ* $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$ *երկընտրանքայինը ստուգման դեպքում* ***հավասարաչափ առավել հզոր ՃՀՀ*** *- ն ունի* (15.2) *տեսքը, եթե* $A(\theta)$ *- ն* ***մոնոտոն աճող*** *է և* (15.1) *տեսքը, եթե այն* ***մոնոտոն նվազող*** *է* :

246. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$: Կառուցել ա) $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \le \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > \theta_0$ - ի և բ) $\mathbb{H}_0^+$: $\theta \ge \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ**: Գտնել այդ հայտանիշների **հզորության ֆունկցիաները** և ստուգել դրանց **ունակությունը** և **անշեղությունը**:

Ցուցում՝ բերել դասը *ցուցչային տեսքի* և օգտվել հետևանք 15.2 - ից:

247. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$: Կառուցել $\mathbb{H}_0^+$: $\theta^2 \ge \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta^2 < \theta_0^2$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշը**: Գտնել այդ հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան** և ստուգել **անշեղությունը**:

Ցուցում՝ բերել դասը *ցուցչային տեսքի* և օգտվել հետևանք 15.2 - ից և խնդիր 219 - ից:

248* **(Մ).** ***Բինոմական բաշխումների*** դասից $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta,\ k)$ նմուշի միջոցով կառուցել α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ** հետևյալ վարկածները ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \le \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > \theta_0$, բ) $\mathbb{H}_0^+$: $\theta \ge \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

249. 248* խնդրի պայմաններում գտնել **ասիմպտոտիկ ՀԱՀ հայտանիշները**:

Ցուցում՝ օգտվել *կենտրոնական սահմանային թեորեմից* :

250* **(Մ).** Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\theta)$: Կառուցել α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ** հետևյալ վարկածները ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \le \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > \theta_0$ և բ) $\mathbb{H}_0^+$: $\theta \ge \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 222* :

251. Նախորդ խնդրի պայմաններում $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\theta)$ նմուշի օգնությամբ կառուցել **ասիմպտոտիկ** α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշները**:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 223 :

252 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$: Կառուցել α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ** հետևյալ վարկածները ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-: \theta \le \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ և բ) $\mathbb{H}_0^+: \theta \ge \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$ և գտնել դրանց **հզորության ֆունկցիաները**:

Ցուցում՝ բերել դասը *ցուցչային տեսքի* և օգտվել հետևանք 15.2 - ից: Տե՛ս նաև խնդիր 225 :

253. $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշի միջոցով կառուցել **ասիմպտոտիկ** α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ** հետևյալ վարկածները ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-: \theta \le \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ և բ) $\mathbb{H}_0^+: \theta \ge \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 231:

254 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(0,\ \theta)$: Կառուցել α *չափի* **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ** հետևյալ վարկածները ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-: \theta \le \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ և բ) $\mathbb{H}_0^+: \theta \ge \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $\mathbb{U}(0,\theta)$ դասն ունի *մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն* ըստ $T(x^n) = x_{(n)}$ ֆունկցիայի և կիրառել թեորեմ 15.1 :

255. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0: \theta = 100$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > 100$ երկընտրանքայինը, եթե $\sigma^2 = 100$, $n = 25$, $\overline{x^n} = 103$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 246 :

256. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m, \theta^2)$: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0: \theta^2 = 10$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta^2 > 10$ երկընտրանքայինը, եթե $\overline{x^n} = 11.1$, $m = 11$, $s = 3.3$, $n = 25$:

Ցուցում՝ օգտվել $s_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x^n})^2 + (\overline{x^n} - m)^2$ ներկայացումից:

257. Տրված է $m = 10$ միջինով ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության

$$9.0,\quad 10.2,\quad 9.5,\quad 11.2,\quad 10.7,\quad 12.4$$

նմուշը: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0: \sigma^2 = 36$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \sigma^2 < 36$ երկընտրանքայինը:

258 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(p)$ - ը նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***, որտեղ $n = 10$, $n\,\overline{x^n} = 5$: Ստուգել **0.05** *մակարդակով* $\mathbb{H}_0^-: p \le 0.4$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: p > 0.4$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 248* :

259 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\lambda)$ նմուշ է ***Պուասոնի բաշխումից***, որտեղ $n = 20$, $\overline{x^n} = 1.2$: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $\lambda = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\lambda > 1$ երկընտրանքայինը:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 250^* :

260. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(p, 10)$ նմուշ է ***բինոմական բաշխումից***, որտեղ $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 250$: Ստուգել $\mathbf{0.01}$ *մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $p = 0.2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $p > 0.2$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 249 :

261. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\lambda)$ նմուշ է ***Պուասոնի բաշխումից***: Ստուգել **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $\lambda = 0.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\lambda < 0.5$ երկընտրանքայինը, եթե $n = 64$, $\overline{x^n} = 0.4$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 251 :

262. Տրված է նմուշ $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ ***ցուցչային բաշխումից***: Ստուգել **0.01** *մակարդակով* $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \leq 0.4$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > 0.4$ մրցող վարկածը, եթե $n = 144$, $\overline{x^n} = 3$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 253 :

263 (կ). Ավտոդողեր արտադրող ընկերության հետազոտությունները ցույց են տվել, որ տվյալ տեսակի ավտոդողերը պետք է լինեն այնպիսին, որ այդ տիպի դողեր ունեցող ավտոմեքենաների միջին անցած ճանապարհը լինի 37 000 կմ- ից *ոչ պակաս*: Ստուգվել են այդ տեսակի դողերով 16 ավտոմեքենա: Պարզվել է, որ դրանց միջին անցած ճանապարհը կազմել է $\overline{x^n} = 38\,445$ կմ: Ենթադրելով, որ այդ տիպի ավտոդողերով մեքենաների միջին անցած ճանապարհը բավարարում է $\sigma = 2780$ կմ *ստանդարտ շեղումով* ***նորմալ օրենքին***, կազմել համապատասխան *վարկածների ստուգման խնդիրը* և հիմնվելով այդ տվյալների վրա՝ ստուգել այն **0.01** *մակարդակով*:

Ցուցում՝ $X^n \sim \mathbb{N}(\theta, \sigma^2)$, ստուգել $\mathbb{H}_0^-$: $\theta \leq 37\,000$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > 37\,000$ երկընտրանքայինը:

264 (կ). Ինչպե՞ս կփոխվի խնդիր 263 - ում բերված ընկերության որոշումը, եթե $\overline{x^n} = 38\,820$ կմ: Գտնել $\beta_\varphi(38\,000)$: Որքա՞ն պետք է լինի՝ ա) նմուշի $\boldsymbol{n_0}$ **նվազագույն ծավալը**, որպեսզի $\mathbf{0.01}$ *նշանակալիության մակարդակով* **II սեռի սխալի չափը** լինի $\beta_\varphi(38\,000) = 0.05$, բ) *նշանակալիության մակարդակի* **նվազագույն արժեքը** ($\mathbb{P}$ - *արժեքը*), որի դեպքում $\mathbb{H}_0^-$ վարկածը **հերքվի**:

265 (կ). Որոշ տեսակի յուղաներկի չորանալու ժամանակն ունի 75 րոպե *միջինով* և 9 րոպե *ստանդարտ շեղումով* ***նորմալ բաշխում***: Քիմիկոսներն առաջարկել են ավելացնել որոշ նյութեր, որը կփոքրացնի ներկի չորանալու ժամանակը: Նյութերը ավելացնելուց հետո ներկի չորանալու ժամանակը կրկին մնացել է որոշակի μ միջինով և $\sigma = 9$ րոպե *ստանդարտ շեղումով* ***նորմալ օրենքով*** բաշխված: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $\mu = 75$ րոպե վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\mu < 75$ րոպե երկընտրանքայինը: Նոր ներկը փաստորեն կհամարվի արդյունավետ, եթե վարկածը հերքվի: Պահանջվում է պատասխանել հետևյալ հարցերին՝

ա) ի՞նչ որոշում կընդունվի $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ *նշանակալիության մակարդակով*, եթե նմուշային միջինը՝ $\overline{x^n} = 72.3$ րոպե, $n = 65$,

բ) ինչ՞ի է հավասար **նշանակալիության α մակարդակը**, երբ $\mathbb{H}_0$ վարկածը հերքվում է համապատասխան վիճականու $(-\,2.88)$ - ից *փոքր* արժեքի դեպքում,

գ) ինչ՞ի է հավասար բ) կետի պայմաններում **II սեռի սխալի** $\beta_\varphi(70)$ **չափը**,

դ) գտնել բ) կետի պայմաններում նմուշի այն **անհրաժեշտ ծավալը**, որի դեպքում $\beta_\varphi(70) = 0.01$:

266 (կ). Որոշ տեսակի աղյուս կարելի է օգտագործել շինարարության համար, եթե դրա վրա ազդող սեխմվածության ուժը *չի գերազանցում* $\mu_0 = 3200$ պ.մ. (*պայմանական միավոր*): Պատահական վերցված 46 աղյուսների վրա ազդող *միջին* սեխմվածության ուժի *չափը* կազմել է 3109 պ.մ., իսկ *միջին քառակուսային շեղումը*՝ $s = 156$ պ.մ.: Ստուգել համապատասխան վարկածները **0.05** *մակարդակով* :

Ցուցում՝ օգտվել ԿՍԹ - ից, համաձայն որի $\mathbb{Z}_n = \frac{\overline{x^n} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1)$, երբ $n \to \infty$:

267 (կ). Դետալների որոշ խմբաքանակից հսկողության նպատակով վերցված է 250 դետալ, որոնց չափումների հիման վրա *ստանդարտ շեղման* համար ստացվել է $s = 10.2$ մկ արժեքը: Ստուգել $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $\sigma = 10$ մկ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\sigma > 10$ մկ երկընտրանքայինը, որտեղ σ- ն՝ *իրական* (*տեսական*) *ստանդարտ շեղումն է*:

Ցուցում՝ օգտվել $\sqrt{n}\,(S^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, 2\sigma^4)$ *ասիմպտոտիկ նորմալությունից*:

268 (կ). Պահածոների տուփեր արտադրող գործարանում մշակվել են նոր տիպի տուփեր, որոնց մեջ ըստ գործարանի ղեկավարության հայտարարության պահածոները կարելի է պահպանել 6 տարվա ընթացքում: Այդ հայտարարությունը ստուգելու նպատակով պատահականորեն վերցվել է այդ տիպի 20 հատ տուփ և ստուգվել *արագացված տեստի* օգնությամբ: Հայտարարությունը համարվում է հիմնավորված, եթե այդ տեստի ընթացքում պահպանվի պահածոների *առնվազն* 90 % - ը:

Կազմել *վարկածների ստուգման խնդիրը* և լուծել այն $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$ *նշանակալիության մակարդակով*, եթե 20 հատ պատահական վերցված պահածոներից 14 - ը պահպանվել են:

Ցուցում՝ ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $p = 0.9$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $p < 0.9$ երկընտրանքայինը, որտեղ p - - ն՝ նոր տիպի տուփերում գտնվող արագացված տեստի օգնությամբ ստացված պահպանված պահածոների *բաժինն* է: Տե՛ս խնդիր 220* :

269 (կ). Հեռահաղորդակցության ընկերությունը ուզում է բարելավել հեռախոսակապի որակը, որը կբերի վճարումների բարձրացմանը: Ընկերությունը որոշել է իրականացնել այդ ծրագիրը, եթե ոչ պակաս քան 60 % աբոնենտներից այն չմերժի: Հարցումների ընթացքում 160 աբոնենտներից 118 - ը դրական են արձագանքել բարելավումներ անցկացնելու որոշմանը: Ստուգել վարկածը $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *մակարդակով* :

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 249 : Ստուգվում է $\mathbb{H}_0^-$: $p \leq 0.6$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $p > 0.6$:

270 (կ). Որոշ ֆինանսական տեսաբաններ հավատում են, որ արժեթղթերի շուկայի գների օրական փոփոխությունները բավարարում են *դրական միտումով* «պատահական թափառումների» օրենքին: Եթե այդ վարկածը ճշմարիտ է, ապա «**Dow - Jones**» **ինդեքսը** պետք է *աճեր* 50 % - ից ի վեր մեկ օրվա ընթացքում: Պատահական ընտրված 175 օրերի ընթացքում 101 - ում այդ ինդեքսն *աճել* էր: Ի՞նչ կարելի է ասել $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* այդ տեսության վերաբերյալ:

Ցուցում՝ ստուգվում է $\mathbb{H}_0^-$: $p \leq 0.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $p > 0.5$ երկընտրանքայինը:

§ 16. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ երկընտրանքային վարկածը

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{E}$ նմուշ է (15.3) *ցուցչային դասին* պատկանող $\mathbb{P}_\theta$ բաշխումից: Դիտարկվում է

$$\mathbb{H}_0: \ \theta = \theta_0 \ \text{ վարկածն ընդդեմ } \ \mathbb{H}_1: \ \theta \neq \theta_0 \tag{16.1}$$

երկկողմանի բարդ երկընտրանքայինը ստուգման խնդիրը: Նշանակենք

$$\mathbb{K}_\alpha^0 := \{\delta: \ \mathbb{E}_0\varphi(X^n) = \alpha\} \ \left(\mathbb{E}_0 := \mathbb{E}_{\theta_0}\right)$$

α չափ ունեցող հայտանիշների դասը և

$$\widetilde{\mathbb{K}}_\alpha^0 := \{\delta \in \mathbb{K}_\alpha^0: \ \mathbb{E}_\theta\varphi(X^n) \geq \alpha, \ \theta \neq \theta_0\}, \quad 0 < \alpha < 1$$

դրա *անշեղ* հայտանիշների ենթադասը:

Թեորեմ 16.1: *Եթե բավարարվում են ռեգուլյարության (R) – պայմանները և (15.3) ներկայացման մեջ մասնակցող $A(\theta)$ ֆունկցիան **խիստ մոնոտոն աճող** է, ապա α չափի անշեղ հայտանիշների $\widetilde{\mathbb{K}}_\alpha^0$ դասում գոյություն ունի (16.1) վարկածները ստուգող **օպտիմալ (ՀԱՀ) հայտանիշը**, որն ունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\varphi^*(x^n) := \begin{cases} 1, \ \textit{եթե} \ T(x^n) < c_1 \ \textit{կամ} \ T(x^n) > c_2 \\ \varepsilon_i, \ \textit{եթե} \ T(x^n) = c_i, \ i = 1,2 \\ 0, \ \textit{եթե} \ c_1 < T(x^n) < c_2 \end{cases}, \tag{16.2}$$

որտեղ $T(X^n) := \sum_{i=1}^{n} S(X_i)$, *իսկ* c_i *և* ε_i, $i = 1,2$ *հաստատունները որոշվում են*

$$\mathbb{E}_0(\varphi^*(X^n) - \alpha) = 0 \quad \textit{և} \quad \mathbb{E}_0(\varphi^*(X^n) - \alpha)\, T(X^n) = 0$$

պայմաններից:

Եթե $\theta = \theta_0$ դեպքում $T := T(X^n)$ վիճականու $\mathbb{P}_0(T \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ բաշխումը *համաչափ է 0 կետի նկատմամբ*, այսինքն՝ $\mathbb{P}_0(T < -x) = \mathbb{P}_0(T > x)$, $x \in \mathbb{R}$, ապա $c_1 = -c_2 := -c$ $(c > 0)$ և (16.2) - ում մասնակցող $\varphi^*(x^n)$ կրիտիկական ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, & \textit{եթե} \ |T(x^n)| > c \\ \varepsilon, & \textit{եթե} \ |T(x^n)| = c \\ 0, & \textit{եթե} \ |T(x^n)| < c \end{cases}$$

Անընդհատ $T(X^n)$ վիճականիների դեպքում (երբ $\theta = \theta_0$) *ոչ ռանդոմիզացված* հայտանիշի կրիտիկական ֆունկցիան՝ կլինի

$$\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, \ \textit{եթե} \ |T(x^n)| \geq c \\ 0, \ \textit{եթե} \ |T(x^n)| < c \end{cases},$$

որտեղ $c > 0$ *կրիտիկական եզրը* որոշվում է

$$\mathbb{P}_0(T < -c) = \mathbb{P}_0(T > c) = \frac{\alpha}{2}$$

պայմանից:

271 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշ է ***ցուցչային բաշխումից***: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինը ստուգող α *չափի* $(0 < \alpha < 1)$ **ՀԱՀ (օպտիմալ) անշեղ հայտանիշը**: Գտնել հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան**:

Ցուցում՝ բերել բաշխումը *ցուցչային տեսքի* և օգտվել թեորեմ 16.1 - ից:

272* (մ). $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}(\theta)$ ***Բեռնուլիի բաշխումից*** նմուշի միջոցով կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքային վարկածը ստուգող α *չափի* **ՀԱՀ (օպտիմալ) անշեղ հայտանիշը**:

Ցուցում՝ բերել բաշխումը *ցուցչային տեսքի* և օգտվել թեորեմ 16.1 - ից:

273. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}(\theta)$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ մրցող վարկածը ստուգող **ասիմպտոտիկ** α *չափի* **ՀԱՀ (օպտիմալ) անշեղ հայտանիշը** և գտնել հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան**:

Ցուցում՝ օգտվել *Մուավր – Լապլասի* սահմանային թեորեմից՝ $\mathbb{Z}_n := \frac{\overline{X^n} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1)$:

274. $X^n \sim \Pi(\theta)$ ***Պուասոնի բաշխումից*** նմուշի միջոցով կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ մրցող վարկածը ստուգող **ասիմպտոտիկ** α *չափի* **ՀԱՀ (օպտիմալ) անշեղ հայտանիշը**: Գտնել նաև հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան**:

Ցուցում՝ օգտվել *կենտրոնական սահմանային թեորեմից*՝ $\mathbb{Z}_n := \frac{\overline{X^n} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1)$, երբ $n \to \infty$, բերել մոդելը *ցուցչային* տեսքի և օգտվել թեորեմ 16.1 - ից:

275. $n = 20$ չափումների արդյունքում ստացվել են հետևյալ արժեքները՝ $\overline{x^n} = 9.5$, $s = 3$: Համարելով, որ նմուշը համապատասխանում է $m = 10$ միջինով $\mathbb{N}(m, \sigma^2)$ ***նորմալ բաշխմանը*** **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \sigma = 4$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \sigma \neq 4$ երկընտրանքայինը:

276 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ ***ցուցչային բաշխումից*** նմուշ է, ընդ որում $n = 10$, $\overline{x^n} = 2.5$: **0.05** *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \theta = 0.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq 0.5$:

Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 271- ից:

277 (մ). Դիցուք $n = 50$ ***Բեռնուլիի փորձերում*** 30 անգամ տեղի է ունեցել «*հաջողություն*»: **0.05** մակարդակով ստուգել $\mathbb{H}_0 : \theta = 0.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq 0.5$:

Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 273 - ից:

278. Ենթադրենք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$ նմուշ է ***Բեռնուլիի բաշխումից***, որտեղ $n = 500$, $\overline{x^n} = 0.43$: $\mathbf{0.02}$ $(\mathbf{0.03})$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta = 0.48$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta \neq 0.48$ երկընտրանքային վարկածը:

279. Դիտվում է $X^n \sim \mathbb{П}(\theta)$ նմուշ ***Պուասոնի բաշխումից***: **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta \neq 1$ երկընտրանքայինը, եթե $\sum_{i=1}^{n} x_i = 90$, $n = 100$: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի նշանակալիության մակարդակի **ամենամեծ** արժեքը, որպեսզի վարկածը **չհերքվի** (գտնել $\mathbb{P}$ - արժեքը):

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 274 :

280 (կ) Անորակ պահածոներ հայտնաբերելու նպատակով ստուգել են պահածոների 200 արկղ: Արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները՝

x_i	0	1	2	3	4
ν_i	130	40	25	3	2

,

որտեղ x_i - ն մեկ արկղում անորակ տուփերի թիվն է, իսկ ν_i - ն՝ x_i հատ անորակ տուփ պարունակող արկղերի թիվը: Համարելով, որ անորակ պահածոներ պարունակող տուփերի թիվը բաշխված է ***Պուասոնի օրենքով***, **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել պահածոների լրիվ համախմբությունում երկու արկղում միջինում մեկ անորակ պահածոների տուփ լինելու $\mathbb{H}_0$ վարկածը ($\lambda = 0.5$): Գտնել $\mathbb{P}$ - արժեքը:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 274 :

281 (կ) Ավտոմեքենաշինական ընկերությունը ենթադրում է, որ իր նոր տեսակի էլեկտրական շարժիչով ավտոմեքենաները մեկ տարվա ընթացքում կզբաղեն տվյալ շրջանի ավտոշուկայի 48 % - ը, ինչը բացատրվում է այդ մեքենաների լավ տեխնիկական տվյալներով և զգալի էժանությամբ: Մեկ տարի հետո այդ շրջանում գրանցված մեքենա ունեցողներից պատահական վերցված 10 % - ի համար կատարված հարցումը ցույց տվեց, որ նրանց 43 % գնել են այդ նոր տեսակի ավտոմեքենաները: Կարո՞ղ է արդյոք **0.01 (0.03)** *նշանակալիության մակարդակով* այդ ընկերությունը հաստատել, որ հասել է իր հայտարարված նպատակին:

282 (կ). Որոշակի թվով պետական պարտատոմսեր ունեցողներից պատահական ընտրվել են 350 - ը: Պարզվել է, որ ընտրվածներից 39 % - ը կանայք են: 5 տարի հետո անցկացված մարդահամարը ցույց տվեց, որ պետական պարտատոմսեր ունեցողների 41 % - ը կանայք են: **0.02** *մակարդակով* պարզել՝ փոխվե՞լ է, արդյոք 5 տարիների ընթացքում պարտատոմսեր ունեցողների մեջ կանանց բաժինը:

283 (կ). Արևածաղկի յուղի հալեցման աստիճանը որոշելու համար ստուգվել է արևածաղկի 16 նմուշ, որոնց միջին հալեցման աստիճանը կազմել է 94.3 ℃ : Ենթադրելով, որ *հալեցման կետը* բավարարում է $\sigma = 1.2$ ℃ ստանդարտ շեղումով ***նորմալ օրենքին***՝ ա) ստուգել **0.01** *մակարդակով* $\mathbb{H}_0$: $\mu = 95$ ℃ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\mu \neq$ $\neq 95$ ℃ երկընտրանքայինը, բ) գտնել **II սեռի սխալի չափը**, երբ $\mu = 94$ ℃ $\left(\beta_{\varphi}(94)\right)$:

284 (կ). Որոշ ավիաընկերության կատարված հաշվարկները ցույց են տվել, որ տվյալ ուղղությամբ ավիատոմսերի *միջին գինը* կազմել է $\mu_0 = 235$ $, իսկ *միջին քառակուսային շեղումը*՝ 68 $: Մեկ տարի անց պատահական վերցված 90 ուղևորների միջև կատարված հաշվարկը ցույց տվեց, որ տոմսը գնելու համար նրանք միջինում վճարել են 218.77 $: Փոխվե՞լ է, արդյոք նշանակալի այդ ընթացքում (**0.05** *մակարդակով*) տոմսի գինը: Ո՞րն է **նշանակալիության մակարդակի** այն **մեծագույն արժեքը**, որի դեպքում հնարավոր լինի եզրակացնել, որ տոմսի գինը էապես **չի փոխվել**:

285 (կ) . 2005 – 2010 թ. *Նյու – Յորքի* արժեթղթերի բորսայում («***NYSE***») արժեթղթերի *գին / եկամուտ* հարաբերության *միջին արժեքը* կազմել էր 14.35, իսկ *ստանդարտ շեղումը*՝ 9.73: 2011 թվին 30 հատ պատահական վերցված արժեթղթերի համար կատարված *գին/ եկամուտ* հարաբերության հաշվարկը տվեց 11.77 արժեք: Կարելի է՞, արդյոք այստեղից **0.05** *մակարդակով* եզրակացնել, որ 2011 թվին 2005 – 2010 թ.թ. համեմատությամբ այդ հարաբերության *միջին արժեքը* «***NYSE***» բորսայում **փոխվել** է, համարելով *գին / եկամուտ* հարաբերության ***նորմալ բաշխվածությունը*** :

§ 17. Վարկածների ստուգում և միջակայքային գնահատականներ

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta$՝ $\mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ բաշխումների դասից $\mathbb{P}_\theta$ բաշխմանը համապատասխանող նմուշ է: Դիտարկենք որոշակի $\theta_0 \in \Theta$ արժեքի համար $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածը ստուգող α $(0 < \alpha < 1)$ *նշանակալիության մակարդակի* $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0)$ կրիտիկական տիրույթով որևէ հայտանիշ: Նշանակենք $\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta_0) := \bar{\mathcal{X}}_{1\alpha}(\theta_0)$ - ով այդ հայտանիշի *թույլատրելի* տիրույթը: Այսպիսով՝ տվյալ α - ի համար $\mathcal{X}^n$ նմուշային տարածությունում տրվում է *ենթաբազմությունների* $\{\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta) \subset \mathcal{X}^n,\ \theta \in \Theta\}$ *ընտանիքը*: Կամայական $x^n \in \mathcal{X}^n$ նմուշային կետի համար սահմանենք $G_\gamma(x^n) := \{\theta:\ x^n \in \mathcal{X}_{0\alpha}(\theta)\} \subset \Theta$ բազմությունը, $\gamma = 1 - \alpha$: Այսպիսով Θ բազմության մեջ առաջանում է $\{G_\gamma(x^n):\ x^n \in \mathcal{X}^n\}$ բազմությունների դասը:

Այժմ դիտարկենք $G_\gamma(X^n)$ *պատահական* բազմությունը: Քանի որ $\{\theta \in G_\gamma(X^n)\}$ և $\{X^n \in \mathcal{X}_{0\alpha}(\theta)\}$ պատահույթներն ըստ կառուցման համարժեք են, ապա

$$\mathbb{P}_\theta\big(G_\gamma(X^n) \ni \theta\big) = \mathbb{P}_\theta\big(X^n \in \mathcal{X}_{0\alpha}(\theta)\big) = \gamma,$$

այնպես, որ $G_\gamma(X^n)$ բազմությունը θ - ի համար γ *մակարդակի վստահության միջակայք* է : Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը, այսինքն, եթե տրված է θ պարամետրի γ մակարդակի վստահության միջակայքերի $\{G_\gamma(x^n):\ x^n \in \mathcal{X}^n\}$ ընտանիքը, ապա $\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta_0) := \{x^n:\ \theta_0 \in G_\gamma(x^n)\}$ բազմությունը հանդիսանում է $\alpha = 1 - \gamma$ *նշանակալիության մակարդակի* $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածը ստուգող հայտանիշի *թույլատրելի տիրույթը*:

Հավասարաչափ առավել հզոր (*օպտիմալ*) հայտանիշին դրա գոյության դեպքում համապատասխանում է այսպես կոչված *առավել ճշգրիտ* (*տվյալ մակարդակի* բոլոր վստահության միջակայքերի մեջ *փոքրագույն երկարություն* ունեցող) վստահության միջակայքը:

Մեկ նմուշի դեպք

286. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$: α *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$ միակողմանի երկընտրանքայինը:

Ցուցում՝ տե՛ս (12.2) բանաձևը (համեմատիր խնդիր 246 - ի հետ):

287. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$: α *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta^2 = \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta^2 \neq \theta_0^2$ երկընտրանքայինը:

Ցուցում՝ տե՛ս (12.3) բանաձևը:

288. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$: α *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta^2 = \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta^2 > \theta_0^2$ ($\mathbb{H}_1^-$: $\theta^2 < \theta_0^2$) երկընտրանքայինը:

Ցուցում՝ տե՛ս (12.4) բանաձևը:

289. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$: α *նշանակալիության մակարդակով* գտնել $\mathbb{H}_0$: $\theta_1 = \theta_{10}$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta_1 > \theta_{10}$ ($\mathbb{H}_1^-$: $\theta_1 < \theta_{10}$) միակողմանի երկընտրանքայինը ստուգող **ՀԱՀ հայտանիշը**:

Ցուցում՝ տե՛ս (12.8) բանաձևը:

290. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$: α *նշանակալիության մակարդակով* գտնել $\mathbb{H}_0:$ $\theta_1 = \theta_{10}$ $(\theta_2^2 = \theta_{20}^2)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1:$ $\theta_1 \neq \theta_{10}$ $(\theta_2^2 \neq \theta_{20}^2)$ երկընտրանքայինը ստուգող **ՀԱՀ անշեղ հայտանիշը**:

Ցուցում՝ տե՛ս (12.7) և (12.5) բանաձևերը:

291. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1,\ \theta_2^2)$: α *նշանակալիության մակարդակով* գտնել $\mathbb{H}_0:$ $\theta_2^2 = \theta_{20}^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta_2^2 > \theta_{20}^2$ ($\mathbb{H}_1^-$: $\theta_2^2 < \theta_{20}^2$) երկընտրանքայինը ստուգող **ՀԱՀ հայտանիշը**:

Ցուցում՝ տե՛ս (12.6) բանաձևը:

292. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta, 1)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ նմուշ է «***շեղված*** *ցուցչային բաշխումից*»: α *նշանակալիության մակարդակով* գտնել $\mathbb{H}_0:$ $\theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1:$ $\theta \neq$ $\neq \theta_0$ երկընտրանքայինը ստուգող **ՀԱՀ հայտանիշը**:

Ցուցում՝ տե՛ս [2, խնդիր 7.1]:

293. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{U}(0, \theta)$ նմուշ է $[0, \theta]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումից***: α *նշանակալիության մակարդակով* գտնել $\mathbb{H}_0:$ $\theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1:$ $\theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինը ստուգող **ՀԱՀ հայտանիշը**:

Ցուցում՝ տե՛ս [2, օրինակ 7.19]:

294. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{W}(0,\ \theta,\ \lambda)$ նմուշ է ***Վեյբուլի բաշխումից***: α *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0:$ $\theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինը ստուգող **հայտանիշը**:

Ցուցում՝ տե՛ս [2, խնդիր 7.5]:

295. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ 9)$ նմուշ է ***նորմալ բաշխումների*** դասից: **0.05** *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta = 60$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1:$ $\theta \neq 60$ երկընտրանքայինը, եթե նմուշային միջինը՝ $\overline{X^n} = 58,\ n = 25$:

296. Դիտվել են $m = 9$ *միջինով* ***նորմալ բաշխում*** ունեցող պատահական մեծության հետևյալ արժեքները՝

$$8.1,\quad 10.4,\quad 9.5,\quad 8.9,\quad 10.7:$$

0.05 *մակարդակով* ստուգել այդ պատահական մեծության *անհայտ* σ^2 *ցրվածքի* վերաբերյալ $\mathbb{H}_0:$ $\sigma^2 = 4$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1:$ $\sigma^2 \neq 4$ մրցող վարկածը:

297. Ըստ անհայտ պարամետրերով ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության

2.96, 3.07, 3.02, 2.98, 3.06

տվյալների **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել *միջինի* և *ցրվածքի* վերաբերյալ հետևյալ վարկածները՝

ա) $\mathbb{H}_0: \ m = 3$ բ) $\mathbb{H}_0: \ \sigma^2 = 0.01$

$\mathbb{H}_1: \ m \neq 3$, $\mathbb{H}_1: \ \sigma^2 \neq 0.01$ ։

298. Ենթադրվում է, որ *անհայտ պարամետրերով* ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության *ստանդարտ շեղումը* հավասար է 50 - ի: Կմերժվի՞, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* այդ վարկածը, եթե պատահական մեծության 30 դիտումների միջոցով հաշվարկած *ստանդարտ շեղման* արժեքը կազմել է 57 միավոր:

299. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta,\ \sigma^2)$: $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \ \theta = 100$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \ \theta > 100$ երկընտրանքայինը, եթե $\sigma^2 = 100$, $n = 25$, $\overline{x^n} = 103$ ։

300. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(m,\ \theta^2)$: $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \theta^2 = 10$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \ \theta^2 > 10$ երկընտրանքայինը, եթե $\overline{x^n} = 11.1$, $s = 3.3$, $n = 25$ ։

301. Տրված է $m = 10$ միջինով ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության հետևյալ նմուշը՝

9.0, 10.2, 9.5, 11.2, 10.7, 12.4 ։

$\boldsymbol{\alpha = 0.1}$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \ \sigma^2 = 36$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \ \sigma^2 < 36$ երկընտրանքայինը:

302. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(p, 10)$ նմուշ է ***բինոմական բաշխումից***, որտեղ $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 250$ ։ $\mathbf{0.01}$ *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \ p = 0.2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \ p > 0.2$ երկընտրանքայինը:

303. Դիցուք $X^n \sim \Pi(\lambda)$ նմուշ է ***Պուասոնի բաշխումից***: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \ \lambda = 0.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \ \lambda < 0.5$ երկընտրանքայինը, եթե $n = 64$, $\overline{x^n} = 0.4$ ։

304. Տրված է $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշ ***ցուցչային բաշխումից***: **0.01** *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0^-: \theta \leq 0.4$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \ \theta > 0.4$ երկընտրանքայինը, եթե $n = 144$, $\overline{x^n} = 3$:

305 (կ). Հիվանդանոցը օգտագործում է մեծ քանակությամբ որոշակի դեղամիջոց, ընդ որում մեկ դեղամիջոցի փաթեթի դոզան կազմում է 100 սմ^3: Դեղամիջոցի ազդեցությունը այնպիսին է, որ հիվանդը անվնաս է տանում մեծ դոզաները, սակայն անբավարար դոզաների դեպքում չի ապահովվում անհրաժեշտ բուժ. արդյունավետությունը, որը նույնիսկ վնասում է բուժմանը: Հայտնի է, որ արտադրված դեղերի ամբողջ համախմբի դոզայի *ստանդարտ շեղումը* նոմինալ արժեքից կազմում է 2 սմ^3:

Կատարվել է նոր ստացված դեղերի համախմբության ստուգում: 50 հատ պատահական վերցված դեղամիջոցի նմուշի մեջ հայտնաբերվել է, որ 1 փաթեթի միջին դոզան կազմում է 99.75 սմ^3: **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել, շա՞տ է, արդյոք այդ նմուշում տարբերվում նոմինալից մեկ դեղամիջոցի դոզայի չափը, թե՝ ոչ:

Ցուցում՝ ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $\mu = 100$ սմ^3 վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\mu \neq 100$ սմ^3 երկընտրանքայինը:

306 (կ). Բնապահպանության կոմիտեի որոշմամբ ատոմակայանը իրավունք ունի բաց թողնել օգտագործված ջուրը մոտակա գետը, եթե ջրի տաքությունը միջինում չի գերազանցում 28.9 °C : 70 անգամ բաց թողնված օգտագործված ջրի նմուշում *միջին ջերմաստիճանը* կազմել էր 30.2 °C , իսկ *միջին քառակուսային շեղումը*՝ 7.5 °C : Պարզել՝ կարո՞ղ է, արդյոք ատոմակայանի ղեկավարությունը հայտարարել, որ այն չի գերազանցում սահմանափակումների չափը: Ստուգել վարկածը **0.05** *մակարդակով*:

Ցուցում՝ ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\mu \leq 28.9$ °C վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\mu > 28.9$ °C երկընտրանքայինը: Օգտվել ԿՍԹ - ից և գտնել *ասիմպտոտիկ ստորին վստահության միջակայքը* μ միջին ջերմաստիճանի համար:

307 (կ). Գրադարանի աշխատողները ենթադրում են, որ յուրաքանչյուր ուսանողի պատվիրած գրքերի քանակը մեկ այցի ժամանակ փոխվել է: Անցյալում մեկ ուսանողը պատվիրում էր միջինում 3.4 գիրք, սակայն այժմ պատահական վերցված 23 ուսանողների խմբում միջին պատվերը կազմեց 1 այցի ընթացքում 4.3 գիրք՝ 1.5 գիրք *ստանդարտ շեղումով*: **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել՝ փոխվե՞լ է, արդյոք մեկ այցի ընթացքում պատվերների թիվը, եթե այն բաշխված է ***նորմալ օրենքով***:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 290 :

308 (կ). Որպեսզի որոշվի նոր տեսակի ավտոմեքենայի վառելիքի ծախսը մեքենաշինական ընկերությունը ընտրել է 6 ոչ պրոֆեսիոնալ ավտովարորդներ այդ տեսակի ավտոմեքենաներով որոշակի ճանապարհ անցնելու համար: Ճանապարհորդությունը կատարելուց հետո պարզվել է, որ այդ մեքենաները 1 լիտր վառելիք ծախսելով անցել են, համապատասխանաբար՝ 123, 132, 142, 130, 136 և 133 կմ ճանապարհ: Ընկերությունը իր գովազդում հայտարարել է, որ այդ տեսակի մեքենաները 1 լիտր վառելիք ծախսելով անցնում են ամենաքիչը 135 կմ ճանապարհ:

Հակասու՞մ են, արդյոք **0.05** *մակարդակով* ստացված տվյալները այդ հայտարարությանը (ենթադրվում է, որ անցած ճանապարհները բաշխված են ***նորմալ օրենքով***):

Ցուցում՝ $\mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$ *մոդելում* μ և σ^2 պարամետրերն *անհայտ* են: Ստուգել $\mathbb{H}_0^+ : \mu \geq 135$ կմ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \mu < 135$ կմ - ի: Ստանալ *վերին* վստահության միջակայքը (տե՛ս խնդիր 289):

309 (կ). Որոշ հեռուստաընկերություն իր հաղորդումների ընթացքում հայտարարեց, որ ԱՄՆ - ի քաղաքացու միջին կշիռը գերազանցում է նոմինալ արժեքը 5 կգ - ով: Որպեսզի ստուգվի այդ հայտարարությունը հետազոտվեցին պատահական ընտրված 18 ԱՄՆ- ի քաղաքացի, որոնց միջին կշիռը գերազանցեց նոմինալ արժեքը 6.2 կգ - ով, 1.35 կգ *միջին քառակուսային շեղումով*: Հիմք կա՞ արդյոք կասկածել հեռուստաընկերության այդ հայտարարությանը: **0.05** *մակարդակով* ստուգել այդ վարկածը ենթադրելով կշռավորումների ***նորմալ բաշխվածությունը*** :

Ցուցում՝ Ստուգել $\mathbb{H}_0 : \mu = \mu_0 + 5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \mu > \mu_0 + 5$ երկընտրանքայինը կառուցելով μ - ի համար *ստորին վստահության միջակայքը* (տե՛ս խնդիր 289):

310 (կ). Աստղադիտակներ արտադրող ընկերությունը ուզում է, որ իր արտադրված աստղադիտակների «որոշման ունակության» *ստանդարտ շեղումը* չգերազանցի 2 արժեքը, երբ դիտվող աստղերը գտնվում են 500 «լույսային տարուց» ի վեր հեռավորության վրա: 30 անգամ փորձելով նոր արտադրված աստղադիտակը *ստանդարտ շեղման* համար ստացվեց 1.46 արժեքը: Բավարարու՞մ է, արդյոք այդ աստղադիտակը առաջարկված պահանջներին, թե՝ ոչ: Վարկածը ստուգել **0.01** *նշանակալիության մակարդակով*, ենթադրելով «որոշման ունակության» ***նորմալ բաշխվածությունը*** :

Ցուցում՝ ստուգվում է $\mathbb{H}_0^+ : \sigma \geq 2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \sigma < 2$ (տե՛ս խնդիր 291):

Երկու նմուշի դեպք

311. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X, \sigma_X^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y, \sigma_Y^2)$ *հայտնի ցրվածքներով* միմյանցից անկախ նմուշներ են: Ստուգել α *մակարդակով* $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \tau < \tau_0$ ($\mathbb{H}_1^+ : \tau > \tau_0$) երկընտրանքայինը, որտեղ $\tau := \theta_X - \theta_Y$:

Ցուցում՝ կառուցել τ - ի համար *միակողմանի* վստահության միջակայքեր (տե՛ս խնդիր 197) :

312. Դիցուք X^n - ը և Y^m - ը որոշակի բաշխումներից վերցված միմյանցից անկախ նմուշներ են, որտեղ $\theta_X = \mathbb{E}X$ և $\theta_Y = \mathbb{E}Y$ այդ բաշխումների *անհայտ միջիններն* են և $\tau := \theta_X - \theta_Y$: *Մեծ ծավալի* նմուշների դեպքում $(n,\ m > 30)$ *նշանակալիության* α *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \tau < \tau_0$ ($\mathbb{H}_1^+ : \tau > \tau_0$):

Ցուցում՝ օգտվելով ԿՍԹ - ից կառուցել τ - ի համար միակողմանի վստահության միջակայքեր:

313. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X, \theta^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y, \theta^2)$ միմյանցից անկախ *անհայտ* և *հավասար* θ^2 $(\theta > 0)$ *ցրվածքով* ***նորմալ բաշխումների դասերից*** նմուշներ են: α *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \tau < \tau_0$ $(\mathbb{H}_1^+ : \tau > \tau_0)$ երկընտրանքայինը, որտեղ $\tau := \theta_X - \theta_Y$:

Ցուցում՝ կառուցել τ - ի համար միակողմանի վստահության միջակայքերը (տե՛ս խնդիր 198):

314. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta_X)$ և $Y^m \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta_Y)$ *անհայտ* θ_X և θ_Y պարամետրերով ***Բեռնուլիի բաշխումների դասերից*** միմյանցից անկախ նմուշներ են: Նմուշների *մեծ* n և m ծավալների դեպքում *նշանակալիության* α *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta_X = \theta_Y$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \theta_X < \theta_Y$ $(\mathbb{H}_1^+ : \theta_X > \theta_Y)$ երկընտրանքայինը:

Ցուցում՝ համաձայն *Մուավր – Լապլասի* սահմանային թեորեմի մեծ n - երի և m - երի դեպքում՝

$$\frac{\overline{X^n} - \theta_X}{\sqrt{\theta_X(1-\theta_X)}} \backsim \mathbb{N}\left(0,\ \frac{1}{n}\right) \quad \text{և} \quad \frac{\overline{Y^m} - \theta_Y}{\sqrt{\theta_Y(1-\theta_Y)}} \backsim \mathbb{N}\left(0,\ \frac{1}{m}\right):$$

Այստեղից $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում՝ $\mathbb{Z}_{n,m} := \dfrac{\overline{X^n} - \overline{Y^m}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\hat{\theta}\,(1-\hat{\theta})}} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1),\ n \to \infty,\ m \to \infty,$

որտեղ $\hat{\theta} := \frac{n}{n+m}\,\overline{X^n} + \frac{m}{n+m}\,\overline{Y^m}$ վիճականին *անշեղ* և *խիստ ունակ* գնահատական է θ - ի համար:

315. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X}, \theta_{2X}^2)$ և $Y^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y}, \theta_{2Y}^2)$ *անհայտ* պարամետրերով ***նորմալ բաշխումների դասերից*** միմյանցից անկախ ***միևնույն ծավալի*** նմուշներ են: *Նշանակալիության* α *մակարդակով* ստուգել հետևյալ վարկածները՝

ա) $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \tau \neq \tau_0$, բ) $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \tau < \tau_0$,

գ) $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+ : \tau > \tau_0$, որտեղ $\tau := \theta_{1X} - \theta_{1Y}$:

Ցուցում՝ օգտվել (12.9) բանաձևից և խնդիր 200 - ից:

316. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X}, \theta_{2X}^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y}, \theta_{2Y}^2)$ ***նորմալ բաշխումների դասերից*** միմյանցից անկախ նմուշներ են: α *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \theta_{2X}^2 = \theta_{2Y}^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \theta_{2X}^2 < \theta_{2Y}^2$ $(\mathbb{H}_1^+ : \theta_{2X}^2 > \theta_{2Y}^2)$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 199 :

317. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\alpha_1)$ և $Y^m \sim \mathbb{E}(\alpha_2)$ ***ցուցչային բաշխումների դասերից*** միմյանցից անկախ նմուշներ են: α *նշանակալիության մակարդակով* կառուցել $\mathbb{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2$ $(\mathbb{H}_1^- : \alpha_1 < \alpha_2,\ \mathbb{H}_1^+ : \alpha_1 > \alpha_2)$ երկընտրանքային վարկածը ստուգման հայտանիշը:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ $\mathbb{G}_\theta(X^n) := 2n\overline{X^n}\alpha_1$ և $\mathbb{G}_\theta(Y^n) := 2m\overline{Y^m}\,\alpha_2$՝ կենտրոնական վիճականիներ են և գտնել $\tau := \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ պարամետրի վստահության միջակայքը:

318. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X,\ 16)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y,\ 25)$ ***նորմալ բաշխումների դասերից*** միմյանցից անկախ նմուշներ են, ընդ որում՝ $n = 20$, $m = 25$, $\overline{x^n} = 29.8$, $\overline{y^m} = 34.7$: **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \ \theta_X = \theta_Y$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 :$ $\theta_X \neq \theta_Y$ երկընտրանքայինը:

319. Տրված են $\mathbb{N}(\theta_X,\ 4)$ և $\mathbb{N}(\theta_Y,\ 5)$ ***նորմալ բաշխումներից*** միմյանցից անկախ

$$x^n = (-4.4,\ 4.0,\ 2.0,\ -4.8) \quad \text{և} \quad y^n = (6.0,\ 1.0,\ -3.2,\ -0.4)$$

նմուշներ: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \ \theta_Y - \theta_X \leq 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \ \theta_Y - \theta_X > 1$ երկընտրանքային վարկածը:

320. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_X,\ \theta^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_Y,\ \theta^2)$ ***նորմալ բաշխումների դասերից*** միմյանցից անկախ նմուշներ են, որտեղ՝ $n = 16$, $m = 9$, $\overline{x^n} = 18.1$, $s_x = 6.0$, $\overline{y^m} =$ $= 15.9$, $s_y = 5.0$: **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0 : \ \theta_X = \theta_Y$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \ \theta_X \neq \theta_Y$ երկընտրանքայինը:

321. Տրված են *անհայտ պարամետրերով* ***նորմալ բաշխումների դասերից*** միմյանցից անկախ

$$x^n = (1.8,\ 2.9,\ 1.4,\ 1.1) \ \text{ և } \ y^m = (-1,\ 2.6,\ 3.2)$$

նմուշները: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ դասերի *միջինների հավասարության* վերաբերյալ վարկածը:

322. $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_{1X},\ \theta_{2X}^2)$ և $Y^m \sim \mathbb{N}(\theta_{1Y},\ \theta_{2Y}^2)$ ***նորմալ համախմբություններից*** վերցված միմյանցից անկախ նմուշներ են: Ստուգել **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0^- : \ \theta_{2X}^2 \leq \theta_{2Y}^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+ : \theta_{2X}^2 > \theta_{2Y}^2$ երկընտրանքային վարկածը, եթե $n =$ $= m = 10$, $s_{0x}^2 = 4.5$, $s_{0y}^2 = 5.0$:

323 (կ). Ծխախոտ արտադրող գործարանը ուղարկել է երկու տարբեր լաբորատորիաներ ենթադրաբար նույնատիպ ծխախոտի նմուշներ: Կատարված հետազոտությունները տվել են ծխախոտի մեջ *նիկոտինի* պարունակության վերաբերյալ հետևյալ արժեքներ (*միլիգրամներով*)՝

I - ի լաբորատորիա՝ 24 27 26 21,

II - րդ լաբորատորիա՝ 27 28 23 31 26 :

Ըստ ստացված տվյալների **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* որոշել՝ արդյոք հետազոտվել են ***նույնատի՞պ*** ծխախոտի նմուշներ, թե՝ ոչ, եթե ծխախոտի մեջ նիկոտինի պարունակությունը բավարարում է *միևնույն ցրվածքով* ***նորմալ օրենքին*** :

324 (կ). Որոշ գործարան արտադրում է երկու տեսակի պլաստմասսա: Հայտնի է, որ այդ պլաստմասսաների *ամրության աստիճանները* բաշխված են $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.0$ պ. (պասկալ) *ստանդարտ շեղումով* և *անհայտ միջիններով* ***նորմալ օրենքով***: Պատահականորեն վերցվել են այդ երկու տեսակի պլաստմասսաների $n_1 = 10$ և $n_2 = 12$ ծավալների նմուշներ, որոնց *միջին ամրության աստիճանների* համար ստացվել են $\overline{x_1} = 164.1$ պ. և $\overline{x_2} = 155.0$ պ. արժեքները: Պլաստմասսա արտադրող ընկերությունը ***չի ընդունի*** I տեսակի պլաստմասսան, եթե հսկողության ժամանակ պարզվի, որ դրա *ամրության աստիճանը* ***չի գերազանցում*** II տեսակի պլաստմասսայի *ամրության աստիճանը* ***առնվազն*** 10 պասկալով: Կընդունի՞ արդյոք **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ընկերությունը I տեսակի պլաստմասսան, թե՝ ոչ:

Ցուցում՝ ստուգվում է $\mathbb{H}_0^+$: $\mu_1 - \mu_2 \geq 10$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\mu_1 - \mu_2 < 10$: Տե՛ս խնդիր 311 :

325 (կ). **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել վարկած, որ երկու տարբեր տեսակի ավտոդողեր ունեցող ավտոմեքենաների միջին անցման ճանապարհները *նույնն* են, եթե այդ տիպի ավտոդողերով 40 - ական ավտոմեքենայից բաղկացած երկու շարասյան համար ստացվել են հետևյալ տվյալները՝ $\overline{x_1} = 36\,500$ կմ, $s_1 = 2\,200$ կմ և $\overline{x_2} = 33\,400$ կմ, $s_2 = 1\,900$ կմ:

Ցուցում՝ օգտվել $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_{n,m} = \dfrac{\overline{X^n} - \overline{Y^m} - \tau}{S} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1)$, $n \to \infty$, $m \to \infty$ զուգամիտությունից, որտեղ

$$S^2 := \frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\ , \ \ S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X^n}\,)^2, \ \ S_Y^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y^m}\,)^2 \ :$$

326 (կ). Որոշ թեկնածուի քաղաքապետ ընտրելու նպատակով երկու շրջաններում կատարվել են հարցումներ. արդյունքում I - ին շրջանում 248 հարցմանը մասնակիցներից կողմ են արտահայտվել 84 - ը , II - րդ շրջանում 279 մասնակիցներից կողմ են արտահայտվել՝ 81- ը: Ո՞ր շրջանում է (**0.01** *նշանակալիության մակարդակով*) այդ թեկնածուի «ռեյտինգը» *առավել բարձր*:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 314 :

327 (կ). 20 հատ ծովային օցաձկների արյան մեջ *նատրիումի* պարունակության *ստանդարտ շեղումը* կազմել է $s_0 = 40.5$ միավոր, իսկ 20 հատ գետի քաղցրահամ օցաձկների մեջ՝ $s_0 = 32.1$ միավոր: Ենթադրելով օցաձկների արյան մեջ *նատրիումի* պարունակության վերաբերյալ ***նորմալ բաշխվածությունը***՝ **0.1** *մակարդակով* ստուգել *տեսական ցրվածքների* էական *տարբեր* լինելու վերաբերյալ վարկածը:

Ցուցում՝ տե՛ս բանաձև (12.9) :

328 (կ). Բերվում են *օրգանական* և *անօրգանական* խախտումներ ունեցող երեխաների խմբերի միջև դեղորայք ընդունելուց հետո առողջացածների թվի տոկոսային տվյալները՝

օրգանական խախտումներով երեխաներ՝ 17.5, 20.6, 17.6, 28.9, 27.1,

անօրգանական խախտումներով երեխաներ՝ 15.6, 14.7, 13.3, 12.5, 12.8 :

Համարելով, որ նմուշները վերցված են ***նորմալ օրենքով*** բաշխված համախմբություններից, պարզել՝ էապե՞ս են *տարբերվում*, թե՝ ոչ **0.05** *նշանակալիության մակարդակով օրգանական* և *անօրգանական* խախտումներով երեխաների խմբերի մոտ առողջացածների միջին թվերը:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 315 :

329 (կ). $n_1 = 20$ և $n_2 = 40$ ծավալի երկու տիպի սարքի անխափան աշխատելու ժամանակը կազմել է համապատասխանաբար՝ 3.2 և 3.6 *հազար ժամ* : **0.05** *մակարդակով* ստուգել՝ *փոխվու՞մ* է, թե՝ ոչ այդ սարքերի տեսական անխափան աշխատելու ժամանակը, եթե հայտնի է, որ դրանք բաշխված են ***ցուցչային օրենքով*** :

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 317 :

§ 18. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$՝ (A_μ) - *պայմանը* բավարարող պարամետրական բաշխումների դասից $\mathbb{P}_\theta$ բաշխմանը համապատասխանող նմուշ է: Դիտարկենք

$$\mathbb{H}_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \mathbb{R}^k \quad \text{ընդդեմ} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \in \Theta_1 \subset \mathbb{R}^k \quad (k \geq 1) \tag{18.1}$$

բարդ վարկածների ստուգման խնդիրը, որտեղ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta,\ \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$:

Ճշմարտանմանության հարաբերության (ՃՀ) վիճականի կոչվում է

$$\Lambda^n := \Lambda(X^n) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_1} f_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f_\theta(X^n)} \ \left(\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_1} p_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} p_\theta(X^n)}\right)$$

պատահական մեծությունը, որտեղ $f_\theta(X^n)\ \big(p_\theta(X^n)\big)$ - ը բացարձակ անընդհատ (դիսկրետ) X պատահական մեծության X^n նմուշին համապատասխանող *ճշմարտանմանության ֆունկցիան* է:

Դիտարկենք նաև Λ^n - ին *համարժեք*

$$\Lambda'^n := \Lambda'(X^n,\ \Theta_0) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta} f_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f_\theta(X^n)} \ \left(\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta} p_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} p_\theta(X^n)}\right) \qquad \big(\Lambda'^n = \max(1,\ \Lambda^n)\big)$$

վիճականին և առավել հաճախ կիրառվող

$$\bar{\Lambda}^n := \bar{\Lambda}(X^n,\ \Theta_0) := 1/\Lambda'(X^n,\ \Theta_0) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} f_\theta(X^n)} \ \left(\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} p_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} p_\theta(X^n)}\right)$$

վիճականին:

(18.1) խնդրին համապատասխանող

$$\mathcal{X}_{1\alpha} := \mathcal{X}_{1\alpha}(\Theta_0) = \{x^n :\ \bar{\lambda}(x^n, \Theta_0) \leq c_\alpha\} \ \ \big(\bar{\Lambda}(X^n(\omega), \Theta_0) = \bar{\lambda}(x^n,\ \Theta_0)\big)$$

կրիտիկական տիրույթով հայտանիշը կոչվում է **Ճշմարտանմանության հարաբերության (ՃՀ) հայտանիշ**, որտեղ $c := c_\alpha$ *կրիտիկական եզրն* ընտրվում է այնպես, որ հայտանիշն ունենա տրված α $(0 < \alpha < 1)$ *չափը*՝

$$\mathbb{P}_\theta(X^n \in \mathcal{X}_{1\alpha}) = \int\limits_{\mathcal{X}_{1\alpha}} f_\theta(x^n)dx^n = \mathbb{P}_\theta(\ \bar{\Lambda}^n \leq c_\alpha) = \alpha\,, \qquad \theta \in \Theta_0 :$$

Թեորեմ 18.1: *Դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$ և ստուգվում է*

$$\mathbb{H}_0 :\ \theta = \theta_0 \ \ \textbf{\textit{պարզ}}\ \textit{վարկածն ընդդեմ} \quad \mathbb{H}_1 :\ \theta \neq \theta_0 \tag{18.2}$$

*երկկողմանի **բարդ** երկընտրանքային վարկածը, որտեղ $\theta_0 = (\theta_{01}, \ldots, \theta_{0k}) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$՝ Θ տիրույթի որոշակի ներքին կետ է: Այդ դեպքում, եթե բավարարվում են $(RR)-$ պայմանները (տե՛ս § 9) և ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա տեղի ունի զուգամիտություն՝*

$$T_n := -\,2\ \ln\ \bar{\Lambda}(X^n, \theta_0) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(k), \qquad n \to \infty\,,$$

որտեղ $\bar{\Lambda}(X^n,\ \theta_0) := \dfrac{f_{\theta_0}(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} f_\theta(X^n)} \left(\dfrac{p_{\theta_0}(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} p_\theta(X^n)}\right)$:

Թեորեմից հետևում է, որ *մեծ* n - երի դեպքում α *մակարդակի ՃՀ հայտանիշը* որոշվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0) := \left\{x^n : \; -2\ln\bar{\lambda}(x^n, \theta_0) \;\ge\; \chi^2_\alpha(k)\right\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթով: Որպես (18.2) վարկածը ստուգող α *նշանակալիության մակարդակի* կրիտիկական տիրույթ կարելի է դիտարկել նաև

$$\mathcal{X}'_{1\alpha}(\theta_0) := \{x^n : \; T'_n = \eta_n \mathbb{I}(\theta_0)\,\eta_n^T \;\ge\; \chi^2_\alpha(k)\} \text{ կամ } \mathcal{X}''_{1\alpha}(\theta_0) := \left\{x^n : \; T''_n = \eta_n \mathbb{I}\big(\hat{\theta}_n\big)\,\eta_n^T \;\ge\; \chi^2_\alpha(k)\right\} \qquad (18.3)$$

բազմությունները, որտեղ $\hat{\theta}_n$ - ը $\theta \in \mathbb{R}^k$ պարամետրի *ՃՄ գնահատականն է*, $\eta_n := \sqrt{n}\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) \overset{d}{\to}$ $\overset{d}{\to} \eta_0 \sim \mathbb{N}_k(0, \, \mathbb{I}(\theta_0)^{-1})$, երբ $n \to \infty$, $\mathbb{I}(\theta_0)$ - ն՝ *Ֆիշերի տեղեկատվական մատրիցի* արժեքն է θ_0 կետում:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mathbb{H}_0$ վարկածը **բարդ է**՝

$$\mathbb{H}_0 : \; \theta \in \Theta_0 \subset \Theta \; (\Theta \subseteq \mathbb{R}^k, \quad \dim \Theta = k), \qquad (18.4)$$
$$\Theta_0 := \{\theta \in \Theta : \; \theta = (\theta_0, \, \theta'), \; \theta_0 \in \mathbb{R}^{k-r}, \;\; \theta' \in \mathbb{R}^r\}, \; 0 < r < k, \;\; \dim \Theta_0 = r,$$

որտեղ θ_0- ն՝ *ֆիքսված* է:

Թեորեմ 18.2: *Դիցուք* $X^n \sim \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$ *և ստուգվում է* (18.4) ***բարդ վարկածն*** *ընդդեմ* $\mathbb{H}_1$: $\theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ *երկընտրանքայինը: Եթե բավարարվում են* (RR)*- պայմանները և ճիշտ է* $\mathbb{H}_0$ *վարկածը, ապա տեղի ունի զուգամիտություն*՝

$$T_n := -2\;\ln\overline{\Lambda}^n \;\overset{d}{\to}\; \mathbb{H}^2(k-r), \qquad n \to \infty,$$

որտեղ $\overline{\Lambda}^n := \overline{\Lambda}(X^n, \, \Theta_0) = \dfrac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} f_\theta(X^n)} \left(\dfrac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} p_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} p_\theta(X^n)}\right)$:

α *չափի ՃՀ հայտանիշն* այդ դեպքում որոշվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \; -2\ln\bar{\lambda}(x^n, \, \Theta_0) \;\ge\; \chi^2_\alpha(k-r)\right\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթով:

330. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta, \; 1)$ նմուշ է ***նորմալ բաշխումից***: Ստուգել $\mathbb{H}_0 : \; \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \; \theta < \theta_0$ երկընտրանքայինը:

Ցուցում՝ *ՃՀ վիճականին է*՝ $\overline{\Lambda}^n = \exp\left\{-\,\frac{n}{2}\,(\overline{X^n} - \theta_0)^2\right\}$:

331. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{\Pi}(\theta)$ նմուշ է ***Պուասոնի բաշխումից***: Ստուգել *ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշի* միջոցով $\mathbb{H}_0 : \; \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \; \theta \neq \theta_0$ մրցող վարկածը:

Ցուցում՝ օգտվել *ՃՄ գնահատականի* ասիմպտոտիկ արդյունավետությունից և (18.3) ներկայացումներից:

332. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{G}(\theta)$ նմուշ է ***երկրաչափական բաշխումից***: *Ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշի* միջոցով ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինը:

333. $X^n \sim \mathbb{E}(\theta_1)$ և $Y^m \sim \mathbb{E}(\theta_2)$ միմյանցից անկախ ***ցուցչային բաշխումների դասերից*** նմուշներ են: Կառուցել $\mathbb{H}_0: \theta_1 = \theta_2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta_1 \neq \theta_2$ երկընտրանքայինը ստուգող *ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշը*:

334. Դիցուք $X_j^{n_j} \sim \Pi(\theta_j)$, $j = 1, \dots, k$ միմյանցից անկախ ***Պուասոնի բաշխումների դասերից*** n_j ծավալի նմուշներ են: Կառուցել $\mathbb{H}_0$: $\theta_1 = \dots = \theta_k$ ***համասեռության*** վերաբերյալ վարկածը ստուգող *ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշը*:

335*. Ենթադրենք $X_j^{n_j} \sim \mathbb{N}(\theta_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, \dots, k$ միմյանցից անկախ n_j ծավալի ***նորմալ բաշխումների դասերից*** նմուշներ են: Կառուցել $\mathbb{H}_0: \theta_1 = \dots = \theta_k = \theta^0$ ***համասեռության*** վարկածը ստուգող *ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշը*:

Ցուցում` տե՛ս Հավելված 3 :

336 (մ). Դիցուք $X^n \sim \mathbb{E}(\theta)$, $n = 10$, $\overline{x^n} = 2.5$: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \theta = 0.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_0: \theta \neq 0.5$ երկընտրանքայինը:

Ցուցում` ցույց տալ, որ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n : \bar{\lambda}^n \leq c\} = \{x^n : \theta_0 \overline{x^n} \leq k\}$ $\left(\bar{\lambda}^n = \bar{\lambda}(x^n, \theta_0)\right)$:

337. Ենթադրենք $X^n \sim \Pi(\theta)$, $n = 100$, $\overline{x^n} = 17.5$: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \theta = 18$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_0: \theta \neq 18$ երկընտրանքայինը:

338. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{B}\mathrm{er}(\theta)$, $n = 200$, $\overline{x^n} = 0.55$: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \theta = 0.6$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_0: \theta \neq 0.6$ երկընտրանքայինը:

339. Դիցուք $X^n \sim \mathbb{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, $n = 100$, $\overline{x^n} = 2.7$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x^n})^2 = 225$: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.01}$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \theta_1 = 3$, $\theta_2^2 = 2.5$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_0: \theta_1 \neq 3$, $\theta_2^2 \neq 2.5$ երկընտրանքայինը:

340. Խնդիր 339 - ի պայմաններում **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \theta_1 = \theta_2^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta_1 \neq \theta_2^2$ երկընտրանքայինը:

341. Ենթադրենք $X_j^{n_j} \sim \Pi(\theta_j)$, $j = 1, \dots, 4$ միմյանցից անկախ ***Պուասոնի բաշխումների դասերից*** n_j ծավալի նմուշներ են, $n_1 = 120$, $n_2 = 100$, $n_3 = 100$, $n_4 = 125$, իսկ *նմուշային միջինները* հավասար են` $\overline{x_1^{n_1}} = 251$, $\overline{x_2^{n_2}} = 323$, $\overline{x_3^{n_3}} = 180$, $\overline{x_4^{n_4}} = 426$: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել` *համընկնու՞մ* են, արդյոք այդ բաշխումների *ինտենսիվությունները*, թե՝ ոչ:

342 (կ). Բերվում են որոշակի օրերի ընթացքում 4 ապահովագրական ընկերությունների դիմաց քաղաքացիների թվի վերաբերյալ հետևյալ տվյալները՝

I ընկերություն՝ $x_1^{n_1}$ 15, 17, 14, 12, $n_1 = 4$
II ընկերություն՝ $x_2^{n_2}$ 12, 10, 13, 17, $n_2 = 4$
III ընկերություն՝ $x_3^{n_3}$ 11, 14, 13, 15, 12, $n_3 = 5$
IV ընկերություն՝ $x_4^{n_4}$ 13, 12, 12, 14, 10, 9, $n_4 = 6$ ։

Համարելով, որ այդ տվյալները բավարարում են *միևնույն անհայտ ցրվածքով* ***նորմալ օրենքներին***, ստուգել **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* այդ տվյալների *համասեռության* (այսինքն՝ *միջինների հավասարության*) վերաբերյալ վարկածը։

Ցուցում՝ օգտվել այն փաստից, որ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n: \ \bar{\lambda}^n \le c_\alpha\} = \{x^n: \ f_n \ge S_\alpha(k-1, \ n-k)\}$, որտեղ $S_\alpha(k-1, \ n-k)$ - ը՝ *Ֆիշեր – Սնեդեկորի* կրիտիկական կետն է, $n = \sum n_j$, $j = 1, \dots, 4$, $k = 4$,

$$f_n := \left(\frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \right) \Big/ \left(\frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{n_j} (x_{jm} - \bar{x}_j)^2 \right),$$

$$x_j^{n_j} := \left(x_{j1}, \dots, x_{jn_j}\right), \quad \bar{x}_j := \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} x_{jm}, \quad j = 1, \dots, k, \quad \bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{n_j} x_{jm} \ ։$$

343. Դիցուք $X^{n_1} \sim \mathbb{N}(\theta_{X1}, \theta_{X2}^2)$ և $Y^{n_2} \sim \mathbb{N}(\theta_{Y1}, \theta_{Y2}^2)$ միմյանցից անկախ նմուշներ են, $n_1 = n_2 = n = 20$, $s_x = 40.5$, $s_y = 32.1$ ։ Ստուգել **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0: \ \theta_{X2}^2 = \theta_{Y2}^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \ \theta_{X2}^2 \ne \theta_{Y2}^2$ երկընտրանքայինը։

Ցուցում՝ օգտվել կրիտիկական բազմության հետևյալ ներկայացումից, որտեղ $f_0 := s_x^2 / s_y^2$՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n): \bar{\lambda}^n \le c_\alpha\} = \{(x^n, y^n): f_0 \le S_{1-\alpha/2}(n-1, n-1) \ \cup \ f_0 \ge S_{\alpha/2}(n-1, n-1)\} \ ։$$

344 (կ). Բերված են ***ցուցչային օրենքով*** բաշխված երկու տիպի սարքերի անխափան աշխատելու տևողությունների վերաբերյալ (*հազարական ժամով*) տվյալները՝

I տիպի սարքեր

Անխափան աշխատանք	(0, 5]	(5, 10]	(10, 15]	(15, 20]	(20, 25]	(25, 30]
Հաճախություններ	180	60	20	6	3	1

II տիպի սարքեր

Անխափան աշխատանք	(0, 8]	(8, 16]	(16, 24]	(24, 32]
Հաճախություններ	240	35	4	1

Ստուգել՝ նույննե՞ն, թե՝ ոչ **0.05** ***նշանակալիության մակարդակով*** այդ սարքերի միջին ծառայության ժամանակները։

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 333 ։

§ 19. Պիրսոնի χ^2 – համաձայնության հայտանիշ

Պարզ վարկածի ստուգում

Դիցուք X^n- ը $\mathbb{P}$ բաշխում ունեցող X պատահական մեծության նմուշ է, իսկ $\mathbb{P}_0 \in \mathcal{P}$՝ որոշակի *հայտնի* բաշխում: Պահանջվում է ստուգել

$$\mathbb{H}_0 : \mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \quad \textbf{պարզ} \text{ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \mathbb{P} \neq \mathbb{P}_0$$

բարդ երկընտրանքային վարկածը: Հայտանիշը հիմնված է վիճակագրական տվյալների *խմբավորման մեթոդի* վրա:

Ենթադրենք X պատահական մեծության $\mathcal{X} := X(\Omega)$ արժեքների բազմությունը (*գլխավոր համախմբությունը*) տրոհված է r հատ $\Delta_j := [z_{j-1}, z_j)$ միջակայքերի՝

$$\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^{r} \Delta_j\,, \quad \Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, r\,,$$

որտեղ $-\infty \le a = z_0 < z_1 < \dots < z_{r-1} < z_r = b \le +\infty$ $(\mathcal{X} = [a, b))$: Սովորաբար տրոհման z_i կետերն ընտրում են այնպես, որ

$$p_i^0 := \mathbb{P}_0(X \in \Delta_i) = \mathbb{F}_0(z_i) - \mathbb{F}_0(z_{i-1}) = \frac{1}{r} \quad \big(\mathbb{F}_0(x) = \mathbb{P}_0(X < x)\big), \quad \sum_{i=1}^{r} p_i^0 = 1 :$$

Նշանակենք $\nu_j^* := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\Delta_j}(X_i) = n\,\mathbb{P}_n^*\left(\Delta_j\right),\ j = 1, \dots, r$՝ Δ_j միջակայքերի նմուշային հաճախությունները:

$\mathbb{H}_0$: $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$ վարկածի դեպքում $\nu^* = (\nu_1^*, \dots, \nu_r^*) \sim \mathbb{M}(n;\ p_1^0, \dots, p_r^0)$ վեկտորն ունի ***բազմանդամային բաշխում***, որտեղ $\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$: Այսպիսով՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է փոխարինել $\mathbb{H}_0'$: $\nu^* \sim \mathbb{M}(n;\ p_1^0, \dots, p_r^0)$ վարկածով այնպես, որ $\mathbb{H}_0'$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ν_j^* «**ապոստերիոր**» հաճախությունները պետք է «քիչ» տարբերվեն «**ապրիոր**» կամ *սպասվող* $\mathbb{E}\nu_j^* = np_j^0$ $\left(\nu_j^* \sim \mathbb{B}\text{in}\left(p_j^0,\ n\right)\right)$ հաճախություններից:

Կ. Պիրսոնը առաջարկել է որպես $\mathbb{P}_n^*$ և $\mathbb{P}_0$ բաշխումների միջև *շեղման չափ* («հեռավորություն») դիտարկել հետևյալ վիճականին (***χ^2 – վիճականի***)՝

$$d_{\chi^2}(\mathbb{P}_n^*, \mathbb{P}_0) := \hat{\chi}_n^2 := \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i^* - np_i^0)^2}{np_i^0} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i^*)^2}{np_i^0} - n :$$

Թեորեմ 19.1 (*Կ. Պիրսոն*): *$\mathbb{H}_0$ (կամ $\mathbb{H}_0'$) վարկածը բավարարվելու դեպքում տեղի ունի զուգամիտություն*՝ $\hat{\chi}_n^2 \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(r-1), \quad n \to \infty$:

Թեորեմից հետևում է, որ տրված α $(0 < \alpha < 1)$ *նշանակալիության մակարդակի* համար ճիշտ է

$$\mathbb{P}_0\left(\hat{\chi}_n^2 \ge \chi_\alpha^2(r-1)\right) \to \mathbb{P}\left(\chi_{r-1}^2 \ge \chi_\alpha^2(r-1)\right) = \alpha, \quad n \to \infty$$

զուգամիտությունը, որտեղ $\chi_{r-1}^2 \sim \mathbb{H}^2(r-1)$՝ $(r-1)$ ազատության աստիճաններով ***χ^2 – բաշխում*** ունեցող պատահական մեծություն է, իսկ $\chi_\alpha^2(r-1)$ - ը՝ նրա α *մակարդակի կրիտիկական կետը* : Գործնականում *Պիրսոնի թեորեմը* կիրառվում է, երբ $n > 50$, $\nu_i > 5$, $np_i^0 > 5$, $i = 1, \dots, r$:

Բարդ վարկածի ստուգում

Դիցուք պահանջվում է ստուգել վարկած, որ X պատահական մեծությունն ունի $\mathbb{P}$ բաշխում, որը պատկանում է որոշակի $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ *պարամետրական* բաշխումների դասին և $\mathcal{P}_0 := \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta_0 \subset \mathbb{R}^k, k \ge 1\}$: Այսպիսով՝ X պատահական մեծության X^n նմուշի միջոցով պետք է *ստուգել*

$$\mathbb{H}_0 : \mathbb{P} = \mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}_0 \ \textbf{բարդ} \text{ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \mathbb{P} = \mathbb{P}_\theta \notin \mathcal{P}_0 \ \textbf{բարդ} \text{ երկընտրանքայինը:} \tag{19.1}$$

Ենթադրենք X պատահական մեծության $\mathcal{X} = X(\Omega) = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$ արժեքների բազմությունը տրոհված է r հատ $\Delta_j = [z_{j-1}, z_j)$ միջակայքերի՝

$$\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^{r} \Delta_j\ ,\quad \Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, r :$$

Նշանակենք $\nu_j^* := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\Delta_j}(X_i) = n\, \mathbb{P}_n^*(\Delta_j)$, $j = 1, \dots, r$՝ Δ_j միջակայքերի նմուշային («**ապոստերիոր**») հաճախությունները և $\nu^* = (\nu_1^*, \dots, \nu_r^*)$ - ով՝ հաճախությունների վեկտորը: X պատահական մեծության «**ապրիոր**» բաշխումն է՝

$$p_j(\theta) := \mathbb{P}_\theta(X \in \Delta_j) = \mathbb{F}_\theta(z_j) - \mathbb{F}_\theta(z_{j-1}), \quad \mathbb{F}_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X < x),$$

այնպես, որ $\boldsymbol{\chi^2}$ ***– վիճականին*** կլինի կախված անհայտ $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ պարամետրից՝

$$\hat{\chi}_n^2(\theta) := \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(\nu_j^* - np_j(\theta)\right)^2}{np_j(\theta)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(\nu_j^*\right)^2}{np_j(\theta)} - n : \tag{19.2}$$

Որպեսզի այս վիճականին կիրառվի (19.1) վարկածները ստուգելու համար անհրաժեշտ է գնահատել θ պարամետրը:

Դիտարկենք $\nu^* = (\nu_1^*, \dots, \nu_r^*) \sim \mathbb{M}(n;\, p_1(\theta), \dots,\, p_r(\theta))$ վեկտորի *ճշմարտանմանության ֆունկցիան*՝

$$p_\theta(\nu) := \mathbb{P}_\theta(\nu^* = \nu) = \mathbb{P}_\theta(\nu_1^* = \nu_1, \dots, \nu_r^* = \nu_r\,) = \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_r!} \prod_{j=1}^{r} \left[p_j(\theta)\right]^{\nu_j}, \quad \left(\sum_{j=1}^{r} \nu_j = n\right):$$

Բազմանդամային ճշմարտանմանության հավասարումների համակարգ կոչվում է

$$\frac{\partial}{\partial \theta_m} L_\theta(\nu) = 0, \qquad m = 1, \dots, k, \tag{19.3}$$

համակարգը, որտեղ

$$L_\theta(\nu) := \ln p_\theta(\nu) = \ln \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_r!} + \sum_{j=1}^{r} \nu_j \ln p_j(\theta)$$

բազմանդամային լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիան է, այնպես, որ (19.3) համակարգը կընդունի

$$\frac{\partial}{\partial \theta_m} L_\theta(\nu) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j}{p_j(\theta)} \cdot \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_m} = 0, \qquad m = 1, \dots, k \tag{19.4}$$

տեսքը:

$\Theta_0 \subset \mathbb{R}^k$ բազմությունից արժեքներ ընդունող այն $\tilde{\theta} := \tilde{\theta}(X^n) = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k)$ վիճականին, որի դեպքում $p_\theta(\nu)$ (կամ $L_\theta(\nu)$) ֆունկցիան ընդունում է իր **մեծագույն արժեքը** և որը բավարարում է (19.4) պայմանները, կոչվում է **բազմանդամային ճշմարտանմանության մաքսիմումի (ՃՄ) գնահատական**: Տեղադրելով այդ գնահատականը θ պարամետրի փոխարեն $p_j(\theta)$ ֆունկցիաներում և նշանակելով $\tilde{p}_j := p_j(\tilde{\theta})$՝ (19.2) վիճականին կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(\nu_j^* - n\tilde{p}_j\right)^2}{n\tilde{p}_j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(\nu_j^*\right)^2}{n\tilde{p}_j} - n :$$

Թեորեմ 19.2 (***Ֆիշեր***): *Դիցուք* $p_j(\theta)$, $j = 1, \dots, r$ *ֆունկցիաները բոլոր* $\theta \in \Theta_0 \subset \mathbb{R}^k$ *-ի համար* ($k < r - 1$) *բավարարում են հետևյալ պայմանները՝*

$$1.\quad p_j(\theta) \geq c > 0, \quad p_j(\theta) \in C^{(2)}(\Theta_0), \qquad 2.\quad \operatorname{rank} \left\| \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_i} \right\|_{i,j=1}^{k,r} = k :$$

Այդ դեպքում $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում տեղի ունի*

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(r - k - 1), \qquad n \to \infty$$

զուգամիտությունը, որտեղ $\tilde{\theta}$ *-ը* θ *-ի* ***բազմանդամային ՃՄ գնահատականն*** *է:*

Այսպիսով՝ տրված α ($0 < \alpha < 1$) *նշանակալիության մակարդակի* համար ճիշտ է

$$\mathbb{P}_{\tilde{\theta}}(\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) \geq \chi_\alpha^2(r - k - 1)) \to \mathbb{P}\, (\chi_{r-k-1}^2 \geq \chi_\alpha^2(r - k - 1)) = \alpha\,, \qquad n \to \infty$$

զուգամիտությունը, այնպես, որ $\boldsymbol{\chi^2}$ **–** ***հայտանիշի*** α *նշանակալիության մակարդակի* **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n : \ \hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) \geq \chi_\alpha^2(r - k - 1)\}:$$

345. 4000 անկախ փորձեր կատարելիս A_1, A_2 և A_3 լրիվ խումբ կազմող պատահույթները ի հայտ են եկել, համապատասխանաբար՝ $\nu_1 = 1905$, $\nu_2 = 1015$ և $\nu_3 = 1080$ անգամ: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել՝ **համաձայնեցվու՞մ** են, արդյոք այդ տվյալները $\mathbb{H}_0 :\ p_1 = \dfrac{1}{2}\,,\ p_2 = p_3 = \dfrac{1}{4}$ վարկածի հետ, թե՝ ոչ, որտեղ $p_i = \mathbb{P}\,(A_i)$, $i = 1, 2, 3$: Գտնել **իրական հասանելի** նշանակալիության մակարդակը ($\mathbb{P}$ **- արժեքը**):

346. π թվի ստորակետից հետո տասնորդական ներկայացման 10 002 նիշերի մեջ 0, 1, …, 9 թվերը հանդիպում են, համապատասխանաբար՝

968, 1026, 1021, 974, 1014, 1046, 1021, 970, 948, 1014

անգամ: Կարելի՞ է, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* համարել, որ π թվի գրառման մեջ այդ թվերի ի հայտ գալը **պատահական (հավասարահնարավոր)** է : Ո՞ր **նշանակալիության մակարդակի** համար այդ վարկածը **կհերքվի:**

Ցուցում՝ ստուգել $\mathbb{H}_0 :\ p_0 = \cdots = p_9 = \frac{1}{10}$ վարկածը, որտեղ $p_i = \mathbb{P}\,(\xi = i)$, $i = 0, \dots, 9$:

347. Փորձի ընթացքում դիտվել են 0.01 ճշտությամբ մոտարկված և աճման կարգով վերադասավորված դրական անընդհատ պատահական մեծության հետևյալ արժեքները՝

0.01	0.01	0.04	0.17	0.18	0.22	0.22	0.25	0.25	0.29
0.42	0.46	0.47	0.47	0.56	0.59	0.67	0.68	0.70	0.72
0.76	0.78	0.83	0.85	0.87	0.93	1.00	1.01	1.01	1.02
1.03	1.05	1.32	1.34	1.37	1.47	1.50	1.52	1.54	1.59
1.71	1.90	2.10	2.35	2.46	2.46	2.50	3.73	4.07	6.03 :

Խմբավորելով տվյալները *հավասար հավանականությամբ* 4 միջակայքերի **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել X^n նմուշը ***ստանդարտ ցուցչային օրենքով*** բաշխված լինելու $\mathbb{H}_0$: $X^n \sim \mathbb{E}(1)$ վարկածը: Գտնել նաև $\mathbb{P}$ **- արժեքը**:

Ցուցում՝ $[a_i, a_{i+1})$ միջակայքերի սահմանները գտնել $1 - e^{-a_1} = \frac{1}{4}$, $e^{-a_i} - e^{-a_{i+1}} = \frac{1}{4}$, $i = 1,2$ պայմաններից:

348. Կարելի՞ է, արդյոք հետևյալ

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \geq 5 \\ \nu_i & 20 & 57 & 98 & 85 & 78 & 62 \end{array}$$

տվյալների հիման վրա **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* եզրակացնել, որ համապատասխան պատահական մեծությունը բաշխված է ***Պուասոնի օրենքով***:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ $\tilde{\lambda} = \overline{x^n} = 3$՝ λ - ի *բազմանդամային ՃՄ գնահատականն* է:

349. Տրված է դրական պատահական մեծության հաճախականային բաշխումը՝

Միջակայքերը	< 2.6	$[2.6, 3.8)$	$[3.8, 5)$	$[5, 6.2)$	$[6.2, 7.4)$	≥ 7.4
Հաճախությունները	1	2	14	20	10	3

0.1 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել վարկած, որ այդ տվյալները նկարագրում են $\mathbb{N}(m, \sigma^2)$ ***նորմալ օրենքով բաշխված*** պատահական մեծությունը:

Ցուցում՝ որպես m և σ^2 պարամետրերի գնահատականներ վերցնել՝ $\overline{x^n}$ և s^2 բնութագրիչները:

350. 8002 անկախ փորձեր կատարելիս լրիվ խումբ կազմող A, B և C պատահույթները ի հայտ են եկել, համապատասխանաբար, 2014, 5008 և 980 անգամ: Ճի՞շտ է արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* հետևյալ վարկածը՝

$$\mathbb{H}_0 : \ \mathbb{P}(A) = 0.5 - 2\theta, \quad \mathbb{P}(B) = 0.5 + \theta, \quad \mathbb{P}(C) = \theta \ \ (0 < \theta < 0.25):$$

Ցուցում՝ գտնել θ պարամետրի *բազմանդամային ՃՄ գնահատականը*:

351 (կ). Բերված են երկու ժամագործների ցուցարկղերում ցուցադրված, յուրաքանչյուրում 500 - ական ժամացույցների, ցուցումների երկու նմուշ՝

Ցուցումների միջակայքերը		0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Հաճախությունները	1 խումբ	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39
	2 խումբ	36	47	41	47	49	45	32	37	40	41	37	48

Համաձայնեցվու՞մ են, արդյոք **0.05** *մակարդակով* այդ տվյալները ժամացույցների ցուցումները (0, 12) միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխված*** լինելու վարկածի հետ:

Ցուցում՝ ստուգել $\mathbb{H}_0: \ p_1^0 = \cdots = p_{12}^0 = \frac{1}{12}$ վարկածը:

352 (կ). Ոսկու լուծույթի բարակ շերտում հավասար ժամանակահատվածներում գրանցվել են որոշ քանակությամբ ոսկու մասնիկներ: 517 դիտումների արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները՝

Մասնիկների թիվը	0	1	2	3	4	5	6	7
Փորձերի թիվը (ν_j)	112	168	130	68	32	5	1	1

0.05 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ ժամանակահատվածներում մասնիկների թվի ***Պուասոնի օրենքով բաշխված*** լինելու վարկածը:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ *բազմանդամային ՃՄ գնահատականը* λ ինտենսիվության համար $\tilde{\lambda} = \overline{X^n}$ վիճականին է (աղյուսակում բերված 5 – 7 խմբերը միացնել):

353 (կ). Ապահովագրական ընկերության մասնաճյուղը առաջարկում է 5 տարբեր տեսակի ապահովագրեր: Որոշակի օրվա ընթացքում 1 անձի հետ մասնաճյուղում կնքված պայմանագրերի հաճախականային բաշխումն ունի հետևյալ տեսքը՝

1 օրում կնքված պայմանագրերի թիվը	0	1	2	3	4	5
Հաճախությունները	10	41	60	20	6	3

Կարելի՞ է, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* համարել, որ այդ տվյալները բավարարում են ***բինոմական օրենքին*** (համարել, որ յուրաքանչյուր ապահովագիր անկախ տեսակից վաճառվում է 0.4 հավանականությամբ):

Ցուցում՝ միացնել վերջին երկու խմբերը:

354 (կ). Ուսումնասիրվում են տվյալ շրջանի 3 երեխա ունեցող ընտանիքները: Պատահական ընտրված 160 այդպիսի ընտանիքներում տղա երեխա ունեցողների համար ստացվել է հետևյալ հաճախականային բաշխումը՝

Տղաների թիվը	0	1	2	3
Հաճախությունը (ν_i)	14	66	64	16

0.05 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ շրջանում 3 երեխա ունեցող ընտանիքներում տղաների թվի ***բինոմական օրենքով բաշխված*** լինելու վարկածը: Գտնել $\mathbb{P}$ **- արժեքը**:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ 3 երեխա ունեցող ընտանիքներում տղա երեխա ունենալու θ հավանականության *բազմանդամային ՃՄ գնահատականը՝* $\tilde{\theta} = \frac{1}{3n}(\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3)$ վիճականին է:

355 (կ). Խաղարկային հանձնաժողովը հայտարարում է, որ նոր տեսակի խաղի մասնակիցը 0.1 հավանականությամբ կարող է շահել 1 $, 0.05 հավանականութամբ՝ 100 $ և 0.85 հավանականությամբ՝ ոչինչ չի շահի: Որպեսզի ստուգվի այդ հայտարարությունը նախորդ խաղարկության հաղթողներից մեկը ձեռք բերեց այդ խաղի 1000 տոմս, որից 87 հատը շահեց 1 $, 48 հատը՝ 100 $, իսկ մնացածը՝ ոչինչ չշահեց: Համապատասխանու՞մ է, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* իրականությանը հանձնաժողովի հայտարարությունը, թե՝ ոչ: Գտնել $\mathbb{P}$ **- արժեքը**:

356 (կ) . Բեռնատար մեքենաները կշռելիս մաքսատան աշխատակիցը ունենալով երկար տարիների աշխատանքային փորձ ենթադրում է, որ բեռնատարների կշիռները բաշխված են $\mu = 71$ *միջինով* և $\sigma^2 = 196$ *ցրվածքով* ***նորմալ օրենքով*** : Որպեսզի ստուգվի այդ ենթադրությունը, մաքսատան աշխատակիցը պատահական ընտրված օրվա ընթացքում գրանցեց կայանին մոտեցող բեռնատարների կշիռները: Գրանցված տվյալները հետևյալն են (*տոննաներով*)՝

85	57	60	81	89	63	52	65	77	64
89	86	90	60	57	61	95	78	66	92
50	56	95	60	82	55	61	81	61	53
63	75	50	98	63	77	50	62	79	69
76	66	97	67	54	93	70	80	67	73 :

Համաձայնեցվու՞մ են, արդյոք **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* տվյալները այդ ենթադրության հետ, թե՝ ոչ: Խմբավորել տվյալները՝ վերցնելով 5 հատ հավասար հավանականություններ ունեցող միջակայքեր:

Ցուցում՝ տվյալները ներկայացնել «ցողուն և տերևներ» տեսքով (տե՛ս [2]):

357 (կ). Ստորև բերված են որոշ շրջանի գետերի աղտոտման աստիճանի վերաբերյալ տվյալներ (պայմանական միավորներով): Հաշվարկները տվել են *նմուշային միջինի* և *ստանդարտ շեղման* համար հետևյալ արժեքները՝ $\overline{x^n} = 0.174,\ s = 0.075$: **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ շրջանի գետերի աղտոտման աստիճանը ***նորմալ բաշխված*** լինելու վարկածը և գտնել $\mathbb{P}$ **- արժեքը**:

Աղտոտման աստիճանը (պ.մ.)	< 0.1	$[0.1, 0.15)$	$[0.15, 0.2)$	$[0.2, 0.25)$	≥ 0.25
Հաճախությունը (ν_k)	12	20	23	15	13

:

Ցուցում՝ որպես $\mathbb{N}\,(m,\ \sigma^2)$ *նորմալ բաշխման* $\theta = (m, \sigma^2)$ պարամետրի գնահատական վերցնել $\hat{\theta} = (\,\overline{x^n},\ s^2)$ վիճականին:

358 (կ). Խաղաքարը 300 անգամ նետելուց ստացվել են հետևյալ տվյալները՝

i	1	2	3	4	5	6
ν_i	43	49	56	45	66	41

:

Համաձայնեցվու՞մ են, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* այդ տվյալները խաղաքարի ***կանոնավոր*** լինելու վարկածի հետ, թե՝ ոչ: Գտնել $\mathbb{P}$ **- արժեքը**:

359 (կ). Ծովախոզուկի 64 սերունդների մեջ 34 - ը կարմիր գույնի են, 10 - ը՝ սև և 20 - ը՝ սպիտակ: Համաձայն գենետիկ մոդելի այդ թվերը պետք է բավարարեին 9 : 3 : 4 հարաբերությանը: **Համաձայնեցվու՞մ** են, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* այդ տվյալները մոդելի հետ, թե՝ ոչ: Գտնել $\mathbb{P}$ **- արժեքը**:

Ցուցում՝ Ստուգել՝ $\mathbb{H}_0 :\ p_1 = \frac{9}{16},\ \ p_2 = \frac{3}{16},\ p_3 = \frac{4}{16}$ վարկածը:

360 (կ). Որոշ տեսակի կենդանու սերունդներն ըստ ֆիզիկական տվյալների խմբավորել են 10, 53 և 46 քանակությամբ երեք մասի: Համաձայն գենետիկ մոդելի այդ խմբերի հաճախությունները պետք է հարաբերվեին ինչպես՝ $\theta^2 : 2\theta\,(1-\theta) : (1-\theta)^2$, $0 < \theta < 1$: **Համաձայնեցվու՞մ** են, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստացված տվյալները մոդելի հետ, թե՝ ոչ: Գտնել $\mathbb{P}$ **- արժեքը**:

Ցուցում՝ նկատել, որ գենետիկ մոդելը բավարարում է $\mathbb{B}\mathrm{in}\,(1-\theta, 2)$ *բինոմական* օրենքին:

361* (կ). Բնակչության որոշ համախմբությունից պատահական վերցված 1000 մարդ դասակարգվել էն ըստ սեռի և ըստ գունակույր (գույներ չտարբերող) մարդկանց թվի պատկանելիությանը, հետևյալ ձևով

	Տղամարդիկ	Կանայք
Նորմալ	442	514
Գունակույր	38	6

Համաձայն գենետիկ մոդելի այդ խմբերը պետք է ի հայտ գան, համապատասխանաբար, հետևյալ հավանականություններով $(0 < \theta < 1)$՝

	Տղամարդիկ	Կանայք
Նորմալ	$\theta/2$	$\theta^2/2 + \theta(1-\theta)$
Գունակույր	$(1-\theta)/2$	$(1-\theta)^2/2$

Այստեղ $(1-\theta)$-ն՝այդ համախմբության գունակույր մարդկանց (տեսական) բաժինն է: **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ տվյալների գենետիկ մոդելին **համապատասխանության** վերաբերյալ վարկածը:

Ցուցում՝ գտնել p պարամետրի *բազմանդամային ՃՄ գնահատականը* ։

§ 20. Կոլմոգորովի համաձայնության հայտանիշ

Ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0\text{:}\ \ X^n \sim \mathbb{P} = \mathbb{P}_0\ \ \textbf{պարզ}\ \text{վարկածն ընդդեմ}\ \ \mathbb{H}_1\text{:}\ \ X^n \sim \mathbb{P} \neq \mathbb{P}_0$$

բարդ երկընտրանքային վարկածը: $\mathbb{P}_0$ բաշխմանը համապատասխանող $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիան ենթադրվում է **անընդհատ** ։ Որպես հայտանիշի վիճականի կիրառվում է

$$D_n := D\,(X^n\,) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}_0(x)|$$

վիճականին: $\mathbb{P}_n^*$ և $\mathbb{P}_0$ բաշխումների միջև սահմանվում է հետևյալ *հեռավորություն* (***Կոլմոգորովի վիճականի***)՝

$$d_K(\mathbb{P}_n^*,\ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}) := \sqrt{n}\,D_n = \sqrt{n}\,\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}_0(x)|\ ։$$

Թեորեմ 20.1 (*Կոլմոգորով*): *$\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում տեղի ունի ըստ բաշխման հետևյալ զուգամիտությունը՝*

$$\sqrt{n}\,D_n \xrightarrow{d} \mathbb{K}\,,\quad n\to\infty,$$

որտեղ $\mathbb{K}$ - ն՝ ***Կոլմոգորովի բաշխումն*** *է*։

Կոլմոգորովի ξ պատահական մեծության *բաշխման ֆունկցիան* ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathbb{K}(x) := \mathbb{P}(\xi < x) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, e^{-2k^2x^2}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),\qquad x\in\mathbb{R}\ ։$$

$\mathbb{K}(x)$ ֆունկցիայի համար կազմված են աղյուսակներ (տես աղյուսակ 11): Գործնականում արդեն $n \geq 20$ - ի դեպքում $\mathbb{P}\big(\sqrt{n}\,D_n < x\big)$ հավանականություններն անկախ $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից բավականաչափ *լավ* մոտարկվում են $\mathbb{K}(x)$ ֆունկցիայով:

Թեորեմ 20.1 - ից բխում է, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում տրված α ($0 < \alpha < 1$) *նշանակալիության մակարդակի* համար ճիշտ է

$$\mathbb{P}_0\big(\sqrt{n}\,D_n \geq \lambda_\alpha\big) \to \mathbb{P}(\xi \geq \lambda_\alpha) = 1 - \mathbb{K}(\lambda_\alpha) = \alpha$$

զուգամիտությունը, որտեղ λ_α - ն ***Կոլմոգորովի բաշխման*** *α մակարդակի ասիմպտոտիկ կրիտիկական կետն է* (*եզրը*): Այսպիսով՝ Կոլմոգորովի հայտանիշի α *նշանակալիության մակարդակի* **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** (երբ $n \geq 20$ - ի)

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n :\ \sqrt{n}\,D(x^n) \geq \lambda_\alpha\right\}$$

բազմությունն է: Գործնականում $D(x^n)$ - ի արժեքը հաշվարկվում է

$$D\,(x^n\,) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{F}_n(x) - \mathbb{F}_0(x)| = \max_{1\leq k\leq n}\left\{\left|\mathbb{F}_n\big(x_{(k)}\big) - \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big)\right|,\ \ \left|\mathbb{F}_n\big(x_{(k+1)}\big) - \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big)\right|\right\}$$

բանաձևի օգնությամբ, որտեղ $\mathbb{F}_n\big(x_{(k)}\big) = \frac{k-1}{n}$ ։

Թեորեմ 20.2 (*Կոլմոգորով*): *Եթե ճիշտ է $\mathbb{H}_0 : X^n \sim \mathbb{P}_0$ վարկածը և $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիան* ***անընդհատ*** *է, ապա* $\boldsymbol{D_n}$ *վիճականու բաշխումը* ***ցանկացած*** *$n \geq 1$ - ի համար $\mathbb{P}_0$ բաշխումից* ***կախված չէ***։

Ի նկատի ունենալով D_n վիճականու *ոչ պարամետրական* ($\mathbb{P}_0$ բաշխումից «*ազատ*») լինելու հատկությունը, կազմված է այդ պատահական մեծության *բաշխման ֆունկցիայի* աղյուսակը (տե՛ս աղյուսակ 12), որտեղ որպես $\mathbb{P}_0$ բաշխում դիտարկվում է $[0,1]$ միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխումը*** ։

Նշանակենք D_n վիճականու *կրիտիկական կետը* $d_\alpha(n)$ - ով, այսինքն՝

$$\mathbb{P}\big(D_n \geq d_\alpha(n)\big) = \alpha \text{ ։}$$

$n \geq 20$ - ի դեպքում λ_α կրիտիկական կետի արժեքը գործնականորեն քիչ է տարբերվում $\sqrt{n}\, d_\alpha(n)$ մեծության արժեքից:

Որոշակի α *նշանակալիության մակարդակների* համար λ_α *կրիտիկական կետերի* արժեքներն են՝

$$\lambda_{0.2} = 1.08, \quad \lambda_{0.1} = 1.23, \quad \lambda_{0.05} = 1.36, \quad \lambda_{0.02} = 1.52, \quad \lambda_{0.01} = 1.63 \text{ ։}$$

Թեորեմ 20.1 - ից հետևում է, որ հավասարաչափ ըստ բոլոր $x \in \mathbb{R}$ - ի

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{F}_n^*(x) - \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} < \mathbb{F}(x) < \mathbb{F}_n^*(x) + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \to 1 - \alpha, \qquad n \to \infty \text{ ։}$$

Այստեղից՝ $(1-\alpha)$ մակարդակի *ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը* $\mathbb{F}(x)$ ֆունկցիայի համար՝ $\left(\mathbb{F}_n^*(x) \mp \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}\right.$, բոլոր $x \in \mathbb{R}$ - ից$\left.\right)$ միջակայքն է:

Նմանապես թեորեմ 20.2 - ից հավասարաչափ ըստ բոլոր $x \in \mathbb{R}$ - ի՝ կստանանք

$$\mathbb{P}\big(\mathbb{F}_n^*(x) - d_\alpha(n) < \mathbb{F}(x) < \mathbb{F}_n^*(x) + d_\alpha(n)\big) = 1 - \alpha\,, \qquad n \geq 1,$$

այսինքն՝ $(1-\alpha)$ *մակարդակի վստահության միջակայքը* $\mathbb{F}(x)$ ֆունկցիայի համար՝ ($\mathbb{F}_n^*(x) \mp d_\alpha(n)$, բոլոր $x \in \mathbb{R}$ - ից) միջակայքն է:

Այստեղից, օգտվելով վարկածների ստուգման *վստահության միջակայքերի* մեթոդից՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգվում է հետևյալ կերպ.

α $(0 < \alpha < 1)$ *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$ վարկածը **չի հերքվի**, եթե բոլոր k - երի $(k = 1, \dots, n-1)$ համար բավարարվեն հետևյալ պայմանները՝

ասիմպտոտիկ *դեպքում*՝

$$\mathbb{F}_n\big(x_{(k+1)}\big) - \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} < \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big) < \mathbb{F}_n\big(x_{(k)}\big) + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}\,,$$

$\boldsymbol{n < 20}$ *դեպքում*՝

$$\mathbb{F}_n\big(x_{(k+1)}\big) - d_\alpha(n) < \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big) < \mathbb{F}_n\big(x_{(k)}\big) + d_\alpha(n),$$

և, համապատասխանաբար, $\mathbb{H}_0$ վարկածը **կհերքվի**, եթե *գոնե մեկ* k - ի համար այս անհավասարությունները խախտվեն:

362* (Մ). Դիցուք X^n - ը *անընդհատ* $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից նմուշ է: Սահմանենք հետևյալ վիճականին ($\boldsymbol{\omega^2}$ ***– վիճականի***)՝

$$\omega_n^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}_0(x)\big)^2 d\,\mathbb{F}_0(x) \text{ ։}$$

Ցույց տալ, որ ω_n^2 – *վիճականին* **ոչ պարամետրական** է և ապացուցել, որ $\mathbb{E}\omega_n^2 = \dfrac{1}{6n}$ ։

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 ։

363. $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$ *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել, որ

0.0989, 0.3205, 0.0514, 0.2256, 0.8514, 0.4642, 0.7567, 0.8893

«պատահական թվերը» $(0, 1)$ միջակայքում բաշխված են ***հավասարաչափ օրենքով***: Գտնել նաև α *նշանակալիության մակարդակի* այն մեծագույն արժեքը ($\mathbb{P}$ - ***արժեքը***), որի դեպքում վարկածը **չի հերքվի**:

364*(մ). Հետազոտվում է վարիացիոն շարքի տեսքով տրված $n = 40$ ծավալի հետևյալ նմուշը՝

0.0475	0.2153	0.2287	0.2824	0.3743	0.3868	0.4421	0.5033	0.5945	0.6004
0.6255	0.6331	0.6478	0.7867	0.8878	0.8930	0.9335	0.9602	1.0448	1.0556
1.0894	1.0999	1.1765	1.2036	1.2344	1.2543	1.2712	1.3507	1.3515	1.3528
1.3774	1.4209	1.4304	1.5137	1.5288	1.5291	1.5677	1.7238	1.7919	1.8794 :

0.05 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ տվյալների 1 *միջինով* և $1/6$ *ցրվածքով* ***նորմալ բաշխված*** պատահական մեծության արժեքները լինելու վարկածը:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

365. Մոդելավորման եղանակով ստացված են $\Gamma(1,2)$ ***Էռլանգի բաշխումից*** հետևյալ թվերի հաջորդականությունը՝

0.8465 1.4770 1.7406 1.8669 3.4113 3.1820 1.4988 1.3281 3.0715 4.4123 :

0.05 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ հաջորդականության $\Gamma(1,2)$ ***բաշխում*** ունեցող պատահական մեծության արժեքներ լինելու վարկածը:

366. Լուծել խնդիր 349 - ը օգտվելով *Կոլմոգորովի հայտանիշից* :

367. Մոդելավորել $n = 15$ ծավալի նմուշ 3 ազատության աստիճաններով χ^2 ***բաշխումից*** և **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ նմուշը $\mathbb{H}^2(3)$ ***օրենքին*** բավարարելու վարկածը:

Ցուցում՝ օգտվել [2, խնդիր 4.8 - ից]:

368. Մոդելավորել $n = 10$ ծավալի նմուշ 4 ազատության աստիճաններով ***Ստյուդենտի (t -) բաշխումից*** և **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել ստացված նմուշի համաձայնությունը $\mathbb{T}(4)$ ***Ստյուդենտի օրենքի*** հետ:

Ցուցում՝ օգտվել [2, խնդիր 4.10 - ից] :

369. (կ) Որոշ գործարանի հսկողության բաժինը կատարել է 200 դետալի չափումներ, որի արժեքները (0.1 մմ *ճշտությամբ*) համապատասխան հաճախություն-ների հետ մեկտեղ բերված են հետևյալ աղյուսակում՝

x_i	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
ν_i	3	11	14	51	59	40	16	5	1

0.1 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել վարկած, որ այդ նմուշը համապատաս-խանում է $\mu = \overline{x^n}$ *միջինով* և $\sigma^2 = s^2$ *ցրվածքով* ***նորմալ բաշխմանը*** :

370 (կ). Լուծել խնդիր 369 - ը օգտվելով *Պիրսոնի* χ^2 – *հայտանիշից* դիտարկե-լով $[x_i - 0.05,\ x_i + 0.05)$, $i = 1, \dots, 9$ միջակայքերը:

371 (կ). Միևնույն հաստոցի միջոցով կատարված դետալների անցքերի տրամա-գծի չափումները (0.01 մմ *ճշտությամբ*) տվել են հետևյալ արժեքներ՝

x_i	40.25	40.27	40.28	40.29	40.30	40.31	40.32	40.33	40.34
ν_i	1	1	2	2	6	5	6	7	10
	40.35	40.36	40.37	40.38	40.39	40.40	40.41	40.42	40.43
	8	7	6	3	3	3	3	2	2
	40.44	40.45	40.46						
	1	1	1						

0.05 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ անցքերի տրամագծի [40.245, 40.465] միջակայքում ***հավասարաչափ բաշխված*** լինելու վարկածը:

372* (կ). Բերվում են ինքնաթիռում տեղադրված օդափոխիչ սարքավորումների անխափան աշխատանքի տևողության վերաբերյալ տվյալները (օրերով)՝

74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21, 29, 386, 59, 27, 153, 26, 326 :

0.1 և **0.05** *նշանակալիության մակարդակներով* ստուգել այդ տվյալները $\alpha = 1/120$ պարամետրով $\mathbb{E}(\alpha)$ ***ցուցչային օրենքին*** ենթարկվելու վերաբերյալ վարկածը:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 364* :

373 (կ). Լուծել խնդիր 357 - ը օգտվելով *Կոլմոգորովի հայտանիշից* :

§ 21. Համասեռության հայտանիշներ

Վիճակագրության կիրառություններում կարևոր է պարզել տարբեր պայմաններում ստացված $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ և $Y^m = (Y_1, \dots, Y_m)$ նմուշների *միևնույն բաշխում* ունենալու (*համասեռության*) հարցը:

Ընդհանուր արմամբ խնդիրը դրվում է հետևյալ կերպ՝

դիցուք $X^n \sim \mathbb{P}_1$ և $Y^m \sim \mathbb{P}_2$՝ համապատասխանաբար $\mathbb{F}_1(x)$ և $\mathbb{F}_2(x)$ բաշխման ֆունկցիաներով $\mathbb{P}_1$ և $\mathbb{P}_2$ անհայտ բաշխումներից վերցված *միմյանցից անկախ* նմուշներ են: Պահանջվում է ստուգել

$\mathbb{H}_0: \mathbb{F}_1(x) \equiv \mathbb{F}_2(x) \ (:= \mathbb{F}_0(x))$ *համասեռության վերաբերյալ* վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\mathbb{F}_1(x) \not\equiv \mathbb{F}_2(x)$

երկընտրանքային վարկածը:

Սմիռնովի համասեռության հայտանիշ

Հայտանիշը հիմնված է

$$D_{nm} := D(X^n, Y^m) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbb{F}^*_{1n}(x) - \mathbb{F}^*_{2m}(x)|$$

Սմիռնովի վիճականու հատկությունների վրա, որտեղ $\mathbb{F}^*_{1n}(x)$- ը և $\mathbb{F}^*_{2m}(x)$ - ը, համապատասխանաբար, X^n և Y^m նմուշների բաշխման ֆունկցիաներն են:

Թեորեմ 21.1 (*Սմիռնով*): *Եթե* $\mathbb{F}_1(x)$ և $\mathbb{F}_2(x)$ *ֆունկցիաներն* ***անընդհատ*** *են, ապա* $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է ըստ բաշխման հետևյալ զուգամիտությունը՝*

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\, D_{nm} \xrightarrow{d} \mathbb{K}, \qquad n \to \infty, \quad m \to \infty, \quad \left(\frac{n}{m} \to c > 0\right):$$

Սմիռնովի հայտանիշը տրվում է $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{(x^n, y^m): \sqrt{\frac{nm}{n+m}}\, D_{nm} \geq \lambda_\alpha\right\}$ **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթի** միջոցով $(n, m > 20)$, որտեղ λ_α - ն ***Կոլմոգորովի բաշխման*** α *մակարդակի ասիմպտոտիկ կրիտիկական* կետն է:

Թեորեմ 21.2 (*Սմիռնով*): *Եթե* $\mathbb{F}_1(x)$ և $\mathbb{F}_2(x)$ *ֆունկցիաներն* ***անընդհատ*** *են, ապա* $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում* $\boldsymbol{D_{nm}}$ ***վիճականու բաշխումը*** *(ցանկացած* $n \geq 1$ *և* $m \geq 1$ *համար)* $\mathbb{P}_1$ *և* $\mathbb{P}_2$ *բաշխումներից* ***կախում չունի:***

χ^2 – համասեռության հայտանիշ

Այս մեթոդը թույլ է տալիս միաժամանակ հետազոտել ցանկացած վերջավոր թվով նմուշներ:

Դիցուք կատարվում են k հատ *անկախ* $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ *փորձերի սերիաներ*, որտեղ յուրաքանչյուր j - րդ *սերիա* բաղկացած է n_j հատ դիտումից, $j = 1, \dots, k$: Դիցուք յուրաքանչյուր $\mathcal{U}_j$ *սերիային* համապատասխանում է s տարբեր x_i, $i = 1, \dots, s$ արժեքներ ընդունող $X_j \sim \mathbb{P}_j$ պատահական մեծությունը և $X_j^{n_j} = \left(X_{j1}, \dots, X_{jn_j}\right)$ - ն այդ պատահական մեծության հետ կապված նմուշն է: Նշանակենք ν^*_{ij} - ով $X_j^{n_j}$ նմուշում x_i արժեքն ընդունող X_{jm}, $m = 1, \dots, n_j$ պատահական մեծությունների թիվը՝

$$\nu^*_{ij} := \sum_{m=1}^{n_j} \mathbb{1}_{\{x_i\}}(X_{jm}), \qquad \sum_{i=1}^{s} \nu_{ij} = n_j, \qquad \sum_{j=1}^{k} n_j = n:$$

Պահանջվում է ստուգել $\mathbb{H}_0$ վարկած, որ բոլոր փորձերը կատարվել են *միևնույն* $X \sim \mathbb{P}$ պատահական մեծության նկատմամբ, այսինքն՝

$$\mathbb{H}_0 : \ \mathbb{P}_j = \mathbb{P} \quad \text{կամ} \quad \mathbb{H}_0 : \ \mathbb{F}_j(x) = \mathbb{F}(x), \quad j = 1, \dots, k$$

(այստեղ $\mathbb{F}_j(x)$ բաշխման ֆունկցիան համապատասխանում է X_j պատահական մեծությանը, իսկ $\mathbb{F}(x)$ - ը՝ X - ին):

Նշանակելով $p_{ij} := \mathbb{P}_j(X_j = x_i)$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$ և $p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$\mathbb{H}_0 : \ p_{ij} = p_i \ , \qquad i = 1, \dots, s, \qquad j = 1, \dots, k \quad \left(\sum_{i=1}^{s} p_i = 1 \right):$$

Քանի որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $\nu_{ij}^* \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\left(n_j, p_i\right)$, ապա $\mathbb{E}\nu_{ij}^* = n_j p_i$ և, համաձայն *Պիրսոնի* χ^2 *մեթոդի*, որպես *փորձնական* և *տեսական* (*«ապրիոր»*) բաշխումների *շեղման չափ* վերցվում է $\boldsymbol{\chi^2}$ – ***վիճականին***՝

$$\hat{\chi}_n^2(p) := \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij}^* - n_j p_i\right)^2}{n_j p_i} \ , \qquad p = (p_1, \dots, p_s) : \tag{21.1}$$

Սակայն քանի որ p_i, $i = 1, \dots, s$ հավանականություններն *անհայտ* են, ուստի որպեսզի կիրառվի $\hat{\chi}_n^2(p)$ *վիճականին* անհրաժեշտ է *գնահատել* p_i պարամետրերը:

Լեմմա 21.3: $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում* p_i $(i = 1, \dots, s)$ *պարամետրերի ըստ միացյալ* $X^n = \left(X_1^{n_1}, \dots, X_k^{n_k}\right)$ *նմուշի* ***ՃՄ գնահատականները***՝ $\hat{p}_i = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \nu_{ij}^*$ *վիճականիներն են:*

Թեորեմ 21.4: $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում տեղի ունի զուգամիտություն*՝

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{p}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2\big((s-1)(k-1)\big), \quad n \to \infty:$$

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող α $(0 < \alpha < 1)$ չափի $\boldsymbol{\chi^2}$ – ***հայտանիշի*** **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կունենա

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \ \chi_n^2(\hat{p}) > \chi_\alpha^2\big((s-1)(k-1)\big)\right\}$$

տեսքը:

Դիցուք պետք է ստուգել *պարամետրական* տեսք ունեցող

$$\mathbb{H}_0 : \ p_{ij}(\theta) = p_i(\theta), \qquad i = 1, \dots, s, \qquad j = 1, \dots, k \quad \left(\sum_{i=1}^{s} p_i(\theta) = 1 \right)$$

համասեռության վարկածը, որտեղ $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$ $(r \geq 1)$, $p_{ij}(\theta) := \mathbb{P}_\theta(X_j = x_i)$:

Թեորեմ 21.5: $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է*

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{p}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2\big((s-1)k - r\big), \qquad n \to \infty\,,$$

զուգամիտությունը, որտեղ $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots \hat{p}_s)$, $\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}$ - ը՝ θ - *ի բազմանդամային ՃՄ գնահատականն է*:

Մասնավոր դեպքեր

1. $\boldsymbol{s = 2}$ $(\boldsymbol{i = 1, 2}, \quad \boldsymbol{j = 1, \dots, k})$:

Դիցուք X_j - երը, $j = 1, \dots, k$՝ յուրաքանչյուրը 0 և 1 արժեք ընդունող անկախ պատահական մեծություններ են: Նշանակենք $A := (X_j = 1)$ - ով *հաջողությունը* և $\bar{A} := (X_j = 0)$ - ով՝ *անհաջողությունը* : Համասեռության $\mathbb{H}_0$: $p_{ij} = p_i$ վարկածը նշանակում է, որ A պատահույթը բոլոր $\mathcal{U}_j$ $(j = 1, \dots, k)$ *փորձերի սերիաներում* ունի միևնույն հաստատուն (*անհայտ*) $\mathbb{P}(A) := p_1 := p$ ($\mathbb{P}(\bar{A}) := p_2 =:= q = 1 - p$) հավանականությունը:

Համաձայն լեմմա 21.3 - ի p պարամետրի *ՃՄ գնահատականը* $\hat{p} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \nu_j^*$ վիճականին է, որտեղ $\nu_j^* := \nu_{1j}^*$ - ը՝ A պատահույթի ի հայտ գալու (*պատահական*) թիվն է փորձերի j - րդ $\mathcal{U}_j$ սերիայում: $\hat{\chi}_n^2(\hat{p})$ վիճականին (տես (21.1)) այդ դեպքի համար կներկայացվի հետևյալ ձևով՝

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{p}) = \frac{1}{\hat{p}\hat{q}} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_j^*\right)^2}{n_j} - n\frac{\hat{p}}{\hat{q}} \tag{21.2}$$

$\left(\hat{q} := 1 - \hat{p},\ \nu_{1j}^* := \nu_j^*,\ \nu_{2j}^* := n_j - \nu_j^*\right)$:

2. $\boldsymbol{k = 2}$ $(\boldsymbol{i = 1, \dots, s}, \quad \boldsymbol{j = 1, 2})$:

Երկու նմուշի դեպքում $\mathbb{H}_0$: $p_{ij} = p_i$ վարկածը ստուգող $\hat{\chi}_n^2(\hat{p})$ վիճականին կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{p}) = n_1 n_2 \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\nu_{i1}^* + \nu_{i2}^*} \left(\frac{\nu_{i1}^*}{n_1} - \frac{\nu_{i2}^*}{n_2}\right)^2 : \tag{21.3}$$

Նշանակելով այստեղ $\omega_i := \dfrac{\nu_{i1}^*}{\nu_{i1}^* + \nu_{i2}^*}$, $\omega := \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$ ՝ (21.3) բանաձևը կբերվի

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{p}) = \frac{1}{\omega(1 - \omega)} \left(\sum_{i=1}^{s} \omega_i \nu_{i1}^* - \omega n_1\right)$$

տեսքի:

Նշանների հայտանիշ

Դիցուք $\left((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\right)$ - ը $U = (X, Y)$ երկչափ պատահական վեկտորին համապատասխանող նմուշ է: Պահանջվում է ստուգել $\mathbb{H}_0$ վարկած, որ X և Y պատահական մեծություններն *անկախ* են և *միատեսակ բաշխված,* այսինքն ստուգել

$$\mathbb{H}_0 : \ \mathbb{F}_U(x, y) = \mathbb{F}(x) \cdot \mathbb{F}(y)$$

վարկածը, որտեղ $\mathbb{F}(x)$ - ը՝ որոշակի *անընդհատ* բաշխման ֆունկցիա է:

Վարկածը ստուգելու համար կառուցվում են $Z_i := X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, n$ պատահական մեծություններ: Եթե $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվում է, ապա տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\mathbb{P}(Z_i < 0) = \int\limits_{(x - y < 0)} d\,\mathbb{F}_U(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbb{F}(x) \int_{x}^{+\infty} d\mathbb{F}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \mathbb{F}(x)\right) d\mathbb{F}(x) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z_i > 0),$$

և $\mathbb{H}_0$ վարկածը բերվում է $\mathbb{H}_0'$: $\mathbb{F}_Z(0) = 1/2$ $(x_{med} = 0)$ կամ $\mathbb{H}_0''$: $\mathbb{P}\left(Z \in (-\infty,\ 0)\right) = 1/2$ *համարժեք* վարկածին: Այնպես, որ կիրառելով $\boldsymbol{\chi^2}$ **– համաձայնության հայտանիշը**, կստանանք՝

$$\hat{\chi}_n^2 = \frac{2}{n}\left(\nu_1^* - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{2}{n}\left(\nu_2^* - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{4}{n}\left(\nu_1^* - \frac{n}{2}\right)^2,$$

որտեղ $\nu_1^* := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,\ 0)}(Z_i)$, $\nu_2^* = n - \nu_1^*$, $p_1^* = p_2^* = \frac{1}{2}$, և α *նշանակալիության մակարդակի* **կրիտիկական տիրույթը**՝ կլինի

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \ \frac{4}{n}\left(\nu_1 - \frac{n}{2}\right)^2 \geq \chi_\alpha^2(1)\right\}$$

բազմությունը:

Ման – Ուիտնիի (Ուիլկոկսոնի) ռանգային հայտանիշ

Հավասար ծավալ ունեցող X^n և Y^n երկու նմուշների համար այս հայտանիշը առաջին անգամ դիտարկել է *Ուիլկոկսոնը*: *Տարբեր ծավալի* նմուշների համար այն ընդհանրացրել է *Մանը* և *Ուիտնին*: Հայտանիշը պատկանում է այսպես կոչված *ռանգային հայտանիշների* ցանկին:

$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ նմուշի X_i - րդ անդամի **ռանգ** կոչվում է $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ վարիացիոն շարքում այդ անդամի զբաղեցրած **տեղի $\boldsymbol{R_i}$ համարը**:

Դիցուք $X^n \sim \mathbb{F}_1$ և $Y^m \sim \mathbb{F}_2$՝ *անընդհատ* բաշխման ֆունկցիաներին համապատասխանող *միմյանցից անկախ* նմուշներ են: Դիտարկվում է
$\mathbb{H}_0 : \ \mathbb{F}_1(x) \equiv \mathbb{F}_2(x)$ *համասեռության* վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \ \mathbb{F}_1(x) \not\equiv \mathbb{F}_2(x)$ երկընտրանքայինը:

Կազմենք $(X^n, Y^m) = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ *միացյալ նմուշը* և նրա վարիացիոն շարքը: Դիցուք $R_1, \ldots, R_n$ - ը՝ *միացյալ նմուշում* $X_1, \ldots, X_n$ անդամների **ռանգերն** են:

$T := \sum_{i=1}^{n} R_i$ վիճականին, որը ցույց է տալիս այն տեղերի համարների (ռանգերի) գումարը, որը *զբաղեցնում* են միացյալ վարիացիոն շարքում X^n նմուշի անդամները, կոչվում է **Ուիլկոկսոնի վիճականի**:

Սահմանենք (X^n, Y^m) միացյալ նմուշի *վարիացիոն շարքի* համար հետևյալ պատահական մեծությունները՝

$$\mathbb{Z}_{rs} := \begin{cases} 1, & \text{եթե} \ \ X_r < Y_s \\ 0, & \text{եթե} \ \ X_r \geq Y_s \end{cases} :$$

$U := U(n,m) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \mathbb{Z}_{rs}$ վիճականին, որը ցույց է տալիս այն *դեպքերի թիվը*, երբ միացյալ վարիացիոն շարքում X^n նմուշի անդամները ***նախորդում*** են Y^m նմուշի անդամները, կոչվում է **Ման – Ուիտնիի $\boldsymbol{U}$ − վիճականի**, կամ ուղղակի **$\boldsymbol{U}$ − վիճականի**:

T և U վիճականիների միջև տեղի ունի հետևյալ կապը՝ $T + U = nm + \frac{n(n+1)}{2}$:

Թեորեմ 21.6 (*Ման – Ուիտնի*): $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է զուգամիտությունը*՝

$$\sqrt{\frac{12}{nm(n+m+1)}}\left(U - \frac{nm}{2}\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1), \qquad n, m \to \infty :$$

Թեորեմը գործնականում կարելի է կիրառել արդեն, երբ $n, m \geq 4$ և $n + m \geq 20$:

$\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $a \neq \frac{1}{2}$ երկընտրանքայինը $\left(a := \mathbb{P}(X_1 < Y_1)\right)$ ստուգող *ունակ հայտանիշն* ունի հետևյալ **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** (մեծ n - երի և m - երի դեպքում)՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{(x^n, y^m): \ \left|u(n,m) - \frac{nm}{2}\right| \geq \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}\ z_{\alpha/2}\right\},$$

որտեղ $u(n,m)$ - ը՝ $U(n,m)$ վիճականու արժեքն է, երբ $X^n(\omega) = x^n$, $Y^n(\omega) = y^m$:

Համապատասխան ***միակողմանի*** *ունակ հայտանիշները* կտրվեն.
$\mathbb{H}_1 : a < \dfrac{1}{2}$ երկընտրանքային վարկածի դեպքում՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^m): \ u(n,m) \leq t_\alpha^-(n,m)\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթի միջոցով, և
$\mathbb{H}_1 : a > \dfrac{1}{2}$ երկընտրանքային վարկածի դեպքում՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^m): \ u(n,m) \geq t_\alpha^+(n,m)\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթով, որտեղ

$$t_\alpha^{\mp}(n,m) = \frac{nm}{2} \mp \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}\ z_\alpha :$$

374*(մ). Ապացուցել *Ման – Ուիտնիի* U – վիճականու համար հետևյալ բանաձևերը՝

$$\mathbb{E}U = nma, \ \ \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(U) = nm[a + (n-1)b + (m-1)c - (n+m-1)a^2],$$

որտեղ

$$a := \mathbb{P}(X_1 < Y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{F}_1(x) d\mathbb{F}_2(x)\,, \ \ b := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{F}_1^2(x) d\,\mathbb{F}_2(x), \ \ c := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \mathbb{F}_2(x)\right)^2 d\mathbb{F}_1(x):$$

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

375 (կ). Ինստիտուտ ընդունվող դիմորդները բաժանված են երկու հոսքի՝ յուրաքանչյուրում 300 - ական դիմորդ: Այդ հոսքերում նույն առարկայից անցկացված քննությունը տվել է հետևյալ արդյունքներ՝ *I հոսքում* 2, 3, 4 և 5 թվանշաններ ստացան, համապատասխանաբար 33, 43, 80 և 144 դիմորդ, *II հոսքում*՝ 39, 35, 72 և 154 : Օգտվելով χ^2 – *հայտանիշից* պարզել՝ կարելի՞ է, արդյոք **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* համարել այդ հոսքերը **համասեռ**:

Ցուցում՝ դիտարկել $s = 4$, $k = 2$ դեպքը:

376 (կ). Որոշ քաղաքական հարցի շուրջ կատարվել է հարցում, որի արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները՝ մինչև 25 տարեկան անձանց շրջանում այդ հարցին դեմ էին 400 - ը, կողմ՝ 500 - ը, իսկ 100 - ը չէին կողմնորոշվել: 25 տարիքից բարձր հարցման մասնակիցներից հարցին դեմ էին 600 - ը, կողմ՝ 500 - ը, 400 - ը՝ չէին կողմնորոշվել: **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել օգտվելով χ^2 – *հայտանիշից* տվյալ տարիքային խմբերում **կարծիքների կախվածության** վերաբերյալ վարկածը:

Ցուցում՝ դիտարկել $s = 3,\ k = 2$ դեպքը:

377 (կ). Ենթադրվում է, որ մրսածության դեմ որոշ դեղամիջոց ունի լավ ազդեցություն: Այդ ենթադրությունը ստուգելու նպատակով դեղամիջոցը փորձարկվել է մեկ տարվա ընթացքում 500 հոգուց բաղկացած մարդկանց մի խմբի վրա և արդյունքը համեմատվել է 500 հոգուց բաղկացած մարդկանց մի այլ խմբի հետ, որոնք այդ դեղամիջոցը *չեն ընդունել* : Հետազոտման արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները՝

	Չեն հիվանդացել	Հիվանդացել են *մեկ* անգամ	Հիվանդացել են *մեկից ավելի* անգամ
Դեղամիջոցն *ընդունողների* թիվը	252	145	103
Դեղամիջոցը *չընդունողների* թիվը	224	136	140

Օգտվելով χ^2 – *հայտանիշից* **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել այդ դեղամիջոցի **արդյունավետությունը**:

Ցուցում՝ դիտարկել $s = 3,\ k = 2$ դեպքը:

378 (կ) . Ստորև բերված աղյուսակը պարունակում է 4 տարբեր ժամանակահատվածներում առաջին երեխայի ծննդաբերության ժամանակ մայրերի մահացության վերաբերյալ տվյալներ՝

	I	II	III	IV
n_j	1072	1133	2455	1995
ν_j	22	23	49	33

Օգտվելով χ^2 – *հայտանիշից* **0.05** *մակարդակով* ստուգել վարկած, որ այդ ժամանակահատվածներում մահացության մակարդակների միջև **տարբերություն չկա**:

Ցուցում: դիտարկել $s = 2,\ k = 4$ դեպքը:

379 (կ). Բնապահպանները պնդում են, որ ռադիացիոն ֆոնը քաղաքում անցյալ տարվա համեմատությամբ *աճել* է, ինչը բացատրվում է նոր ինդուստրիալ կենտրոնի կառուցման պատճառով: Քաղաքապետարանը սակայն պնդում է, որ նոր պահպանիչ սարքավորումները ռադիացիոն ֆոնը պահում են նույն մակարդակի վրա: Որպեսզի ստուգվի քաղաքապետարանի այդ հայտարարությունը, մեկ տարվա ընթացքում պատահական ընտրված 11 օրերին կատարվել են ռադիացիոն ֆոնի չափումներ: Ստացված տվյալները համեմատվել են նախորդ տարվա նույն օրերի գրանցումների հետ՝

1991	1.402	1.401	1.400	1.404	1.395	1.402	1.406	1.401	1.404	1.406	1.397
1992	1.440	1.395	1.398	1.404	1.393	1.400	1.401	1.402	1.400	1.403	1.402

Օգտվելով *Ուիլքոքսոնի* և *նշանների հայտանիշներից* պարզել՝ ճիշտ է՞ արդյոք **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* քաղաքապետարանի հայտարարությունը:

380 (կ). Մայրաքաղաքի օդի աղտոտվածության աստիճանը իջեցնելու նպատակով քաղաքապետարանը կատարել է մի շարք միջոցառումներ: Յուրաքանչյուր ամսվա պատահական ընտրված օրերին կատարված չափումները (նախորդ տարվա այդ ամիսների միջին տվյալների համեմատությամբ) տվել են օդում *հիդրոկարբոնատների* առկայության վերաբերյալ (պայմանական միավորներով) հետևյալ տվյալներ՝

Ամիսներ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Նախորդ տարի	7.0	6.0	5.4	5.9	3.9	5.7	6.9	7.6	6.3	5.8	5.1	5.9
Տվյալ տարի	5.3	6.0	5.6	5.7	3.7	4.7	6.1	7.8	6.4	5.7	4.9	5.8

Կարելի է՞ արդյոք **0.1** *մակարդակով* համարել, որ քաղաքապետարանի միջոցառումները հասել են նպատակին (օգտվել *Ուիլքոքսոնի* և *նշանների հայտանիշներից*):

381 (կ). Լուծել 379 խնդիրը օգտվելով *Ման – Ուիտնիի* հայտանիշից, երբ հայտարարվում է, որ ռադիացիոն ֆոնը՝ ա) *չի փոխվել*, բ) *լավացել* է (*նվազել* է):

382 (կ). Լուծել խնդիր 380 - ը օգտվելով *Ման – Ուիտնիի* հայտանիշից, երբ ա) $\mathbb{H}_1$ վարկածն է՝ էկոլոգիական վիճակը *փոխվել* է, բ) $\mathbb{H}_1$ վարկածն է՝ էկոլոգիական վիճակը *լավացել* է:

Ցուցում: տե՛ս խնդիր 381 :

383*(կ). Որպեսզի համեմատվեն երկու ուսումնական հաստատությունների տվյալ մասնագիտությամբ պատրաստվող մասնագետների որակը այդ երկու ուսումնական հաստատություններից պատահական վերցված $n_1 = 11$ և $n_2 = 13$ շրջանավարտների միջև անց է կացվել մասնագիտական քննություն, որի արդյունքում ստացվել են հետևյալ միավորներ (100 բալային համակարգով)՝

I	97	69	73	84	76	92	90	88	84	87	93	–	–
II	88	99	65	69	97	84	85	89	91	90	87	91	72

Օգտվելով *Ման – Ուիտնիի* հայտանիշից **0.05** *մակարդակով* ստուգել այդ հաստատություններում նույն որակի մասնագետ պատրաստելու վերաբերյալ վարկածը:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

§ 22. Անկախության հայտանիշներ

Տրված է անհայտ $\mathbb{F}_Z(x,y)$ բաշխման ֆունկցիայով $Z=(X,Y)$ պատահական վեկտորի $(X^n,Y^n)=$ $=\big((X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)\big)$ նմուշը: Պահանջվում է ստուգել X և Y պատահական մեծությունների **անկախության** վերաբերյալ $\mathbb{H}_0$: $\mathbb{F}_Z(x,y)\equiv\mathbb{F}_X(x)\cdot\mathbb{F}_Y(y)$ վարկածը:

χ^2 – անկախության հայտանիշ

Դիցուք Z - ը դիսկրետ պատահական վեկտոր է, ընդ որում X պատահական մեծությունն ընդունում է $a_1,,\dots,a_s$ տարբեր արժեքներ, իսկ Y - ը՝ $b_1,\ b_2,\dots,\ b_k$ արժեքներ: Եթե s և k ծավալները բավականաչափ մեծ են, կամ X - ը և Y - ն *անընդհատ* պատահական մեծություններ են, ապա նշանակենք $\Delta_1',\ \Delta_2',\ \dots,\ \Delta_s'$ - ով X պատահական մեծության արժեքների բազմության տրոհումը միջակայքերի, իսկ $\Delta_1'',\ \Delta_2'',\ \dots,\ \Delta_k''$ - ով՝ Y - ի արժեքների տրոհումը: Այնուհետև՝ նշանակենք ν_{ij} - ով $(X^n,\ Y^n)$ նմուշում $\big(a_i,\ b_j\big)$, $i=1,\dots,s$, $j=1,\dots,k$ զույգերի թիվը (կամ $\Delta_i'\times\Delta_j''$ ուղղանկյունների մեջ պարունակվող $(X_l,\ Y_l)$ զույգերի թիվը) այնպես, որ $\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\nu_{ij}=n$:

Y \ X	b_1 (Δ_1'')	b_2 (Δ_2'')	……..	b_k (Δ_k'')	$\nu_{i\cdot}:=\sum_{j=1}^{k}\nu_{ij}$
$a_1(\Delta_1')$	ν_{11}	ν_{12}	……..	ν_{1k}	$\nu_{1\cdot}$
$a_2(\Delta_2')$	ν_{21}	ν_{22}	……..	ν_{2k}	$\nu_{2\cdot}$
.	.	.	……..	.	.
.	.	.	……..	.	.
$a_s(\Delta_s')$	ν_{s1}	ν_{s2}	……..	ν_{sk}	$\nu_{s\cdot}$
$\nu_{\cdot j}:=\sum_{i=1}^{s}\nu_{ij}$	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	……..	$\nu_{\cdot k}$	$\sum_{i=1}^{s}\nu_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{k}\nu_{\cdot j}=n$

Բերված աղյուսակը կոչվում է X և Y պատահական մեծությունների **զուգակցության** կամ **երկումուտքով աղյուսակ**:

Նշանակենք՝ $p_{ij}:=\mathbb{P}\big(X=a_i,\ Y=b_j\big)$ $\Big($կամ $p_{ij}:=\mathbb{P}\big(X\in\Delta_i',\ Y\in\Delta_j''\big)\Big)$,

$$p_{i\cdot}:=\mathbb{P}(X=a_i)\Big(\text{կամ }p_{i\cdot}:=\mathbb{P}(X\in\Delta_i')\Big),\ \ p_{\cdot j}:=\mathbb{P}\big(Y=b_j\big)\ \Big(\text{կամ }p_{\cdot j}:=\mathbb{P}\big(Y\in\Delta_j''\big)\Big):$$

Պարզ է, որ՝ $\displaystyle p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{k}p_{ij}$, $\displaystyle p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{s}p_{ij}$:

Օգտվելով այս նշանակումներից **անկախության** $\mathbb{H}_0$ վարկածը կգրվի $\mathbb{H}_0$: $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ տեսքով, որտեղ՝ $\displaystyle\sum_{i=1}^{s}p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{k}p_{\cdot j}=1$: Այստեղից հետևում է, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $sk-$ չափանի պատահական հաճախությունների $\nu^*=(\nu_{11}^*,\dots,\nu_{sk}^*)$ վեկտորն ունի $\mathbb{M}(n;p)$ ***բազմանդամային բաշխում***, որտեղ $p=\big(p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j},\ \ i=1,\dots,s\ ,\ \ j=1,\dots,k\big)$: Քանի որ $\displaystyle\sum_{i=1}^{s}p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{k}p_{\cdot j}=1$, ապա p վեկտորը որոշվում է

$(p_{1\cdot}, \dots p_{(s-1)\cdot}, p_{\cdot 1}, \dots, p_{\cdot(k-1)})$ պարամետրերով (պարամետրերի թիվը՝ $r = s + k - 2$), որոնց ***բազմանդա-մային ՃՄ գնահատականները*** հավասար են $\tilde{p}_{ij} = \frac{1}{n^2} \nu_{i\cdot} \cdot \nu_{\cdot j}$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$ ։

Այժմ $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգելու համար կառուցենք ***Պիրսոնի χ^2 - վիճականին***՝

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{p}) := \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - n\tilde{p}_{ij}\right)^2}{n\tilde{p}_{ij}} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n}} = n\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{{\nu_{ij}}^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} - 1\right)։ \qquad (22.1)$$

Համաձայն 19.2 *Ֆիշերի թեորեմի* $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{p}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(N - r - 1)$$

զուգամիտությունը, որտեղ $N = sk$, $r = s + k - 2$, այնպես, որ

$$N - r - 1 = sk - (s + k - 2) - 1 = (s - 1)(k - 1)։$$

Այսպիսով՝ α *նշանակալիության մակարդակով* $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (x^n, y^n)\colon\ \chi_n^2(\tilde{p}) \geq \chi_\alpha^2\big((s - 1)(k - 1)\big)\right\} ։$$

$\boldsymbol{s = k = 2}$ դեպքում $\chi_n^2(\tilde{p})$ վիճականին ներկայացվում է հետևյալ ձևերով՝

$$\chi_n^2(\tilde{p}) = n\left(\frac{\nu_{11}}{\nu_{\cdot 1}} - \frac{\nu_{12}}{\nu_{\cdot 2}}\right)^2 \cdot \frac{\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}}{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}} = n\frac{(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})^2}{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}} = n^3\frac{\left(\nu_{11} - \frac{\nu_{1\cdot}\nu_{\cdot 1}}{n}\right)^2}{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}} ։ \qquad (22.2)$$

Սպիրմենի հայտանիշ

Որակական հատկանիշների *անկախությունը* ստուգելու համար օգտագործվում են **ռանգային հայտանիշները**, որոնցից առավել հայտնի է **Սպիրմենի հայտանիշը**։

Հայտանիշը կառուցվում է հետևյալ ձևով՝

X և Y պատահական մեծությունների երկչափ $(X^n, Y^n) = \big((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\big)$ նմուշի համար նշանակենք R_i - ով X_i անդամների ***ռանգերը*** X^n նմուշում, S_i - ով՝ Y_i անդամների ***ռանգերը*** Y^n նմուշում։ Այնուհետև (R_i, S_i), $i = 1, \dots, n$ ***ռանգերի զույգերը*** վերադասավորենք ըստ R_i ռանգերի աճման կարգի, նշանակելով $(1, T_1)$, $(2, T_2)$, … , (n, T_n) - ով ստացված զույգերը ($R_i := i$)։

Սպիրմենի ռանգային կորելյացիայի գործակից (կամ **Սպիրմենի վիճականի**) կոչվում է $R_1, \dots, R_n$ և $S_1, \dots, S_n$ **ռանգերի** միջև **կորելյացիայի գործակիցը**՝

$$r_S^* := \sum_{i=1}^{n} (R_i - \overline{R^n})(S_i - \overline{S^n}) \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R_i - \overline{R^n})^2 \sum_{i=1}^{n} (S_i - \overline{S_n})^2} \ \ ։ \qquad (22.3)$$

Քանի որ $R^{\boldsymbol{n}} = (R_1, \dots, R_n)$ և $S^n = (S_1, \dots, S_n)$ ռանգերը ներկայացնում են $1, \dots, n$ թվերի որոշ *տեղափոխություններ*, ապա

$$\overline{R^n} = \overline{S^n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R^n})^2 = \sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S^n})^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n(n^2-1)}{12}\ ։$$

Այնպես, որ r_S^* գործակիցը կբերվի հետևյալ տեսքի՝

$$r_S^* = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(T_i-\frac{n+1}{2}\right) = 1-\frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i-S_i)^2 = 1-\frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(i-T_i)^2 \ :$$

Այս բանաձևից անմիջապես երևում է, որ $R_i = S_i$, $i=1,\dots,n$ դեպքում՝ $r_S^*=1$, իսկ $T_i = n-i+1$ - ի դեպքում (*հակադիր* ռանգեր)՝ $r_S^* = -1$: Ընդհանուր դեպքում՝ $|r_S^*| \le 1$: $|r_S^*|$ - ի *մեկին մոտ* ընդունած արժեքները վկայում են *անկախության* $\mathbb{H}_0$ վարկածի *դեմ*:

r_S^* վիճականու *ճշգրիտ բաշխումը* $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում *ոչ պարամետրական* է (*բաշխումից «ազատ»*) և *համաչափ* 0 կետի նկատմամբ: α *նշանակալիության մակարդակով* այդ վարկածը ստուգող ***Սպիրմենի հայտանիշի*** երկկողմանի *կրիտիկական տիրույթն* ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n):\ |r_S| \ge s_{\alpha/2}(n)\},$$

որտեղ $s_{\alpha/2}(n)$ - ը r_S^* վիճականու *բաշխման կրիտիկական եզրն* է, որի արժեքները, երբ $n = 4,\dots,30$, բերված են աղյուսակ 13 - ում:

Թեորեմ 22.1: $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ են հետևյալ զուգամիտությունները՝*

$$\sqrt{n-1}\ r_S^* \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1) \qquad (1)\ , \qquad\qquad \sqrt{\frac{n-2}{1-(r_S^*)^2}}\ r_S^* \xrightarrow{d} \mathbb{T}(n-2), \quad n\to\infty \qquad (2) :$$

((2) – *ում նշված զուգամիտությունը բավականաչափ «արագ» է, այնպես, որ համապատասխան հայտանիշը կարելի է կիրառել արդեն, երբ* $n \ge 10$) :

Թեորեմից բխում է, որ α *մակարդակի* **ասիմպտոտիկ երկկողմանի կրիտիկական տիրույթներն** ունեն, համապատասխանաբար, հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n,y^n):\ \sqrt{n-1}\,|r_S| \ge z_{\alpha/2}\}, \qquad \mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{(x^n,y^n):\ \sqrt{\frac{n-2}{1-{r_S}^2}}\ |r_S| \ge t_{\alpha/2}(n-2)\right\}:$$

Այն դեպքում, երբ հատկանիշներն ունեն ***համընկնող ռանգեր*** *ռանգային կորելյացիայի գործակիցը* հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$r_S = \frac{\frac{1}{6}(n^3-n) - \sum(R_i^1-R_i^2)^2 - T_1 - T_2}{\sqrt{\frac{1}{6}(n^3-n)-2T_1}\ \sqrt{\frac{1}{6}(n^3-n)-2T_2}}\ ,$$

որտեղ $T_1 := \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{m_1}(n_{1i}^3 - n_{1i})$, $T_2 := \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{m_2}(n_{2i}^3 - n_{2i})$, m_1- ը և m_2- ը՝ I և II հատկանիշների ***համընկնող ռանգերի*** *խմբերի թիվն* է, n_{1i}- ն և n_{2i}- ն՝ I և II հատկանիշների i - րդ *խմբի* ***ռանգերի կրկնությունների թիվը***, R_i^1 (R_i^2) - ը՝ X_i (Y_i) անդամների ***ռանգերը*** X^n (Y^n) նմուշում:

Քենդալի հայտանիշ

Հաջորդ հայտնի ***ռանգային հայտանիշն*** առաջարկվել է ***Քենդալի*** կողմից:

Դիցուք $(1,\ T_1), \dots,\ (n,\ T_n)$ - ը X^n և Y^n նմուշներին համապատասխանող *ռանգերի զույգերն* են:

$\boldsymbol{Q}$ **− վիճականի** կոչվում է $Q := \sum_{i=1}^{n} T_i'$ պատահական մեծությունը, որտեղ T_i' - ը՝ T_i **ռանգին** համապատասխանող «**ինվերսիան**» է, այսինքն՝ $(T_1, \dots, T_n)$ շարքում T_i - ից **աջ** գտնվող այն ռանգերի թիվն է, որոնք **փոքր** են T_i արժեքից։

$\boldsymbol{Q}$ **− վիճականին** նկարագրում է T_i ռանգերի «ինվերսիաների» («*անկարգավորվածությունների*») թիվը։ Պարզ է, որ $0 \le Q \le \frac{n(n-1)}{2}$, ընդ որում $Q = 0$ դեպքը վկայում է «*անկարգավորվածությունների*» բացակայության մասին, այսինքն՝ $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$։ Ընդհակառակ՝ $Q = \frac{n(n-1)}{2}$ դեպքը համապատասխանում է *հակառակ դասավորությանը*՝ $T_n < T_{n-1} < \ldots < T_1$ ։

Քենդալի ռանգային կորելյացիայի գործակից *կոչվում է* $\boldsymbol{r_K^* := 1 - \frac{4Q}{n(n-1)}}$ *վիճականին։*
Պարզ է, որ $r_K = 1$, եթե $Q = 0$ և $r_K = -1$, երբ $Q = \frac{n(n-1)}{2}$ ։ Ընդհանուր դեպքում՝ $|r_K| \le 1$ ։

r_K^* վիճականու *ճշգրիտ բաշխումը* $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում *ոչ պարամետրական* է (*բաշխումից «ազատ»*) և *համաչափ* 0 կետի նկատմամբ։ α *նշանակալիության մակարդակով* այդ վարկածը ստուգող ***Քենդալի հայտանիշի*** երկկողմանի *կրիտիկական տիրույթն* ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n):\ |r_K| \ge k_{\alpha/2}(n)\},$$

որտեղ $k_{\alpha/2}(n)$ - ը r_K^* վիճականու *ճշգրիտ բաշխման կրիտիկական եզրն* է, որի արժեքները, երբ $n = 4, \ldots, 10$, բերված են աղյուսակ 14 - ում։

Թեորեմ 22.2 (***Քենդալ***): $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում ճիշտ է

$$\sqrt{\frac{9\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2(2\mathrm{n}+5)}}\, r_K^* \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1), \qquad n \to \infty :$$

զուգամիտությունը։

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող α մակարդակի **երկկողմանի ասիմպտոտիկ հայտանիշը** կունենա հետևյալ *կրիտիկական տիրույթը*՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{(x^n, y^n) :\ \sqrt{\frac{9\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2(2\mathrm{n}+5)}}\,|r_K| \ge z_{\alpha/2}\right\} :$$

384 (մ). Գտնել անկախության $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում *Սպիրմենի ռանգային կորելյացիայի* r_S^* *գործակցի* $\mathbb{E}r_S^*$ միջինը և $\mathbb{V}\mathrm{ar}(r_S^*)$ ցրվածքը։

385 (կ). Բուհ ընդունելության քննություն հանձնող 300 դիմորդներից 97 - ը դպրոցում տվյալ առարկայից ունեին «գերազանց» թվանշանը։ Քննության ժամանակ 48 դիմորդ ստացել էր «գերազանց» թվանշան, ընդ որում միայն 18 դիմորդ ուներ դպրոցում «գերազանց» թվանշան տվյալ առարկայից և ստացել էր «գերազանց» թվանշան ընդունելության քննության ժամանակ։ **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել օգտվելով χ^2 *−հայտանիշից* դպրոցում և ընդունելության քննության ժամանակ «գերազանց» թվանշան ստանալու **անկախության** վերաբերյալ վարկածը։

Ցուցում՝ կազմել *զուգակցության աղյուսակը* և օգտվել χ^2 – հայտանիշից։

386 (կ). Բերված են դասակարգված ըստ երկու հատկանիշի՝ «*ընդունված է* (A) – *ընդունված չէ* ($\bar{A}$)» և ըստ սեռի՝ «*արական* (B) – *իգական* ($\bar{B}$)» բուհ ընդունվողների վերաբերյալ հետևյալ տվյալները ՝

1)

	B	$\bar{B}$	Σ
A	97	40	137
$\bar{A}$	263	42	305
Σ	360	82	442 (n)

2)

	B	$\bar{B}$	Σ
A	235	38	273
$\bar{A}$	35	7	42
Σ	270	45	315 (n)

Յուրաքանչյուր աղյուսակի համար ստուգել A և B հատկանիշների վերաբերյալ **անկախության** վարկածը: Օգտվել χ^2 – *հայտանիշից*:

Ցուցում՝ օգտվել բանաձև (22.2) - ից:

387 (կ). Ստուգվում է վարկած առ այն, որ ուսանողների առաջադիմությունը կախված է պարապելու ընթացքում երաժշտություն լսելու տևողությունից: 400 ուսանողի հետ կատարված հարցումը տվել է հետևյալ արդյունքները՝

1 շաբաթվա ընթացքում երաժշտություն լսելու վրա ծախսած ժամանակը	Առաջադիմությունը					
	A	B	C	D	F	Ընդամենը
$<$ 5 ժամից	13	10	11	16	5	55
5 – 10 ժամ	20	27	27	19	2	95
11 – 20 ժամ	9	27	71	16	32	155
$>$ 20 ժամից	8	11	41	24	11	95
Ընդամենը	50	75	150	75	50	400

Ստուգել վարկածը **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* օգտվելով χ^2 – *հայտանիշից*:

Ցուցում՝ օգտվել բանաձև (22.1) - ից:

388 (կ). 1725 աշակերտ դասակարգվել են ըստ մտավոր կարողությունների և ընտանեկան տնտեսական մակարդակի (ըստ հագնվածքի): Ստացվել է աղյուսակ.

Մտավոր կարողությունները / Հագնվելու որակը	Սովորական	Խելացի	Շատ խելացի	Ընդամենը
Շատ լավ	81	322	233	636
Լավ	141	457	153	751
Վատ	127	163	48	338
Ընդամենը	349	942	434	1725

0.01 *մակարդակով* ստուգել օգտվելով χ^2 – *հայտանիշից* աշակերտների *հագնվածքի* և *մտավոր կարողությունների* միջև **կախվածության** վերաբերյալ վարկածը:

Ցուցում` օգտվել բանաձև (22.1) - ից:

389 (կ). Գործարանի մենեջերը ռանգավորել է պատահական վերցված 8 բանվորների ըստ նրանց արտաժամ աշխատանքի և աշխատանքային ստաժի: **0.1** *նշանակալիության մակարդակով Սպիրմենի հայտանիշի* օգնությամբ ստուգել այդ ռանգերի միջև **կոռելյացիոն կապի նշանակալիությունը**`

1 շաբաթվա ընթացքում արտաժամ աշխատելու տևողությունը (ժամերով)	5	8	2	4	3	7	1	6
Աշխատանքային ստաժը (տարիներով)	1	6	4.5	2	7	8	4.5	3

390 (կ). Ենթադրվում է, որ մենեջերների տարիքը նպաստում է իր և աշխատակիցների միջև առավել սերտ փոխհարաբերություններին: Ստորև բերված են մենեջերների հասցեին որոշ կազմակերպության աշխատակիցների կողմից մեկ տարվա ընթացքում գրանցված *բողոքները*`

Մենեջերի տարիքը	32	43	42	29	56	62	45	39	40	35
Բողոքների թիվը	5	2	4	4	3	2	4	5	4	6

0.05 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել *Սպիրմենի ռանգային կոռելյացիայի գործակցի* միջոցով մենեջերի տարիքից կախված նրանց և աշխատակիցների միջև **հարաբերությունների կապը**:

391 (կ). Ինքնաթիռների վերանորոգման վրա ծախսված ժամանակը գնահատելու համար, առաջարկվում է դիտարկել վերջին լուրջ վերանորոգումից հետո կատարված *թռիչքային ժամերը*: Հիմնվելով որոշակի 10 ինքնաթիռների համար կատարված հետևյալ գրանցումների վրա՝

Ինքնաթիռներ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Վերջին լուրջ վերանորոգումից հետո կատարած *թռիչքային ժամերը* (10^3 *ժամ*)	1	1.2	0.9	1.45	2	1.3	1.65	1.7	0.5	2.1
Վերանորոգման համար ծախսված ժամանակը (*ժամերով*)	40	54	41	60	64	50	42	65	43	66

0.1 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել *Սպիրմենի ռանգային կոռելյացիայի գործակցի* օգնությամբ այդ **կախվածությունը**:

392 (կ). Որոշ հասարակական կազմակերպությունների տվել են կյանքի համար 7 առավել մեծ ռիսկեր պարունակող երևույթների ցանկ և առաջարկել ռանգավորել այն ըստ *ռիսկերի նվազման* կարգի: Արդյունքում ստացվել է ռանգերի աղյուսակ, որտեղ նշանակված է A - ով՝ *մասնագետների խումբը*, B - ով՝ *կանանց հասարակական լիգան*, C - ով՝ *ուսանողական կազմակերպությունը*, D - ով՝ *քաղաքացիների ակումբը*

Կազմակերպություններ / Ռիսկեր (ռանգավորված)	A	B	C	D
Ավտովթարներ	1	1	3	3
Ծխախոտ	2	3	2	4
Խմիչք	3	5	6	5
Զենք	4	2	1	1
Վիրահատություն	5	6	5	6
Մոտոցիկլ վարել	6	4	4	2
Ճառագայթում	7	7	7	7

Գտնել մասնագետների կարծիքի համեմատությամբ յուրաքանչյուր խմբի համար *Սպիրմենի ռանգային կոռելյացիայի գործակիցը*, որոշել, ո՞ր խումբն է առավել ճշգրիտ ընկալում ռիսկերը և **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել A խմբի նկատմամբ համապատասխան խմբի **կոռելյացիոն կապի նշանակալիությունը**:

393 (կ). *A* և *B* թեստերի օգնությամբ ստուգվել է 10 ուսանողի գիտելիք: Գնահատման արդյունքում (100 բալային համակարգով) ստացվել է հետևյալ աղյուսակը.

Ուսանողներ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Թեստ *A*	25	44	32	85	74	56	88	37	90	66
Թեստ *B*	32	55	20	93	87	63	95	45	92	50

0.01 *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել *Քենդալի և Սպիրմենի հայտանիշների* օգնությամբ *A* և *B* թեստերի միջոցով գնահատված թվանշանների միջև **ռանգային կորելյացիոն կապի նշանակալիությունը**:

394 (կ). Լուծել խնդիր 391 - ը օգտվելով *Քենդալի հայտանիշից* :

395 (կ). Որոշ ապահովագրական ընկերություն աշխատանքի ընդունելու նպատակով անց է կացնում հարցազրույց, որին կարող են մասնակցել նաև մագիստրատուրայում սովորող տնտեսագիտական մասնագիտությամբ ուսանողները: Ընկերության ներկայացուցիչը զգուշացնում է ուսանողներին որպեսզի նրանք չտեղեկացնեն ընկերներին հարցազրույցի ընթացքում շոշափված հարցերի մասին: Սակայն ընկերության աշխատակիցը ենթադրում է, որ հարցազրույցի վերջում մասնակցող ուսանողները որոշ հարցերի վերաբերյալ այնուամենայնիվ ստացել էին տեղեկատվություն: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել օգտվելով *Քենդալի հայտանիշից* հարցազրույցին մասնակցողների հերթական համարների և նրանց ստացած գնահատականների միջև **ռանգային կորելյացիայի գործակցի նշանակալիությունը**:

Ապահովագրական ընկերության կողմից կազմակերպած հարցազրույցի արդյունքները բերված են հետևյալ աղյուսակում.

Հարցազրույցին մասնակցողի հերթական համարը	Գնահատականը	Հարցազրույցին մասնակցողի հերթական համարը	Գնահատականը
1	63	11	77
2	59	12	61
3	50	13	53
4	60	14	74
5	66	15	82
6	57	16	70
7	76	17	75
8	81	18	90
9	58	19	80
10	65	20	89

§ 23. Պատահականության հայտանիշ

Պահանջվում է ստուգել վարկած, որ փորձի ընթացքում ստացված $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ դիտումների վեկտորը ներկայացնում է իրենից որոշակի $\mathbb{P}$ բաշխմանը համապատասխանող **պատահական նմուշ**, այսինքն, որ X^n վեկտորի X_i անդամներն **անկախ** և **միատեսակ բաշխված** պատահական մեծություններ են: Դա նշանակում է, որ պահանջվում է ստուգել

$$\mathbb{H}_0 : \ \mathbb{F}_{X^n}(x^n) = \mathbb{F}(x_1) \times \ldots \times \mathbb{F}(x_n), \quad x^n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

վարկածը, որտեղ $\mathbb{F}(x)$ - ը՝ $\mathbb{P}$ բաշխմանը համապատասխանող բաշխման ֆունկցիան է:

$\mathbb{H}_0$ վարկածի ստուգումը կառուցվում է «*անկարգավորվածության*» աստիճանը նկարագրող վիճականիների օգնությամբ: Այդպիսի վիճականիներից մեկն է X^n նմուշում «*ինվերսիաների*» Q_n թիվը: Հիշենք, որ $X^n = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n)$ նմուշի X_i և X_j անդամները կազմում են «*ինվերսիա*», եթե $i < j$ պայմանից հետևում է $X_{(i)} > X_{(j)}$ պայմանը կարգային վիճականիների համար:

Նշանակենք $Q_n := Q(X^n) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i$ - ով X^n նմուշի «*ինվերսիաների*» թիվը, որտեղ η_i - ն X_i նմուշային անդամին համապատասխանող «*ինվերսիաների*» թիվն է: Q_n վիճականին նկարագրում է դիտումների «*անկարգավորվածությունների*» *չափը*:

Թեորեմ 23.1: $\mathbb{H}_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է*

$$\tilde{Q}_n := \left(Q_n - \frac{n(n-1)}{4}\right) \frac{6}{n^{3/2}} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1)\,, \quad n \to \infty\,, \tag{23.1}$$

զուգամիտությունը, որին համարժեք է ***ասիմպտոտիկ նորմալության***

$$Q_n \backsim \mathbb{N}\left(\frac{n(n-1)}{4}\,,\ \frac{n^3}{36}\right) \quad (\text{մեծ } n \text{ - ի դեպքում})$$

պայմանը :

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող α *նշանակալիության մակարդակի* **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ x^n : \ \left| Q_n - \frac{n(n-1)}{4} \right| \frac{6}{n^{3/2}} \geq z_{\alpha/2} \right\} :$$

(23.1) բանաձևում բերված զուգամիտությունը բավականաչափ «*արագ*» է, այնպես, որ հայտանիշը կարելի է կիրառել արդեն, երբ $n > 10$ - ից:

396*(**մ**). Ստանալ, որ ***պատահականության վարկածի*** դեպքում $Q_n = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i$ «*ինվերսիաների*» թվի *միջինը* և *ցրվածքը* հավասար են՝ $\mathbb{E}Q_n = \dfrac{n(n-1)}{4}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Q_n) = \dfrac{n(n-1)(2n+5)}{72}$:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

397 (կ). Կարելի է՞ արդյոք **0.001** *նշանակալիության մակարդակով* համարել, որ 1.05, 1.12, 1.37, 1.50, 1.51, 1.73, 1.85, 1.98 հաջորդականությունը հանդիսանում է **անկախ միատեսակ բաշխված** պատահական մեծությունների իրագործումներ:

398 (կ). **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել խնդիր 365 - ում բերված $\Gamma(1,2)$ ***բաշխմանը*** համապատասխանող

0.8465, 1.4770, 1.7406, 1.8669, 3.4113, 3.1880, 1.4988, 1.3281, 3.0715, 4.4123

նմուշի **պատահականության** վերաբերյալ վարկածը:

399 (կ). **0.1** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել խնդիր 372 - ում բերված

74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21, 29, 386, 59, 27, 153, 26, 326

հաջորդականության **պատահականության** վերաբերյալ վարկածը:

§ 24. Երկու պատահական մեծությունների կորելյացիոն կապը ստուգող հայտանիշ

Դիցուք տրված է (X, Y) պատահական վեկտորը և $(X^n, Y^n) = \big((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\big)$ - ը նրան համապատասխանող նմուշն է: Նշանակենք $\rho := \rho_{X,Y} = \dfrac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}\,\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}}$ - ով այդ պատահական մեծությունների **կորելյացիայի գործակիցը**, $r_{X,Y} := \dfrac{S_{XY}^2}{S_X\,S_Y}$ - ով՝ **նմուշային կորելյացիայի գործակիցը**, որտեղ $S_{XY}^2 := = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \overline{X^n}\,\overline{Y^n}$ - ը՝ **նմուշային կովարիացիան** է, իսկ S_X - ը և S_Y - ը՝ **նմուշային ստանդարտ շեղումները**:

Սովորաբար (X^n, Y^n) պատահական նմուշի թվային իրագործումը ներկայացված է լինում *դիսկրետ դեպքում* (a_i, b_j), $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$ զույգերի և համապատասխան ν_{ij} հաճախությունների **զուգակցության աղյուսակի** միջոցով (տես § 22): *Անընդհատ* (X, Y) պատահական վեկտորի դեպքում (a_i, b_j) զույգերը հանդիսանում են X և Y պատահական մեծությունների արժեքների բազմության տրոհումների համապատասխան Δ_i' և Δ_j'' միջակայքերի միջնակետերը:

Համապատասխան (*թվային*) ***նմուշային բնութագրիչները***՝ կլինեն

նմուշային միջինը և **ցրվածքը**՝

$$\overline{x^n} := \frac{1}{n}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{s}} \nu_{i\cdot} a_i\,, \quad s_x^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} \nu_{i\cdot}(a_i - \overline{x^n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} \nu_{i\cdot} a_i^2 - (\overline{x^n})^2\,,$$

$$\overline{y^n} := \frac{1}{n}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{k}} \nu_{\cdot j} b_j\,, \quad s_y^2 := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \nu_{\cdot j}\big(b_j - \overline{y^n}\big)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \nu_{\cdot j} b_j^2 - (\overline{y^n})^2\,,$$

նմուշային կովարիացիան և **կորելյացիայի գործակիցը**՝

$$s_{xy}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \nu_{ij}\, a_i b_j - \overline{x^n}\,\overline{y^n},$$

$$r_{x,y} := \frac{s_{xy}^2}{s_x\, s_y} = \left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \nu_{ij}\, a_i b_j - n\overline{x^n}\,\overline{y^n}\right)\Bigg/\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{s} \nu_{i\cdot} a_i^2 - n(\overline{x^n})^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{k} \nu_{\cdot j} b_j^2 - n(\overline{y^n})^2}\right):$$

Թեորեմ 24.1: *$\mathbb{H}_0 : \rho = 0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $T_{n-2} := \sqrt{n-2}\,\dfrac{r_{X,Y}}{\sqrt{1 - r_{X,Y}^2}}$ վիճականին ունի $(n-2)$ ազատության աստիճաններով* ***Ստյուդենտի բաշխում***:

Թեորեմից հետևում է, որ $\mathbb{H}_0 : \rho = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \rho \neq 0$ երկընտրանքայինը ստուգող α *նշանակալիության մակարդակի կրիտիկական տիրույթն* ունի հետևյալ տեսքը $\big(t_{n-2} := T_{n-2}(\omega)\big)$՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \big\{(x^n, y^n) : \ |t_{n-2}| > t_{\alpha/2}(n-2)\big\} = \left\{(x^n, y^n) : \big|r_{x,y}\big| > \frac{t_{\alpha/2}(n-2)}{\sqrt{t_{\alpha/2}^2(n-2) + n - 2}}\right\}:$$

Եթե α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$ վարկածը *չի հերքվում*, ապա ասում են, որ **կորելյացիոն կապը** X և Y հատկանիշների միջև α մակարդակով **նշանակալի չէ**: Հակառակ դեպքում (երբ տեղի ունի $\mathbb{H}_1$ վարկածը) ասում են այդ կապը α մակարդակով **նշանակալի** է:

Գործնական կիրառումների համար, երբ (X^n, Y^n) նմուշը վերցված է ***երկչափ նորմալ բաշխումից***, հաճախ օգտագործվում է **Ֆիշերի** ներմուծած այսպես կոչված «**Ֆիշերի z - ձևափոխությունը**»:

Նշանակենք՝

$$z_n := \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{X,Y}}{1-r_{X,Y}}\,, \quad \zeta := \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}\ :$$

Թեորեմ 24.2 (*Ֆիշեր*): *Դիցուք* (X^n, Y^n) *- ը **երկչափ նորմալ բաշխումից** նմուշ է:* $\mathbb{H}_0: \rho = \rho_0$ *վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է հետևյալ զուգամիտությունը՝*

$$z_n' := \sqrt{n-3}\left(z_n - \zeta - \frac{\rho_0}{2(n-1)}\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1)\,, \qquad n \to \infty$$

(*այստեղ բերված մոտարկումը բավականաչափ «լավն» է, երբ* $n > 10$ *- ից*):

400. Դիցուք $\left(X_1^{n_1}, Y_1^{n_1}\right)$ և $\left(X_2^{n_2}, Y_2^{n_2}\right)$ ***երկչափ նորմալ բաշխված*** (X_1, Y_1) և (X_2, Y_2) պատահական վեկտորների միմյանցից անկախ նմուշներ են: α *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \rho_1 = \rho_2 (:= \rho_0)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \rho_1 \neq \rho_2$ երկընտրանքայինը, որտեղ $\rho_1 := \rho_{X_1,Y_1}$ - ը և $\rho_2 := \rho_{X_2,Y_2}$ - ը տեսական *կորելյացիայի գործակիցներն* են:

401. Դիցուք (X^n, Y^n)- ը համատեղ ***երկչափ նորմալ բաշխում*** ունեցող պատահական վեկտորի $n = 46$ ծավալի նմուշ է: Այդ դիտումների միջոցով *նմուշային կորելյացիայի գործակցի* համար ստացվել է $r_{X,Y} = 0.7928$ արժեքը: **0.05** *մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0: \rho = 0.9$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \rho < 0.9$ մրցող վարկածը:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 24.2 - ից:

402. Դիտվում է համատեղ ***երկչափ նորմալ բաշխում*** ունեցող պատահական վեկտորի (X^n, Y^n) նմուշը, որտեղ $n = 28$, իսկ *նմուշային կորելյացիայի գործակիցը՝* $r_{X,Y} = 0.6521$: Արդյոք հնարավո՞ր է ստացվի այդպիսի արժեք *նմուշային կորելյացիայի գործակցի* համար, եթե հայտնի է, որ *տեսական կորելյացիայի գործակիցը՝* $\rho = 0.721$:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 24.2 - ից:

403 (կ). Ստորև բերված են 40 տարիների ընթացքում *Մոսկվա* (x) և *Յարոսլավլ* (y) քաղաքների *հունիս* ամսվա ընթացքում գրանցված օդի միջին ջերմաստիճանների վերաբերյալ հետևյալ տվյալները՝

x	12.0	12.0	12.0	12.0	12.8	13.8	13.1	13.0	13.9	14.2
y	10.8	11.3	12.0	13.0	10.9	10.0	11.5	13.0	10.1	10.0
x	14.0	14.0	13.9	15.0	14.9	14.9	16.0	15.0	15.5	15.9
y	10.0	12.0	12.4	11.0	13.0	14.2	13.8	16.0	13.9	14.7
x	16.0	15.9	16.0	16.9	17.2	16.9	16.9	17.0	16.8	17.5
y	13.0	15.0	16.0	12.9	13.9	14.8	15.0	16.0	17.0	16.0
x	18.0	18.0	18.1	18.4	19.2	19.3	20.0	20.1	14.0	14.0
y	14.0	14.8	16.0	17.8	15.0	16.1	17.0	17.7	14.8	15.2

Գտնել **նմուշային կորելյացիայի գործակիցը**: Համարելով (X,Y) պատահական վեկտորի համատեղ ***նորմալ բաշխվածությունը***՝ **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\rho = 0.75$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\rho \neq 0.75$ երկընտրանքայինը:

404 (կ). Որոշ հանքից վերցված 302 ծավալ ունեցող նմուշի օգնությամբ կատարված հետազոտությունը հանքաքարերի մեջ *կապարի* և *արծաթի* տոկոսային պարունակության վերաբերյալ տվել է հետևյալ արժեքները՝

Արծաթի պարունակությունը, y (% - ով)	Կապարի պարունակությունը, x (% - ով)								
	0 – 5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
0 – 4	119	9	–	–	–	–	–	–	–
4 – 8	9	59	7	–	–	–	–	–	–
8 – 12	1	4	28		–	–	–	–	–
12 – 16	–	–	8	12	4	–	–	–	–
16 – 20	–	–	1	6	7	1	1	–	–
20 – 24	–	–	–	1	1	8	3	–	–
24 – 28	–	–	–	–	–	2	1	–	–
28 – 32	–	–	–	–	–	–	3	2	1
32 – 36	–	–	–	–	–	–	–	–	–
36 – 40	–	–	–	–	–	–	–	–	1

Գտնել հանքաքարերի մեջ *արծաթի* և *կապարի* տոկոսային պարունակությունների միջև **նմուշային կորելյացիայի գործակիցը**:

405. Դիցուք (X^n, Y^n), $n = 120$ նմուշը համապատասխանում է ***երկչափ նորմալ բաշխում*** ունեցող (X,Y) պատահական վեկտորին: *Նմուշային կորելյացիայի գործակցի* համար ստացվել է $r_{x,y} = 0.4$ արժեքը: **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\rho = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\rho \neq 0$ երկընտրանքայինը:

406 (կ). Ստորև բերված 79 փորձերի արդյունքում ստացված *կորելյացիոն աղյուսակի* միջոցով գտնել **նմուշային կորելյացիայի գործակիցը** և **0.1** ***նշանակալիության մակարդակով*** ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\rho = -0.9$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\rho \neq -0.9$ երկընտրանքայինը (ենթադրվում է, որ (X,Y) երկչափ վեկտորն ունի համատեղ ***նորմալ բաշխում***).

x \ y	0.5	0.6	0.7	0.8
0.5	−	2	0	8
0.6	−	4	2	9
0.7	2	12	3	1
0.8	21	14	−	−
0.9	1	−	−	−

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 24.2 - ից:

407. (x^n, y^n) նմուշի օգնությամբ ստացված են հետևյալ տվյալները ($n = 200$).

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 11.34, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 20.72, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 12.16, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 84.96, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 22.13 \,:$$

1) Գտնել $r_{x,y}$ **նմուշային կորելյացիայի գործակիցը**,

2) համարելով (x^n, y^n) նմուշը համապատասխանող ***երկչափ նորմալ բաշխված*** (X, Y) պատահական վեկտորին՝ **0.01** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել $\mathbb{H}_0$: $\rho = 0.6$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\rho > 0.6$ երկընտրանքայինը, որտեղ $\rho := \rho_{X,Y}$ - ը՝ X և Y պատահական մեծությունների միջև *տեսական կորելյացիայի գործակիցն* է:

§ 25. Փոքրագույն քառակուսիների գնահատականներ: Գծային ռեգրեսիոն մոդել

Դիցուք դիտվում են X և Y (*ոչ պատահական*) փոփոխականների $(X^n, Y^n) = \big((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\big)$ զույգերի նմուշը: $f(X) = a + bX$ գծային ֆունկցիաների դասում $(a, b \in \mathbb{R})$

$$F(a,b) := \sum_{i=1}^{n} \big(Y_i - (a + bX_i)\big)^2$$

ֆունկցիոնալի մինիմումի իմաստով $(X_i\,,\,Y_i)$, $i = 1, \dots, n$ կետերի լավագույն մոտարկումը որոշվում է

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} Y_i\,, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) b = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\,, \end{cases}$$

նորմալ հավասարումների համակարգից, որի

$$\hat{b} = \left(n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2} = r_{X,Y}\,\frac{S_Y}{S_X} \quad (S_X \neq 0),$$

$$\hat{a} = \overline{Y^n} - \hat{b}\,\overline{X^n}$$

լուծումները կոչվում են a և b պարամետրերի ***փոքրագույն քառակուսիների (ՓՔ) գնահատականներ*** : Առաջացած $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$ ուղիղն անցնում է $(\overline{X^n}, \overline{Y^n})$ կետով և ներկայացվում է նաև

$$\hat{Y} - \overline{Y^n} = \hat{b}\,(X - \overline{X^n})$$

տեսքով:

Կատարելով $x_i = X_i - \overline{X^n}$, $y_i = Y_i - \overline{Y^n}$ փոփոխականների փոխարինում $F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (a + bx_i)\big)^2$ ֆունկցիոնալի մինիմալացման խնդիրը հանգեցնում է հետևյալ գնահատականներին՝

$$\hat{a} = 0 \ \ (\text{քանի որ } \ \overline{x^n} = \overline{y^n} = 0), \qquad \hat{b} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = r_{x,y}\,\frac{s_y}{s_x},$$

որտեղից գնահատվող ուղղի հավասարումը՝ կլինի $\hat{y} = \hat{b}x$:

Այժմ դիցուք դիտվող $(X^n, Y^n) = \big((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\big)$ զույգերից X_i- երը *ոչ պատահական* (*դետերմինացված*) մեծություններ են, իսկ Y_i - երը՝ *պատահական*, ընդ որում դրանց *սպասվող* արժեքները կախված են X_i - երից գծային ձևով, այսինքն՝ $\mathbb{E}Y_i = a + bX_i$, այնպես, որ Y_i դիտումները կարելի է ներկայացնել

$$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i\,, \ \ i = 1, 2, \dots, n \tag{25.1}$$

տեսքով, որտեղ ε_i - երը Y_i - երի սպասվող արժեքներից տատանումները նկարագրող որոշակի պատահական մեծություններ են:

(25.1) ներկայացումով տրվող կապը Y_i և X_i մեծությունների միջև կոչվում է **գծային ռեգրեսիոն մոդել**: X_i ոչ պատահական մեծությունները անվանվում են **բացատրող (անկախ) փոփոխականներ** կամ **ռեգրեսորներ**, Y_i մեծությունները՝ **բացատրվող (կախյալ) փոփոխականներ** կամ «**արձագանք**», իսկ ε_i -երը՝ **ռեգրեսիայի սխալներ**:

Սովորաբար *գծային ռեգրեսիոն մոդելի* վրա դրվում են հետևյալ

(H) պայմաններ՝

H1. X_i - երը ***ոչ պատահական (դետերմինացված)*** մեծություններ են, ընդ որում ոչ բոլորն են իրար հավասար,

H2. $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$՝ սխալների ***չկոռելյացվածություն***:

Որոշ դեպքերում ***H2*** պայմանը կփոխարինվի հետևյալ պայմանով՝

H3. ε_i սխալների ***անկախություն*** և ***նորմալ բաշխվածություն***՝ $\varepsilon_i \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$:

Նշանակենք $\mathcal{L}_\theta^0(Y) := \left\{\theta^* \in \mathbb{K}_0 : \theta^* = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i,\ c_i \in \mathbb{R}\right\}$ - ով ($\mathbb{K}_0 := \{\theta^* : \mathbb{E}_\theta \theta^* = \theta\}$)՝ θ պարամետրի *գծային* (ըստ Y_i - երի) *անշեղ* գնահատականների դասը:

Թեորեմ 25.1 (*Գաուս – Մարկով*): *Դիցուք* (25.1) *մոդելը բավարարում է* ***H1*** *և* ***H2*** *պայմանները: Այդ դեպքում a և b պարամետրերի* ***փոքրագույն քառակուսիների (ՓՔ)*** $\hat{a}$ *և* $\hat{b}$ *գնահատականները* ***օպտիմալ*** *են համապատասխանաբար,* $\mathcal{L}_a^0(Y)$ *և* $\mathcal{L}_b^0(Y)$ *դասերում (ունեն* ***փոքրագույն ցրվածքներ***), *ընդ որում՝*

$$\sigma_{\hat{a}}^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right),$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{b}) = \sigma^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right), \quad x_i := X_i - \overline{X^n} :$$

$e_i := Y_i - \widehat{Y_i} = Y_i - \hat{a} - \hat{b}\, X_i = y_i - \hat{b}\, x_i$, $i = 1, \dots, n$ վիճականիները կոչվում են **ռեգրեսիայի մնացորդներ**:

Թեորեմ 25.2: *Դիցուք բավարարվում են* ***H1*** *և* ***H2*** *պայմանները: Այդ դեպքում*

$$\mathbb{s}^2 := \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

վիճականին ***անշեղ գնահատական*** *է* σ^2 *ցրվածքի համար*:

$\mathbb{s}^2$ վիճականին կոչվում է **մնացորդային ցրվածք**, իսկ $\mathbb{s} = \sqrt{\mathbb{s}^2}$ վիճականին՝ ռեգրեսիայի **միջին քառակուսային սխալ** կամ **գնահատման ստանդարտ սխալ** և նկարագրում է ռեգրեսիայի ուղղի շուրջ (X^n, Y^n) դիտվող արժեքների *կուտակվածության աստիճանը*:

Քանի որ գործնականում ռեգրեսիայի ε_i սխալների σ^2 ցրվածքը *անհայտ* է, ապա վերցնելով որպես նրա գնահատական $\mathbb{s}^2$ *մնացորդային ցրվածքը*, կարելի է ստանալ $\hat{a}$ և $\hat{b}$ փոքրագույն քառակուսիների գնահատականների $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{a})$ և $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{b})$ **ցրվածքների գնահատականները**՝

$$\mathbb{s}_{\hat{a}}^2 := \widehat{\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{a})} = \frac{\mathbb{s}^2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \mathbb{s}^2\left(\frac{1}{n} + (\overline{X^n})^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\right), \quad \mathbb{s}_{\hat{b}}^2 := \widehat{\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{b})} = \mathbb{s}^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) :$$

(25.1) ռեգրեսիոն մոդելի $\overline{Y^n}$ միջինի նկատմամբ Y կախյալ փոփոխականի ***վարիացիան*** ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y^n})^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\overline{Y^n}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2,$$

այսինքն Y փոփոխականի **ամբողջ վարիացիան**՝ $\boldsymbol{TSS}:=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{Y_i}-\overline{\boldsymbol{Y^n}})^2$ ($\boldsymbol{Total\ Sum\ of\ Squares}$) տրոհվում է երկու մասի՝ $\boldsymbol{RSS}:=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\boldsymbol{Y}}_i-\overline{\boldsymbol{Y^n}}\right)^2$ ($\boldsymbol{Regression\ Sum\ of\ Squares}$)՝ **«բացատրվող»** $\hat{Y}=\hat{a}+\hat{b}X$ ռեգրեսիայի հավասարումով և ռեգրեսիայի հավասարումով **չբացատրվող** $\boldsymbol{ESS}:=\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{Y_i}-\hat{\boldsymbol{Y}}_i\right)^2$ ($\boldsymbol{Error\ Sum\ of\ Squares}$)՝ (***մնացորդային անդամ***):

Ամբողջ վարիացիայի այն մասը, որը **«բացատրվում» է ռեգրեսիայի հավասարումով**՝

$$R^2:=\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{ESS}{TSS}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\overline{Y^n}\right)^2\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y^n})^2\right),$$

կոչվում է **դետերմինացիայի գործակից** ։ Հեշտ է տեսնել, որ

$$R^2=\left(\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i)^2\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2\right)=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)\right)^2=r_{X,Y}^2,\quad 0\le R^2\le 1\ ։$$

Տեղի ունի **մնացորդների քառակուսիների գումարի** համար հետևյալ ներկայացումը՝

$$ESS=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\hat{a}\sum_{i=1}^{n}Y_i-\hat{b}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i\ ։$$

408. Դիցուք $\hat{b}$ - ը Y փոփոխականի ըստ X - ի գծային ռեգրեսիայի *թեքվածության գործակցի* ***փոքրագույն քառակուսիների գնահատականն*** է, իսկ $\hat{c}$ - ը՝ X փոփոխականի ըստ Y- ի գծային ռեգրեսիայի *թեքվածության գործակցի* ***փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը*** ։ Ցույց տալ, որ $\hat{c}=1/\hat{b}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $R^2=1$ ։

409. Ստանալ $Y_i=a+bX_i^{\gamma}+\varepsilon_i$ $(\gamma\neq 1)$, $i=1,\ldots,n$ ***նորմալ ռեգրեսիոն մոդելի*** a, b և σ^2 պարամետրերը գտնելու համար **ճշմարտանմանության հավասարումների համակարգը**։ Ինչ՞ու պարամետրերը գնահատելու համար ***հնարավոր չէ*** օգտագործել ***փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը*** ։

410. ա) $Y_i=ae^{bX_i}\varepsilon_i$, բ) $Y_i=ae^{bX_i}+\varepsilon_i$, գ) $Y_i=e^{a+bX_i+\varepsilon_i}$, դ) $Y_i=\dfrac{a}{b-X_i}+\varepsilon_i$ մոդելներից որո՞նք է հնարավոր բերել ըստ պարամետրերի ***գծային*** տեսքի։

411. Դիցուք $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$ ռեգրեսիոն մոդելը տրոհված է $Y_i = Y_i^1 + Y_i^2$ երկու մոդելների՝ $Y_i^k = a_k + b_k X_i + \varepsilon_i^k$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$: Ապացուցել, որ այդ մոդելների պարամետրերի ***փոքրագույն քառակուսիների գնահատականների*** միջև տեղի ունի $\hat{a} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2$, $\hat{b} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2$ կապը:

412. Դիցուք $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ ռեգրեսիոն մոդելի պարամետրերը գնահատվում են ***փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով***: Ցույց տալ, որ R^2 *դետեր-մինացիայի գործակցի* համար ճիշտ են հետևյալ համարժեք ներկայացումները՝

$$\text{ա) } R^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^{\mathbf{2}} \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right), \quad \text{բ) } R^2 = \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

$$\text{գ) } R^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i y_i\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right), \quad \text{դ) } R^2 = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right):$$

413. Տրված է *հաստատունի վրա* ռեգրեսիոն մոդելը՝

$$Y_i = a + \varepsilon_i\,, \qquad i = 1, \dots, n:$$

ա) Գտնել a պարամետրի **փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը**, նրա **ցրվածքը** և ռեգրեսիայի ε_i սխալների $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(\varepsilon_i)$ *ցրվածքի* **անշեղ գնահատականը**,

բ) գտնել R^2 **դետերմինացիայի գործակիցը**:

414. Տրված է *առանց ազատ անդամի* գծային ռեգրեսիոն մոդելը՝

$$Y_i = bX_i + \varepsilon_i\,, \qquad i = 1, \dots, n:$$

Գտնել b պարամետրի **փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը**, նրա **ցրվածքը** և ռեգրեսիայի ε_i սխալների $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(\varepsilon_i)$ *ցրվածքի* **անշեղ գնահատականը**:

415*. Դիցուք

$$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i\,, \quad i = 1, \dots, n$$

ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է $H1$ և $H2$ *պայմանները*: Որպես b պարամետրի գնահատական դիտարկվում է

$$\tilde{b} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i - \overline{Y^n}}{X_i - \overline{X^n}}$$

վիճականին:

ա) Ապացուցել, որ $\tilde{b}$ գնահատականը **անշեղ** է և **գծային** ըստ Y_i - երի,

բ) գտնել նրա $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\tilde{b})$ **ցրվածքը**,

գ) ապացուցել $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\tilde{b}) \geq \mathbb{V}ar(\hat{b}) = \sigma^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ **անհավասարությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս Հավելված 3 :

416. Տրված է

$$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i\,, \quad i = 1, \dots, n$$

ռեգրեսիոն մոդելը: Նշանակենք $Z_i := X_i^2$: Դիտարկվում է b պարամետրի հետևյալ գնահատականը՝

$$\tilde{b} := \left(\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z^n}) Y_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z^n})\, X_i\right):$$

ա) Ապացուցել, որ $\tilde{b} \in \mathcal{L}_b^0(Y)$՝ ըստ Y_i - երի **գծային անշեղ գնահատական** է,

բ) գտնել $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\tilde{b})$,

գ) ստուգել, որ $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\tilde{b}) \geq \mathbb{V}ar(\hat{b})$:

417. Ըստ (X^n, Y^n) երկչափ դիտումների՝

1)

X_i	8	10	5	8	9
Y_i	1	3	1	2	3

2)

X_i	9	10	12	5
Y_i	6	4	7	3

ա) գտնել Y փոփոխականի ռեգրեսիան X - ի նկատմամբ, X փոփոխականի ռեգրեսիան Y - ի նկատմամբ և այդ **ռեգրեսիաների մնացորդային ցրվածքները**,

բ) կառուցել «**ցրվածության դաշտը**» և **ռեգրեսիաների ուղիղները**:

418. Ըստ X և Y փոփոխականների ստացված չափումների՝

X_i	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
Y_i	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

գտնել Y փոփոխականի X - ի նկատմամբ և X փոփոխականի Y - ի նկատմամբ **ռեգրեսիայի հավասարումները**:

419. Ըստ հետևյալ տվյալների՝

X_i	5	11	15	17	20	22	25	27	30	35
Y_i	70	65	55	60	50	35	40	30	25	32

գտնել Y փոփոխականի X- ի նկատմամբ **ռեգրեսիան** և **դետերմինացիայի գործակիցը**:

420. 200 ծավալի $(X_i,\, Y_i)$ դիտումների հիման վրա կատարված հաշվարկները տվել են հետևյալ արդյունքները՝

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 11.34,\quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 20.72,\quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 12.16,\quad \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 84.96,\quad \sum_{i=1}^{n} X_i\, Y_i = 22.13:$$

Ստանալ X և Y փոփոխականների համար երկու տեսակի **ռեգրեսիայի հավասարումները** և ռեգրեսիայի գործակիցների *փոքրագույն քառակուսիների գնահատականների* **ցրվածքների գնահատականները**:

421. $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i,\ \ i = 1, \dots, n$ մոդելի պարամետրերը գնահատելու համար օգտագործվում է $n = 20$ ծավալի (X^n, Y^n) նմուշը, որի օգնությամբ ստացված են հետևյալ տվյալներ՝

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 21.9,\quad \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y^n})^2 = 86.9,\quad \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X^n})\,(Y_i - \overline{Y^n}) = 106.4$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 186.2,\quad \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X^n})^2 = 215.4:$$

Գնահատել a և b **գործակիցները** և **դրանց ցրվածքները**:

422. 79 փորձերի արդյունքում ստացվել է հետևյալ *կոռելյացիոն աղյուսակը*՝

X \ Y	0.5	0.6	0.7	0.8
0.5	–	2	0	8
0.6	–	4	2	9
0.7	2	12	3	1
0.8	21	14	–	–
0.9	1	–	–	–

Ստանալ X և Y փոփոխականների համար երկու տեսակի **ռեգրեսիայի հավասարումները** և գտնել դրանց **մնացորդային ցրվածքները**:

423. Ըստ *կոռելյացիոն աղյուսակներում* բերված տվյալների՝

ա)

Y \ X	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
10 – 11	2	11	3	2
11 – 12	1	19	2	4
12 – 13	3	6	27	6
13 – 14	2	3	3	8

բ)

Y \ X	5 – 15	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65
10 – 20	5	7	–	–	–	–
20 – 30	–	20	23	–	–	–
30 – 40	–	–	30	47	2	–
40 – 50	–	–	10	11	20	6
50 – 60	–	–	–	9	7	3

գտնել՝

1) Y փոփոխականի X - ի նկատմամբ **ռեգրեսիայի հավասարումները**,

2) **դետերմինացիայի գործակիցները**,

3) **մնացորդային ցրվածքները**,

4) ռեգրեսիայի հավասարումների գործակիցների *փոքրագույն քառակուսիների գնահատականների* **ցրվածքների գնահատականները** ։

424. Տրված է

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

պարաբոլական *ռեգրեսիոն մոդելը*, որը բավարարում է զույգային ռեգրեսիայի *H 1* և *H 2 պայմանները*։ Գտնել b_0, b_1 և b_2 պարամետրերի **փոքրագույն քառակուսիների գնահատականները** հետևյալ (X^n, Y^n) դիտումների դեպքում՝

ա)

X	– 2	– 1	0	1	2
Y	3	0	3	6	9

բ)

X	– 3	– 2	– 1	0	2	3
Y	– 6	– 4	– 2	– 1	1	0

գ)

X	– 2	– 1	0	1	2
Y	4.8	0.4	– 3.4	0.8	3.2

դ)

X	0	2	4	6	8	10
Y	5	– 1	– 0.5	1.5	4.5	8.5

425. Տրված է

$$Y_i = b_0 + \frac{b_1}{X_i} + \varepsilon_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

հիպերբոլական *ռեգրեսիոն մոդելը*: Գտնել b_0 և b_1 պարամետրերի **փոքրագույն քառակուսիների գնահատականները**: Լուծել խնդիրը հետևյալ տվյալների դեպքում՝

X	2	4	6	12
Y	8	5.25	3.5	3.25

426 (կ). Ներկայացված են որոշ երկրի 1986 – 1997 թ.թ. ազգային տնտեսության *համընդհանուր սպառումը* (Y) և *համընդհանուր եկամուտները* (X) (*պայմանական միավորներով*)՝

Տարին	i	Y_i	X_i	Տարին	i	Y_i	X_i
1986	1	152	170	1992	7	177	200
1987	2	159	179	1993	8	179	207
1988	3	162	187	1994	9	184	215
1989	4	165	189	1995	10	186	216
1990	5	170	193	1996	11	190	220
1991	6	172	199	1997	12	191	225

ա) Գրաֆիկորեն պատկերել Y փոփոխականի կախվածությունը X- ից: Կարելի՞ է արդյոք այդ կախվածությունը համարել **գծային**,

բ) ստանալ համընդհանուր եկամուտների նկատմամբ համընդհանուր սպառման **գծային ռեգրեսիայի հավասարումը** ,

գ) գտնել **դետերմինացիայի գործակիցը**,

դ) գտնել ռեգրեսիայի գործակիցների *փոքրագույն քառակուսիների գնահատականների* **ցրվածքների գնահատականները**:

427 (կ). Աշխատավարձի կապը անգործության մակարդակից տնտեսագիտությունում նկարագրվում է այսպես կոչված *«Ֆիլիպսի կորով»*, որը տրվում է հետևյալ ռեգրեսիոն հավասարումով՝

$$\delta\omega_i = b_0 + \frac{b_1}{u_i} + \varepsilon_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

որտեղ ω_i- ն *աշխատավարձի մակարդակն* է, $\delta\omega_i := \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\omega_{i-1}}\,100\%$ ՝ *աշխատավարձի աճի տեմպն* է և u_i - ն՝ *անգործության մակարդակը* i - րդ տարում: Տեսությունում ենթադրվում է, որ $b_0 < 0$, $b_1 > 0$:

Օգտվելով որոշ երկրին վերաբերող հետևյալ տվյալների վրա՝

i - րդ տարի	ω_i	u_i	i - րդ տարի	ω_i	u_i
1	1.62	1.0	10	2.66	1.8
2	1.65	1.4	11	2.73	1.9
3	1.79	1.1	12	2.80	1.5
4	1.94	1.5	13	2.92	1.4
5	2.03	1.5	14	3.02	1.8
6	2.12	1.2	15	3.13	1.1
7	2.26	1.0	16	3.28	1.5
8	2.44	1.1	17	3.43	1.3
9	2.57	1.3	18	3.58	1.4

ա) գտնել b_0 և b_1 գործակիցների **փոքրագույն քառակուսիների գնահատականները**,

բ) գտնել **անգործության «բնական» մակարդակը**, այսինքն այն մակարդակը, երբ $\delta\omega_i = 0$,

գ) գտնել այն **տարիները**, երբ անգործության մակարդակի փոփոխությունը **առավել ձևով (նվազագույն ձևով)** է ազդում աշխատավարձի փոփոխման տեմպի վրա:

428 (կ). Որոշ սարքի աշխատանքի ընթացքում 5 րոպե պարբերությամբ կատարված ջերմաստիճանի փոփոխության չափումները տվել են հետևյալ արդյունքները՝

t (րոպե)	5	10	15	20	25
$°T$ (°C)	59.3	59.8	60.1	64.9	70.2

Համարելով, որ այդ փոփոխականների միջև տեղի ունի

$$T_i = a + bt_i + ct_i^2 + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

տիպի ***պարաբոլական*** *ռեգրեսիոն կախվածություն*, գտնել a, b և c գործակիցների **փոքրագույն քառակուսիների գնահատականները** :

§ 26. Վարկածների ստուգում, միջակայքային գնահատականներ և կանխատեսումներ ռեգրեսիոն մոդելներում

Դիտարկվում են **նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելները**:

Թեորեմ 26.1: *Դիցուք* $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ *գծային ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է* ***H 1*** *և* ***H 3*** *պայմանները: Այդ դեպքում*

ա) $\chi^2_{n-2} := \dfrac{(n-2)\mathbb{s}^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \sim \mathbb{H}^2(n-2)$ վիճականին ունի $(n-2)$ ազատության աստիճաններով χ^2 *– բաշխում*,

բ) $T_{n-2}(a) := \dfrac{\hat{a} - a}{\mathbb{s}_{\hat{a}}} \sim \mathbb{T}(n-2)$ և $T_{n-2}(b) := \dfrac{\hat{b} - b}{\mathbb{s}_{\hat{b}}} \sim \mathbb{T}(n-2)$ վիճականիներն ունեն $(n-2)$ ազատության աստիճաններով *Ստյուդենտի (t -) բաշխում* :

Դիտարկենք երկու դեպք՝ երբ ռեգրեսիոն մոդելի $\varepsilon_i \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$ սխալների *մնացորդային* σ^2 *ցրվածքը* **հայտնի** է և երբ այն **անհայտ** է :

1. Դիցուք σ^2 - ն **հայտնի** է: Քանի որ $Y_i \sim \mathbb{N}(a + bX_i, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$, ապա

$$\hat{a} \sim \mathbb{N}(a, \sigma^2_{\hat{a}}), \quad \hat{b} \sim \mathbb{N}(b, \sigma^2_{\hat{b}}), \tag{26.1}$$

որտեղից՝ $Z(a) := \frac{\hat{a}-a}{\sigma_{\hat{a}}} \sim \mathbb{N}(0,1)$, $Z(b) := \frac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}} \sim \mathbb{N}(0,1)$, և a ու b պարամետրերի $\gamma = 1 - \alpha$ նշանակալիության մակարդակի *վստահության միջակայքերի* համար՝ կստանանք

$$\mathbb{P}(\hat{a} - \sigma_{\hat{a}} \cdot z_{\alpha/2} < a < \hat{a} + \sigma_{\hat{a}} \cdot z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha, \quad \mathbb{P}(\hat{b} - \sigma_{\hat{b}} \cdot z_{\alpha/2} < b < \hat{b} + \sigma_{\hat{b}} \cdot z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha :$$

Այստեղից՝ $\mathbb{H}_0 : a = a_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : a \neq a_0$ երկընտրանքայինը ստուգող α *մակարդակի կրիտիկական տիրույթը* կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n): |z(a_0)| > z_{\alpha/2}\},$$

որտեղ $z(a_0)$ - ն՝ $Z(a_0)$ վիճականու *թվային* արժեքն է:

Նման ձևով $\mathbb{H}_0$: $b = b_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $b \neq b_0$ երկընտրանքայինը ստուգող հայտանիշը կունենա

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n): |z(b_0)| > z_{\alpha/2}\}$$

կրիտիկական տիրույթ:

2. Այժմ դիցուք σ^2 - ն **անհայտ** է: Օգտվելով թեորեմ 26.1- ի բ) կետից՝ կստանանք՝

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat{a} - a}{\mathbb{s}_{\hat{a}}}\right| < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1 - \alpha \quad \text{և} \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat{b} - b}{\mathbb{s}_{\hat{b}}}\right| < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1 - \alpha ,$$

այնպես, որ a և b պարամետրերի $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի վստահության միջակայքերի* համար՝ կունենանք՝

$$\mathbb{P}\left(a \in \left(\hat{a} \mp \mathbb{s}_{\hat{a}} \cdot t_{\alpha/2}(n-2)\right)\right) = 1 - \alpha \quad \text{և} \quad \mathbb{P}\left(b \in \left(\hat{b} \mp \mathbb{s}_{\hat{b}} \cdot t_{\alpha/2}(n-2)\right)\right) = 1 - \alpha :$$

$\mathbb{H}_0$: $a = a_0$ $(b = b_0)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $a \neq a_0$ $(b \neq b_0)$ երկընտրանքայինը ստուգող α *մակարդակի կրիտիկական տիրույթը* կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n): |t_{n-2}(a_0)| > t_{\alpha/2}(n-2)\} \;\; \left(\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n): |t_{n-2}(b_0)| > t_{\alpha/2}(n-2)\}\right),$$

որտեղ $t_{n-2}(a_0)$ - ն և $t_{n-2}(b_0)$ - ն՝ $T_{n-2}(a_0)$ և $T_{n-2}(b_0)$ վիճականիների թվային արժեքներն են:

Առավել հետաքրքրություն է ներկայացնում $\mathbb{H}_0$: $b = 0$ վարկածը ստուգման խնդիրը, որի *հերքումը* տվյալ α մակարդակով նշանակում է, որ X փոփոխականը (*գործոնը*) նշանակալի ազդեցություն ունի *կախյալ* Y փոփոխականի վրա: Այդ վարկածը ստուգող հայտանիշի վիճականին նշանակվում է՝

$$\mathbb{t} := T_{n-2}(0) = \frac{\hat{b}}{\mathbb{s}_{\hat{b}}} \sim \mathbb{T}(n-2)$$

և կոչվում է $\mathbb{t}$ - **վիճականի**:

Ցրվածքային վերլուծություն (դիսպերսիոն անալիզ ($ANOVA$)) ռեգրեսիոն մոդելներում

Նորմալ ռեգրեսիոն մոդելի X գործոնի նշանակալիության ստուգումը ($\mathbb{H}_0 : b = 0$) կարելի է կատարել նաև **ցրվածքների վերլուծության** եղանակով:

Համաձայն (26.1) - ի և թեորեմ 26.1 - ի՝

$$Z(b) := \frac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}} = \frac{\hat{b} - b}{\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \sim \mathbb{N}(0,1) \ \left(Z^2(b) \sim \mathbb{H}^2(1) \right),$$

$$\chi_{n-2}^2 := \frac{(n-2)\mathbb{s}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \sim \mathbb{H}^2(n-2)$$

և, քանի որ $\mathbb{s}^2$ և $\hat{b}$ վիճականիներն *անկախ* են (տես [8]), ապա

$$F := \frac{Z^2(b)}{\frac{1}{n-2}\chi_{n-2}^2} = \left[\left(\hat{b} - b\right)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right] \Big/ \left[\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \right) \right] \sim \mathbb{S}(1, n-2)$$

F *—վիճականին* ունի m և n ազատության աստիճաններով ***Ֆիշեր – Սնեդեկորի*** (***F***-) ***բաշխում***:

$\mathbb{H}_0$: $b = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $b \neq 0$ երկընտրանքայինը ստուգման համար կիրառենք կենտրոնական F *— վիճականին*: Եթե ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա

$$F_0 := \left[\left(\hat{b}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right] \Big/ \left[\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \right) \right] \sim \mathbb{S}(1, n-2),$$

այնպես, որ α *նշանակալիության մակարդակի* կրիտիկական տիրույթը

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^n) : f_0 > S_\alpha(1, n-2)\}$$

բազմությունն է, որտեղ $S_\alpha(1, n-2)$ - ը՝ 1 և $(n-2)$ ազատության աստիճաններով ***F — բաշխման*** α *մակարդակի կրիտիկական կետն* է, իսկ $F_0(\omega) := f_0$:

Նկատի ունենալով $\hat{y}_i = \hat{b}x_i$ ներկայացումը F *— վիճականին* կգրվի հետևյալ համարժեք տեսքով՝

$$F_0 = \left[\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i)^2 \right] \Big/ \left[\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \right) \right] = \frac{RSS/1}{ESS/(n-2)},$$

որտեղ ESS *մնացորդային անդամը* հեշտությամբ գտնվում է

$$ESS = TSS - RSS = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\hat{b}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ներկայացումից:

F *—վիճականին* գտնելու համար անհրաժեշտ հաշվարկները բերվում են հետևյալ *աղյուսակում*՝

Ցրվածքային վերլուծության (ANOVA) աղյուսակ

Ցրվածքների աղբյուրը 1	Շեղումների քառակուսիների գումարը 2	Ազատության աստիճանները 3	Շեղումների քառակուսիների միջինը 4
Գործոն (X) Մնացորդ (e)	$RSS := \left(\hat{b}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ $ESS := \sum_{i=1}^{n} e_i^2$	1 $n-2$	$RSS/1$ $ESS/(n-2)$
Ընդհանուր ցրվածքը	$TSS := \sum_{i=1}^{n} y_i^2$	$n-1$	$F_0 := \dfrac{RSS/1}{ESS/(n-2)}$

X գործոնի *նշանակալիությունը ստուգելու* համար օգտագործվում են *երկու համարժեք մեթոդներ*՝ առաջինը հիմնված է $\mathbb{t}-$ *վիճականու*, իսկ երկրորդը՝ F *– վիճականու* վրա ($F = \mathbb{t}^2$): Այս խնդիրը լուծելու համար գոյություն ունի նաև *երրորդ տարբերակը*, որը հիմնված է *կոռելյացիայի գործակցի* գաղափարի վրա:

Լեմմա 26.2: $\mathbb{t} := T_{n-2}(0) = \dfrac{\hat{b}}{\mathbb{s}_{\hat{b}}}$ և $F_0 := \left[\left(\hat{b}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] \Big/ \left[\dfrac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right)\right]$ վիճականիներն ունեն *հետևյալ համարժեք ներկայացումներ*՝

$$\mathbb{t} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{և} \quad F_0 = (n-2)\,\frac{R^2}{1-R^2}\ ,$$

որտեղ R^2*- ն դետերմինացիայի գործակիցն է, իսկ* $r := r_{X,Y}$ *- ը՝ նմուշային կոռելյացիայի գործակիցը:*

Համաձայն թեորեմ 24.1 - ի *կոռելյացիայի գործակցի* նշանակալիությունը $(\mathbb{H}_0: \rho = 0)$ ստուգող հայտանիշը համարժեք է *նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելում* X գործոնի նշանակալիությունը $(\mathbb{H}_0: b = 0)$ ստուգող հայտանիշին (տե՛ս լեմմա 26.2):

Կանխատեսումներ ռեգրեսիոն մոդելներում

1. Դիցուք **նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելին** բավարարող (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ նմուշի միջոցով պահանջվում է կանխատեսել X փոփոխականի որոշ X_0 արժեքին համապատասխանող Y_0 պատահական մեծության $m_0 = \mathbb{E}Y_0$ միջինը: X_0 արժեքը կարող է գտնվել ինչպես վարիացիոն շարքի $X_{(1)}$- ից $X_{(n)}$ արժեքների միջև, այնպես էլ այդ արժեքներից դուրս:

Դիտարկենք **կետային** և **միջակայքային** կանխատեսումների խնդիրները:

Կետային կանխատեսում

$\widehat{m}_0$ *կետային գնահատականը* (*կանխատեսումը*) փնտրվում է ըստ Y_i - երի *գծային անշեղ*

$$\mathcal{L}^0_{m_0}(Y) := \left\{\widehat{m}_0 : \ \widehat{m}_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i\,, \ \ \mathbb{E}\,\widehat{m}_0 = m_0\right\}$$

գնահատականների դասում այնպես, որ այն լինի **օպտիմալ** այդ դասում (ունենա *փոքրագույն* ցրվածք):

Թեորեմ 26.3: *$H1$ և $H3$ պայմանների դեպքում*

$$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

*ռեգրեսիոն մոդելին բավարարող (X_i, Y_i) նմուշի միջոցով որոշակի X_0 արժեքին համապատասխանող $Y_0 = a + bX_0 + \varepsilon_0$ պատահական մեծության $m_0 := \mathbb{E}Y_0$ միջինի համար $\mathcal{L}^0_{m_0}(Y)$ դասում **օպտիմալ** $\widehat{m}_0$ **գնահատականը** (**կանխատեսումը**) կլինի*

$$\widehat{m}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0$$

վիճականին, որտեղ $\hat{a}$ - ը և $\hat{b}$ - ը՝ a և b պարամետրերի փոքրագույն քառակուսիների գնահատականներն են, իսկ $\widehat{m}_0$ - ի ցրվածքը հավասար է՝

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\widehat{m}_0) := \sigma^2_{\widehat{m}_0} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + [(X_0 - \overline{X^n})^2] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X^n})^2 \right] \right):$$

Միջակայքային կանխատեսում

Գտնենք X_0 արժեքին համապատասխանող Y_0 պատահական մեծության $m_0 := \mathbb{E}Y_0$ միջինի $\gamma = 1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *մակարդակի* **վստահության միջակայքը**:

Թեորեմ 26.4: *Դիցուք $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է $H1$ և $H3$ պայմանները: Այդ դեպքում*

$$\mathbb{t} := \frac{\widehat{m}_0 - m_0}{s_{\widehat{m}_0}} \sim \mathbb{T}(n-2)$$

*վիճականին ունի $(n-2)$ ազատության աստիճաններով **Ստյուդենտի բաշխում**, որտեղ* $s^2_{\widehat{m}_0} := \mathbb{s}^2 \left(\frac{1}{n} + [(X_0 - \overline{X^n})^2] \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$:

Համաձայն թեորեմի $m_0 = \mathbb{E}Y_0$ միջինի $\gamma = 1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *մակարդակի* ***վստահության միջակայքը***՝ կլինի

$$\mathbb{P}\left(\widehat{m}_0 - t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s_{\widehat{m}_0} < m_0 < \widehat{m}_0 + t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s_{\widehat{m}_0}\right) = 1 - \alpha :$$

2. Դիցուք (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ նմուշը ենթարկվում է *$H1$ և $H3$* պայմանները բավարարող **նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելին**: Ենթադրենք բացի այդ, որ նոր դիտված (X_0, Y_0) արժեքը նույնպես բավարարում է այդ մոդելին, այսինքն՝ $Y_0 = a + bX_0 + \varepsilon_0$, որտեղ $\varepsilon_0 \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$ և *անկախ* է ε_i - երից, $i = 1, \dots, n$: Այդ դեպքում ***կանխատեսվող*** $\hat{Y}_0$ ***արժեքը***՝ կլինի

$$\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0 = \overline{Y^n} + \hat{b}x_0 \quad (x_0 = X_0 - \overline{X^n}),$$

որտեղ $\overline{Y^n} = a + b\overline{X^n} + \overline{\varepsilon^n}$ $\left(\overline{\varepsilon^n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \right)$:

Այսպիսով՝ $Y_0 - \overline{Y^n} = bx_0 + \varepsilon_0 - \overline{\varepsilon^n}$, որտեղից ***կանխատեսման սխալի*** համար՝ կունենանք

$$e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0 = -(\hat{b} - b)x_0 + \varepsilon_0 - \overline{\varepsilon^n} :$$

Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ $\mathbb{E}e_0 = 0$, այսինքն՝ $\hat{Y}_0$ - ը ***գծային*** ըստ Y_i - երի ***անշեղ գնահատական*** է $\mathbb{E}Y_0$ - ի համար՝ $\mathbb{E}\hat{Y}_0 = \mathbb{E}Y_0$:

Թեորեմ 26.5: *$\boldsymbol{H1}$ և $\boldsymbol{H3}$ պայմանները բավարարող $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ մոդելին ենթարկվող կամայական (X_0, Y_0) զույգի Y_0 պատահական մեծության $\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0$* ***կանխատեսման e_0 սխալի ցրվածքը*** *հավասար է՝*

$$\sigma_{e_0}^2 := \mathbb{V}ar(e_0) = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + x_0^2 \Big/ \sum_{i=1}^n x_i^2\right),$$

և այն ըստ Y_i - երի գծային անշեղ գնահատականների

$$\mathcal{L}_{Y_0}^0(Y) := \left\{\tilde{Y}_0 : \ \tilde{Y}_0 := \sum_{i=1}^n c_i Y_i , \quad \mathbb{E}\tilde{Y}_0 = \mathbb{E}Y_0, \quad c_i \in \mathbb{R}\right\}$$

դասում փոքրագույնն է, այսինքն $\hat{Y}_0$ - ը՝ Y_0 - ի համար ***օպտիմալ*** *գնահատական է:*

Թեորեմ 26.6: *Դիցուք $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է $\boldsymbol{H1}$ և $\boldsymbol{H3}$ պայմանները: Այդ դեպքում*

$$t := \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{s_{\hat{Y}_0}} \sim \mathbb{T}(n-2)$$

վիճականին ունի $(n-2)$ ազատության աստիճաններով ***Ստյուդենտի բաշխում***, որտեղ $s_{\hat{Y}_0}^2 := = \mathbb{s}^2\left(1 + \frac{1}{n} + x_0^2 \Big/ \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$:

Թեորեմ 26.6 - ից Y_0 - ի համար կստանանք $\gamma = 1 - \alpha$ *մակարդակի* ***վստահության միջակայքը***՝

$$\mathbb{P}\left(\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s_{\hat{Y}_0} < Y_0 < \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2}(n-2) \cdot s_{\hat{Y}_0}\right) = 1 - \alpha :$$

429. Խնդիր 420 - ում բերված տվյալների օգնությամբ **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* ստուգել Y փոփոխականի ըստ X - ի և X փոփոխականի ըստ Y - ի ռեգրեսիաների **գործակիցների նշանակալիությունը**, ենթադրելով ռեգրեսիաների սխալների ***նորմալ բաշխվածությունը*** :

430. (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, 17$ նմուշի միջոցով կառուցված ***նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելի*** *թեքվածության գործակցի* համար ստացվել է $\hat{b} = 3.73$ արժեքը, ռեգրեսիայի **ստանդարտ սխալի** համար՝ $\mathbb{s} = 28.654$ և $ns_X^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\left(\overline{X^n}\right)^2 = 871.5$:

ա) Գտնել *թեքվածության $\hat{b}$ գործակցի* **գնահատականի ստանդարտ շեղումը**:

բ) Կառուցել *թեքվածության b գործակցի* **98** % -ոց **վստահության միջակայքը**:

431. $n = 15$ դիտարկումների միջոցով ***նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելի*** *թեքվածության գործակցի* համար ստացվել է $\hat{b} = 2.9$ արժեքը: Համարելով, որ *թեքվածության գործակցի $\hat{b}$* գնահատականի *ստանդարտ սխալը*՝ $s_{\hat{b}} = 0.18$, պարզել՝ կա՞ արդյոք հիմք պնդելու, որ **0.05** *նշանակալիության մակարդակով* **թեքվածության գործակիցը** իր նախկին $b = 3.2$ արժեքի համեմատ **փոխվել** է:

432. Ըստ հետևյալ տվյալների՝

X	16	6	10	5	12	14
Y	− 4.4	8.0	2.1	8.7	0.1	− 2.9

ա) պատկերել (x_i, y_i) կետերի «**ցրվածության դաշտը**», բ) ստանալ Y - ի **ռեգրեսի-այի հավասարումը** X - ի նկատմամբ, գ) **գնահատել** Y - ի արժեքը, երբ $X = 5, 6, 20$:

433. Օգտվելով հետևյալ տվյալներից՝

X	56	48	42	58	40	39	50
Y	45	38.5	34.5	46.1	33.3	32.1	40.4

ա) գտնել Y - ների (*փոքրագույն քառակուսիների իմաստով*) X - երի միջոցով լավագույն **գծային մոտարկումը**, բ) հաշվել գնահատման **ստանդարտ սխալը**, գ) գտնել $X_0 = 44$ արժեքին համապատասխանող կախյալ փոփոխականի **95** % - ոց *վստահության մակարդակի* **կանխատեսման միջակայքը** (ռեգրեսիոն մոդելը համարվում է ***նորմալ***):

434. Ըստ խնդիր 421 - ում բերված տվյալների **գնահատել** (**կանխատեսել**) $X_0 = 10$ արժեքին համապատասխանող Y - ի **միջին արժեքը** և գտնել այդ միջինի **95** % - ոց **վստահության միջակայքը**:

435 (կ). Ըստ խնդիր 426 - ի տվյալների ենթադրելով Y փոփոխականի ըստ X - ի գծային ռեգրեսիայի ***նորմալությունը***՝

ա) ձևակերպել ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցների նշանակալիությունը ստուգող *հիմնական* և *երկընտրանքային* վարկածները,

բ) գտնել $\hat{a}$ և $\hat{b}$ *գնահատականների* **բաշխումները**,

գ) բերել a և b գործակիցների *նշանակալիությունը* ստուգելու համար օգտագործվող վիճականիները,

դ) ստուգել **5** % - ոց *մակարդակով* a և b **գործակիցների նշանակալիությունը**,

ե) կառուցել a և b գործակիցների **95** % - ոց **վստահության միջակայքերը**:

436 (կ). Հետևյալ աղյուսակում բերված են որոշ երկրում շրջանառության մեջ գտնվող *ազգային տարադրամի ծավալների* և *համազգային եկամուտների* վերաբերյալ տվյալները (տվյալները բերվում են այդ երկրի տարադրամի *պայմանական միավորներով* (*միլիարդ պ.մ.*)).

Տարի	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Տարադրամի ծավալները (X)	2.0	2.5	3.2	3.6	3.3	4.0	4.2	4.6	4.8	5.0
Համազգային եկամուտը (Y)	5.0	5.5	6.0	7.0	7.2	7.7	8.4	9.0	9.7	10.0

ա) Գտնել համազգային եկամուտների **ռեգրեսիոն կապը** կախված տարադրամի ծավալներից,

բ) կառուցել գնահատվող պարամետրերի **95** % - ոց **վստահության միջակայքերը** և ստուգել $\mathbb{H}_0$: $b = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $b \neq 0$ - ի և $\mathbb{H}'_0$: $b = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}'_1$: $b \neq 1$ - ի,

գ) ստուգել F– *վիճականու* օգնությամբ **0.05** *մակարդակով* **ռեգրեսիայի նշանակալիությունը** և կառուցել **ցրվածքային վերլուծության** (ANOVA) **աղյուսակը** :

437 (կ) . Ֆինանսական շուկայում հետաքրքրություն է ներկայացնում *արժեթղթերի միջին* (Y_i) *շահութաբերության* և ընդհանուր *շուկայական* (X_i) *շահութաբերության* միջև փոխհարաբերությունը: Համապատասխան գծային ռեգրեսիոն հավասարման *թեքվածության* (b) *գործակիցը* կոչվում է արժեթղթերի *բետա – գործակից* : Այդ գործակցի *մեկից մեծ* արժեքը վկայում է, որ արժեթուղթը շուկայի փոփոխման հանդեպ *հարաբերական զգայուն* է, մինչ դեռ *բետա – գործակցի մեկից փոքր* արժեքը նշանակում է արժեթղթի *հարաբերական անզգայունության* մասին:

Ըստ հետևյալ տվյալների՝

Y (%)	10	12	8	15	9	11	8	10	13	11
X(%)	11	15	3	18	10	12	6	7	18	13

գնահատել *բետա - գործակիցը* ($\hat{b}$) և ստուգել $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ *նշանակալիության մակարդակով* նրա **մեկից փոքր** լինելու վարկածը:

438 (կ). Որոշ երկրի առողջապահության նախարարությունը հրապարակել է տվյալներ, համաձայն որի այդ երկրի 100 000 բնակիչներից ծխողների թվից սիրտանոթային հիվանդություններից մահացողների թվի *թեքվածության գործակիցը* կազմել է $\hat{b} = 0.08$: Այդ երկրի 18 շրջաններում նախկինում կատարված հետազոտությունները տվել են թեքվածության գործակցի համար 0.147 արժեք, իսկ այդ գործակցի *ստանդարտ շեղման* համար՝ $s_{\hat{b}} = 0.032$ արժեք: Կառուցել ***նորմալ*** գծային ռեգրեսիոն հավասարման *թեքվածության գործակցի*՝ ա) **90** % - ոց, բ) **99** % - ոց **վստահության միջակայքերը** : Կարելի՞ է արդյոք այստեղից եզրակացնել, որ *թեքվածության գործակիցը* **փոխվել** է:

439 (կ). Բերված են որոշ երկրի շրջանառության մեջ գտնվող *ազգային տարադրամի ծավալների* և *համընդհանուր ներքին արտադրանքի* (*ՀՆԱ- ի*) վերաբերյալ տվյալներ (*մլրդ. պայմ. միավորով*)՝

Տարին	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Տարադրամի ծավալները	2.0	2.5	3.2	3.6	3.3	4.0	4.2	4.6	4.8	5.0
ՀՆԱ	5.0	5.5	6.0	7.0	7.2	7.7	8.4	9.0	9.7	10.0

ա) Ստանալ ըստ տարադրամի ծավալների ՀՆԱ - ի **կանխատեսման** համար **հավասարումը**,

բ) ինչպե՞ս բացատրել ստացված հավասարման **թեքվածության գործակիցը**,

գ) գտնել գնահատման (ｓ) **ստանդարտ սխալը**, ենթադրելով ստացված ռեգրեսիոն մոդելի ***նորմալությունը***,

դ) գտնել ՀՆԱ - ի *կանխատեսման* **90** % - ոց **վստահության միջակայքը**, երբ տարադրամի ծավալները կազմեն 8.0 մլրդ. պ.մ.:

440 (կ). Հետազոտվում է քիմիական նյութի որոշ (Y) բնութագրիչի կախվածությունը նրա (X) ջերմաստիճանից (տվյալները բերվում են կոդավորված ձևով)՝

X	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4	5
Y	1	5	4	7	10	8	9	13	14	13	18

ա) Պատկերել «**ցրվածության դաշտը** »,

բ) ստանալ (X_i , Y_i) կետերի *փոքրագույն քառակուսիների* իմաստով **լավագույն գծային մոտարկումը**,

գ) ենթադրելով $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$ մոդելի ***նորմալությունը***, կառուցել **ցրվածության վերլուծության** (**ANOVA**) **աղյուսակը** և ստուգել **0.05** *մակարդակով* **ռեգրեսիայի նշանակալիությունը,**

դ) գտնել *թեքվածության գործակցի* **0.95** *մակարդակի* **վստահության միջակայքը**,

ե) գտնել $X_0 = 3$ արժեքին համապատասխանող Y_0 - ի *միջինի* **վստահության միջակայքը**,

զ) գտնել $X' = 3$ և $X'' = -2$ արժեքներին համապատասխանող Y' - ի և Y'' - ի *միջինների տարբերության* **վստահության միջակայքը** :

Հավելված 1: Կարևորագույն բաշխումներ

Դիսկրետ բաշխումներ

Բաշխման տեսակը	Պարամետրերը	Բաշխման կրիչը	$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k})$ հավանականություն
Բեռնուլիի $\mathbb{B}\mathbf{er}\ (p)$	$0 < p < 1$	$k = 0, 1$	$p^k(1-p)^{1-k}$
Բինոմական $\mathbb{B}\mathbf{in}\ (p,\ n)$	$n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$	$k = 0, 1, \ldots, n$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
Բացասական բինոմական $\mathbb{NB}\mathbf{in}\ (p,\ n)$	$n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$	$k = 0, 1, \ldots$	$C_{n+k-1}^k\, p^n (1-p)^k$
Երկրաչափական $\mathbb{G}(\boldsymbol{p})$	$0 < p < 1$	$k = 0, 1, \ldots$	$p(1-p)^k$
Պուասոնի $\mathbb{\Pi}(\boldsymbol{\lambda})$	$\lambda > 0$	$k = 0, 1, \ldots$	$\dfrac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda}$
Բազմանդամային (պոլինոմական) $\mathbb{M}(\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_r})$	$n \in \mathbb{N}$, $p = (p_1, \ldots,\ p_r)$, $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$	$k = (k_1, \ldots, k_r)$, $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$	$n! \prod_{i=1}^{r} \dfrac{p_i^{k_i}}{k_i!}$

Անընդհատ բաշխումներ

Բաշխման տեսակը	Պարա-մետրերը	Բաշխման կրիչը	$f_\theta(x)$ խտությունը $(x \in \mathbb{R})$
Հավասարաչափ $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ – ում, $\mathbb{U}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$	$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$
Նորմալ (Գաուսի), $\mathbb{N}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\sigma^2})$	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right\}$
Հակադարձ Գաուսի **(Վալդի)**, $\mathbb{IG}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\lambda})$	$m > 0$, $\lambda > 0$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left\{-\frac{\lambda}{2m^2x}(x-m)^2\right\}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
Լոգարիթմական **նորմալ**, $\mathbb{LN}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma^2})$	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$	$(0,\infty)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-m)^2\right\}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
Կոշիի, $\mathbb{C}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\sigma})$	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi}\ \frac{\sigma}{\sigma^2+(x-m)^2}$
Լապլասի, $\mathbb{L}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha})$	$m \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{\alpha}{2}\ e^{-\alpha\lvert x-m\rvert}$
Պարետոյի, $\mathbb{P}$**ar** $(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\lambda})$ **Աստիճանային**, $\mathbb{P}$**ow** $(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\lambda})$	$m \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ $\lambda > 0$	$[m+\alpha,$ $\infty)$ $[m, m+$ $+\alpha)$	$\lambda\alpha^\lambda(x-m)^{-(1+\lambda)}\mathbb{1}_{[m+\alpha,\infty)}(x)$ $\lambda\alpha^{-\lambda}(x-m)^{\lambda-1}\mathbb{1}_{[m,m+\alpha)}(x)$
Երկպարամետրական **ցուցչային**, $\mathbb{E}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha})$	$m \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$	$[m,\ \infty)$	$\alpha e^{-\alpha(x-m)}\mathbb{1}_{[m,\infty)}(x)$
Գամմա, $\Gamma(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\lambda})$	$\alpha > 0$, $\lambda > 0$	$(0,\infty)$	$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
Բետա, $\mathbb{B}$**et** $(a,\ b)$	$a > 0$, $b > 0$	$[a,b]$	$\frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\ x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$
$\boldsymbol{\chi^2}$, $\mathbb{H}^2(\boldsymbol{n})$	$n \in \mathbb{N}$	$(0,\infty)$	$\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\ x^{n/2-1}\ e^{-x/2}\ \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
Ֆիշեր – Սնեդեկորի $(\boldsymbol{F}$-), $\mathbb{S}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n})$	$m, n \in \mathbb{N}$	$(0,\infty)$	$\frac{1}{\mathrm{B}(m/2\,,n/2)}\ m^{m/2}n^{n/2}\ \frac{x^{m/2\ -1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}}$
Ստյուդենտի $(\boldsymbol{t}$-), $\mathbb{T}(\boldsymbol{n})$	$n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
Վեյբուլի, $\mathbb{W}$ $(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\lambda})$	$m \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$	(m,∞)	$\lambda\alpha^\lambda(x-m)^{\lambda-1}\exp\left\{-\alpha^\lambda(x-m)^\lambda\right\}$
Ռելեյի, $\mathbb{R}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha})$	$m \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$	(m,∞)	$\frac{2(x-m)}{\alpha}\,e^{-(x-m)^2/\alpha}\ \mathbb{1}_{(m,\infty)}(x)$

Հավելված 2: Բաշխումների աղյուսակներ

1. *Ստանդարտ նորմալ* բաշխում

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$ ֆունկցիայի արժեքները:

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

2. n - *ազատության աստիճաններով* χ^2- բաշխում:

$\chi^2_\alpha(n)$ - կրիտիկական կետերը՝ $\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} x^{n/2-1}e^{-x/2}dx=\alpha, \quad 0<\alpha<1$:

α / n	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272

3. n - *ազատության աստիճաններով* χ^2- բաշխում:

$$1 - \mathbb{H}_n(x) := \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_x^\infty t^{n/2-1} e^{-t/2}\,dt$$ **ֆունկցիայի արժեքները**

$(x > 0,\ \ 1 \le n \le 20)$:

x \ n	1	2	3	4	5
0.1	0.7518	0.9512	0.9918	0.9988	0.9998
0.2	.6547	.9048	.9776	.9953	.9991
0.4	.5271	.8187	.9402	.9825	.9953
0.6	.4386	.7408	.8964	.9631	.9880
0.8	.3711	.6703	.8495	.9385	.9770
1.0	.3173	.6065	.8013	.9098	.9626
1.5	.2207	.4724	.6823	.8266	.9131
2	.1573	.3679	.5725	.7358	.8492
3	.0833	.2231	.3916	.5578	.7000
4	.0455	.1353	.2615	.4060	.5494
5	.0254	.0821	.1718	.2873	.4159
6	.0143	.0498	.1116	.1992	.3062
7	.0082	.0302	.0719	.1359	.2206
8	.0047	.0183	.0460	.0916	.1562
9	.0027	.0111	.0293	.0611	.1091
10	.0016	.0067	.0186	.0404	.0752
11	.0009	.0041	.0117	.0266	.0514
12	.0005	.0025	.0074	.0174	.0348
13	.0003	.0015	.0046	.0113	.0234
14	.0002	.0009	.0029	.0073	.0156
15	.0001	.0006	.0018	.0047	.0104
16	.0001	.0003	.0011	.0030	.0068
17		.0002	.0007	.0019	.0045
18		.0001	.0004	.0012	.0030
19		.0001	.0003	.0008	.0019
20		.0001	.0002	.0004	.0013
21			.0001	.0003	.0008
22			.0001	.0002	.0005
23				.0001	.0003
24				.0001	.0002
25				.0001	.0001

χ^2- բաշխում (*շարունակություն*)

x \ n	6	7	8	9	10
0.5	0.9978	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000
1.0	.9856	.9948	.9983	0.9994	0.9998
1.5	.9595	.9823	.9927	.9972	.9989
2.0	.9197	.9598	.9810	.9915	.9963
2.5	.8685	.9271	.9617	.9809	.9909
3	.8089	.8850	.9344	.9643	.9814
4	.6767	.7798	.8571	.9114	.9474
5	.5438	.6600	.7576	.8343	.8912
6	.4232	.5398	.6472	.7399	.8153
7	.3204	.4284	.5366	.6371	.7254
8	.2381	.3326	.4335	.5342	.6288
9	.1736	.2527	.3423	.4373	.5321
10	.1246	.1886	.2650	.3505	.4405
11	.0884	.1386	.2017	.2757	.3575
12	.0629	.1006	.1512	.2133	.2851
13	.0430	.0721	.1119	.1626	.2237
14	.0296	.0512	.0818	.1223	.1730
15	.0203	.0360	.0592	.0909	.1321
16	.0138	.0251	.0424	.0669	.0996
17	.0093	.0174	.0301	.0487	.0744
18	.0062	.0120	.0212	.0352	.0550
19	.0042	.0082	.0149	.0252	.0403
20	.0028	.0056	.0103	.0179	.0193
21	.0018	.0038	.0072	.0127	.0211
22	.0012	.0025	.0049	.0084	.0151
23	.0008	.0017	.0034	.0062	.0108
24	.0005	.0011	.0023	.0043	.0076
25	.0003	.0008	.0016	.0030	.0054
26	.0002	.0005	.0011	.0020	.0037
27	.0002	.0003	.0007	.0014	.0026
28	.0001	.0002	.0004	.0010	.0018
29	.0001	.0002	.0003	.0007	.0013
30		.0001	.0002	.0004	.0009

χ^2- բաշխում (*շարունակություն*)

x \ n	11	12	13	14	15
2	0.9985	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000
3	.9907	.9955	.9979	.9991	0.9996
4	.9699	.9834	.9912	.9955	.9977
5	.9312	.9580	.9752	.9858	.9921
6	.8734	.9161	.9462	.9665	.9798
7	.7991	.8576	.9022	.9347	.9577
8	.7133	.7852	.8436	.8893	.9238
9	.6219	.7029	.7729	.8311	.8775
10	.5304	.6160	.6939	.7622	.8197
12	.3636	.4457	.5276	.6063	.6790
14	.2330	.3007	.3738	.4497	.5255
16	.1411	.1912	.2491	.3134	.3821
18	.0816	.1157	.1575	.2068	.2627
20	.0453	.0671	.0952	.1301	.1719
21	.0334	.0504	.0729	.1016	.1368
22	.0244	.0375	.0554	.0786	.1078
23	.0177	.0277	.0417	.0603	.0841
24	.0127	.0203	.0311	.0458	.0651
25	.0091	.0148	.0231	.0346	.0499
26	.0065	.0107	.0170	.0259	.0380
27	.0046	.0077	.0124	.0193	.0287
28	.0032	.0055	.0091	.0142	.0216
29	.0023	.0039	.0066	.0105	.0161
30	.0016	.0028	.0047	.0076	.0119
31	.0011	.0020	.0034	.0055	.0088
32	.0008	.0014	.0024	.0040	.0064
33	.0005	.0010	.0017	.0029	.0047
34	.0004	.0007	.0012	.0021	.0034
35	.0003	.0005	.0009	.0015	.0025
36	.0002	.0003	.0006	.0010	.0018
37	.0001	.0002	.0004	.0007	.0013
38	.0001	.0002	.0003	.0005	.0009
39	.0001	.0001	.0002	.0004	.0006
40		.0001	.0001	.0003	.0005

χ^2- բաշխում (*շարունակություն*)

x \ *n*	16	17	18	19	20
4	0.9989	0.9995	0.9998	0.9999	1.0000
5	.9958	.9978	.9989	.9994	0.9997
6	.9881	.9932	.9962	.9979	.9989
7	.9733	.9836	.9901	.9942	.9967
8	.9489	.9666	.9786	.9867	.9919
9	.9134	.9403	.9597	.9735	.9829
10	.8666	.9036	.9319	.9530	.9682
12	.7440	.8001	.8472	.8856	.9161
14	.5987	.6671	.7291	.7837	.8305
16	.4530	.5238	.5926	.6573	.7166
18	.3239	.3888	.4557	.5224	.5874
20	.2202	.2742	.3328	.3946	.4579
22	.1432	.1847	.2320	.2843	.3405
24	.0895	.1194	.1550	.1962	.2424
26	.0540	.0745	.0998	.1302	.1658
28	.0316	.0449	.0621	.0834	.1094
30	.0180	.0264	.0375	.0518	.0699
31	.0135	.0200	.0288	.0404	.0552
32	.0100	.0151	.0220	.0313	.0433
33	.0074	.0113	.0167	.0240	.0337
34	.0054	.0084	.0126	.0184	.0261
35	.0040	.0062	.0095	.0140	.0201
36	.0029	.0046	.0071	.0106	.0154
37	.0021	.0034	.0052	.0080	.0117
38	.0015	.0025	.0039	.0059	.0089
39	.0011	.0018	.0029	.0044	.0067
40	.0008	.0013	.0021	.0033	.0050
41	.0006	.0009	.0015	.0024	.0037
42	.0004	.0007	.0011	.0018	.0028
43	.0003	.0005	.0008	.0013	.0020
44	.0002	.0003	.0006	.0009	.0015
45	.0001	.0002	.0004	.0007	.0011

4. *Ստյուդենտի* (t-) բաշխում: $t_\alpha(n)$ - կրիտիկական կետերը՝

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1:$$

α / n	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

5. *Ֆիշեր - Սնեդեկորի* (F-) բաշխում: $S_\alpha(m,\ n)$ - կրիտիկական կետերը՝

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} m^{m/2}n^{n/2} \int_{S_\alpha(m,n)}^{\infty} x^{m/2\ -\ 1}(n+mx)^{-\frac{m+n}{2}} = \alpha = 0.05:$$

m / n	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	241.9	243.9	245.9	248.0	254.0
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.40	19.41	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.93	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.32	3.07	2.98	2.91	2.85	2.77	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.08	2.00	1.92	1.84	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.00

$$S_\alpha(m,\ n) = S_{1-\alpha}^{-1}(n,\ m)$$

6. $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ միջակայքում *հավասարաչափ* բաշխված «պատահական թվեր»

0.6548	0.1176	0.7417	0.4685	0.0950	0.5804	0.7769	0.7445
.8012	.4356	.3517	.7270	.8015	.4531	.8223	.7445
.7435	.0998	.1777	.4027	.7214	.4323	.6002	.1019
.6991	.6268	.0366	.2522	.9148	.3693	.6872	.0337
.0989	.3205	.0514	.2256	.8514	.4642	.7567	.8893
.3407	.2768	.5036	.6973	.6170	.6581	.3398	.8556
.4557	.1824	.0635	.3034	.2614	.8679	.9074	.3982
.0205	.1656	.9268	.6657	.4818	.7305	.3852	.4789
.0532	.5470	.4890	.5535	.7548	.2846	.8287	.0975
.0652	.9647	.7835	.8083	.4282	.6093	.5203	.4476
.2210	.9405	.5860	.9709	.3433	.5050	.0739	.9823
.5072	.5682	.4829	.4052	.4201	.5277	.5678	.5198
.1374	.6700	.7818	.4754	.0610	.6871	.1778	.1749
.3676	.6679	.5190	.3647	.6493	.2960	.9110	.6242
.9182	.6089	.2893	.7856	.1368	.2347	.8341	.1329
.6847	.9276	.8646	.1628	.3554	.9475	.0899	.2345
.2694	.0368	.5870	.2973	.4135	.5314	.0333	.4045
.8515	.7479	.5432	.9792	.6575	.5760	.0408	.8119
.1110	.0020	.4012	.8607	.4697	.9664	.8494	.3937
.1650	.5344	.8440	.2195	.2565	.4365	.1770	.8293
.1009	.7325	.3376	.5201	.3586	.3467	.3548	.7607
.3754	.2048	.0564	.8947	.4296	.2480	.5240	.3732
.0842	.2689	.5319	.6450	.9303	.2320	.9025	.6047
.9901	.9025	.2909	.3767	.0715	.3831	.1311	.6509
.1280	.7999	.7080	.1573	.6147	.6403	.2366	.5353
.8095	.9091	.1739	.2927	.4945	.6606	.5747	.1756
.2063	.6104	.0200	.8229	.1665	.3106	.0108	.0582
.1595	.3347	.6435	.0803	.3606	.8526	.9776	.0289
.8867	.6743	.9704	.4362	.7659	.6357	.3321	.3575
.9895	.1168	.7712	.1717	.6833	.7379	.6457	.5376

7. *Նորմալ* բաշխված «պատահական թվեր»

− 0.486	0.856	− 0.491	− 1.983	− 1.787	− 0.261
− 0.256	− 0.212	0.219	0.779	− 0.105	− 0.357
0.065	0.415	− 0.169	0.313	− 1.339	1.827
1.147	− 0.121	1.096	0.181	1.041	0.535
− 0.199	− 0.246	1.239	− 2.574	0.279	− 2.056
1.237	1.046	− 0.508	− 1.630	− 0.146	− 0.392
− 1.384	0.360	− 0.992	− 0.116	− 1.698	− 2.832
− 0.959	0.424	0.969	− 1.141	− 1.041	0.362
0.731	1.377	0.983	− 1.330	1.620	− 1.040
0.717	− 0.873	− 1.096	− 1.396	1.047	0.089
− 1.805	− 2.008	− 1.633	0.542	0.250	− 0.166
− 1.186	1.180	1.114	0.882	1.265	− 0.202
0.658	− 1.141	1.151	− 1.210	− 0.927	0.425
− 0.439	0.358	− 1.939	0.891	− 0.227	0.602
− 1.399	− 0.230	0.385	− 0.649	− 0.577	0.237
0.032	0.079	0.199	0.208	− 1.083	− 0.219
0.151	− 0.376	0.159	0.272	− 0.313	0.084
0.290	− 0.902	2.273	0.606	0.606	− 0.747
0.873	− 0.437	0.041	− 0.307	0.121	0.790
− 0.289	0.513	− 1.132	− 2.098	0.921	0.145
− 0.291	1.122	1.119	0.004	0.768	0.079
− 2.828	− 0.439	− 0.792	− 1.275	0.375	− 1.656
0.247	1.291	0.063	− 1.793	− 0.513	− 0.344
− 0.584	0.541	0.484	− 0.986	0.292	− 0.521
0.446	− 1.661	1.045	− 1.363	1.026	2.990
0.034	− 2.127	0.665	0.084	− 0.880	− 1.473
0.234	− 0.656	0.340	− 0.086	− 0.158	− 0.851
− 0.736	1.041	0.008	0.427	− 0.831	0.210
− 1.206	− 0.899	0.110	− 0.528	− 0.813	1.266
− 0.491	− 1.114	1.297	− 1.433	− 1.345	− 0.574

Նորմալ բաշխված «պատահական թվեր» (*շարունակություն*)

− 1.334	1.278	− 0.568	− 0.109	− 0.515	− 0.566
− 0.287	− 0.144	− 0.254	0.574	− 0.451	− 1.181
0.161	− 0.886	− 0.921	− 0.509	1.410	− 0.518
− 1.346	0.193	− 1.202	0.394	− 1.045	0.843
1.250	− 0.199	− 0.288	1.810	1.378	0.584
2.923	0.500	0.630	− 0.537	0.782	0.060
− 1.190	− 0.318	0.375	− 1.941	0.247	− 0.491
0.192	− 0.432	− 1.420	0.489	− 1.711	− 1.186
0.942	1.045	− 0.151	− 0.243	− 0.430	− 0.762
1.216	0.733	− 0.309	0.531	0.416	− 1.541
0.499	− 0.431	1.705	1.164	0.424	− 0.444
0.665	− 0.135	− 0.145	− 0.498	0.593	0.658
0.754	− 0.732	− 0.066	1.006	0.862	− 0.885
0.298	1.049	1.810	2.885	0.235	− 0.628
1.456	2.040	− 0.124	0.196	− 0.853	0.402
0.593	0.993	− 0.106	0.116	0.484	− 1.272
− 1.127	− 1.407	− 1.579	− 1.616	1.458	1.262
− 0.142	− 0.504	0.532	1.381	0.022	− 0.281
− 0.023	− 0.463	− 0.809	− 0.394	− 0.538	1.707
0.777	0.833	0.410	− 0.349	− 1.094	0.580
0.241	− 0.957	− 1.885	0.371	− 2.830	− 0.238
0.022	0.525	− 0.255	− 0.702	0.953	− 0.869
− 0.853	− 1.865	− 0.423	− 0.973	− 1.016	− 1.726
− 0.501	− 0.273	0.857	− 0.465	− 1.691	0.417
0.439	− 0.035	− 0.260	0.120	− 9.558	0.056

8. *Բինոմական* բաշխում

$$\mathbb{B}(x;n,p) := \sum_{k=0}^{x-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$ **ֆունկցիայի արժեքները** ($x \in \mathbb{N}$):

$n = 5$

x \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
1	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
2	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
3	1.000	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
4	1.000	1.000	1.000	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

$n = 10$

x \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
1	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	1.000	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
7	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

$n = 15$

x \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
1	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	.998	.939	.832	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	1.000	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000

Բինոմական բաշխում (*շարունակություն*)

$n = 15$

p / x	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
9	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.987	.965	.794	.537	.140

$n = 20$

p / x	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
1	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.000	.1000	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.988	.878	.642	.182

9. *Պուասոնի* բաշխում

$\text{Ш}_{\lambda}(x) := e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\lambda^k}{k!}$ **ֆունկցիայի արժեքները** ($x \in \mathbb{N}$):

λ / x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
2	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
3	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
4		1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.945	.981
5				1.000	1.000	1.000	.999	.999	.989	.996
6							1.000	1.000	.998	.999
7									1.000	1.000

λ / x	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	15.0	20.0
1	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000	.000	.000	.000
2	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001	.000	.000	.000
3	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006	.003	.000	.000
4	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021	.010	.000	.000
5	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055	.029	.001	.000
6	.983	.916	.785	.616	.446	.301	.191	.116	.067	.003	.000
7	.995	.966	.889	.762	.606	.456	.313	.207	.130	.008	.000
8	.999	.988	.949	.867	.744	.599	.453	.324	.220	.018	.001
9	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456	.333	.037	.002
10		.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587	.458	.070	.005
11		1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706	.583	.118	.011
12			.999	.995	.980	.947	.888	.803	.697	.185	.021
13			1.000	.998	.991	.973	.936	.876	.792	.268	.039
14				.999	.996	.987	.966	.926	.864	.363	.066
15				1.000	.999	.994	.983	.959	.917	.466	.105
16					.999	.998	.992	.978	.951	.568	.157
17					1.000	.999	.996	.989	.973	.664	.221
18						1.000	.998	.995	.986	.749	.297
19							1.000	.999	.993	.819	.381
20								1.000	.997	.875	.470
21									.998	.917	.559
22									.999	.947	.644
23									1.000	.967	.721

Պուասոնի բաշխում (*շարունակություն*)

λ / x	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	15.0	20.0
24										.981	.787
25										.989	.843
26										.994	.888
27										.997	.922
28										.998	.948
29										.999	.966
30										1.000	.978
31											.987
32											.992
33											.995
34											.997
35											.999
36											.999
37											1.000

10. *Էռլանգի* բաշխում

$$\mathbb{F}_{1,n}(x) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$$ **ֆունկցիայի արժեքները** $(1 \leq n \leq 10)$:

x \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.632	.264	.080	.019	.004	.001	.000	.000	.000	.000
2	.865	.594	.323	.143	.053	.017	.005	.001	.000	.000
3	.950	.801	.577	.353	.185	.084	.034	.012	.004	.001
4	.982	.908	.762	.567	.371	.215	.111	.051	.021	.008
5	.993	.960	.875	.735	.560	.384	.238	.133	.068	.032
6	.998	.983	.938	.849	.715	.554	.394	.256	.153	.084
7	.999	.993	.970	.918	.827	.699	.550	.401	.271	.170
8	1.000	.997	.986	.958	.900	.809	.687	.547	.407	.283
9		.999	.994	.979	.945	.884	.793	.676	.544	.413
10		1.000	.997	.990	.971	.933	.870	.780	.667	.542
11			.999	.995	.985	.962	.921	.857	.768	.659
12			1.000	.998	.992	.980	.954	.911	.845	.758
13				.999	.996	.989	.974	.946	.900	.834
14				1.000	.998	.994	.986	.968	.938	.891
15					.999	.997	.992	.982	.963	.930

11. *Կոլմոգորովի* բաշխում

$$\mathbb{K}(x) := \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \, e^{-2k^2x^2}\right) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$ **ֆունկցիայի արժեքները**:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.3	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0013	.0019
.4	.0028	.0040	.0055	.0074	.0097	.0126	.0160	.0200	.0247	.0300
.5	.0361	.0428	.0503	.0585	.0675	.0772	.0876	.0987	.1104	.1228
.6	.1357	.1492	.1633	.1778	.1927	.2080	.2236	.2396	.2558	.2722
.7	.2888	.3055	.3223	.3391	.3560	.3728	.3896	.4064	.4230	.4395
.8	.4559	.4720	.4880	.5038	.5194	.5347	.5498	.5646	.5791	.5933
.9	.6073	.6209	.6343	.6474	.6601	.6725	.6846	.6965	.7079	.7191
1.0	.7300	.7406	.7508	.7608	.7704	.7798	.7889	.7976	.8061	.8143
.1	.8223	.8300	.8374	.8445	.8514	.8580	.8644	.8706	.8766	.8823
.2	.8878	.8930	.8981	.9030	.9077	.9121	.9164	.9206	.9245	.9283
.3	.9319	.9354	.9387	.9419	.9449	.9478	.9505	.9531	.9557	.9580
.4	.9603	.9625	.9646	.9665	.9684	.9702	.9719	.9735	.9750	.9764
.5	.9778	.9791	.9803	.9815	.9826	.9836	.9846	.9855	.9864	.9873
.6	.9881	.9888	.9895	.9902	.9908	.9914	.9919	.9924	.9929	.9934
.7	.9938	.9942	.9946	.9950	.9953	.9956	.9959	.9962	.9965	.9967
.8	.9969	.9972	.9974	.9975	.9977	.9979	.9980	.9982	.9983	.9984
.9	.9985	.9986	.9987	.9988	.9989	.9990	.9991	.9992	.9992	.9993
2.0	.9993	.9994	.9994	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9997	.9997
.1	.9997	.9997	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9999	.9999
.2	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

12. *Կոլմոգորովի* բաշխում: $d_\alpha(n)$ - կրիտիկական կետերը՝

$$\mathbb{P}\left(D_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{F}_n(x) - \mathbb{F}(x)| \geq d_\alpha(n)\right) = \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1:$$

α / n	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	α / n	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950	**31**	0.1873	0.2141	0.2379	0.2660	0.2853
2	.6838	.7764	.8419	.9000	.9293	**32**	.1845	.2109	.2342	.2619	.2809
3	.5648	.6360	.7076	.7846	.8290	**33**	.1817	.2077	.2308	.2580	.2768
4	.4927	.5652	.6239	.6889	.7342	**34**	.1791	.2047	.2274	.2543	.2728
5	.4470	.5095	.5633	.6272	.6685	**35**	.1766	.2019	.2243	.2507	.2690
6	.4104	.4680	.5193	.5774	.6166	**36**	.1742	.1991	.2212	.2473	.2653
7	.3815	.4361	.4834	.5384	.5758	**37**	.1719	.1965	.2183	.2440	.2618
8	.3583	.4096	.4543	.5065	.5418	**38**	.1697	.1939	.2154	.2409	.2584
9	.3391	.3875	.4300	.4796	.5133	**39**	.1675	.1915	.2127	.2379	.2552
10	.3226	.3687	.4093	.4566	.4889	**40**	.1655	.1891	.2101	.2349	.2521
11	.3083	.3524	.3912	.4367	.4677	**41**	.1635	.1869	.2076	.2321	.2490
12	.2958	.3382	.3754	.4192	.4491	**42**	.1616	.1847	.2052	.2294	.2461
13	.2847	.3255	.3614	.4036	.4325	**43**	.1597	.1826	.2028	.2268	.2433
14	.2748	.3142	.3489	.3897	.4176	**44**	.1580	.1805	.2006	.2243	.2406
15	.2659	.3040	.3376	.3771	.4042	**45**	.1562	.1786	.1984	.2218	.2380
16	.2578	.2947	.3273	.3657	.3920	**46**	.1546	.1767	.1963	.2194	.2354
17	.2504	.2863	.3180	.3553	.3809	**47**	.1530	.1748	.1942	.2172	.2330
18	.2436	.2785	.3094	.3457	.3706	**48**	.1514	.1730	.1922	.2149	.2306
19	.2374	.2714	.3014	.3369	.3612	**49**	.1499	.1713	.1903	.2128	.2283
20	.2316	.2647	.2941	.3287	.3524	**50**	.1484	.1696	.1884	.2107	.2260
21	.2262	.2586	.2872	.3210	.3443	**51**	.1470	.1680	.1866	.2086	.2239
22	.2212	.2528	.2809	.3139	.3367	**52**	.1456	.1664	.1848	.2067	.2217
23	.2165	.2475	.2749	.3073	.3295	**53**	.1442	.1648	.1831	.2048	.2197
24	.2121	.2424	.2693	.3010	.3229	**54**	.1429	.1633	.1814	.2029	.2177
25	.2079	.2377	.2640	.2952	.3166	**55**	.1416	.1619	.1798	.2011	.2157
26	.2040	.2332	.2591	.2896	.3106	**56**	.1404	.1604	.1782	.1993	.2138
27	.2003	.2290	.2544	.2844	.3050	**57**	.1392	.1591	.1767	.1976	.2120
28	.1968	.2250	.2499	.2794	.2997	**58**	.1380	.1577	.1752	.1959	.2102
29	.1935	.2212	.2457	.2747	.2947	**59**	.1369	.1564	.1737	.1943	.2084
30	.1903	.2176	.2417	.2702	.2899	**60**	.1357	.1551	.1723	.1927	.2067

Կոլմոգորովի բաշխում: $d_\alpha(n)$ – կրիտիկական կետերը

(*շարունակություն*)

α / n	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	α / n	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
61	0.1346	0.1539	0.1709	0.1911	0.2051	**81**	0.1172	0.1339	0.1487	0.1663	0.1784
62	.1336	.1526	.1696	.1896	.2034	**82**	.1165	.1331	.1478	.1653	.1773
63	.1325	.1514	.1682	.1881	.2018	**83**	.1158	.1323	.1469	.1643	.1763
64	.1315	.1503	.1669	.1867	.2003	**84**	.1151	.1315	.1461	.1633	.1752
65	.1305	.1491	.1657	.1853	.1988	**85**	.1144	.1307	.1452	.1624	.1742
66	.1295	.1480	.1644	.1839	.1973	**86**	.1138	.1300	.1444	.1614	.1732
67	.1286	.1469	.1632	.1825	.1958	**87**	.1131	.1292	.1436	.1605	.1722
68	.1277	.1459	.1620	.1812	.1944	**88**	.1125	.1285	.1427	.1596	.1713
69	.1268	.1448	.1609	.1799	.1930	**89**	.1119	.1278	.1420	.1587	.1703
70	.1259	.1438	.1598	.1786	.1917	**90**	.1113	.1271	.1412	.1579	.1694
71	.1250	.1428	.1586	.1774	.1903	**91**	.1106	.1264	.1404	.1570	.1685
72	.1241	.1418	.1576	.1762	.1890	**92**	.1101	.1257	.1397	.1562	.1676
73	.1233	.1409	.1565	.1750	.1878	**93**	.1095	.1251	.1389	.1553	.1667
74	.1225	.1399	.1554	.1738	.1865	**94**	.1089	.1244	.1382	.1545	.1658
75	.1217	.1390	.1544	.1727	.1853	**95**	.1083	.1238	.1375	.1537	.1649
76	.1209	.1381	.1534	.1716	.1841	**96**	.1078	.1231	.1368	.1529	.1641
77	.1201	.1372	.1524	.1705	.1829	**97**	.1072	.1225	.1361	.1521	.1632
78	.1194	.1364	.1515	.1694	.1817	**98**	.1067	.1219	.1354	.1514	.1624
79	.1186	.1355	.1505	.1683	.1806	**99**	.1062	.1213	.1347	.1506	.1616
80	.1179	.1347	.1496	.1673	.1795	**100**	.1056	.1207	.1340	.1499	.1608

13. *Սպիրմենի* r_S^* ռանգային կորելյացիայի գործակից: $s_\alpha(n)$ – կրիտիկական կետերը՝

$$\mathbb{P}\left(r_S^* = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(i-T_i)^2 \geq s_\alpha(n)\right) = \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1:$$

α / n	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
4	0.8000	0.8000				
5	.7000	.8000	.9000	.9000		
6	.6000	.7714	.8286	.8857	.9429	
7	.5357	.6786	.7450	.8571	.8929	.9643
8	.5000	.6190	.7143	.8095	.8571	.9286
9	.4667	.5833	.6833	.7667	.8167	.9000
10	.4424	.5515	.6364	.7333	.7818	.8667
11	.4182	.5273	.6091	.7000	.7455	.8364
12	.3986	.4965	.5804	.6713	.7273	.8182
13	.3791	.4780	.5549	.6429	.6978	.7912
14	.3626	.4593	.5341	.6220	.6747	.7670
15	.3500	.4429	.5179	.6000	.6536	.7464
16	.3382	.4265	.5000	.5824	.6324	.7265
17	.3260	.4118	.4853	.5637	.6152	.7083
18	.3148	.3994	.4716	.5480	.5975	.6904
19	.3070	.3895	.4579	.5333	.5825	.6737
20	.2977	.3789	.4451	.5203	.5684	.6586
21	.2909	.3688	.4351	.5078	.5545	.6455
22	.2829	.3597	.4241	.4963	.5426	.6318
23	.2767	.3518	.4150	.4852	.5306	.6186
24	.2704	.3435	.4061	.4748	.5200	.6070
25	.2646	.3362	.3977	.4654	.5100	.5962
26	.2588	.3299	.3894	.4564	.5002	.5856
27	.2540	.3236	.3822	.4481	.4915	.5757
28	.2490	.3175	.3749	.4401	.4828	.5660
29	.2443	.3113	.3685	.4320	.4744	.5567
30	.2400	.3059	.3620	.4251	.4665	.5479

14. *Քենդալի* r_K^* ռանգային կոռելյացիայի գործակից։ $k_\alpha(n)$ – կրիտիկական կետերը՝

$$\mathbb{P}\left(r_K^* = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)} \geq k_\alpha(n)\right) = \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1:$$

α / n	0.05	0.025	0.01	0.005
4	1.000	1.000	1.000	1.000
5	.800	1.000	1.000	1.000
6	.733	.867	.867	1.000
7	.619	.714	.810	.905
8	.571	.643	.714	.786
9	.500	.556	.667	.722
10	.467	.551	.600	.644

Հավելված 3: (*)- ով խնդիրների լուծումներ

§ 1. Կարգային վիճականիներ

Խնդիր 8*.

Համաձայն խնդիր 7 – ի

$$\mathbb{F}_k(x) := \mathbb{P}\left(X_{(k)} < x\right) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i\, x^i (1-x)^{n-i} :$$

Դիֆերենցելով ձախ և աջ մասերն ըստ x - ի այստեղից՝ կստանանք

$$f_k(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\; i x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \sum_{i=k}^{n-1} \frac{n!\,(n-i)}{i!\,(n-i)!}\; x^i (1-x)^{n-i-1} = \sum_{i=k}^{n} n C_{n-1}^{i-1}\, x^{i-1}(1-x)^{(n-1)-(i-1)} -$$

$$- \sum_{i=k}^{n-1} n C_{n-1}^{i}\, x^i (1-x)^{(n-1)-i} = n C_{n-1}^{k-1}\, x^{k-1}(1-x)^{n-k} : \quad \blacksquare$$

Խնդիր 9*.

ա) Համաձայն խնդիր 7 - ի՝

$$\mathbb{F}_k(x) = \sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}_n(m) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m \left(\mathbb{F}(x)\right)^m \left(1-\mathbb{F}(x)\right)^{n-m} :$$

Մյուս կողմից $\mathrm{B}(\mathbb{F}(x);\; k, n-k+1) := \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \displaystyle\int_0^{\mathbb{F}(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$ ինտեգրալը (*բետա բաշխում* ունեցող պատահական մեծության $\mathrm{B}(x; k\,,\; n-k+1)$ բաշխման ֆունկցիայի արժեքը, երբ $x := \mathbb{F}(x)$) մասերով ինտեգրման բանաձևի օգնությամբ կարելի է բերել հետևյալ *անդրադարձ* (*ռեկուրենտ*) տեսքի $(k = 1, \dots, n)$՝

$$\mathrm{B}(\mathbb{F}(x);\; k\,,\; n-k+1) = k\, C_n^k\, \mathcal{I}_k = C_n^k \left(\mathbb{F}(x)\right)^k \left(1-\mathbb{F}(x)\right)^{n-k} + (k+1) C_n^{k+1}\, \mathcal{I}_{k+1},$$

որտեղ $\mathcal{I}_k := \displaystyle\int_0^{\mathbb{F}(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$, $\mathcal{I}_{n+1} := 0$: Այնպես, որ

$$\mathbb{F}_k(x) = \sum_{m=k}^{n-1} \left[m C_n^m\, \mathcal{I}_m - (m+1) C_n^{m+1} \mathcal{I}_{m+1}\right] + \left(\mathbb{F}(x)\right)^n = k C_n^k\, \mathcal{I}_k = \mathrm{B}(\mathbb{F}(x);\; k\,, n-k+1):$$

բ) Նշանակենք $Y_k := \mathbb{F}(X_k)$, այնպես, որ $Y_{(k)} = \mathbb{F}\left(X_{(k)}\right)$: Պարզ է, որ $Y_{(1)} \le \cdots \le Y_{(k)} \le \cdots \le Y_{(n)}$ և նկատի ունենալով $Y_k \sim \mathbb{U}(0.1)$ պայմանը ու ա) կետը՝ կստանանք $Y_{(k)} \sim \mathbb{B}\mathrm{et}\,(k, n-k+1)$:

գ) Ածանցելով

$$\mathbb{F}_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_0^{\mathbb{F}(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$$

ներկայացման երկու մասերն ըստ x - ի՝ կստանանք

$$f_k(x) = n C_{n-1}^{k-1}\, (\mathbb{F}(x))^{k-1}\, (1-\mathbb{F}(x))^{n-k} f(x): \quad \blacksquare$$

Խնդիր 14*.

ա) Քանի որ $X = a + (b-a)X'$, որտեղ $X' \sim \mathbb{U}(0,1)$, ապա ներկայացնենք $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ նմուշային լայնքը $R_n = (b-a)\left(X'_{(n)} - X'_{(1)}\right)$ տեսքով: Այստեղ $X'_{(1)}$ - ը և $X'_{(n)}$ - ը՝ X' պատահական մեծությանը համապատասխանող $(X')^n \sim \mathbb{U}(0,1)$ նմուշի *եզրային վիճականիներն* են: Այսպիսով՝ $R_n = (b-a)R'_n$, որտեղ $R'_n = X'_{(n)} - X'_{(1)}$:

Գտնենք $R'_n = X'_{(n)} - X'_{(1)}$ *նմուշային լայնքի* բաշխման ֆունկցիան (տես խնդիր 5 - ը)

$$\mathbb{F}_{R'_n}(z) = \mathbb{P}\,(R'_n < z) = \int\limits_{\substack{y-x<z \\ 0<x<y<1}} d\,\mathbb{F}_{1,n}(x,y) = n(n-1)\int_0^{1-z} dx \int_x^{x+z} (y-x)^{n-2}dy +$$

$$+\, n(n-1)\int_{1-z}^{1} dx \int_x^1 (y-x)^{n-2}dy = n\int_0^{1-z} x^{n-1}dx + n\int_{1-z}^{1}(1-x)^{n-1}dx = nz^{n-1} - (n-1)z^n \,:$$

Այստեղից հետևում է, որ $f_{R'_n}(z) = n(n-1)z^{n-2}(1-z)$, այսինքն՝ $R'_n \sim \mathbb{B}\mathrm{et}\,(n-1,2)$:
Այսպիսով՝

$$\mathbb{E}R'_n = \frac{n-1}{n+1}\,,\quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(R'_n) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}\,:$$

Այժմ օգտվելով խնդիր 6 - ից՝ կստանանք

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X'_{(1)}\,,\,X'_{(n)}\right) = \frac{1}{2}\left[\,\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X'_{(1)}\right) + \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X'_{(n)}\right) - \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X'_{(n)} - X'_{(1)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2n}{(n+1)^2(n+2)} - \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}\right] = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\,:$$

բ) Համաձայն խնդիր 6 - ի՝ ունենք՝

$$\mathbb{E}M_n = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}X_{(1)} + \mathbb{E}X_{(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{na+b}{n+1} + \frac{a+nb}{n+1}\right) = \frac{1}{2}(a+b),$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(M_n) = \frac{1}{4}\left(\,\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_{(1)}\right) + \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_{(n)}\right) + 2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X_{(1)}\,,\,X_{(n)}\right)\right) = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}\,: \qquad \blacksquare$$

Խնդիր 15*.

Համաձայն խնդիր 9*- ի $Z^n_{(m)} := n\,\mathbb{F}\left(X_{(m)}\right)$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան՝ կլինի

$$\mathbb{F}^n_m(x) := \mathbb{P}\left(\mathbb{F}\left(X_{(m)}\right) < \frac{x}{n}\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{F}\left(X_{(m)}\right) < \frac{x}{n}\right) = \mathbb{B}_{m,n-m+1}\left(\frac{x}{n}\right),$$

որտեղ $\mathbb{B}_{a,b}(x)$ - ը՝ $\mathbb{B}\mathrm{et}\,(a,b)$ *բետա բաշխման* բաշխման ֆունկցիան է: Այստեղից $f^n_m(x) := [\mathbb{F}^n_m(x)]'$ խտության ֆունկցիայի համար՝ կստանանք

$$f^n_m(x) = \frac{1}{n}\,\beta_{m.n-m+1}\left(\frac{x}{n}\right) = C^{m-1}_{n-1}\left(\frac{x}{n}\right)^{m-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-m},$$

որտեղ $\beta_{a,b}(x)$ - ը՝ $\mathbb{B}et\,(a,b)$ *բաշխման* խտության ֆունկցիան է:
Այժմ օգտվելով *Պուասոնի թեորեմից* (տես [2, Հ. 1.3]) հաստատուն $x \in \mathbb{R}$ և $m \in \mathbb{N}$ համար՝ կստանանք

$$f^n_m(x) \to \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,e^{-x} = p_x(m-1), \qquad n \to \infty,$$

որտեղ $p_x(m-1) := \mathbb{P}_x(Y = m-1)$, $Y \sim \mathbb{\Pi}(x)$ - ը՝ $\lambda = x$ ինտենսիվությունով *Պուասոնի* պատահական մեծություն է: Նկատենք, որ $p_x(m-1) = \gamma_{1,m}(x)$, որտեղ $\gamma_{1,m}(x)$ - ը՝ $\Gamma(1,m)$ *գամմա բաշխման* խտության ֆունկցիան է: Այսպիսով՝

$$Z_{(m)}^n := n\,\mathbb{F}\big(X_{(m)}\big) \xrightarrow{d} \Gamma(1,\ m), \quad n \to \infty:$$

Նման ձևով ապացուցվում է

$$W_{(n-k+1)}^n := n\left[1 - \mathbb{F}\big(X_{(n-k+1)}\big)\right] \xrightarrow{d} \Gamma(1,\ k), \quad n \to \infty$$

զուգամիտությունը: ■

§ 3. Նմուշային բնութագրիչներ

Խնդիր 36*.

Օգտվենք թեորեմ 4.61 - ից (տե՛ս [2]), որտեղ

$$G_h(F) := V = \frac{\mu_2^{1/2}}{m} = h\left(\int g_1(x)dF(x), \int g_2(x)dF(x)\right),$$

$$g_1(x) = (x-m)^2, \quad g_2(x) = x, \quad h(x_1, x_2) = \frac{x_1^{1/2}}{x_2}, \quad a = (\mu_2, m):$$

Այստեղից՝ կստանանք

$$h_1'(a) = \frac{\partial h(a)}{\partial x_1} = \frac{1}{2m\sqrt{\mu_2}}, \quad h_2'(a) = \frac{\partial h(a)}{\partial x_2} = -\frac{\mu_2^{1/2}}{m^2}:$$

Մյուս կողմից՝ ունենք

$$\sigma_{11} := \mathbb{V}\mathrm{ar}\,\big(g_1(X)\big) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X-m)^2 = \mu_4 - \mu_2^2, \quad \sigma_{12} := \mathbb{E}((X-m)^2 - \mu_2)(X-m) = \mu_3,$$

$$\sigma_{22} := \mathbb{V}\mathrm{ar}\,\big(g_2(X)\big) = \mu_2:$$

Այնպես, որ $\Big(h'(a) = \big(h_1'(a),\ h_2'(a)\big)\Big)$

$$\overline{\sigma^2} = h'(a)\,\Sigma(g)\,[h'(a)]^T = [h_1'(a)]^2\sigma_{11} + 2h_1'(a)h_2'(a) + [h_2'(a)]^2\sigma_{22} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4m^2\mu_2} - \frac{\mu_3}{m^3} + \frac{\mu_2^2}{m^4}:$$

Այսպիսով համաձայն թեորեմ 4.61 - ի (տե՛ս [2])՝ ունենք

$$\sqrt{n}\,(V_n^* - V) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\big(0,\ \overline{\sigma^2}\big), \quad n \to \infty,$$

որտեղ $V_n^* = G_h(\mathbb{F}_n^*) = \dfrac{S}{\overline{X^n}}$ - ը՝ նմուշային վարիացիայի գործակիցն է: ■

Խնդիր 48*.

Ներկայացնենք՝

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = n\,\frac{\sum(x_i - \overline{x^n})^4}{(\sum(x_i - \overline{x^n})^2)^2} - 3 = n\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \overline{x^n})^4}{(\sum(x_i - \overline{x^n})^2)^2} - 3,$$

որտեղից՝

$$|g_2| \le n\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \overline{x^n})^2}{\sum(x_i - \overline{x^n})^2}\right)^2 < n:$$

Այստեղից, համաձայն թեորեմ 4.92 - ի (տե՛ս [2])՝ կստանանք՝

$$\mathbb{E}g_2 = \gamma_2 + O(n^{-1}), \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(g_2) = C/n + O\big(n^{-3/2}\big): \qquad ■$$

Խնդիր 49*.

Գնահատենք՝

$$V_n^2 = \frac{S_n^2}{(\overline{x^n})^2} = \frac{\sum (x_i - \overline{x^n})^2}{n(\overline{x^n})^2} = n\,\frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i)^2} - 1 = n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sum x_i}\right)^2 - 1 < n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sum x_i}\right)^2 = n,$$

որտեղից $V_n < \sqrt{n}$: Այստեղից, ըստ թեորեմ 4.92 - ի (տե՛ս [2])՝ կստանանք

$$\mathbb{E}V_n^* = V + O(n^{-1}), \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(V_n^*) = O(n^{-1}),$$

որտեղ $V = \frac{\sigma}{m}$ - ը՝ տեսական *փոփոխականության* (*վարիացիայի*) գործակիցն է: ■

Խնդիր 50*.

Ներկայացնենք $(m_2 = S_n^2, \ \mu_2 = \sigma^2)$՝

$$\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2} = \frac{m_2 - \mu_2}{2\sqrt{\mu_2}}\,\frac{2\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{m_2} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{m_2 - \mu_2}{2\sqrt{\mu_2}}\left(1 - \frac{\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{m_2} + \sqrt{\mu_2}}\right) =$$

$$= \frac{m_2 - \mu_2}{2\sqrt{\mu_2}} - \frac{(m_2 - \mu_2)^2}{2\sqrt{\mu_2}\,(\sqrt{m_2} + \sqrt{\mu_2})^2} :$$

Որտեղից՝

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\mu_2}}\,\mathbb{E}(m_2 - \mu_2) - \frac{1}{2\sqrt{\mu_2}}\,\mathbb{E}\frac{(m_2 - \mu_2)^2}{(\sqrt{m_2} + \sqrt{\mu_2})^2} ,$$

այստեղ $\mathbb{E}(m_2 - \mu_2) = -\frac{1}{n}\mu_2 = O(1/n)$, իսկ $\frac{1}{2\sqrt{\mu_2}}\,\frac{(m_2 - \mu_2)^2}{(\sqrt{m_2} + \sqrt{\mu_2})^2} \le \frac{(m_2 - \mu_2)^2}{2\mu_2^{3/2}}$:

Այժմ հաշվի առնելով (տես [2 , դիտողություն 4.90])

$$\mathbb{E}(m_2 - \mu_2)^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(m_2) = \frac{1}{n}(\mu_4 - \mu_2^2) + O(n^{-2})$$

ներկայացումը՝ կստանանք $\mathbb{E}(\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}) = O(n^{-1})$:

Մյուս կողմից՝ ունենք

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}\right) = \mathbb{E}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}\right)^2 - \left[\mathbb{E}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}\right)\right]^2,$$

որտեղ

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}\right)^2 = \frac{1}{4\mu_2}\,\mathbb{E}(m_2 - \mu_2)^2 - \frac{1}{2\mu_2}\,\mathbb{E}\frac{(m_2 - \mu_2)^3}{(\sqrt{m_2} + \sqrt{\mu_2})^2} + \frac{1}{4\mu_2}\,\mathbb{E}\frac{(m_2 - \mu_2)^4}{(\sqrt{m_2} + \sqrt{\mu_2})^4} =$$

$$= \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4n\mu_2} + O(n^{-2}),$$

այնպես, որ

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sqrt{m_2}\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{\mu_2}\right) = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4n\mu_2} + O(n^{-2}) :$$ ■

§ 4. Կետային գնահատականներ և դրանց հատկությունները

Խնդիր 74*.

Համաձայն խնդիր 10 - ի՝ ունենք

$$\mathbb{E}X_{(1)} = \theta_1 + \frac{1}{n\theta_2}\ , \quad \text{իսկ} \quad \mathbb{E}\overline{X^n} = \mathbb{E}X_1 = \theta_1 + \frac{1}{\theta_2}\ ,$$

այնպես, որ

$$\mathbb{E}(\theta_2^{-1})^* = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}\overline{X^n} - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}X_{(1)} = \frac{1}{\theta_2}\ , \qquad \mathbb{E}\theta_1^* = \mathbb{E}X_{(1)} - \frac{1}{n}\ \mathbb{E}(\theta_2^{-1})^* = \theta_1:$$

Մյուս կողմից, քանի որ

$$\frac{n}{n-1}\mathbb{E}X_{(1)} = \frac{n}{n-1}\left(\theta_1 + \frac{1}{n\theta_2}\right) \to \theta_1,$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{n}{n-1}\ X_{(1)}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \frac{1}{n^2\theta_2^2} = \frac{1}{(n-1)^2\theta_2^2} \to 0,$$

երբ $n \to \infty$, ապա

$$\frac{n}{n-1}\ X_{(1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_1 \quad \text{և} \quad \frac{1}{n-1}\ \overline{X^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1 = \theta_1 + \frac{1}{\theta_2}\right):$$

այնպես, որ $\theta_1^* \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_1$: Բացի այդ՝

$$(\theta_2^{-1})^* := \frac{n}{n-1}\overline{X^n} - \frac{n}{n-1}\ X_{(1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_1 + \frac{1}{\theta_2} - \theta_1 = \frac{1}{\theta_2}: \qquad \blacksquare$$

Խնդիր 75*.

X_i պատահական մեծություններն անկախ են և ունեն *հավասարաչափ դիսկրետ բաշխում*՝

$$\mathbb{P}\,(X_i = k) = N^{-1}, \quad i = 1,\ldots,n\ , \quad k = 1,\ldots,N\ ,$$

որտեղից՝

$$\mathbb{F}_{X_{(n)}}(m) = \mathbb{P}\big(X_{(n)} < m\big) = \left(\tfrac{m-1}{N}\right)^n, \ \ \mathbb{P}\left(X_{(n)} = m\right) = \mathbb{F}_{X_{(n)}}(m+1) - \mathbb{F}_{X_{(n)}}(m) = N^{-n}[m^n - (m-1)^n],$$

$m = 1,\ldots,N$, այնպես, որ

$$\mathbb{E}\ T\big(X_{(n)}\big) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1-(1-m^{-1})^{n+1}}{1-(1-m^{-1})^n}\ m\, N^{-n}[m^n - (m-1)^n] =$$

$$= N^{-n}\sum_{m=1}^{N} \frac{1-(1-m^{-1})^{n+1}}{1-(1-m^{-1})^n}\ m^{n+1}[1-(1-m^{-1})^n] = N^{-n}\sum_{m=1}^{N}[m^{n+1} - (m-1)^{n+1}] = N^{-n}N^{n+1} = N\ : \ \blacksquare$$

Խնդիր 76*.

Հեշտ է տեսնել, որ $X_{(n)}$ կարգային վիճականին ունի հետևյալ բաշխումը՝

$$\mathbb{P}\left(X_{(n)} = m\right) = \mathbb{P}\left(X_{(n)} = m,\ \ m \ge n\right) = \mathbb{P}\,(X_i = k, \quad i = 1,\ldots,n-1, \quad k = 1,\ldots,m-1) = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_N^n}\ ,$$

որտեղ $m = n, n+1,\ldots,N$, այնպես, որ

$$\mathbb{E}\ X_{(n)} = \frac{n}{C_N^n}\sum_{m=n}^{N} C_m^n = \frac{n}{C_N^n}\ C_{N+1}^{n+1} = n\ \frac{N+1}{n+1}:$$

Այստեղից՝

$$\mathbb{E}\ S\big(X_{(n)}\big) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\mathbb{E}\ X_{(n)} - 1 = \frac{n+1}{n}\ n\ \frac{N+1}{n+1} - 1 = N: \qquad \blacksquare$$

§ 6. Ճշմարտանմանության մաքսիմումի մեթոդ

Խնդիր 110*.

Դիտարկենք $X(\omega) := \sum_{i=1}^{N} i\, \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$ պատահական մեծությունը, որտեղ $A_1, \dots, A_N$ - ը լրիվ խումբ կազմող պատահույթներ են: X պատահական մեծության բաշխման օրենքն է՝

$$p_\theta(i) := \mathbb{P}_\theta(X = i) := \theta_i = \prod_{j=1}^{N} \theta_j^{\mathbb{1}_{\{j\}}(i)} = \prod_{j=1}^{N-1} \theta_j^{\mathbb{1}_{\{j\}}(i)} \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k\right)^{\mathbb{1}_{\{N\}}(i)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $0 < \theta_i < 1$, $\sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1$:

$X^n = (X_1, \dots, X_n)$ նմուշին համապատասխանող ճշմարտանմանության ֆունկցիան է՝

$$p_\theta(X^n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{N-1} \theta_j^{\mathbb{1}_{\{j\}}(X_i)} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k\right)^{\mathbb{1}_{\{N\}}(X_i)} = \prod_{j=1}^{N-1} \theta_j^{\nu_j^*} \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k\right)^{\nu_N^*},$$

որտեղ $\nu_j^* := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(X_i)$:

Լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝ կլինի

$$L_\theta(X^n) := \ln p_\theta(X^n) = \sum_{j=1}^{N-1} \nu_j^* \ln \theta_j + \nu_N^* \ln\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k\right):$$

Այստեղից՝ կստանանք ճշմարտանմանության հավասարումների համակարգը

$$\frac{\partial L_\theta(X^n)}{\partial \theta_j} = \frac{\nu_j^*}{\theta_j} - \frac{\nu_N^*}{\theta_N} = 0, \qquad j = 1, \dots, N-1,$$

որտեղից՝ ունենք

$$\nu_j^*\, \theta_N = \nu_N^*\, \theta_j, \qquad j = 1, \dots, N-1:$$

Այնուհետև՝ կստանանք

$$\left(\sum_{j=1}^{N-1} \nu_j^*\right) \theta_N = \left(\sum_{j=1}^{N-1} \theta_j\right) \nu_N^*,$$

որտեղից՝

$$(n - \nu_N^*)\, \theta_N = (1 - \theta_N)\, \nu_N^* \quad \text{և} \quad \hat{\theta}_N = \frac{\nu_N^*}{n}:$$

Մյուս կողմից՝ ունենք

$$\hat{\theta}_j = \frac{\nu_j^*}{\nu_N^*} \cdot \hat{\theta}_N = \frac{\nu_j^*}{n}, \qquad j = 1, \dots, N-1:$$

Այժմ ստուգենք անշեղությունը՝

$$\mathbb{E}\hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{j\}}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(X_i = j) = \theta_j:$$

Նմանապես՝ $\mathbb{E}\hat{\theta}_N = \theta_N$:

$\hat{\theta}_j$ և $\hat{\theta}_N$ գնահատականների ունակությունը հետևում է *մեծ թվերի օրենքից*: ■

Խնդիր 111*.

Նշանակենք $X^{m_2} = \left(X_1, \dots, X_{m_2}\right)$ - ով փորձին համապատասխանող նմուշը, որտեղ $X_i = 1$, եթե i - - րդ ձուկը «նշված» է և $X_i = 0$՝ հակառակ դեպքում:

Դիտարկենք $\mu := \sum_{i=1}^{m_2} X_i$ վիճականին, որը ցույց է տալիս «նշված» ձկների թիվը X^{m_2} նմուշում: Ճշմարտանմանության ֆունկցիան X^{m_2} նմուշի համար՝ կլինի

$$\mathbb{P}_N\left(\mu = k\right) = \frac{C_{m_1}^{k} C_{N-m_1}^{m_2-k}}{C_N^{m_2}} := g(N)\,, \quad k = 0, \dots, m_2\text{` } \text{հիպերերկրաչափական բաշխում:}$$

ՃՄ գնահատականը N - ի այն արժեքն է, որը մաքսիմալացնում է $\mathbb{P}_N\left(\mu = k\right)$ ֆունկցիան: Այդ արժեքը պետք է բավարարի

$$\frac{g(N)}{g(N-1)} \geq 1 \quad \text{և} \quad \frac{g(N)}{g(N+1)} \geq 1$$

պայմանները: Այստեղից կստանանք հետևյալ համարժեք պայմաններ՝

$$N \leq \frac{m_1 m_2}{k} \quad \text{և} \quad N \geq \frac{m_1 m_2}{k} - 1\ :$$

Եթե $\frac{m_1 m_2}{k} \notin \mathbb{N}$, ապա $N_0 := \left[\frac{m_1 m_2}{k}\right]$ - ն կլինի $g(N)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետը, իսկ եթե $N_0 := \frac{m_1 m_2}{k} \in$ $\in \mathbb{N}$, ապա $g(N)$ ֆունկցիան կունենա երկու մաքսիմումի կետ՝ $N_0 - 1$ և N_0 : Այսպիսով՝ որպես *ՃՄ գնահատական* $\theta = N$ պարամետրի համար կարելի է վերցնել $\hat{\theta} := \left[\frac{m_1\, m_2}{k}\right]$ վիճականին ($[\cdot]$ ՝ թվի ամբողջ մասն է): ■

Խնդիր 112*.

Նշանակենք $X^n = (X_1, \dots, X_n)$- ով փորձին համապատասխանող նմուշը, որտեղ $X_i = 1$, եթե i - րդ ստուգվող արտադրանքը անորակ է և $X_i = 0$՝ հակառակ դեպքում:

Դիտարկենք $d(X) := \sum_{i=1}^{n} X_i$ վիճականին: Ճշմարտանմանության ֆունկցիան X^n նմուշի համար՝ կլինի

$$\mathbb{P}_\theta(d(X) = m) = \frac{C_\theta^m\, C_{N-\theta}^{n-m}}{C_N^n}\,, \quad m = 0, \dots, n\ :$$

Այնուհետև օգտվել խնդիր 111* - ում բերված մեթոդից: ■

§ 7. Գնահատականների համեմատություն: Օպտիմալ գնահատականներ

Խնդիր 115*.

ա) Ունենք $\mathbb{E}_\theta(T_\lambda - \theta_2^2)^2 = \mathbb{V}ar_\theta(T_\lambda) + b^2(\theta_2)$, որտեղ $b(\theta_2) = \mathbb{E}_\theta\, T_\lambda - \theta_2^2 = (\lambda - 1)\theta_2^2$, իսկ համաձայն խնդիր 114* - ի՝

$$\mathbb{V}ar_\theta(T_\lambda) = \lambda^2\, \mathbb{V}ar_\theta(S_0^2) = \frac{2\lambda^2}{n-1}\, \theta_2^4\ :$$

բ) $\mathbb{E}_\theta(T_\lambda - \theta_2^2)^2 < \mathbb{E}_\theta(S_0^2 - \theta_2^2)^2$ անհավասարությունը ճիշտ է, եթե (խնդիր 114*)

$$\left[(\lambda-1)^2 + \frac{2}{n-1}\lambda^2\right]\theta_2^4 < \frac{2}{n-1}\theta_2^4,$$

որտեղից

$$(\lambda-1)^2 < \frac{2}{n-1}(1-\lambda^2):$$

Այստեղից՝ կստանանք

$$(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{n-3}{n+1}\right)<0$$

և, քանի որ $\frac{n-3}{n+1}<1$, ապա $\frac{n-3}{n+1}<\lambda<1$ ։

գ) T_{λ_0} գնահատականի *օպտիմալության* պայմանը $\mathcal{T}(S_0^2)$ դասում նշանակում է, որ

$$\mathbb{E}_\theta\left(T_{\lambda_0}-\theta_2^2\right)^2 < \mathbb{E}_\theta(T_\lambda-\theta_2^2)^2$$

բոլոր $T_\lambda \in \mathcal{T}(S_0^2)$ - ից և բոլոր $\theta\in\Theta$ - ից:

Գտնենք $\mathbb{E}_\theta\left(T_{\lambda_0}-\theta_2^2\right)^2 = \mathbb{V}ar_\theta\left(T_{\lambda_0}\right)+b_0^2(\theta_2)$, որտեղ

$$b_0(\theta_2)=\mathbb{E}_\theta T_{\lambda_0}-\theta_2^2=\frac{n-1}{n+1}\theta_2^2-\theta_2^2=-\frac{2}{n+1}\theta_2^2,$$

այնպես, որ $\mathbb{E}_\theta\left(T_{\lambda_0}-\theta_2^2\right)^2=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\frac{2\theta_2^4}{n-1}+\frac{4\theta_2^4}{(n+1)^2}=\frac{2\theta_2^4}{n+1}$ ։

Այսպիսով՝ *օպտիմալության* պայմանը բերվում է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$\frac{2}{n+1}\le(\lambda-1)^2+\frac{2}{n-1}\lambda^2,$$

որը համարժեք է $\frac{n+1}{n-1}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{n-1}{n+1} \ge 0$ անհավասարությանը, իսկ այն ճիշտ է ցանկացած $\lambda\in\mathbb{R}$ -
- ից, քանի որ այդ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը՝ $D=0$ ։ ■

§ 12. Նորմալ բաշխման պարամետրերի ճշգրիտ վստահության միջակայքերը

Խնդիր 182*.

Պարզ է, որ

$$\mathbb{G}_\theta(X^n) := \frac{nS_1^2}{\theta^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\theta}\right)^2 \sim \mathbb{H}^2(n)$$

կենտրոնական վիճականի է, որտեղից տվյալ $\gamma=1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ նշանակալիության մակարդակի համար ճիշտ է հետևյալ պայմանը՝

$$\gamma=\mathbb{P}_\theta\left(y_1<\frac{nS_1^2}{\theta^2}<y_2\right):=\mathbb{H}_n\big((y_1,\,y_2)\big)=\int_{y_1}^{y_2}h_n(y)dy$$

($h_n(y)$ - ը՝ χ_n^2 - պատահական մեծության խտության ֆունկցիան է), այնպես, որ

$$\mathbb{P}_\theta\left(\frac{nS_1^2}{y_2}<\theta^2<\frac{nS_1^2}{y_1}\right)=\gamma\ =1-\alpha:$$

Այդ միջակայքերից նվազագույն երկարություն ունեցող միջակայքը գտնելու համար կիրառենք *Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչների մեթոդը* մինիմալացնելով y_2/y_1 հարաբերությունը

$$\int_{y_1}^{y_2} h_n(y)dy = \mathbb{H}_n(y_2) - \mathbb{H}_n(y_1) = \gamma$$

պայմանի դեպքում: *Լագրանժի* ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$H(y_1, y_2;\, \lambda) := \frac{y_2}{y_1} + \lambda(\mathbb{H}_n(y_2) - \mathbb{H}_n(y_1) - 1 + \alpha) :$$

Այստեղից էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը՝ կլինի

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y_i} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y_2}{y_1^2} - \lambda h_n(y_1) = 0, \\ \dfrac{1}{y_1} + \lambda h_n(y_2) = 0, \\ \mathbb{H}_n(y_2) - \mathbb{H}_n(y_1) = 1 - \alpha \end{cases}$$

կամ

$$\begin{cases} y_1 h_n(y_1) = y_2 h_n(y_2), \\ \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} h_n(y)dy = 1 - \alpha\,, \end{cases}$$

որտեղից վերցնելով $y_1 = \chi^2_{1-\alpha_1}(n)$, $y_2 = \chi^2_{\alpha_2}(n)$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ χ^2_n - պատահական մեծության կրիտիկական կետերը՝ կստանանք

$$\frac{h_n(y_1)}{h_n(y_2)} = \frac{\chi^2_{\alpha_2}(n)}{\chi^2_{1-\alpha_1}(n)} = \exp\left\{\frac{1}{n}\left(\chi^2_{\alpha_2}(n) - \chi^2_{1-\alpha_1}(n)\right)\right\}:$$

Այս և $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ պայմաններից միարժեք են որոշվում α_1^0 ու α_2^0 թվերը, հետևաբար՝ և $\chi^2_{\alpha_2}(n)$, $\chi^2_{1-\alpha_1}(n)$ կրիտիկական կետերը: Այսպիսով նվազագույն երկարություն ունեցող վստահության միջակայքը՝

$$\Delta^0_\alpha(X^n) = \left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\alpha_2^0}(n)}\,,\ \ \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha_1^0}(n)}\right)$$

միջակայքն է: $\Delta^c_\alpha(X^n) = \left(\dfrac{nS_1^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\,,\ \dfrac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$ կենտրոնական վստահության միջակայքը *չի համընկնում* $\Delta^0_\alpha(X^n)$ միջակայքի հետ: ■

§ 14. Երկու պարզ վարկածի ստուգում: Նեյման – Պիրսոնի ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ

Խնդիր 220*.

Երբ $\theta = \theta_j$, $j = 0, 1$՝ $X \sim \mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$ պատահական մեծության ***բաշխման օրենքը***՝ կլինի

$$p_j(x) = \mathbb{P}_j(X = x) = \theta_j^x\left(1 - \theta_j\right)^{1-x}, \quad x = 0, 1\,,$$

այնպես, որ *ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականու* համար՝ կստանանք

$$\Lambda^n := \Lambda(X^n) = \frac{p_1(X^n)}{p_0(X^n)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{n\cdot\overline{X^n}} \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n - n\cdot\overline{X^n}} = \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{n\cdot\overline{X^n}} \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n :$$

Քանի որ $g(\theta)=\frac{\theta}{1-\theta}$ ֆունկցիան $(0,1)$ միջակայքում *աճող* է, ուստի՝

$$\frac{g(\theta_1)}{g(\theta_0)}=\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}<1, \quad \theta_1<\theta_0,$$

այնպես, որ $\lambda(x^n)\geq c$ անհավասարությունը $\left(\lambda(x^n):=\Lambda\big(X^n(\omega)\big),\ X^n(\omega)=x^n\right)$ համարժեք է $n\,\overline{x^n}\leq$ $\leq c_1$ անհավասարությանը, որտեղ

$$c_1=\frac{\ln c\ +\ n\ln\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}{\ln\frac{\theta_1\,(1-\theta_0)}{\theta_0\,(1-\theta_1)}}\ :$$

Համաձայն Նեյման – Պիրսոնի թեորեմի α *նշանակալիության մակարդակի* առավել հզոր հայտանիշը որոշվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x^n\in\mathcal{X}^n\colon\ T(x^n)=n\,\overline{x^n}\leq c_1(\alpha)\}$$

կրիտիկական տիրույթի միջոցով: $c_1:=c_1(\alpha)$ կրիտիկական կետը գտնելու համար նկատենք, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$T_n:=n\overline{X^n}=\sum_{i=1}^{n}X_i\ \sim\ \mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta_0,n):$$

Այսպիսով, ըստ Նեյման – Պիրսոնի հայտանիշի, c_1 կրիտիկական կետը գտնվում է այնպես, որ բավարարվի հետևյալ պայմանը՝

$$\mathbb{P}_0(\,\Lambda^n>c_1)=\mathbb{P}_0(T_n<c_1)<\alpha\leq\mathbb{P}_0(\,\Lambda^n\geq c_1)=\mathbb{P}_0(T_n\leq c_1)\ \ \big(\mathbb{B}(c_1;\,n,\theta_0)<\alpha\leq\mathbb{B}(c_1+1;\,n,\theta_0)\big)$$

կամ

$$\alpha'':=\sum_{m=0}^{c_1-1}C_n^m\,\theta_0^m\,(1-\theta_0)^{n-m}<\ \alpha\ \leq\ \sum_{m=0}^{c_1}C_n^m\,\theta_0^m\,(1-\theta_0)^{n-m}:=\alpha'\ :$$

$\alpha'=\alpha$ դեպքում α չափի *ոչ ռանդոմիզացված* հայտանիշը տրվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x^n\in\mathcal{X}^n\colon\ T(x^n)=n\overline{x^n}\leq c_1(\alpha)\}$$

կրիտիկական տիրույթի միջոցով, ընդ որում *I սեռի սխալի չափը*՝ կլինի հավասար

$$\alpha_\varphi(\theta_0):=\mathbb{P}_0(T_n\ \leq c_1(\alpha)\,)=\ \alpha'=\alpha,$$

իսկ *հզորությունը*՝

$$W_\varphi(\theta_1):=\mathbb{P}_1\big(\,T_n\leq\ c_1(\alpha)\big)\ =\sum_{m=0}^{c_1(\alpha)}C_n^m\,\theta_1^m\,(1-\theta_1)^{n-m}\ :$$

Այժմ դիցուք $\alpha'>\alpha$: Որպեսզի ստանանք *առավել հզոր* հայտանիշը, որի չափը լինի *ճշգրիտ հավասար* α - ին, հայտանիշը պետք է *ռանդոմիզացվի* : Ի նկատի ունենալով, որ

$$\mathbb{P}_0(T_n\ =c_1(\alpha))=\ C_n^{c_1(\alpha)}\,\theta_0^{c_1(\alpha)}(1-\theta_0)^{n\,-\,c_1(\alpha)}=\alpha'-\alpha'',$$

սահմանենք հետևյալ *կրիտիկական ֆունկցիան*՝

$$\varphi^*(x^n):=\begin{cases}1, & \text{եթե}\quad T_n\ <c_1(\alpha)\\ \varepsilon_\alpha=\dfrac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''}, & \text{եթե}\quad T_n\ =c_1(\alpha)\ :\\ 0, & \text{եթե}\quad T_n\ >c_1(\alpha)\end{cases}$$

Այսպիսով՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը *կհերքվի*, երբ $T_n < c_1(\alpha)$ և *չի հերքվի*, երբ $T_n > c_1(\alpha)$: $T_n = c_1(\alpha)$ դեպքում $\mathbb{H}_0$ վարկածը *հերքվում է* ε_α հավանականությամբ և *չի հերքվում* $1-\varepsilon_\alpha$ հավանականությամբ:

$\varphi^*(x^n)$ կրիտիկական ֆունկցիայով հայտանիշի *I սեռի սխալի չափը*՝ կլինի

$$\alpha_{\varphi^*}(\theta_0) = \mathbb{E}_0\varphi^*(X^n) = \mathbb{P}_0\big(T_n < c_1(\alpha)\big) + \varepsilon_\alpha\, \mathbb{P}_0(T_n = c_1(\alpha)) = \alpha'' + \frac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''}(\alpha'-\alpha'') = \alpha\,,$$

իսկ *հզորությունը*՝

$$W_{\varphi^*}(\theta_1) = \mathbb{E}_1\varphi^*(X^n) = \sum_{m=0}^{c_1(\alpha)-1} C_n^m\theta_1^m(1-\theta_1)^{n-m} + (\alpha-\alpha'')\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{c_1(\alpha)}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-c_1(\alpha)} : \quad \blacksquare$$

Խնդիրներ 222* և **224***.

Տե՛ս խնդիր 220* :

§ 15. Միակողմանի բարդ վարկածների ստուգում

Խնդիր 248*.

ա) Կազմենք *ճշմարտանմանության հարաբերության* վիճականին $(\theta > \theta')$՝

$$\lambda(x^n) := \frac{p_\theta(x^n)}{p_{\theta'}(x^n)} = \left[\frac{\theta(1-\theta')}{\theta'(1-\theta)}\right]^{n\overline{x^n}}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta'}\right)^{nk}, \text{ որտեղ } \frac{\theta(1-\theta')}{\theta'(1-\theta)} > 1,$$

այնպես, որ $\mathbb{B}\mathrm{in}\,(\theta,k)$ դասն ունի *մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն* $T(X^n) := n\overline{X^n}$ վիճականու նկատմամբ: Հետևաբար՝որոնելի *հավասարաչափ առավել հզոր* հայտանիշի կրիտիկական ֆունկցիան՝ կլինի (տե՛ս խնդիր 220*)

$$\varphi^*(x^n) := \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(x^n) > c_1(\alpha) \\ \varepsilon_\alpha = \dfrac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''}, & \text{եթե } T(x^n) = c_1(\alpha), \\ 0, & \text{եթե } T(x^n) < c_1(\alpha) \end{cases}$$

որտեղ $c_1 := c_1(\alpha)$, α' և α'' որոշվում են հետևյալ պայմանից՝

$$\alpha'' := 1-\mathbb{B}(c_1(\alpha)+1;\, kn,\, \theta_0) < \alpha \le 1-\mathbb{B}(c_1(\alpha);\, kn,\, \theta_0) := \alpha' : \quad \blacksquare$$

Խնդիր 250*. Տե՛ս խնդիր 248 :

§ 16. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ երկընտրանքային վարկածը

Խնդիր 272*

Բերենք *Բեռնուլիի* $\mathbb{B}\mathrm{er}\,(\theta)$ *մոդելը* ցուցչային տեսքի՝

$$p_\theta(x) := \mathbb{P}_\theta(X=x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} = \exp\left\{x\ln\frac{\theta}{1-\theta} + \ln(1-\theta)\right\},$$

որտեղ $A(\theta) := \ln\frac{\theta}{1-\theta}$ ֆունկցիան *մոնոտոն աճող* է $(0,1)$ միջակայքում, այնպես, որ համաձայն թեորեմ 16.1 - ի $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքային վարկածը ստուգող α *չափի* $(0 < \alpha < 1)$ *ՀԱՀ* (*օպտիմալ*) *անշեղ հայտանիշն* ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi^*(x^n) := \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(x^n) < c_1 \text{ կամ } T(x^n) > c_2 \\ \varepsilon_i, & \text{եթե } T(x^n) = c_i, \quad i = 1,2 \\ 0, & \text{եթե } c_1 < T(x^n) < c_2 \end{cases},$$

որտեղ $T(x^n) := \sum_{i=1}^{n} x_i$ ։ c_i և ε_i թվերը բավարարում են

$$W_{\varphi^*}(\theta_0) = \alpha \quad \text{և} \quad \mathbb{E}_{\theta_0}(\varphi^*(X^n) - \alpha)\, T(X^n) = 0$$

պայմանները։ Հեշտ է տեսնել, որ 1 - ին պայմանը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$1 - W_{\varphi^*}(\theta_0) = 1 - \mathbb{E}_{\theta_0}\varphi^*(X^n) = \sum_{x=c_1+1}^{c_2-1} C_n^x \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x} + \sum_{i=1}^{2}(1-\varepsilon_i) C_n^{c_i}\, \theta_0^{c_i}(1-\theta_0)^{n-c_i} = 1 - \alpha$$

կամ

$$\mathbb{B}(c_2;\, n, \theta_0) - \mathbb{B}(c_1+1;\, n, \theta_0) + \sum_{i=1}^{2}(1-\varepsilon_i)[\mathbb{B}(c_i+1;\, n, \theta_0) - \mathbb{B}(c_i;\, n, \theta_0)] = 1 - \alpha \text{ ։}$$

Ի նկատի ունենալով, որ

$$x C_n^x \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x} = n\theta_0 C_{n-1}^{x-1} \theta_0^{x-1} (1-\theta_0)^{(n-1)-(x-1)},$$

2 - րդ պայմանը տալիս է՝

$$\sum_{x=c_1+1}^{c_2-1} C_{n-1}^{x-1} \theta_0^{x-1} (1-\theta_0)^{(n-1)-(x-1)} + \sum_{i=1}^{2}(1-\varepsilon_i) C_{n-1}^{c_i-1}\, \theta_0^{c_i-1}(1-\theta_0)^{(n-1)-(c_i-1)} = 1 - \alpha$$

կամ

$$\mathbb{B}(c_2-1;\, n-1, \theta_0) - \mathbb{B}(c_1;\, n-1, \theta_0) + \sum_{i=1}^{2}(1-\varepsilon_i)[\mathbb{B}(c_i;\, n-1, \theta_0) - \mathbb{B}(c_i-1;\, n-1, \theta_0)] = 1 - \alpha \text{ ։}$$

Այս երկու պայմաններից օգտվելով *բինոմական բաշխման* աղյուսակներից (տե՛ս աղյուսակ 8) գտնվում են c_i և ε_i թվերը։ ■

§ 18. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ

Խնդիր 335*.

Մոդելին համապատասխանող վարկածների ստուգման խնդրի պարամետրական բազմություններն են՝ $\Theta = \mathbb{R}^k$, $\Theta_0 = \mathbb{R}$ ։

$X^n = \left(X_1^{n_1}, \dots, X_k^{n_k}\right)$ նմուշի *ճշմարտանմանության ֆունկցիան*՝ կլինի

$$f_\theta(X^n) = \prod_{j=1}^{k} f_\theta\left(X_j^{n_j}\right) = \prod_{j=1}^{k}\prod_{m=1}^{n_j} f_\theta(X_{jm}) = \prod_{j=1}^{k}\prod_{m=1}^{n_j} (2\pi)^{-1/2}\left(\sigma_j^2\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}\sum_{m=1}^{n_j}\left(X_{jm} - \theta_j\right)^2\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\prod_{j=1}^{k}\left(\sigma_j^2\right)^{-n_j/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sigma_j^2}\sum_{m=1}^{n_j}\left(X_{jm} - \theta_j\right)^2\right\} \text{ ։}$$

Այստեղից *ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականու* համար՝ կստանանք

$$\bar{\Lambda}^n := \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f_\theta(X^n)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} f_\theta(X^n)} = \frac{f_{\theta_0}(X^n)}{f_{\hat{\theta}}(X^n)} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum\frac{n_j}{\sigma_j^2}\,S_{0j}^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum\frac{n_j}{\sigma_j^2}\,S_j^2\right\}} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{\sigma_j^2}\,(S_{0j}^2 - S_j^2)\right\},$$

որտեղ

$$S_{0j}^2 := \frac{1}{n_j}\sum_{m=1}^{n_j}\left(X_{jm}-\theta_0\right)^2, \quad S_j^2 := \frac{1}{n_j}\sum_{m=1}^{n_j}\left(X_{jm}-\bar{X}_j\right)^2, \ \bar{X}_j := \frac{1}{n_j}\sum_{m=1}^{n_j}X_{jm}, \quad j=1,\dots,k :$$

Այնպես, որ

$$\ln\bar{\Lambda}^n = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{\sigma_j^2}\left(S_{0j}^2 - S_j^2\right)$$

և *ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշի* ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը՝ կլինի

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n :\ -2\ln\bar{\lambda}^n \geq \chi_\alpha^2(k-1)\right\} = \left\{x^n :\ \sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{\sigma_j^2}\left(s_j^2 - s_{0j}^2\right) \geq \chi_\alpha^2(k-1)\right\},$$

որտեղ

$$\bar{\lambda}^n := \bar{\lambda}(x^n,\,\Theta_0) := \bar{\Lambda}(X^n(\omega),\Theta_0),\ \bar{\Lambda}^n := \bar{\Lambda}(X^n,\Theta_0),\ s_{0j}^2 := S_{0j}^2(\omega), \quad s_j^2 := S_j^2(\omega) :$$ ■

§ 19. Պիրսոնի χ^2 համաձայնության հայտանիշ

Խնդիր 361*.

Գտնենք p պարամետրի *բազմանդամային ճշմարտանմանության մաքսիմումի* գնահատականը: Կազմենք

$$L'_\theta(\nu) = \sum_{i=1}^{r}\nu_i(\ln p_i(\theta))' = 0, \qquad r=4$$

հավասարումը, որտեղ

$$p_1(\theta) = \frac{\theta}{2}, \qquad p_2(\theta) = \frac{\theta^2}{2} + \theta(1-\theta), \qquad p_3(\theta) = \frac{1-\theta}{2}, \qquad p_4(\theta) = \frac{(1-\theta)^2}{2},$$

այնպես, որ

$$L'_\theta(\nu) = \frac{\nu_1}{\theta} + \frac{\nu_2}{\theta} - \frac{\nu_2}{2-\theta} - \frac{\nu_3}{1-\theta} - \frac{2\nu_4}{1-\theta} = 0,$$

որտեղից՝

$$\frac{\nu_1+\nu_2}{\theta} - \frac{\nu_3+2\nu_4}{1-\theta} = \frac{\nu_2}{2-\theta}$$

կամ

$$\frac{\nu_1+\nu_2}{1-q} = \frac{q(\nu_3+2\nu_4+\nu_2)+\nu_3+2\nu_4}{q(1+q)}, \qquad q = 1-\theta :$$

Այստեղից՝ կստանանք հավասարում

$$(n+\nu_3+\nu_4)q^2 + \nu_1 q - (\nu_3+2\nu_4) = 0,$$

այսինքն՝

$$760q^2 + 221q - 25 = 0,$$

որի լուծումն է՝ $\tilde{q} \approx 0.087$, $\tilde{\theta} = 1 - \tilde{q} \approx 0.913$: Այնպես, որ

$$\tilde{p}_1 = p_1(\tilde{\theta}) = 0.4565, \quad \tilde{p}_2 = 0.4962, \quad \tilde{p}_3 = 0.0435, \quad \tilde{p}_4 = 0.0038 :$$

Այժմ հաշվենք $\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta})$ վիճականու արժեքը՝

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i^2}{n\tilde{p}_i} - n \approx 3.07 :$$

Այստեղից, քանի որ $\chi_\alpha^2(r-2) = \chi_{0.1}^2(2) = 4.605$, ապա վարկածը *չի հերքվում*: Իրական *հասանելի նշանակալիության մակարդակը* ($\mathbb{P}$ - արժեքը) հավասար է՝

$$\mathbb{P}(\chi_2^2 \geq 3.07) \approx 0.223 \text{ (տես աղյուսակ 3) :} \qquad \blacksquare$$

§ 20. Կոլմոգորովի համաձայնության հայտանիշ

Խնդիր 362*.

Ենթադրենք $\mathbb{F}_0(a) = 0$, $\mathbb{F}_0(b) = 1$ և $0 < \mathbb{F}_0(x) < 1$ բոլոր $x \in (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, այսինքն՝ (a,b) միջակայքը $\mathbb{P}_0$ բաշխման *կրիչն* է ($N_{\mathbb{P}_0} = (a,b)$)։ Նշանակենք $B := \{x \in (a,b)\colon \mathbb{F}_0(x) < \mathbb{F}_0(x+\varepsilon)$ բոլոր *բավականաչափ փոքր* $\varepsilon > 0$ - ների համար$\}$ - ով՝ $\mathbb{F}_0(x)$ ֆունկցիայի «*աճի*» կետերը: Հեշտ է տեսնել, որ կամայական $y \in (0,1)$ - ի համար գոյություն ունի *միակ* $x \in B$ կետ այնպիսին, որ $\mathbb{F}_0(x) = y$ (այսինքն՝ $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիան *հակադարձելի* է B բազմության վրա)։ Նշանակենք՝ $x := \mathbb{F}_0^{-1}(y)$։

Դիտարկենք $X^n = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathbb{P}_0$ նմուշի համար $U_i := \mathbb{F}_0(X_i)$, $i = 1, \dots, n$ պատահական մեծությունները: $U_1, \dots, U_n$ պատահական մեծություններն անկախ են, քանի որ $X_1, \dots, X_n$ - երն անկախ են: Մյուս կողմից՝ $U_i \sim \mathbb{U}(0,1)$ պատահական մեծությունները *հավասարաչափ* են բաշխված $[0,1]$ միջակայքում: Իրոք՝

$$\mathbb{F}_{U_i}(y) = \mathbb{P}_0(U_i < y) = \mathbb{P}_0\big(X_i < \mathbb{F}_0^{-1}(y)\big) = \mathbb{F}_0\big(\mathbb{F}_0^{-1}(y)\big) = y$$

բոլոր $y \in (0,1)$ - ների համար:

Այժմ կատարելով $y = \mathbb{F}_0(x)$ փոփոխականի փոխարինում՝ կստանանք

$$\mathbb{F}_n^*(x) = \mathbb{F}_n^*\big(\mathbb{F}_0^{-1}(y)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\left(-\infty,\, \mathbb{F}_0^{-1}(y)\right)}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,y)}(U_i) := \widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y),$$

որտեղ $\widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y)$ - ը $U^n = (U_1, \dots, U_n)$ նմուշի բաշխման ֆունկցիան է:

Այսպիսով՝ կստանանք

$$\omega_n^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}_0(x)\big)^2 d\,\mathbb{F}_0(x) = \int_0^1 \big(\widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y) - y\big)^2 d\,y,$$

այնպես, որ ω_n^2 *վիճականու* բաշխումը *կախված չէ* $\mathbb{F}_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից, այսինքն այն *ոչ պարամետրական* է : Մյուս կողմից՝

$$\widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,y)}(U_i)$$

նմուշային բաշխման ֆունկցիայի համար ունենք՝ $n\,\widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y) \sim \mathbb{B}\mathrm{in}\,(y,\ n)$, այնպես, որ

$$\mathbb{E}\omega_n^2 = \int_0^1 \mathbb{E}\left(\widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y) - \mathbb{E}\widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y)\right)^2 d\,y = \int_0^1 \mathbb{V}\mathrm{ar}\,\left(\widetilde{\mathbb{F}}_n^*(y)\right) dy = \frac{1}{n}\int_0^1 y(1-y)dy = \frac{1}{6n} : \qquad \blacksquare$$

Խնդիր 364*.

Նախ գտնում ենք աղյուսակ 12 - ից Կոլմոգորովի D_n վիճականու $d_{0.05}(40) = 0.2101$ կրիտիկական կետը: Այնուհետև ենթադրենք, որ ճիշտ է $\mathbb{H}_0$: $X \sim \mathbb{N}(1,\ 1/6)$ վարկածը: $\mathbb{H}_0$ վարկածը կհերքվի, եթե *գոնե մեկ* k - ի համար $(k = 1, \dots, 40)$ խախտվի

$$\mathbb{F}_n\big(x_{(k+1)}\big) - d_\alpha(n) \le \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big) \le \mathbb{F}_n\big(x_{(k)}\big) + d_\alpha(n) \qquad (*)$$

անհավասարությունը, որտեղ $\mathbb{F}_n\big(x_{(k+1)}\big) = k/n$, $\mathbb{F}_n\big(x_{(k)}\big) = (k-1)/n$: $\mathbb{F}_n(x)$ - ը՝ նմուշային բաշխման ֆունկցիան է, իսկ $\mathbb{F}_0(x) = \Phi_{1,1/6}(x)$ - ը՝ $\mathbb{N}(1,\ 1/6)$ *նորմալ բաշխում* ունեցող պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

Ստուգենք $(*)$ անհավասարությունը $k = 1$ դեպքի համար՝ ունենք

$$x_{(1)} = 0.0475 \quad \text{և} \quad \mathbb{F}_0\big(x_{(1)}\big) = \Phi\left(\frac{x_{(1)} - 1}{1/\sqrt{6}}\right) = \Phi(-2.333) \approx 0.098,$$

այնպես, որ $(*)$ անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$-0.1851 \le 0.098 \le 0.2101,$$

հետևաբար $\mathbb{H}_0$ վարկածը $x_{(1)}$ դիտումով *չհերքվեց* :

Այնուհետև վարկածը *չի հերքվի* հաջորդ դիտումներով մինչ այն k - րդ արժեքը, որի դեպքում $(*)$ պայմանը խախտվի, այսինքն այդ արժեքի համար պետք է տեղի ունենա հետևյալ անհավասարություններից *գոնե մեկը*՝

$$\frac{k}{40} - 0.2101 > \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big) > \mathbb{F}_0\big(x_{(1)}\big) = 0.098 \quad \text{կամ} \quad \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big) > \frac{k-1}{40} + d_\alpha(n) > \frac{1}{40} + 0.2101 :$$

Առաջին պայմանից կստանանք՝ $k > 8.796$ $(k \ge 9)$, երկրորդ պայմանից՝

$$\mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big) > 0.2351 \quad \text{կամ} \quad \Phi\left(\frac{x_{(k)} - 1}{1/\sqrt{6}}\right) > 0.2351,$$

որտեղից՝ $x_{(k)} > \frac{1}{\sqrt{6}}\, z_{0.2351} + 1$, $z_{0.2351}$ - ը՝ ստանդարտ նորմալ բաշխման 0.2351 կարգի կրիտիկական կետը գտնվում է աղյուսակ 1 - ից: Այսպիսով՝ ունենք $x_{(k)} > 0.7061$ և տրված վարիացիոն շարքից գտնում ենք, որ $k \ge 14$: Հետևաբար ստացանք՝ $k \ge 9$ կամ $k \ge 14$: Վերցնում ենք փոքրագույնը՝ $k = 9$:

Ստուգենք $(*)$ անհավասարությունը $k = 9$ դեպքի համար: Ունենք՝

$$x_{(9)} = 0.5945 \ \text{և} \ \mathbb{F}_0\big(x_{(9)}\big) = \Phi\left(\frac{0.5945 - 1}{1/\sqrt{6}}\right) = \Phi(-0.993) \approx 0.1603,$$

այնպես, որ $(*)$ անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$0.0149 \le 0.1603 \le 0.4101,$$

այսպիսով $x_{(9)}$ արժեքը նույնպես *չի հերքում* $\mathbb{H}_0$ վարկածը:

Այնուհետև, որպեսզի վարկածը հերքվի, պետք է բավարարվի հետևյալ պայմաններից *գոնե մեկը*՝

$$\frac{k}{40} - 0.2101 > \mathbb{F}_0\big(x_{(9)}\big) = 0.1603 \quad \text{կամ} \quad \mathbb{F}_0\big(x_{(k)}\big) = \Phi\left(\frac{x_{(k)} - 1}{1/\sqrt{6}}\right) > \frac{9}{40} + 0.2101 = 0.4351,$$

որտեղից՝ $x_{(k)} > \frac{1}{\sqrt{6}}\, z_{0.4351} + 1$ և $x_{(k)} > 0.9331$, այսինքն $k \ge 17$, իսկ 1 - ին պայմանից՝ կստանանք $k > 14.816$ $(k \ge 15)$: $k \ge 15$ և $k \ge 17$ պայմաններից վերցնենք $k = 15$:

Շարունակելով նույն ձևով կստանանք, որ վարկածը կարող էր հերքվել միայն վարիացիոն շարքի $k = 1,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27$ և 34 անդամների համար: Սակայն պարզվում է, որ յուրաքանչյուր դեպքում այն *չի հերքվում*, այսինքն *Կոլմոգորովի հայտանիշով* $\mathbb{H}_0$ վարկածը *չի հերքվում* : ■

Խնդիր 372*. Տե՛ս խնդիր 364* ։

§ 21. Համասեռության հայտանիշներ

Խնդիր 374*.

Նախ գտնենք $\mathbb{E}U$ միջինը՝

$$\mathbb{E}U = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \mathbb{E}\mathbb{Z}_{rs} = nm\mathbb{E}\mathbb{Z}_{11} = nm\mathbb{P}(X_1 < Y_1) = nma,$$

որտեղ

$$a = \mathbb{P}(X_1 < Y_1) = \iint\limits_{\substack{x<y \\ -\infty<y<\infty}} d\mathbb{F}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbb{F}_2(y) \int_{-\infty}^{y} d\mathbb{F}_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_1(y) d\mathbb{F}_2(y) \,:$$

Այժմ գտնենք $\mathbb{E}U^2$ երկրորդ մոմենտը՝

$$\mathbb{E}U^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{r,s} \mathbb{Z}_{rs}\right)^2 = \sum_{r,s} \mathbb{E}\mathbb{Z}_{rs}^2 + \sum_{\substack{r,s,t \\ r\neq s}} \mathbb{E}\,\mathbb{Z}_{rt}\mathbb{Z}_{st} + \sum_{\substack{r,s,t \\ s\neq t}} \mathbb{E}\,\mathbb{Z}_{rs}\mathbb{Z}_{rt} + \sum_{\substack{r,s,t,u \\ r\neq t, s\neq u}} \mathbb{E}\,\mathbb{Z}_{rs}\mathbb{Z}_{tu} := S_1 + S_2 + S_3 + S_4\,,$$

$$S_1 = nm\mathbb{E}\mathbb{Z}_{11}^2 = nm\mathbb{E}\mathbb{Z}_{11} = nma\,,$$

$$S_2 = n(n-1)m\mathbb{E}\,\mathbb{Z}_{rt}\mathbb{Z}_{st} = n(n-1)m\mathbb{P}(X_r < Y_t,\, X_s < Y_t),$$

$$b := \mathbb{P}(X_r < Y_t,\, X_s < Y_t) = \iiint\limits_{\substack{x_1<y \\ x_2<y \\ y\in\mathbb{R}}} d\mathbb{F}(x_1,x_2,y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbb{F}_2(y) \int\limits_{\substack{x_1<y \\ x_2<y}} d\mathbb{F}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbb{F}_2(y) \int_{-\infty}^{y} d\mathbb{F}_1(x_1) \int_{-\infty}^{y} d\mathbb{F}_1(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_1^2(y) d\mathbb{F}_2(y),$$

$$S_3 = nm(m-1)\,\mathbb{E}\mathbb{Z}_{rs}\mathbb{Z}_{rt} = nm(m-1)\mathbb{P}(X_r < Y_s,\, X_r < Y_t),$$

որտեղ

$$c := \mathbb{P}(X_r < Y_s,\, X_r < Y_t) = \iiint\limits_{\substack{x<y_1 \\ x<y_2 \\ x\in\mathbb{R}}} d\mathbb{F}(x,y_1,y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbb{F}_1(x) \int\limits_{\substack{x<y_1 \\ x<y_2}} d\mathbb{F}(y_1,y_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbb{F}_1(x) \int_{x}^{\infty}\int_{x}^{\infty} d\mathbb{F}(y_1,y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbb{F}_1(x) \int_{x}^{\infty} d\mathbb{F}_2(y_1) \int_{x}^{\infty} d\mathbb{F}_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1-\mathbb{F}_2(x)\right)^2 d\,\mathbb{F}_1(x)\,,$$

$$S_4 = n(n-1)m(m-1)\mathbb{E}\mathbb{Z}_{rs}\mathbb{Z}_{tu} = n(n-1)m(m-1)\mathbb{P}(X_r < Y_s)\,\mathbb{P}(X_t < Y_u) = n(n-1)m(m-1)a^2 \,:$$

Այսպիսով՝

$$\mathbb{E}U^2 = nma + n(n-1)mb + nm(m-1)c + n(n-1)m(m-1)a^2\,,$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(U) = \mathbb{E}U^2 - (\mathbb{E}U)^2 = nm[a + (n-1)b + (m-1)c + (n+m-1)a^2] \,: \qquad \blacksquare$$

Խնդիր 383*.

Կազմենք նմուշների վարիացիոն շարքերը՝

$$x^{(n_1)} \quad 69 \quad 73 \quad 76 \quad 84 \quad 84 \quad 87 \quad 88 \quad 90 \quad 92 \quad 93 \quad 97,$$

$$y^{(n_2)} \quad 65 \quad 69 \quad 72 \quad 84 \quad 85 \quad 87 \quad 88 \quad 89 \quad 90 \quad 91 \quad 91 \quad 97 \quad 99 :$$

Միացյալ վարիացիոն շարքը՝ կլինի

$\left(x^{(n_1)},\, y^{(n_2)}\right)$ 65 69 69 72 73 76 84 84 85 87 87 88 88 89 90 90 91 91 92 93 97 97 99 :

Գտնենք U վիճականու արժեքը՝

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T, \qquad n_1 = 11, \qquad n_2 = 13,$$

որտեղ $T := \sum_{i=1}^{n_1} R_i$, R_i - երը՝ x_i անդամների ռանգերն են $\left(x^{(n_1)},\, y^{(n_2)}\right)$ շարքում:

$$T(\omega) = t = 22.5 + 2.5 + 5 + 8 + 6 + 20 + 16.5 + 13.5 + 8 + 11.5 + 21 = 134.5 :$$

Այստեղից՝ $U(\omega) := u = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - t = 143 + 66 - 134.5 = 74.5$:

$\mathbb{H}_1$: $a \neq 1/2$ երկընտրանքային վարկածի դեպքում $\left(a = \mathbb{P}(X < Y)\right)$ α մակարդակի ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթն է՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \left(x^{(n_1)},\, y^{(n_2)}\right) : \ \left| u - \frac{n_1 n_2}{2} \right| \geq \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \ z_{\alpha/2} \right\},$$

որտեղ՝

$$\left| u - \frac{n_1 n_2}{2} \right| = 3, \qquad \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \ z_{\alpha/2} = 11.958 \cdot 1.96 = 23.438 > 3 :$$

Այսպիսով եզրակացնում ենք, որ համասեռության վարկածը *չի հերքվում*, ընդ որում՝

$$s := \sqrt{\frac{12}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}} \left| u - \frac{n_1 n_2}{2} \right| \approx 0.25,$$

Այստեղից իրական *հասանելի նշանակալիության մակարդակը* ($\mathbb{P}$ - արժեքը) կլինի՝ $\mathbb{P}(\xi_0 \geq 0.25) \approx 0.8$, որտեղ ξ_0 - ն՝ *ստանդարտ նորմալ* պատահական մեծություն է: ■

§ 23. Պատահականության հայտանիշ

Խնդիր 396*.

$$\mathbb{H}_0 : \ \mathbb{F}_{X^n}(x^n) = \mathbb{F}(x_1) \times \ldots \times \mathbb{F}(x_n), \quad x^n = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

պատահականության վարկածի դեպքում $X_1, \ldots, X_n$ պատահական մեծությունների անկախությունից և միատեսակ բաշխվածությունից հետևում է, որ վարիացիոն շարքի $X_{(i)}$ վիճականիների բոլոր $n!$ դիրքերը հավասարահնարավոր են և ի հայտ են գալիս $1/n!$ հավանականություններով: X_i անդամների η_i *ինվերսիաների* թվերը անկախ են $\eta_{i+1}, \ldots, \eta_{n-1}$ պատահական մեծություններից բոլոր $i = 1, \ldots, n-2$ - ի համար, այնպես, որ $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ պատահական մեծություններն անկախ են:

Այնուհետև՝ ունենք

$$\mathbb{P}(\eta_i = k) = \frac{1}{n-i+1}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-i\ :$$

Այստեղից η_i պատահական մեծությունների *ծնորդ ֆունկցիաները*՝ կլինեն

$$\varphi_i(z) := \sum_{k=0}^{n-i} z^k\, \mathbb{P}(\eta_i = k) = \frac{1}{n-i+1} \sum_{k=0}^{n-i} z^k\,,$$

իսկ $Q_n := \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i$ պատահական մեծության *ծնորդ ֆունկցիան*՝

$$\varphi_{Q_n}(z) := \sum_k z^k\, \mathbb{P}(Q_n = k) = \prod_{i=1}^{n-1} \varphi_i(z) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} z^j\ :$$

Այստեղից՝ կստանանք

$$\mathbb{E}\,\eta_i = \varphi_i'(1) = \frac{1}{n-i+1}\, \frac{1+n-i}{2}\, (n-i) = \frac{n-i}{2},$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\eta_i) = \varphi_i''(1) + \varphi_i'(1) - [\varphi_i'(1)]^2\,,$$

$$\varphi_i''(1) = \frac{1}{n-i+1}\, \left[2^2 + 3^2 + \cdots + (n-i)^2 - \big(2 + 3 + \cdots + (n-i)\big)\right] =$$

$$= \frac{1}{n-i+1} \left[\frac{(n-i)(n-i+1)(2(n-i)+1)}{6} - \frac{1+n-i}{2}\,(n-i)\right] = \frac{(n-i-1)(n-i)}{3}\,,$$

որտեղից՝

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\eta_i) = \frac{(n-i-1)(n-i)}{3} + \frac{n-i}{2} - \frac{(n-i)^2}{4} = \frac{(n-i)(n-i+2)}{12}\ :$$

Այնուհետև՝ ունենք

$$\mathbb{E}Q_n = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\eta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)}{4}\,,$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Q_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\eta_i) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(n-i+2) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) =$$

$$= \frac{1}{72}\,(n-1)n(2n-1) + \frac{n(n-1)}{12} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}\ : \qquad \blacksquare$$

§ 25. Փոքրագույն քառակուսիների գնահատականներ

Խնդիր 415*.

ա) Գտնենք $\mathbb{E}\tilde{b}$ ՝

$$\mathbb{E}\tilde{b} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i-\bar{Y}}{X_i-\bar{X}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(a+bX_i+\varepsilon_i)-\mathbb{E}(a+b\bar{X}+\bar{\varepsilon})}{X_i-\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(a+bX_i)-(a+b\bar{X})}{X_i-\bar{X}} = b :$$

Այժմ ցույց տանք, որ $\tilde{b}$ - ը գծային գնահատական է ըստ Y_i - երի $(x_i = X_i - \bar{X})$՝

$$\tilde{b} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i-\bar{Y}}{X_i-\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{Y}}{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}Y_i - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)Y_i := \sum_{i=1}^{n}c_i Y_i :$$

Այսպիսով $\tilde{b} \in \mathcal{L}_b^0(Y)$ ։

բ) Գտնենք $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\tilde{b})$ հաշվի առնելով, որ $\mathbb{C}ov\,(Y_i, Y_j) = 0,\ i \neq j$ ։

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\tilde{b}) = \sum_{i=1}^{n}c_i^2\,\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y_i) = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2 = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^2 :$$

գ) Օգտվելով *Կոշի – Շվարց – Բունյակովսկու* անհավասարությունից՝ կստանանք

$$\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\tilde{b})}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\hat{b})} = \left[\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right)^2\right]\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right)x_i\right]^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right]^2 = \frac{1}{n^2}\,n^2 = 1 \quad \left(\sum_{i=1}^{n}x_i = 0\right) : \quad \blacksquare$$

Համառոտագրություններ

ԿՍԹ – կենտրոնական սահմանային թեորեմ
ՃՀ վիճականի – ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականի
ՃՄ գնահատական – ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատական
ՓՔ գնահատական – փոքրագույն քառակուսիների գնահատական
ՀԱՀ հայտանիշ – հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշ

Նշանակումներ

$\boldsymbol{\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi}$ – ըստ $\mathbb{P}$ հավանականության զուգամիտություն
$\boldsymbol{\xi_n \to \xi}$ $\mathbb{P}$ - **h.h.** – համարյա հավաստի զուգամիտություն
$\boldsymbol{\xi_n \xrightarrow{d} \xi}$ – ըստ բաշխման (թույլ) զուգամիտություն
$\boldsymbol{\theta_n^*} \rightsquigarrow \mathbb{N}(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\sigma^2/n})$ – θ_n^* գնահատականի ասիմպտոտիկ նորմալություն
$\equiv$ – նույնության նշան
$:=$ – նշանակում, սահմանում
■ – խնդիրների վերջ

Օգտագործված գրականություն

[1] **Ватутин В. А., Ивченко Г. И, Медведев Ю. И., Чистяков В. П.,** Теория вероятностей и математическая статистика в задачах, М., «Дрофа», 2003.

[2] **Գասպարյան Կ. Վ.,** Տեսական և կիրառական վիճակագրության հիմունքներ, մաս 1, Երևան, «Գիտություն», 2015.

[3] **Гмурман В. Е.,** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, М., «Высшая школа», 2003.

[4] **Джонстон Д ж.,** Эконометрические методы, М., «Статистика», 1980.

[5] **Devore J. L.,** Probability and Statistics for Engineering and the Sciences, 7 – th Edit., Belmont, Brooks / Cole, 2009.

[6] **Емельянов Г. В., Скитович В. П.,** Задачник по теории вероятностей и математической статистике, изд – во Ленинградского ун – та, 1967.

[7] **Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Чистяков В. П.,** Сборник задач по математической статистике, М., «Высшая школа», 1989.

[8] **Кендалл М. Д ж., Стьюарт А.,** Статистические выводы и связи, М., «Наука”, 1973.

[9] **Кендалл М. Д ж., Стьюарт А.,** Теория распределений, М., « Наука», 1966.

[10] **Коршунов Д. А., Чернова Н. И.,** Сборник задач и упражнений по математической статистике, Новосибирск, Изд – во института математики, 2004.

[11] **Levin R., Rubin D.,** Statistics for Management, 7 – th Edit., New Jersey, Prentice – Hall, 1997.

[12] **Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А.,** Сборник задач к начальному курсу эконометрики, М., «Дело», 2002.

[13] **Montgomery D. C., Runger G. C.,** Applied Statistics and Probability for Engineers, 5 – th Edit., New York, Wiley, 2011.

[14] **Mood A. M., Graybill F. A., Boes O. C.,** Introduction to the Theory of Statistics, 3 – th Edit., New York, Mc. Graw – Hill, 1974.

[15] **Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М.,** Сборник задач по теории вероятностей, М., «Наука», 1980.

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

§ 2. Նմուշային բաշխման ֆունկցիա: Հաճախությունների սյունապատկեր (հիստոգրամ) և բազմանկյուն (պոլիգոն)

27. դ) 1. 27.5 տարի, 2. ≈ 38 տարի: **29.** դ) $x_{med} = 90$: **32.** $x_{med} \approx 7$ օր:

§ 3. Նմուշային բնութագրիչներ

38. ա) $\overline{Y^n} = \overline{X^n} + c$, $Y^*_{mod} = X^*_{mod} + c$, $Y^*_{med} = X^*_{med} + c$, $S^2_Y = S^2_X$, բ) $\overline{Y^n} = c\overline{X^n}$, $Y^*_{mod} = cX^*_{mod}$, $Y^*_{med} = cX^*_{med}$, $S^2_Y = c^2 S^2_X$: **39.** ա) $\overline{x^n} \approx 4.58$, $s^2_x \approx 4.44$, $s_x \approx 2.1$, $\overline{y^n} \approx -0.67$, $s^2_y \approx 3.33$, $s_y \approx 1.83$, բ) (x^n) : $x_{med} = 4$, $Q_1 = 3$, $Q_3 = 5$, $F_1 = 3$, $F_3 = 6$, $R_{12} = 8$, $M_{12} = 5$, $\Delta^0_{1/4} = 3$, $T = (1,\ 3,\ 3,\ 6,\ 9)$, (y^n) : $y_{med} = 0$, $Q_1 = -3$, $Q_3 = 1$, $F_1 = -3$, $F_3 = 1$, $R_9 = 5$, $M_9 = -0.5$, $\Delta^0_{1/4} = 4$, $T = (-3,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2)$, գ) (x^n) : $g_1 \approx 0.48$, $g_2 \approx -0.23$, $v = 45.85\,\%$: **40.** ա) $\overline{x^n} = 10.6$, $s \approx 6.38$, բ) $x_{med} = 10.5$, $R_{20} = 20$, $Q_1 = 5$, $Q_3 = 16$, $F_1 = 5$, $F_3 = 17$, $\zeta_{0.1} = 3$, $\zeta_{0.9} = 20$, $T = (0,\ 5,\ 10.5,\ 17,\ 20)$: **41.** (1) ա) $\overline{x^n} \approx 6.81$, $s^2 \approx 4.44$, $s \approx 2.11$, բ) $x_{med} = x_{mod} = 6$, $Q_1 = F_1 = 5$, $Q_3 = F_3 = 9$, (2) ա) $\overline{x^n} \approx 2.71$, $s^2 \approx 16.82$, $s \approx 4.1$, բ) $x_{med} = x_{mod} = 3$, $Q_1 = F_1 = 0$, $Q_3 = F_3 = 4$, գ) $v_1 = 31\,\%$, $v_2 = 151\,\%$: **42.** (24 ա)) ա) $\overline{x^n} = 3.71$, $s^2 \approx 1.82$, $s \approx 1.35$, բ) $g_1 \approx -0.28$, $g_2 \approx 0.17$, $v \approx 36\,\%$, գ) $x_{med} = 3.73$, $x_{mod} = 3.7$, $Q_1 = 2.81$, $Q_3 = 4.7$, $\zeta_{0.1} = 1.8$, $\zeta_{0.9} = 5.57$: **43.** ա) $\overline{x^n} = 37.7\ (37.3)$, $s^2 = 197.01\ (199.13)$, $s = 14.04\ (14.11)$, բ) $x_{med} = 37.4\ (37)$, $x_{mod} = 44\ (44)$, $Q_1 = 25.25\ (26)$, $Q_3 = 48.07\ (45)$ (իրական տվյալները բերված են փակագծերում): **44.** ա) $x_{med} = 1.02$, $x_{mod} = 1.1$, $Q_1 = 0.72$, $Q_3 = 1.23$, $\zeta_{0.1} = 0.44$, $\zeta_{0.9} = 1.41$, բ) $\overline{x^n} = 0.97$, $s^2 = 0.14$, $s = 0.38$, $v = 39\,\%$: **45.** ա) $\overline{x^n} = 9.65$, $\overline{y^n} = 6.13$, $s_x = 4.48$, $s_y = 0.35$, $R_x = 11.2$, $R_y = 0.8$, $v_x = 46\,\%$, $v_y = 6\,\%$, բ) $g_{1x} = 0.21$, $g_{1y} = 0.26$, $g_{2x} = -1.67$, $g_{2y} = -2.17$:

§ 5. Մոմենտների մեթոդ

77. $\theta^* = 2\,\overline{X^n}$, $\bar{\sigma}^2(\theta) = \theta^2/3$: **78.** $\theta^*_{1,2} = \overline{X^n} \mp \sqrt{3}\,S$: **79.** $\theta^*_1 = \overline{X^n}$, $\theta^*_2 = a_2$: **80.** $\theta^* = \frac{1}{k}\cdot\overline{X^n}$: **81.** $\theta^*_1 = \overline{X^n}$, $\theta^*_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4a_2} - 1\right)$: **82.** $\theta^*_{1,2} = \overline{X^n} \mp \sqrt{S^2 - \overline{X^n}}$ ($S^2 \geq \overline{X^n}$): **83.** $\theta^*_1 = (\overline{X^n})^{-1}$, $\bar{\sigma}^2_1(\theta) = \theta^2$, $\theta^*_2 = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{-1/2}$, $\bar{\sigma}^2_2(\theta) = \frac{5}{4}\,\theta^2$: **84.** $\theta^* = \frac{2\cdot\overline{X^n}}{1-\overline{X^n}}$, $\bar{\sigma}^2(\theta) = \frac{\theta(\theta+2)^2}{2(\theta+3)}$: **85.** $\theta^*_1 = \frac{\overline{X^n}}{S^2}$, $\theta^*_2 = \frac{\left(\overline{X^n}\right)^2}{S^2}$: **86.** ա) $\left(1 - \frac{1}{c}\right)\overline{X^n}$, բ) $\frac{\overline{X^n}}{\overline{X^n} - c}$, գ) $\left(\frac{\overline{X^n}}{1+\frac{S}{\sqrt{a_2}}}, 1 + \frac{\sqrt{a_2}}{S}\right)$: **87.** ա) $\overline{X^n} - \frac{1}{c}$, բ) $(\overline{X^n} - c)^{-1}$, գ) $(\overline{X^n} - S\ ,\ S^{-1})$: **88.** ա) $\overline{X^n}$, բ) $\theta^* = \sqrt{\frac{2}{a_2 - c^2}}$, գ) $\left(\overline{X^n}, \sqrt{2}\,S^{-1}\right)$: **89.** ա) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\overline{X^n} - c)$, բ) $\overline{X^n} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}c$, գ) $\left(\overline{X^n} - \sqrt{\frac{\pi}{4-\pi}}\,S,\ \frac{2}{\sqrt{4-\pi}}\ S\right)$: **90.** $\left(\frac{\overline{X^n} - a_2}{S^2}\,\overline{X^n},\ \frac{\overline{X^n} - a_2}{S^2}\,(1 - \overline{X^n})\right)$: **91.** $\theta^* = \frac{r}{r + \overline{X^n}}$, $\bar{\sigma}^2(\theta) = \frac{\theta^2(1-\theta)}{r}$: **92.** $\theta^* = 2\overline{X^n} - 1$: Ստացված գնահատականը *պիտանի չէ*, եթե $X_{(n)} > 2\overline{X^n} - 1$, քանի որ $X_{(n)} \leq \theta$:

§ 6. Ճշմարտանմանության մաքսիմումի մեթոդ

93. $\frac{1}{k}\cdot\overline{X^n}$: **94.** $\overline{X^n}$: **95.** $\widehat{g(\theta)} = \frac{r}{\overline{X^n}}$: **96.** $(\overline{X^n})^{-1}$: **97.** Ա) $\widehat{\mathbb{F}_c(\theta)} = \Phi\left(\frac{c-\overline{X^n}}{\sigma}\right)$, բ) $\widehat{\mathbb{F}_c(\theta)} = = \Phi\left(\frac{c-m}{S_1}\right)$, $S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$: **98.** $\widehat{\mathbb{F}_c(\theta)} = \Phi\left(\frac{c-\overline{X^n}}{S}\right)$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(X_i - \overline{X^n}\right)^2$: **99.** $\hat{\theta} = -1 + \sqrt{1+a_2}$, $a_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$: **100.** $\hat{\theta} = (\bar{g}\ , S^2(g))$, $\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_i)$, $S^2(g) = = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (g(X_i) - \bar{g})^2$: **101.** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$: **102.** $\frac{\lambda}{\overline{X^n}}$: **103.** Ա) $\left[\ln(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}\right]^{-2}$, բ) $X_{(n)}$, գ) $\left(n/\sum_{i=1}^n X_i^{-1}\right)^{1/2}$, դ) $-(n/\sum_{i=1}^n \ln\ln X_i)$: **104.** ա) $-X_{(1)}$, բ) $\left(-X_{(1)}\right) \vee \left(X_{(n)}\right)$, գ) $\alpha\left(X_{(n)}-2\right) + (1-\alpha)\, X_{(1)}$, $\alpha \in [0, 1]$, դ) $\frac{1}{2}\, X_{(n)}$: **105.** $\frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(n)} - 1\right)$: **106.** $\left[\left(\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}/c\right)\right]^{-1}$: **107.** $X_{(1)}$ –ը *ա.անշեղ է և ունակ*: **108.** $\left(X_{(1)}\, , \overline{X^n} - X_{(1)}\right)$: **110.** $\hat{\theta}_i = \nu_i^*/n$, $\nu_i^* = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{i\}}(X_j)$:

§ 7. Գնահատականների համեմատություն

114. S^2 – ն, $\mathbb{K}_0$ դասում՝ S_1^2 – ն: **116.** T_n^2: **117.** M_1^* : **118.** θ_2^*: **119.** $\theta_1^* = (\overline{X^n})^{-1}$: **120.** *Ոչ մեկը* : **121.** $\theta_1^* = 2\overline{X^n}$, $\theta_2^* = \sqrt{3a_2}$ ՝ լավագույնն է: **122.** $\theta_1^* = \frac{\lambda}{\overline{X^n}}$ ՝ լավագույնն է, $\theta_2^* = \sqrt{\frac{\lambda(\lambda+1)}{a_2}}$: **123.** θ_1^*:

§ 8. Արդյունավետ (էֆեկտիվ) գնահատականներ

124. $\mathbb{I}(\theta) = \frac{k}{\theta\,(1-\theta)}$: **125.** $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[T_n(X)] = \theta/n$, $\mathbb{I}(\theta) = \theta^{-1}$: **126.** $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[T_n(X)] = \frac{1-\theta}{n\,\theta^2}$, $\mathbb{I}(\theta) = = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)}$: **127.** $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[T_n(X)] = \theta^2/n$, $\mathbb{I}(\theta) = \theta^{-2}$: **128.** $\mathbb{I}(\theta) = \sigma^{-2}$: **130.** $\tau(\theta) = \frac{r\,(1-\theta)}{\theta}$, $\tau_n^* = \overline{X^n}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*] = \frac{r\,(1-\theta)}{n\theta^2}$, $\mathbb{I}(\theta) = \frac{r}{\theta^2(1-\theta)}$: **131.** $\tau(\theta) = \frac{\lambda}{\theta}$, $\tau_n^* = \overline{X^n}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*] = \frac{\lambda}{n\theta^2}$, $\mathbb{I}(\theta) = = \frac{\lambda}{\theta^2}$: **132.** $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$ –ը «գերարդյունավետ» գնահատական է: **133.** $\boldsymbol{\tau}(\theta) = \theta + \ln c$, $\tau_n^* = = \ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*] = \theta^2/n$, $\mathbb{I}(\theta) = \theta^{-2}$: **134.** $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{2}{m}$, $\tau_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i}{m^2} + \frac{1}{X_i}\right)$, $Var_\theta(\tau_n^*) = \frac{2}{n\theta^2}$, $\mathbb{I}(\theta) = \frac{1}{2\theta^2}$: **135.** ա) $\tau(\theta) = \theta^\lambda$, $\tau_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^\lambda$, բ) $\mathbb{E}_\theta\tau_n^* = \theta^\lambda$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\tau_n^*] = = \frac{\theta^{2\lambda}}{n}$, $\mathbb{I}(\theta) = \frac{\lambda^2}{\theta^2}$:

§ 9. Ասիմպտոտիկ արդյունավետ գնահատականներ

137. $b_n(\theta) = \frac{\theta}{n\lambda - 1}$, $\tilde{\theta}_n = \left(1 - \frac{1}{n\lambda}\right)\frac{\lambda}{\overline{X^n}}$: **138.** $e_0(\theta^*) = \frac{2}{\pi} < 1$: **139.** $e_0(\theta^*) = \frac{8}{\pi^2} < 1$: **141.** $g(\theta) = \sqrt{\theta}$, $\sigma_n^2(g) = \frac{1}{4n}$: **142.** $\hat{\theta}_n = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right]^{1/2}$, $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$, $g(\theta) = \ln\theta$, $\sigma_n^2(g) = \frac{1}{4n}$: **143.** $\tau(\theta) = \ln\theta$, $\sigma_n^2(\tau) = 1/n$, $\sqrt{n}\,(\ln\overline{X^n} - \ln\theta) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,\ 1)$: **144.** $\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \theta}{1+\left(X_i-\theta\right)^2} = = 0$, $\sigma_n^2\left(\hat{\theta}_n\right) = \frac{2}{n} < \sigma_n^2(X_{med}^*) = \frac{\pi^2}{4n}$:

§ 10. Ճշգրիտ վստահության միջակայքեր

145. $\left(X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln\alpha,\ X_{(1)}\right)$՝ *լավագույն* միջակայք, $\left(X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln\frac{\alpha}{2},\ X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$՝ *կենտրոնական* վստահության միջակայք: **146.** $\left(\frac{1}{2n\overline{X^n}}\,\chi^2_{1-\alpha}(2n),\ +\infty\right)$, $\left(\frac{1}{2n\overline{X^n}}\,\chi^2_{1-\alpha/2}(2n),\ \frac{1}{2n\overline{X^n}}\,\chi^2_{\alpha/2}(2n)\right)$: **147.** ա) $\left(0,\ -\frac{\ln\alpha}{X_1}\right)$, բ) $\left(0,\ -\frac{\ln\alpha}{n\,X_{(1)}}\right)$: **148.** $\left(\frac{y_1}{\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{-1}},\ \frac{y_2}{\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{-1}}\right)$, $\Gamma_{1,n}\big((y_1,\ y_2)\big) = 1-\alpha$: **149.** $\left(\frac{1}{2T}\,\chi^2_{1-\alpha/2}(2n),\ \frac{1}{2T}\,\chi^2_{\alpha/2}(2n)\right)$: **150.** $\left(X_{(k)},\ X_{(m)}\right)$ - ը $\gamma = 1 - \mathrm{B}(p;\ k,\ n-k+1) - \mathrm{B}(p;\ m,\ n-m+1)$ մակարդակի վստահության միջակայք է: **151.** $\left(\frac{1}{n\overline{X^n}}\ \Gamma_{1-\alpha/2}(1,n\lambda),\ \frac{1}{n\overline{X^n}}\ \Gamma_{\alpha/2}(1,n\lambda)\right)$, $\Gamma_\varepsilon(1,n\lambda)$ - ն՝ $\mathbb{\Gamma}(1,\ n\lambda)$ բաշխման ε - կրիտիկական կետն է: **152.** ա) $\left(\overline{X^n}\ \mp\ c_{\alpha/2}\,\sigma\right)$, $c_{\alpha/2}$ - ը $\mathbb{C}(0,\ 1)$ *Կոշու բաշխման* $\alpha/2$ - կրիտիկական կետն է, բ) $\left(\overline{X^n}\ \mp\ \sigma\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\,\alpha\right)\right)$: **153.** $(X^1,\ X^1/\alpha)$: **154.** ա) $\left(X_{(1)} - 1 + \sqrt[n]{\alpha}\ ,\ X_{(1)}\right)$, բ) $\left(X_{(1)}/(2-\sqrt[n]{\alpha}),\ X_{(1)}\right)$: **155.** $\gamma = 1 - 2^{1-n}$: **156.** ա) $\left(\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n} e^{y^-/2n},\ \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n} e^{y^+/2n}\right)$, y^- − ը և y^+ − ը բավարարում են $\frac{1}{\Gamma(\mathrm{n})}\int_{y^-}^{y^+} y^{n-1}e^{-y}dy = 1-\alpha$ պայմանը, բ) $\Delta_\alpha(X^n) = \left(X_{(n)},\ X_{(n)}\,\alpha^{-1/2n}\right)$ - ը՝ *լավագուն* միջակայքն է: **157.** $\mathbb{P}_\theta\left(X_{(1)} < \mu < X_{(n)}\right) = 1 - 2^{1-n}$:

§ 11. Ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքեր

158. $\left(\frac{1}{k}\,\overline{X^n}\ \mp\ \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\overline{X^n}\left(1-\frac{1}{k}\,\overline{X^n}\right)}{n}}\ z_{\alpha/2}\right)$: **159.** $\left(\mathbb{F}_n^*(x_0)\ \mp\ z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\,\mathbb{F}_n^*(x_0)\left(1-\mathbb{F}_n^*(x_0)\right)}\right)$:

160. $\left(\left[1+\frac{1}{r}\,\overline{X^n}\right]^{-1} \mp\ \frac{z_{\alpha/2}}{r}\left[1+\frac{1}{r}\,\overline{X^n}\right]^{-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\,\overline{X^n}\left[1+\frac{1}{r}\overline{X^n}\right]^{-1}}\right)$: **161.** ա) $\left(S_1\left(1\ \mp\ \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}\right)\right)$, բ) $\left(S_1\,e^{\mp\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}\right)$, գ) $\left(S_1\left(1\ \pm\ \sqrt{\frac{2}{n}}\,z_{\alpha/2}\right)^{-1/2}\right)$: **162.** $\left(S^2\left(1\ \pm\ \sqrt{\frac{2}{n}}\ z_{\alpha/2}\right)^{-1}\right)$: **163.** $\left(X^*_{med}(n)\ \mp\ \frac{\pi}{2\sqrt{n}}\ z_{\alpha/2}\right)$: **164.** $\left(\overline{X^n}\ \mp\ \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ z_{\alpha/2}\right)$, $\left(a_k\ \mp\ z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{a_{2k}-a_k^2}{n}}\right)$: **165.** $\left(\left(X_1 + z^2_{\alpha/2}\right)\ \mp\ z_{\alpha/2}\sqrt{2X_1z^2_{\alpha/2} + z^4_{\alpha/2}}\right)$:
166. $n \geq 62$: **167.** 55 օր: **168.** $(0.061,\ 0.139)$: **169.** $(0.23,\ 0.25)$: **170.** $(0.51,\ 0.657)$: **171.** $(0.5,\ 0.555)$: **172.** $(0.445,\ 0.563)$: **173.** $(0.023,\ 0.057)$: **174.** (0 , 1224.078 ժամ): **175.** (2489.368 մ., $+\infty$): **176.** $(118.347,\ 123.653)$: **177.** $\delta = 24.272$ $\left(\delta = \sqrt{\frac{2}{n}}\ s^2\ z_{\alpha/2}\right)$: **178.** ($0.917\cdot10^3$ կմ, $1.026\cdot10^3$ կմ): **179.** $(0.626,\ 0.838)$: **180.** $(130.794,\ 189.418)$:

§ 12. Նորմալ բաշխման պարամետրերի ճշգրիտ վստահության միջակայքեր

181. $n = \left[\left(\frac{2\sigma}{l}\ z_{\alpha/2}\right)^2\right] + 1$, $\gamma = 2\Phi_0\left(\frac{l\sqrt{n}}{2\sigma}\right)$: **182.** $\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\alpha_2^0}(n)},\ \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha_1^0}(n)}\right)$, $\alpha_1^0 + \alpha_2^0 = \alpha$, α_1^0 և α_2^0 թվերը բավարարում են $\frac{\chi^2_{\alpha_2}(n)}{\chi^2_{1-\alpha_1}(n)} = \exp\left\{\frac{1}{n}\left(\chi^2_{\alpha_2}(n) - \chi^2_{1-\alpha_1}(n)\right)\right\}$ պայմանը: $\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\ \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$՝

կենտրոնական վստահության միջակայքը: **186.** $\left(\left(1 \pm \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \overline{X^n}\right)$, երբ $\theta > 0$ և $\left(\left(1 \mp \mp \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \overline{X^n}\right)$, երբ $\theta < 0$: **187.** ա) $n \geq 98$, բ) $\gamma \approx 0.99$: **188.** $(57.013, +\infty)$, $(-\infty, 58.987)$ և $(56.824, 59.176)$: **189.** $(0.461, 7.124)$: **190.** *միջինի* համար՝ $(2.985, +\infty)$, $(-\infty, 3.051)$ և $(2.972, 3.064)$, *ցրվածքի* համար՝ $(0.0012, +\infty)$, $(0, 0.0087)$ և $(0.0098, 0.013)$: **191.** $\theta_1 \in \in (26.842, 33.558)$, $\theta_2 \in (2.017, 7.442)$: **192.** $(3.428, 4.964)$: **193.** $\delta \approx 0.879$: **194.** $(68.770, 73.230)$: **195.** $(5.036, 13.402)$: **196.** $m \in (9.138, 19.417)$, $\sigma \in (2.774, 11.212)$: ***Երկու նմուշ՝***

197. $(\overline{X^n} - \overline{Y^m} - \sigma z_\alpha, \infty)$, $(-\infty, \overline{X^n} - \overline{Y^m} + \sigma z_\alpha)$: **198.** $\left(\overline{X^n} - \overline{Y^m} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \cdot S_p\, t_\alpha(n + + m - 2), \infty\right)$, $\left(-\infty, \overline{X^n} - \overline{Y^m} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \cdot S_p\, t_\alpha(n + m - 2)\right)$, $S_p^2 = \frac{n S_X^2 + m S_Y^2}{n + m - 2}$: **199.** $\left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} \cdot S_{1-\alpha}(m-1, n-1), \infty\right)$, $\left(-\infty, \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} \cdot S_\alpha(m-1, n-1)\right)$: **200.** $\left(\overline{Z^n} - \frac{S_{0z}}{\sqrt{n}}\, t_\alpha(n-1), \infty\right)$, $\left(-\infty, \overline{Z^n} + \frac{S_{0z}}{\sqrt{n}}\, t_\alpha(n-1)\right)$: **201.** $\tau \in (-0.127, 1.527)$: **202.** $(-8.355, -1.445)$: **203.** $(0.583, 1.646)$: **204.** $\overline{z^{n+m}} = 12.318$, $s_z^2 = 0.92$, $\theta_1 \in (11.904, 12.732)$, $\theta_2^2 \in (0.584, 1.855)$: **205.** $(1.412, 2.588)$: **206.** $(-1.167, 0.917)$: **207.** $(0.245, 7.953)$:

§ 13. Վարկածների ստուգում: Սկզբնական գաղափարներ

208. բ) : **209.** ա) $\alpha_\varphi(\theta) = 0.1$, բ) $\beta_\varphi(2.5) = 0.32$, գ) $W_\varphi(\theta) = 1 - \frac{1.8}{\theta}$: **210.** ա) *ոչ*, բ) *այո*: **211.** $c_\alpha = 2(1-\alpha)^{1/n}$, $W_\varphi(\theta) = 1 - \left(\frac{c}{\theta}\right)^n$, հայտանիշն *անշեղ է և ունակ*: **212.** $\alpha = \varepsilon$, $W_\varphi(\theta) = = 1 - (1-\varepsilon)^\theta$, հայտանիշն *անշեղ է*: **213.** $\alpha = 0.38$, $W_\varphi(\theta) = 1 - \sum_{i=0}^{5} C_{10}^i\, \theta^i (1-\theta)^{10-i}$: **214.** ա) $\alpha_\varphi(\theta) = 0.252\ (0.132)$, բ) $c = 14$: **215.** $\beta_\varphi(0.3) \approx 0.4$, $c_\alpha = 6$: **216.** Վարկածը *չի հերքվում*, $W_\varphi(\theta) = \Phi(2\theta - z_\alpha)$, հայտանիշն *անշեղ է և ունակ*: **217.** Վարկածները *չեն հերքվում*:

§ 14. Երկու պարզ վարկածի սուգում: Նեյման – Պիրսոնի ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ

218. $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{\overline{x^n} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} \leq -z_\alpha\right\}$, $\beta_\varphi(\theta_1) = \Phi\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma}\sqrt{n} + z_\alpha\right)$, $W_\varphi(\theta_1) = \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma}\sqrt{n} - - z_\alpha\right)$, հայտանիշն *ունակ է և անշեղ*: **219. 1.** $(\boldsymbol{\theta_1^2 > \theta_0^2})$՝ ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \geq \geq \chi_\alpha^2(n)\right\}$, բ) $\alpha_\varphi(\theta_0) = \alpha$, $\beta_\varphi(\theta_1) = \mathbb{H}_n\left(\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2} \cdot \chi_\alpha^2(n)\right)$, գ) հայտանիշն *անշեղ է*: **2.** $(\boldsymbol{\theta_1^2 < \theta_0^2})$ ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n : \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)\}$, բ) $\alpha_\varphi(\theta_0) = \alpha$, $\beta_\varphi(\theta_1) = 1 - \mathbb{H}_n\left(\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2}\, \chi_{1-\alpha}^2(n)\right)$, գ) հայտանիշն *անշեղ է*: **220. 1.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n \in \mathcal{X}^n : n \cdot \overline{x^n} \leq c_1(\alpha)\}$, $c_1 = c_1(\alpha)$ - ն բավարարում է $\alpha'' = \mathbb{B}(c_1; n, \theta_0) < \alpha \leq \mathbb{B}(c_1 + 1; n, \theta_0) = \alpha'$ պայմանը, $\alpha' = \alpha$ դեպքում այն կլինի **ոչ ռանդոմիզացված**, բ) $W_{\varphi^*}(\theta_1) = \mathbb{B}(c_1 + 1; n, \theta_1)$: **2.** ա) $\alpha < \alpha'$ դեպքում **ռանդոմիզացված** հայտանիշն է

$$\varphi^*(x^n)=\begin{cases}1, & \text{եթե } n\cdot\overline{x^n}<c_1\\ \varepsilon_\alpha=\dfrac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''}, & \text{եթե } n\cdot\overline{x^n}=c_1\\ 0, & \text{եթե } n\cdot\overline{x^n}>c_1\end{cases},$$

բ) $W_{\varphi^*}(\theta_1)=\mathbb{B}(c_1;\,n,\,\theta_1)+(\alpha-\alpha'')\cdot\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{c_1}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-c_1}$: **221.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\left\{x^n:\ \frac{\overline{x^n}-\theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\cdot\sqrt{n}\le\right.$ $\left.\le -z_\alpha\right\}$, $W_\varphi(\theta_1)\sim\Phi\left(\frac{c_\alpha(n)-n\cdot\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}}\right)$, $c_\alpha(n)=n\theta_0-z_\alpha\cdot\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}$: **222. 1.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x^n\in$ $\in\mathcal{X}^n\colon T_n=n\cdot\overline{x^n}\ge c_1(\alpha)\}$, $c_1=c_1(\alpha)$ - ն բավարարում է $\alpha''=1-\mathbb{\Pi}_{\theta_0}(c_1+1)<\alpha\le$ $\le 1-\mathbb{\Pi}_{\theta_0}(c_1)=\alpha'$ պայմանը, $\alpha'=\alpha$ դեպքում այն կլինի **ոչ ռանդոմիզացված**, բ) $W_{\varphi^*}(\theta_1)=1-\mathbb{\Pi}_{\theta_1}(c_1)$: **2.** ա) $\alpha<\alpha'$ դեպքում **ռանդոմիզացված** հայտանիշն է՝

$$\varphi^*(x^n)=\begin{cases}1, & \text{եթե } T_n\ge c_1\\ \varepsilon_\alpha=\dfrac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''}, & \text{եթե } T_n=c_1\\ 0, & \text{եթե } T_n<c_1\end{cases},$$

հզորությունը՝ $W_{\varphi^*}(\theta_1)=\left(1-\mathbb{\Pi}_{\theta_1}(c_1+1)\right)+(\alpha-\alpha'')\cdot\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{c_1}e^{-n(\theta_1-\theta_0)}$: **223. 1.** $\boldsymbol{\theta_1>\theta_0}$՝ $\mathcal{X}_{1\alpha}=\left\{x^n:\ \frac{\overline{x^n}-\theta_0}{\sqrt{\theta_0}}\sqrt{n}\ \ge\ z_\alpha\right\}$, $W_\varphi(\theta_1)\approx\Phi\left(\frac{\theta_1-\theta_0}{\sqrt{\theta_1}}\sqrt{n}-z_\alpha\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta_1}}\right)$ մեծ n – երի դեպքում: **2.** $\boldsymbol{\theta_1<\theta_0}$՝ $\mathcal{X}_{1\alpha}=\left\{x^n:\ \frac{\overline{x^n}-\theta_0}{\sqrt{\theta_0}}\cdot\sqrt{n}\ \le -z_\alpha\right\}$, $W_\varphi(\theta_1)\approx\Phi\left(\frac{\theta_0-\theta_1}{\sqrt{\theta_1}}\cdot\sqrt{n}-z_\alpha\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta_1}}\right)$: **224. 1.** ա) α չափի Նեյման – Պիրսոնի հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն է՝ $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x^n\colon n\cdot\overline{x^n}\ge c_1(\alpha)\}$, $c_1=c_1(\alpha)$ - ն բավարարում է $\alpha''\equiv 1-\mathbb{B}(c_1+1;\,kn,\,\theta_0)<\alpha\le 1-\mathbb{B}(c_1;\,kn,\,\theta_0)\equiv\alpha'$ պայմանը, $\alpha'=\alpha$ դեպքում կլինի **ոչ ռանդոմիզացված**, բ) հզորությունը՝ $W_{\varphi^*}(\theta_1)=1-\mathbb{B}(c_1;\,kn,\theta_1)$: **2.** ա) $\alpha<$ $<\alpha'$ դեպքում **ռանդոմիզացված** հայտանիշն է՝

$$\varphi^*(x^n)=\begin{cases}1, & \text{եթե } n\cdot\overline{x^n}>c_1\\ \varepsilon_\alpha=\dfrac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''}, & \text{եթե } n\cdot\overline{x^n}=c_1\\ 0, & \text{եթե } n\cdot\overline{x^n}<c_1\end{cases}:$$

բ) $W_{\varphi^*}(\theta_1)=1-\mathbb{B}(c_1+1;\,nk,\theta_1)+(\alpha-\alpha'')\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{c_1}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{nk-c_1}$: **225.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\left\{x^n:\sum_{i=1}^n x_i\le\right.$ $\left.\le\frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{1-\alpha}(2n)\right\}$, $W_{\varphi^*}(\theta_1)=\mathbb{H}_{2n}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\chi^2_{1-\alpha}(2n)\right)$: **226.** $\mathcal{X}_1=\{x\in\mathbb{R}\colon(c-1)x^2-2cx+2c-1\le 0\}$, $\boldsymbol{c=1}$՝ $\mathcal{X}_1=\{x\in\mathbb{R}:\ x\ge\frac{1}{2}\}$, $\alpha_\varphi(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta_\varphi(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{c=2}$՝ $\mathcal{X}_1=$ $=\{x\in\mathbb{R}\colon 1\le x\le 3\}$, $\alpha_\varphi(0)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}3-\frac{\pi}{4}\right)$, $\beta_\varphi(1)=1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2$: **227.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{t\colon T=t>$ $>z_\alpha\}$, բ) $m_0=\left[\frac{n(z_\alpha+z_\beta)^2\sigma_2^2}{n\Delta^2-(z_\alpha+z_\beta)^2\sigma_1^2}\right]+1$: **228.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x\in\mathbb{R}:x\le\sqrt{\alpha}\}$, $W_\varphi(\mathbb{P}_1)=1-\left(1-\sqrt{\alpha}\right)^2$: **229.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x\in\mathbb{R}:x\ge 1-\alpha\}$, $\beta_\varphi(\mathbb{P}_1)=(1-\alpha)^2$: **230.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x\in\mathbb{R}\colon 0\le x\le\alpha\}$, $W_\varphi(\mathbb{P}_1)=$ $=1-e^{-\alpha}$: **231.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x^n\colon\theta_0(\overline{x^n}-\theta_0^{-1})\sqrt{n}\le -z_\alpha\}$, $W_\varphi(\theta_1)\to 1$, երբ $n\to\infty$: **232.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=$ $=\left\{x^n\colon\overline{x^n}\le\frac{1-\theta_0}{\theta_0}+\frac{1-\theta_0}{\theta_0^2}\cdot\frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right\}$, $W_\varphi(\theta_1)\to 1$, երբ $n\to\infty$: **233.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x\in\mathbb{R}\colon x<\sqrt{\alpha}\}$, $W_\varphi(\theta)=$ $=\alpha^{\theta/2}$: **234.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x\in\mathbb{R}\colon x\ge 1-\alpha\}$, $W_\varphi(\theta)=1-(1-\alpha)^{\theta+1}$: **235.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x^n\colon\sum_{i=1}^n x_i\le$ $\le 2\}$, $W_\varphi(1/4)=0.526$: **236.** $\mathcal{X}_{1\alpha}=\{x^n\colon\sum_{i=1}^n x_i\ge 14\}$՝ վարկածը $\alpha=0.058$ մակարդակով *չի հերքվում*, $\beta_{\varphi}(0.7) = 0.392$: **237.** $\alpha = 0.01$ մակարդակով վարկածը *չի հերքվում*, $\alpha = 0.05$ – ով այն *հերքվում է*, $\beta_{\varphi}(3/4) \approx 0.001$, երբ $\alpha = 0.01$ և $\beta_{\varphi}(3/4) \approx 0.0001$, երբ $\alpha = 0.05$: **238.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n\colon \sum_{i=1}^{n} x_i > 0\}$, որտեղ $\sum_{i=1}^{n} x_i$՝ n անկախ փորձերում դրական ելքերի թիվն է ($x_i = 0$ կամ $x_i = 1$), $\alpha_{\varphi}(0) = 0$, $\beta_{\varphi}(0.01) = (0.99)^n$, $n \geq 454$: **239.** Վարկածը *հերքվում է*, $W_{\varphi}(2) = 0.895$: **240.** Վարկածը *հերքվում է*: **241.** $W_{\varphi^*}(2) = 0.755$, $\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } \sum x_i > 18 \\ 3/7, \text{ եթե } \sum x_i = 18 \\ 0, \text{ եթե } \sum x_i < 18 \end{cases}$: **242.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n \in \mathcal{X}^n\colon \overline{x^n} \geq 16\}$, $\alpha_{\varphi}(15) = 0.05$, $\beta_{\varphi}(20) \approx 0$, բ) $n_0 = 6$: **243.** Վարկածը *չի հերքվում*, $W_{\varphi}(\theta_1) \approx 0.986$: **244.** Վարկածը *չի հերքվում*: **245.** Վարկածը *հերքվում է*, $W_{\varphi}(\theta_1) \approx 1$:

§ 15. Միակողմանի բարդ վարկածների ստուգում

246. ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x^n} - \theta_0) > z_\alpha\right\}$, $W_{\varphi}(\theta) = \Phi\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_\alpha\right)$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x^n} - \theta_0) < -z_\alpha\right\}$, $W_{\varphi}(\theta) = \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sigma}\sqrt{n} - z_\alpha\right)$: **247.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_0^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n)\right\}$, $W_{\varphi}(\theta) = \mathbb{H}_n\left(\frac{\theta_0^2}{\theta^2} \cdot \chi^2_{1-\alpha}(n)\right)$: **248.** ա) $\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(x^n) > c_1(\alpha) \\ \varepsilon_\alpha = \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & \text{եթե } T(x^n) = c_1(\alpha) \\ 0, & \text{եթե } T(x^n) < c_1(\alpha) \end{cases}$,

$T(x^n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\alpha'' = 1 - \mathbb{B}(c_1(\alpha) + 1;\, kn,\, \theta_0) < \alpha \leq 1 - \mathbb{B}(c_1(\alpha);\, kn,\, \theta_0) = \alpha'$,

բ) $\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(x^n) < c_1(\alpha) \\ \varepsilon_\alpha = \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & \text{եթե } T(x^n) = c_1(\alpha) \\ 0, & \text{եթե } T(x^n) > c_1(\alpha) \end{cases}$: $\alpha'' = \mathbb{B}(c_1(\alpha);\, kn,\, \theta_0) < \alpha \leq \mathbb{B}(c_1(\alpha) + 1; kn, \theta_0) = \alpha'$: **249.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \frac{\overline{x^n} - k\theta_0}{\sqrt{k\theta_0(1-\theta_0)}} \cdot \sqrt{n} \geq z_\alpha\right\}$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \frac{\overline{x^n} - k\theta_0}{\sqrt{k\theta_0(1-\theta_0)}} \cdot \sqrt{n} \leq -z_\alpha\right\}$:

250. ա) $\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(x^n) > c_1(\alpha) \\ \varepsilon_\alpha = \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & \text{եթե } T(x^n) = c_1(\alpha) \\ 0, & \text{եթե } T(x^n) < c_1(\alpha) \end{cases}$,

որտեղ $\alpha'' = 1 - \mathbb{\Pi}_{n\theta_0}(c_1(\alpha) + 1) < \alpha \leq 1 - \mathbb{\Pi}_{n\theta_0}(c_1(\alpha)) = \alpha'$,

բ) $\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(x^n) < c_1(\alpha) \\ \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & \text{եթե } T(x^n) = c_1(\alpha) \\ 0, & \text{եթե } T(x^n) > c_1(\alpha) \end{cases}$,

որտեղ $\alpha'' = \mathbb{\Pi}_{n\theta_0}(c_1(\alpha)) < \alpha \leq \mathbb{\Pi}_{n\theta_0}(c_1(\alpha) + 1) = \alpha'$: **251.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \frac{\overline{x^n} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}}\sqrt{n} \geq z_\alpha\right\}$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \frac{\overline{x^n} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \cdot \sqrt{n} \leq -z_\alpha\right\}$: **252.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{2\theta_0} \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2n)\right\}$, $W_{\varphi^*}(\theta) =$

$= \mathbb{H}_{2n}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\cdot\chi^2_{1-\alpha}(2n)\right)$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \sum_{i=1}^n x_i \ \geq \ \frac{1}{2\theta_0}\cdot\chi^2_{\alpha}(2n)\right\}$, $W_{\varphi^*}(\theta) = 1 - \ \mathbb{H}_{2n}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\cdot\chi^2_{\alpha}(2n)\right)$: **253.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \ \theta_0(\ \overline{x^n} - \theta_0^{-1})\sqrt{n} \ \leq -z_\alpha\right\}$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \ \theta_0(\ \overline{x^n} - \theta_0^{-1})\sqrt{n} \ \geq \ z_\alpha\right\}$: **254.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon T(x^n) \geq \ \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}\right\}$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon T(x^n) \ \leq \ \theta_0 \sqrt[n]{\alpha}\right\}$: **255.** Վարկածը *չի հերքվում*: **256.** Վարկածը *չի հերքվում*: **257.** Վարկածը *հերքվում է*: **258.** Վարկածը *չի հերքվում*: **259.** Վարկածը *չի հերքվում*: **260.** Վարկածը *հերքվում է* : **261.** Վարկածը *չի հերքվում*: **262.** Վարկածը *հերքվում է*: **263.** Վարկածը *չի հերքվում* (ավտոդողերն ընդունելը *նպատակահարմար չէ*): **264.** Վարկածը *հերքվում է*՝ ավտոդողերը *կընդունվեն*, $\beta_\varphi(38\,000) = 0.8133$: ա) $n_0 \approx 123$, բ) $\alpha \approx 0.0045$: **265.** ա) Վարկածը *հերքվում է*, բ) $\alpha = 0.002$, գ) $\beta_\varphi(70) \approx 0{,}055$, դ) $n_0 \approx 28$: **266.** $\mathbb{H}_0$: $\mu = 3200$ պ.մ. վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\mu < 3200$ պ.մ. երկընտրանքայինի *հերքվում է*՝ աղյուսը կարելի է օգտագործել շինարարության համար: **267.** Վարկածը *չի հերքվում*: **268.** Վարկածը *հերքվում է*, գործարանի ղեկավարության հայտարարությունը *մերժվեց*: **269.** Վարկածը *հերքվում է*, ընկերությունը կարող է ընդունել բարելավումների ծրագիրը: **270.** Վարկածը *չի հերքվում*, ֆինանսական տեսաբանների հայտարարությունը *չհամապատասխանեց* փորձի արդյունքներին:

§ 16. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ երկընտրանքային վարկածը

271. $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{\alpha_2}(2n) \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{1-\alpha_1}(2n)\right\}$, $W_{\varphi^*}(\theta) = \mathbb{H}_{2n}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\cdot\chi^2_{1-\alpha_1}(2n)\right) - \mathbb{H}_{2n}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\cdot\chi^2_{\alpha_2}(2n)\right)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$: **272.** $\varphi^*(x^n) = \begin{cases} 1, \ \text{եթե} \ \ T(x^n) < c_1 \ \ \text{կամ} \ \ T(x^n) > c_2 \\ \varepsilon_i, \ \text{եթե} \ \ T(x^n) = c_i\,, \ i = 1, 2 \\ 0, \ \text{եթե} \ \ c_1 < T(x^n) < c_2 \end{cases}$,

որտեղ $T(x^n) = \sum_{i=1}^n x_i$, իսկ c_i և ε_i , $i = 1, 2$ թվերը գտնվում են հետևյալ պայմաններից՝

$$\mathbb{B}(c_2;\, n,\, \theta_0) - \mathbb{B}(c_1 + 1;\, n,\, \theta_0) \ + \sum_{i=1}^{2}(1-\varepsilon_i)[\mathbb{B}(c_i + 1;\, n,\, \theta_0) - \mathbb{B}(c_i;\, n,\, \theta_0)] \ = 1 - \alpha\,,$$

$$\mathbb{B}(c_2 - 1;\, n\, - 1, \theta_0) - \mathbb{B}(c_1;\, n - 1, \theta_0) + \sum_{i=1}^{2}(1-\varepsilon_i)[\mathbb{B}(c_i;\, n - 1, \theta_0) - \mathbb{B}(c_i - 1;\, n - 1, \theta_0)] = 1 - \alpha :$$

273. $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \left|\frac{\overline{x^n} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\sqrt{n}\right| \geq \ z_{\alpha/2}\right\}$, $W_{\varphi^*}(\theta) = \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\sqrt{n} - z_{\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\sqrt{n} - z_{\alpha/2}\right)$: **274.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon \ \left|\frac{\overline{x^n} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}}\sqrt{n}\right| \geq z_{\alpha/2}\right\}$, $W_{\varphi^*}(\theta) = \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{\theta_0}}\sqrt{n} - \ z_{\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}}\sqrt{n} - z_{\alpha/2}\right)$: **275.** Վարկածը *չի հերքվում*: **276.** Վարկածը *հերքվում է*: **277.** Վարկածը *չի հերքվում*: **278.** **0.02** մակարդակով վարկածը *չի հերքվում*, **0.03** - ով՝ *հերքվում է*: **279.** Վարկածը *չի հերքվում*, $\mathbb{P}$ -արժեքը հավասար է 0.3174: **280.** Վարկածը *չի հերքվում*, $\mathbb{P}$ -արժեքը հավասար է 0.484 : **281.** **0.01** մակարդակով վարկածը *չի հերքվում*, **0.03** -ով այն *հերքվում է*: **282.** Վարկածը *չի հերքվում*: **283.** ա) Վարկածը *չի հերքվում*, բ) $\beta_\varphi(94) \approx 0.224$: **284.** Տոմսի գինը **0.05** մակարդակով *փոխվել* է, $\alpha_{max} = 0.0119$: **285.** *Հարաբերությունը* *չի փոխվել* :

§ 17. Վարկածների ստուգում և միջակայքային գնահատականներ

286. ՀԱՀ հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն է՝ $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0) = \left\{x^n\colon (\overline{x^n} - \theta_0)\, \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < -z_\alpha\right\}$: **287.** $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0) = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < \chi^2_{1-\alpha_1}(n) \;\cup\; \frac{1}{\theta_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 > \chi^2_{\alpha_2}(n)\right\}$, ՀԱՀ հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն է, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ և $\frac{\chi^2_{\alpha_2}(n)}{\chi^2_{1-\alpha_1}(n)} = \exp\left\{\frac{1}{n}\left(\chi^2_{\alpha_2}(n) - \chi^2_{1-\alpha_1}(n)\right)\right\}$: **288.** ՀԱՀ հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն է՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 > \chi^2_\alpha(n)\right\}$ $\left(\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n)\right\}\right)$: **289.** $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_{10}) = \left\{x^n\colon (\overline{x^n} - \theta_{10})\frac{\sqrt{n-1}}{s} > t_\alpha(n-1)\right\}$, $\left(\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_{10}) = \left\{x^n\colon (\overline{x^n} - \theta_{10})\frac{\sqrt{n-1}}{s} < -t_\alpha(n-1)\right\}\right)$: **290.** $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_{20}^2) = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_{20}^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^n})^2 < \chi^2_{1-\alpha_1}(n-1) \;\cup\; \frac{1}{\theta_{20}^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^n})^2 > \chi^2_{\alpha_2}(n-1)\right\}$, որտեղ $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ և $\frac{\chi^2_{\alpha_2}(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha_1}(n-1)} = \exp\left\{\frac{1}{n}\left(\chi^2_{\alpha_2}(n-1)\right) - \chi^2_{1-\alpha_1}(n-1)\right\}$: **291.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_{20}^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^n})^2 > \chi^2_\alpha(n-1)\right\}$ $\left(\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \frac{1}{\theta_{20}^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^n})^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}\right)$: **292.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n\colon x_{(1)} \le \theta_0 \;\cup\; x_{(1)} \ge \theta_0 - \frac{1}{n}\ln\alpha\right\}$: **293.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n\colon x_{(n)} \le \theta_0 \cdot \sqrt[n]{\alpha} \;\cup\; x_{(n)} \ge \theta_0\}$: **294.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n : \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \le \frac{1}{2\theta_0^\lambda}\cdot \chi^2_{1-\alpha/2}(2n) \;\cup\; \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \ge \frac{1}{2\theta_0^\lambda}\cdot\chi^2_{\alpha/2}(2n)\right\}$: **295.** Վարկածը *հերքվում է*: **296.** Վարկածը *չի հերքվում*: **297.** ա) Վարկածը *չի հերքվում*, բ) Վարկածը *չի հերքվում*: **298.** Վարկածը *չի հերքվում*: **299.** Վարկածը *չի հերքվում*: **300.** Վարկածը *չի հերքվում*: **301.** Վարկածը *հերքվում է*: **302.** Վարկածը *հերքվում է*: **303.** Վարկածը *չի հերքվում*: **304.** Վարկածը *հերքվում է*: **305.** $\mathbb{H}_0 : \mu = 100$ սմ^3 վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \mu \ne 100$ սմ^3 երկընտրանքայինի *չի հերքվում*: **306.** $\mathbb{H}_0 : \mu \le 28.9$ °C վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \mu > 28.9$ °C երկընտրանքայինի *չի հերքվում*: **307.** Վարկածը *չի հերքվում*: **308.** Վարկածը *չի հերքվում*: **309.** Վարկածը *հերքվում է*, տվյալները *չեն հակասում* հայտարարությանը: **310.** Ստուգվում է $\mathbb{H}_0^+ : \boldsymbol{\sigma \ge 2}$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \boldsymbol{\sigma < 2}$ երկընտրանքայինի, ըստ ստացված տվյալների ընկերության պահանջները 0.01 մակարդակով *չեն բավարարվում*: ***Երկու նմուշ՝*** **311.** $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \{(x^n, y^m)\colon z_0 < -z_\alpha\}$, $\mathcal{X}_{1\alpha}^+ = \{(x^n, y^m)\colon z_0 > z_\alpha\}$, $z_0 = \frac{\overline{x^n} - \overline{y^m} - \tau_0}{\sigma}$, $\sigma^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}$: **312.** $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \left\{(x^n, y^m)\colon z_{n,m}^0 < -z_\alpha\right\}$, $\mathcal{X}_{1\alpha}^+ = \left\{(x^n, y^m)\colon z_{n,m}^0 > z_\alpha\right\}$, $z_{n,m}^0 = \frac{\overline{x^n} - \overline{y^m} - \tau_0}{s}$, $s^2 = \frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}$, $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^n})^2$, $s_y^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (y_i - \overline{y^m})^2$: **313.** $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \{(x^n, y^m)\colon t_0 < -t_\alpha(n+m-2)\}$, $\mathcal{X}_{1\alpha}^+ = \{(x^n, y^m)\colon t_0 > t_\alpha(n+m-2)\}$, $t_0 = \frac{\overline{x^n} - \overline{y^m} - \tau_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$, $s_p^2 = \frac{n}{n+m-2}\cdot s_x^2 + \frac{m}{n+m-2}\cdot s_y^2$: **314.** $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \left\{(x^n, y^m)\colon z_{n,m}^0 < -z_\alpha\right\}$, $\mathcal{X}_{1\alpha}^+ = \left\{(x^n, y^m)\colon z_{n,m}^0 > z_\alpha\right\}$, $z_{n,m}^0 = \frac{\overline{x^n} - \overline{y^m}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\widehat{\theta}\,(1-\widehat{\theta})}}$: **315.** ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{(x^n, y^m)\colon |t_0| \ge t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \{(x^n, y^m)\colon t_0 \le -t_\alpha(n-1)\}$, գ) $\mathcal{X}_{1\alpha}^+ = \{(x^n, y^m)\colon t_0 \ge t_\alpha(n-1)\}$, $t_0 = \frac{\overline{z^n} - \tau_0}{s_z}\sqrt{n-1}$, $\overline{z^n} = \overline{x^n} - \overline{y^n}$, $s_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (z_i - \overline{z^n})^2$, $z_i = x_i - y_i$: **316.** $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \left\{(x^n, y^m)\colon \frac{s_{0x}^2}{s_{0y}^2} \le S_{1-\alpha}(n-1, m-1)\right\}$,

$\mathcal{X}_{1\alpha}^{+} = \left\{(x^n, y^m): \frac{s_{0x}^2}{s_{0y}^2} \geq S_\alpha(n-1, m-1)\right\}$: **317.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x^n, y^m): t_{n,m} \leq S_{1-\alpha/2}(2n, 2m) \cup$ $\cup\ t_{n,m} \geq S_{\alpha/2}(2n, 2m)\}$ $\left(\mathcal{X}_{1\alpha}^{-} = \{(x^n, y^m): t_{n,m} \leq S_\alpha(2n, 2m)\},\ \mathcal{X}_{1\alpha}^{+} = \{(x^n, y^m): t_{n,m} \geq\right.$ $\left.\geq S_{1-\alpha}(2n, 2m)\}\right)$, $t_{n,m} = \frac{\overline{x^n}}{\overline{y^m}}$: **318.** Վարկածը *հերքվում է*: **319.** Վարկածը *չի հերքվում*: **320.** Վարկածը *չի հերքվում*: **321.** Վարկածը *չի հերքվում*: **322.** Վարկածը *չի հերքվում*: **323.** Վարկածը *չի հերքվում*: **324.** Վարկածը *չի հերքվում*, I տեսակի պլաստմասսան *կընդունվի*: **325.** Վարկածը *հերքվում է*: **326.** «Ռեյտինգների» միջև *էական տարբերություն չկա*: **327.** Ցրվածքների միջև *էական տարբերություն չկա*: **328.** Վարկածը *հերքվում է*, միջին թվերը տարբերվում են: **329.** Տեսական անխափան աշխատելու ժամանակները *նույնն են*:

§ 18. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ

330. $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n: \overline{x^n} < \theta_0 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right\}$: **331.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n: 2n\left[\theta_0 - \overline{x^n} - \overline{x^n} \cdot \ln\frac{\theta_0}{\overline{x^n}}\right] > \chi_\alpha^2(1)\right\}$ կամ $\mathcal{X}_{1\alpha}' = \left\{x^n: \frac{|x^n - \theta_0|}{\sqrt{\theta_0}} \cdot \sqrt{n} \geq z_{\alpha/2}\right\}$: **332.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n: 2n\left\{\overline{x^n}\left[\ln\frac{\overline{x^n}}{1+\overline{x^n}} - \ln(1-\theta_0)\right] - \ln(1+\overline{x^n}) - \right.\right.$ $\left.\left.- \ln\theta_0\right\} \geq \chi_\alpha^2(1)\right\}$: **333.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{(x^n, y^m): 2\left[\ln\frac{n^n m^m}{(n+m)^{n+m}} - n\ln T_1 - m\ln T_2\right] \geq \chi_\alpha^2(1)\right\}$, $T_1 =$ $= \sum_{i=1}^n X_i / [\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i]$, $T_2 = \sum_{i=1}^m Y_i / [\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i]$: **334.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{x^n: 2\sum_{j=1}^k n_j \cdot$ $\cdot\, \bar{x}_j(\ln\bar{x}_j - \ln\overline{x^n}) \geq \chi_\alpha^2(k-1)\}$: **335.** $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{x^n: \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{\sigma_j^2} \cdot (s_{0j}^2 - s_j^2) \geq \chi_\alpha^2(k-1)\right\}, n = \sum_{j=1}^k n_j$, $s_{0j}^2 = \frac{1}{n_j}\sum_{m=1}^{n_j}(x_{jm} - \theta_0)^2$, $s_j^2 = \frac{1}{n_j}\sum_{m=1}^{n_j}(x_{jm} - \bar{x}_j)^2$, $\bar{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{m=1}^{n_j} x_{jm}$, $x_j^{n_j} = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j})$: **336.** Վարկածը *չի հերքվում*: **337.** Վարկածը *չի հերքվում*: **338.** Վարկածը *չի հերքվում*: **339.** Վարկածը *չի հերքվում*: **340.** Վարկածը *հերքվում է*: **341.** Վարկածը *հերքվում է*: **342.** Վարկածը *չի հերքվում*: **343.** Վարկածը *չի հերքվում*: **344.** Ժամանակները *նույնն են*:

§ 19. Պիրսոնի χ^2 – համաձայնության հայտանիշ

345. Վարկածը *հերքվում է*: Իրական հասանելի նշանակալիության մակարդակը՝ ℙ **արժեքը** (P.V.) ≈ 0.004 - ի: **346.** $\mathbb{H}_0: p_0 = \cdots = p_9 = \frac{1}{10}$ վարկածը *չի հերքվում*: $\alpha > 0.44$ մակարդակների համար $\mathbb{H}_0$ վարկածը՝ *կհերքվի*: **347.** Վարկածը *չի հերքվում,* ℙ *արժեքը* (P.V.) ≈ 0.26 : **348.** $\tilde{\lambda} = 3$ դեպքում *համաձայնությունը* վարկածի հետ *լավն է* (ℙ արժեքը (P.V.) ≈ 0.3): **349.** Վարկածը *հերքվում է,* ℙ *արժեքը* հավասար է (P.V.) ≈ 0.02: **350.** Վարկածը *չի հերքվում*, համաձայնությունը *լավն է* (ℙ արժեքը (P.V.) ≈ 0.65): **351.** Համաձայնությունը $\mathbb{H}_0: p_1^0 = \cdots = p_{12}^0 = \frac{1}{12}$ վարկածի հետ *լավն է* ինչպես յուրաքանչյուր նմուշի, այնպես էլ *միացյալ* նմուշի համար: **352.** Վարկածը *չի հերքվում*, համաձայնությունը *լավն է*: **353.** Վարկածը *չի հերքվում*: **354.** Վարկածը *չի հերքվում*: **355.** Հանձնաժողովի հայտարարությունը *չի համաձայնեցվում* ստացված տվյալների հետ: **356.** Վարկածը *հերքվում է*: **357.** Վարկածը *չի հերքվում*, համաձայնությունը *լավն է*: **358.** $\mathbb{H}_0: p_i = \frac{1}{6},\ i = 1, \ldots, 6$ վարկածը *չի հերքվում*, P.V. ≈ 0.1: **359.** $\mathbb{H}_0: p_1 = \frac{9}{16},\ p_2 = \frac{3}{16},\ p_3 = \frac{4}{16}$ վարկածը *չի հերքվում*, P.V. ≈ 0.48 : **360.** Վարկածը *չի հերքվում*, համաձայնությունը *լավն է*, P.V. ≈ 0.34: **361.** Վարկածը *չի հերքվում*:

§ 20. Կոլմոգորովի համաձայնության հայտանիշ

363. Վարկածը *չի հերքվում*, α - ի մեծագույն α_0 արժեքը, որի դեպքում վարկածը *չի հերքվի*, բավարարում է $\alpha_0 > 0.2$ պայմանը: **364.** Վարկածը *չի հերքվում*: **365.** Վարկածը *չի հերքվում*: **366.** Վարկածը *հերքվում է*: **369.** Վարկածը *հերքվում է*: **370.** Վարկածը *հերքվում է*: **371.** Վարկածը *հերքվում է*: **372.** 0.1 մակարդակով վարկածը *հերքվում է*, 0.05 մակարդակով՝ *ոչ*: **373.** Վարկածը *չի հերքվում*:

§ 21. Համասեռության հայտանիշներ

375. *Համասեռության* վարկածը *չի հերքվում*: **376.** Վարկածը *հերքվում է*, շեղումը *խիստ նշանակալի է*: **377.** Ոչ արդյունավետության վարկածը *հերքվում է*: **378.** Վարկածը *չի հերքվում*: **379.** Վարկածը *հերքվում է*: **380.** Միջոցառումները հասել են նպատակին: **381.** ա) Վարկածը *չի հերքվում*, ռադիացիոն ֆոնը *չի փոխվել*, բ) վարկածը *հերքվում է*, ռադիացիոն ֆոնը *փոխվել է* (*նվազել է*): **382.** ա) $\mathbb{H}_0$ վարկածը *հերքվում է*, էկոլոգիական վիճակը փոխվել է, բ) $\mathbb{H}_0$ վարկածը *հերքվում է*, տեղի է ունեցել էկոլոգիական վիճակի որոշ լավացում: **383.** Համասեռության վարկածը *չի հերքվում*:

§ 22. Անկախության հայտանիշներ

384. $\mathbb{E}r_S^* = 0$, $\mathbb{V}\mathbf{ar}(r_S^*) = \frac{1}{n-1}$: **385.** Վարկածը *հերքվում է*: **386.** 1) Վարկածը հստակ *հերքվում է* (իրական հասանելի նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha \approx 0.0001$), 2) վարկածը հստակ *չի հերքվում* (իրական հասանելի նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha \approx 0.63$): **387.** Անկախության վարկածը *հերքվում է*: **388.** Անկախության վարկածը *հերքվում է*: **389.** Կոռելյացիոն կապը *նշանակալի չէ*: **390.** Առկա է *բացասական* կորելյացիոն կապ: **391.** Կախվածությունը *նշանակալի է*: **392.** $r_S^B = 0.75$, $r_S^C \approx 0.54$, $r_S^D \approx 0.32$, B խմբի կորելյացիոն կապը A խմբի հետ առավել *նշանակալի է*: **393.** Ռանգային կորելյացիոն կապը *նշանակալի է*: **394.** Ռանգային կորելյացիոն կապը *նշանակալի է*: **395.** Ռանգային կորելյացիայի գործակիցը *նշանակալի է*:

§ 23. Պատահականության հայտանիշ

397. Վարկածը *հերքվում է*: **398.** Վարկածը *չի հերքվում*: **399.** Վարկածը *չի հերքվում*:

§ 24. Երկու պատահական մեծության կորելյացիոն կապը ստուգող հայտանիշ

400. Հայտանիշի *կրիտիկական տիրույթն է*՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x_1^{n_1}, y_1^{n_1}), (x_2^{n_2}, y_2^{n_2}) : \ |z_{n_1,n_2}| > z_{\alpha/2}\}$, $\mathbb{Z}_{n_1,n_2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}} \cdot (z_1 - z_2) - \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{1}{n_1-1} - \frac{1}{n_2-1}\right)$, $\mathbb{Z}_{n_1,n_2}(\omega) = z_{n_1,n_2}$, $z_i = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{X_i,Y_i}}{1-r_{X_i,Y_i}}$, r_{X_i,Y_i}- երը *նմուշային կորելյացիայի գործակիցներն* են, $i = 1, 2$: **401.** Վարկածը *հերքվում է*: **402.** *Հնարավոր է*: **403.** Վարկածը *չի հերքվում*: **404.** $r_{x,y} = 0.957$: **405.** Վարկածը *հերքվում է*: **406.** $r_{x,y} = -0.785$, վարկածը *հերքվում է*: **407.** 1) $r_{x,y} = 0.678$, 2) վարկածը *չի հերքվում*:

§ 25. Փոքրագույն քառակուսիների գնահատականներ

410. ա) և գ) մոդելները *բերվում* են գծային տեսքի, բ) և դ) մոդելները՝ *ոչ*: **413.** ա) $\hat{a} = \overline{Y^n}$, $\mathbb{V}ar(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{n}$, $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y^n})^2$, բ) $R^2 = 0$: **414.** $\hat{b} = (\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i)/(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$, $\mathbb{V}ar(\hat{b}) = \sigma^2/(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$, $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$: **415.** $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\tilde{b}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^2$: **416.** $\mathbb{V}ar(\hat{b}) = \sigma^2 \cdot (\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z^n})^2)/[\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z^n}) X_i]^2$: **417.** 1) $\hat{Y} = \frac{3}{7} X - \frac{10}{7}$, $\hat{X} = 1.5\, Y + 5$, $\mathbb{s}^2_{Y|X} = 0.476$, $\mathbb{s}^2_{X|Y} = 1.667$, 2) $\hat{Y} = 0.5\, X + 0.5$, $\hat{X} = 1{,}3\, Y + 2.5$, $\mathbb{s}^2_{Y|X} = 1.75$, $\mathbb{s}^2_{X|Y} = 4.55$: **418.** $\hat{Y} = 0.7954\, X + 12.2451$, $\hat{X} = 0.6943\, Y + 28.79$: **419.** $\hat{Y} = 79.95 - 1.63\, X$, $R^2 = 0.98$: **420.** $\hat{Y} = 1.82\, X + 0.0004$, $\hat{X} = 0.25\, Y + 0.03$, $\mathbb{s}^2_{\hat{a}} = 0.0012$, $\mathbb{s}^2_{\hat{b}} = 0.02$ $(\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X)$, $\mathbb{s}^2_{\hat{c}} = 0.0002$, $\mathbb{s}^2_{\hat{d}} = 0.0004$ $(\hat{X} = \hat{c} + \hat{d}Y)$: **421.** $\hat{a} = -3.504$, $\hat{b} = 0.494$, $\mathbb{s}^2_{\hat{a}} = 0.1$, $\mathbb{s}^2_{\hat{b}} = 0.009$: **422.** $\hat{Y} = 0.9333 - 0.4475\, X$, $\hat{X} = 1 - 0.4865\, Y$, $\mathbb{s}^2_{Y|X} = 0.4135$, $\mathbb{s}^2_{X|Y} = 0.0136$: **423.** ա) $\hat{Y} = 0.0348\, X + 9.9074$, $R^2 = 0.09$, $\mathbb{s}^2 = 0.82$, $\mathbb{s}^2_{\hat{a}} = 0.4024$, $\mathbb{s}^2_{\hat{b}} = 0.0001$, բ) $\hat{Y} = 0.7214\, X + 10.11$, $R^2 = 0.6$, $\mathbb{s}^2 = 42.9$, $\mathbb{s}^2_{\hat{a}} = 2.4538$, $\mathbb{s}^2_{\hat{b}} = 0.0018$: **424.** ա) $\hat{Y} = 2.4857 + 1.8\, X + 0.8571\, X^2$, բ) $\hat{Y} = -0.6 + 1.08\, X - 0.24\, X^2$, գ) $\hat{Y} = -1.9257 - 0.28\, X + 1.5429\, X^2$, դ) $\hat{Y} = 4 - 2.1643\, X + 0.2679\, X^2$: **425.** $\hat{b}_1 = \left(n \sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{X_i} - (\sum_{i=1}^{n} Y_i)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\right)\right)\Big/\left(n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\right)^2\right)$, $\hat{b}_0 = \overline{Y^n} - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\right)\cdot \hat{b}_1$, $\hat{Y} = 2 + \frac{12}{X}$: **426.** բ) $\hat{Y} = 27.2 + 0.7336\, X$, գ) $R^2 = 0.9878$, դ) $\mathbb{s}^2_{\hat{a}} = 26.68$, $\mathbb{s}^2_{\hat{b}} = 0.0007$: **427.** ա) $\hat{\delta\omega} = -1.0075 + \frac{7.86}{u}$, բ) $u_0 = 7.8\,\%$, գ) նվազագույն ձևով է ազդում 1 և 7 - րդ տարիներին, առավել ձևով՝ 11 - րդ տարին: **428.** $\hat{T} = 61.84 - 0.67\, t + 0.04\, t^2$:

§ 26. Վարկածների ստուգում, միջակայքային գնահատականներ և կանխատեսումներ ռեգրեսիոն մոդելներում

429. $\hat{Y} = 1.82\, X + 0.0004$ և $\hat{X} = 0.25\, Y + 0.03$ ռեգրեսիաներում 1.82 գործակիցը *նշանակալի չէ*, 0.0004, 0.25 և 0.03 գործակիցները՝ *նշանակալի են*: **430.** ա) $s_{\hat{b}} = 0.9706$, բ) $b \in (1.2045,\ 6.2555)$: **431.** Թեքվածության գործակիցը *չի փոխվել* : **432.** բ) $\hat{Y} = 15.0279 - 1.2479 \cdot X$, գ) $\hat{Y} = 8.7884,\ 7.5405,\ -9.9301$: **433.** ա) $\hat{Y} = 3.6467 + 0.7339\, X$, բ) $\mathbb{s} = 0.26$, գ) $Y_0 \in (35.2112, 36.2211)$: **434.** $\widehat{m}_0 = 1.436$, $m_0 = \mathbb{E}Y_0 \in (0.773,\ 2.099)$: **435.** ա) $\mathbb{H}_0$: $b = 0$ $(a = 0)$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $b \neq 0$ $(a \neq 0)$, բ) $\hat{a} \sim \mathbb{N}(a,\ \sigma^2_{\hat{a}})$, $\hat{b} \sim \mathbb{N}(b, \sigma^2_{\hat{b}})$, $\sigma^2_{\hat{a}} = \frac{\sigma^2}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)/(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$, $\sigma^2_{\hat{b}} = \sigma^2/(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$, գ) $n = 10$ ազատությունների աստիճանով *Ստյուդենտի* (t -) *բաշխում* կամ $m = 1$ և $n = 10$ ազատությունների աստիճանով $F-$*բաշխում*, դ) a և b գործակիցները *նշանակալի են*, ե) $a \in (15.6812, 38.5188)$, $b \in (0.6763, 0.7909)$: **436.** ա) $\hat{Y} = 1.7156 \cdot X + 1.168$, բ) $a \in (0.0519,\ 2.2841)$, $b \in (1.4257, 2.0055)$, $\mathbb{H}_0$ և $\mathbb{H}_0'$ վարկածները հերքվում են, գ) ռեգրեսիան նշանակալի է : **437.** $\hat{b} = 0.41$, $\mathbb{H}_0 : b < 1$ վարկածը *չի հերքվում* : **438.** ա) $b \in (0.0915,\ 0.2025)$ ՝ թեքվածության գործակիցը *փոխվել* է, բ) $b \in (0.055,\ 0.239)$՝ թեքվածության գործակիցը *չի փոխվել* : **439.** ա) $\hat{Y} = 1.168 + 1.7156\, X$, գ) $\mathbb{s} = 0.3737$, դ) $Y_0 \in (13.6525,\ 16.1327)$: **440.** բ) $\hat{Y} = 9.2727 + 1.4364\, X$, գ) նշանակալի է, դ) $b \in (1.105,\ 1.7678)$, ե) $m_0 = \mathbb{E}Y_0 \in (12.1378,\ 15.026)$, զ) $m' - m'' \in (5.5253,\ 8.8387)$:

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կ. Վ. Գասպարյան

ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Վ. Դերձյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Հրայր» ՍՊԸ-ում:
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Ստորագրված է տպագրության՝ 11.10.2017:
Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլը՝ 13:
Տպաքանակը՝ 250:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2017
publishing.ysu.am