20 կոպ.

Է.Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

ԵՐԵՎԱՆ 1989

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ալիքային պրոցեսների տեսության և ֆիզիկայի ամբիոն

Է. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

/Ուսումնաօժանդակ ձեռնարկ/

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ 1989

Գրախոս՝ ֆիզմաթ.գիտ.թեկն.դոց. Լ.Մ.Մովսիսյան

Ձեռնարկում շարադրված են երկրաչափական օպտիկայի դիֆրակցիայի երկրաչափական տեսության դրույթներ՝ հիմնվելով Մաքսվելի և Հելմհոլցի հավասարումների վրա: Քննարկված են կիրառական մի շարք հարցեր, այդ թվում հեղինակի ստացած արդյունքները կիրառությունների նոր եղանակների մասին: Հանգուցային հարցերը լուսաբանվում են կցված խնդիրների օգնությամբ:

Նախատեսվում է ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի բարձր կուրսերի ուսանողների համար:

Эдмонд Давидович ГАЗАЗЯН

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ
(Учебно-вспомогательное пособие)
(На армянском языке)

Издательство Ереванского университета
Ереван - 1989

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ներածական ակնարկ

Նախորդ դարի վերջերին Ջեյմս Քլարկ Մաքսվելը, ելնելով էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածման արագության չափումների արդյունքներից, հանգեց այն եզրակացությանը, որ լույսը էլեկտրամագնիսական ալիք է: 1888 թվականին այս եզրակացությունը փորձով հաստատեց Հայնրիխ Հերցը: Այսպիսով միանգամայն պարզ դարձավ, որ օպտիկական երևույթները պետք է նկարագրվեն Մաքսվելի հավասարումների շրջանակներում, իսկ երկրաչափական օպտիկայի բոլոր հայտնի օրենքները ստացվում են այս հավասարումների կարճալիքային մոտարկումից: Ավելի ուշ՝ 20-րդ դարի սկզբներին, քվանտային ֆիզիկայի ստեղծմամբ վերջ տրվեց արդեն իսկ մտացածին հակասականությանը՝ լույսի բնույթի վերաբերյալ կորպուսկուլային /քվանտային/ և ալիքային պատկերացումների միջև:

Կարևոր է, որ մինչ այս ձևավորված օպտիկական և, ընդհանրապես, ֆիզիկական պատկերացումներում քվանտային ֆիզիկայի ստեղծմամբ պայմանավորված հեղաշրջումը եղած տեսությունները միանգամայն ավելորդ չդարձրեց: Ավելին, ընդգծելով սրանց միակողմանիությունը, քվանտային ֆիզիկան հնարավորություն ընձեռեց ընդհանուր տեսանկյունից ընկալել հայտնի փաստերն ու ձևակերպումները՝ լրացնելով սրանք ֆիզիկական և փիլիսոփայական ավելի խոր բովանդակությամբ:

Այս առումով ուսանելի է օպտիկայի զարգացման պատմությունը հնագույն ժամանակներից մինչև մեր օրերը: Այն ցայտուն կերպով արտացոլում է ֆիզիկական հիմնական հասկացությունների ծագումը և մետամորֆոզները՝ մինչև սրանց վերջնական, ժամանակակից ձևակերպումները:

Մարդկային պրպտուն միտքը դեռևս հնագույն ժամանակներում /Էմպեդոկլես-5-րդ դար մ.թ.ա., Էվկլիդես-6-րդ դար մ.թ.ա./ հետաքրքրըվել է պարզագույն օպտիկական երևույթների պատճառներով, փորձել բացատրել սրանք բնության մասին եղած պատկերացումների օգնությամբ: Նրանց հայտնի էին լույսի ուղղագիծ տարածման հատկությունը, բեկման ու անդրադարձման երևույթները, կիզապակիները /ոսպնյակները/: 17-րդ դարում օպտիկական սիստեմատիկ հետազոտությունների արդյունքները /Ռենե Դեկարտ, Վելեբրորդ, Սնելիուս/ Ֆերմային հանգեցրին իր նշանավոր սկզբունքի ձևակերպմանը:

Այդ սկզբունքը, որն այժմ հայտնի է որպես փոքրագույն գործողության սկզբունք անանց նշանակություն ունեցավ բնության վերաբերյալ ֆիզիկական ու փիլիսոփայական պատկերացումների ձևավորման գործում։ Ընդհանրապես ասած՝ 17-րդ դարը վճռորոշ ժամանակաշրջան էր լույսի բնույթին վերաբերող հետազոտությունների ու պատկերացումների զարգացման մեջ։ Այսպես, Ֆրանսիսկ Գրիմալդին և ավելի ուշ՝ Ռոբերթ Հուկը դիտեցին դիֆրակցիայի երևույթը։ Վերջինս Ռոբերթ Բոյլի հետ համատեղ հայտնաբերեց նաև ինտերֆերենցիայի երևույթը՝ ելնելով բարակ թաղանթների գունավորման փորձերից։ Քրիստիան Հյույգենսը, նույն 17-րդ դարում առաջադրեց իր նշանավոր սկզբունքը, ըստ որի ալիքային ճակատի յուրաքանչյուր կետ համարվում է երկրորդային գնդային ալիքի սկզբնաղբյուր, իսկ ալիքի տարածման ուղղությունը համընկնում է այս երկրորդային ալիքային ճակատների պարուրիչի տարածման ուղղությանը։ Կիրառելով այս սկզբունքը՝ Հյույգենսը կարողացավ ապացուցել բեկման ու անդրադարձման օրենքները, ինչպես նաև բացահայտել լույսի բևեռացման երևույթը։

Հեշտ է համոզվել, որ լույսի բնույթի վերաբերյալ ստեղծված պատկերացումները հաճախ իրարամերժ էին։ Օրինակ, դեռևս հնուց հայտնի, լույսի ուղղագիծ տարածման, ինչպես նաև բևեռացման հատկությունները հակասական էին թվում նրա ալիքային բնույթին։ Լույսի բնույթի վերաբերյալ պատկերացումների զարգացման նկարագրվող փուլում վճռորոշ էր Իսահակ Նյուտոնի դերը։ Վերը նշված հակասությունը նրան դրդեց զարգացնելու լույսի կորպուսկուլային տեսությունը, ըստ որի լույսը ճառագայթող մարմնից տարածվող մանրագույն մասնիկների հոսք է։ Լույսի ալիքային բնույթի ժխտումը Նյուտոնի կողմից, իրոք, կողմնորոշող էր այն իմաստով, որ ալիքային պատկերացումները երկար ժամանակով /ընդհուպ 19-րդ դարի առաջին քառորդը, երբ Օգյուստ Ֆրենելը, սինթեզելով Յունգի ինտերֆերենցիայի սկզբունքը, բացատրեց դիֆրակցիայի երևույթը՝ որպես լույսի ալիքային բնույթի աներկբա ապացույց/ մոռացության մատնվեցին։

Նյուտոնի պատկերացումները լույսի կորպուսկուլային բնույթի վերաբերյալ պարունակում էին ֆիզիկական ավելի խոր բովանդակություն, քան կարող էր թվալ 17-րդ դարի գիտնականին։ Իրոք, պետք էր ունենալ հանճարեղ ինտուիցիա ու խորաթափանցություն, որպեսզի տեսական ու փորձարարական բազմաթիվ փաստերից հանգել այնպիսի միարժեք եզրակացության, ինչպիսին կորպուսկուլի /այժմ այն անվանում ենք լույսի քվանտ՝ ֆոտոն/ հասկացությունն էր։ Ավելին՝ Նյուտոնը փորձեց բացատրել լույսի բևեռացման երևույթը, վերագրելով կորպուսկուլային ճառագայթներին ,,կողմեր,, և հետևաբար՝ նաև ,,լայնական,, բնույթ։ Բայց այն ժամանակ ալիքային երևույթներից հայտնի էր միայն ձայնը, որը երկայնական ալիքային տատանում է և թվում էր, որ Նյուտոնի կորպուսկուլային պատկե-

րացումները լույսի ,,լայնական,, բնույթի վերաբերյալ միայն ժխտում էին ալիքային պատկերացումները։ Երբ 1905 թվականին Ալբերտ Էյնշտեյնը, զարգացնելով նախ Պլանկի գաղափարները, մտցրեց էներգիայի քվանտի /որը հենց ինքն էլ անվանեց ,,ֆոտոն,,/ հասկացությունը /բացատրելու համար ֆոտոէֆեկտի երևույթը/, նա փաստորեն նորովի վերստեղծեց Նյուտոնի կորպուսկուլային տեսությունը։ Ավելին՝ ֆոտոէֆեկտի ու բևեռացման երևույթների համադրումը լույսի բնույթի վերաբերյալ մեկ ընդհանուր պատկերացման մեջ անհրաժեշտաբար հանգեցրեց դետերմինիզմից հրաժարվելուն։ Երբ 20-րդ դարի առաջին քառորդում Բորը ձևակերպեց քվանտային մեխանիկայի հիմունքները, այն է՝ լրացումների, անորոշությունների և վերադրման սկզբունքները, վեճը լույսի ալիքային ու կորպուսկուլային բնույթների վերաբերյալ դարձավ մտացածին, իսկ հարցադրումը՝ ոչ ֆիզիկական։

Սկսած Դեկարտի ժամանակներից մինչև Ֆրենելը, և նույնիսկ ավելի ուշ, ենթադրվում էր, որ օպտիկական բոլոր երևույթների կրողը ,,եթերն,, է։

,,Եթերով,, էին բացատրվում Ֆրենելի կանխատեսած և Ֆիզոյի փորձնական դիտումներով հաստատված լուսային ճառագայթի շեղումը շարժվող մարմինների կողմից։ ,,Եթերի տատանումների,, մոդելը Ֆրենելին հանգեցրեց անդրադարձած ու բեկված ճառագայթների ինտենսիվությունների ու բևեռացումների վերաբերյալ օրենքներին։ Քրիստիան Դոփլերը նույն ,,եթերի,, հասկացության օգնությամբ ձևակերպեց իր անվամբ կոչվող սկզբունքը՝ շարժվող աղբյուրի ճառագայթած ալիքի երկարության փոփոխման օրենքը։ Մենք այժմ էլ անփոփոխ օգտվում ենք Ֆրենելի և Դոփլերի ստացած բանաձևերից, միայն թե սրանք բացատրում ենք ոչ թե ,,եթերով,,, այլ որպես Մաքսվելի հավասարումներից և հարաբերականության հատուկ տեսությունից բխող հետևություններ։ Մաքսվելի տեսության շրջանակներում բոլոր օպտիկական երևույթները նկարագրվում են սպառիչ ձևով, առանց ,,եթերի,, հասկացության։

Օպտիկայի և, ընդհանրապես, ալիքների /ինչպես էլեկտրամագնիսական, այնպես էլ սկալյար/ տարածման տեսության մի ուրույն մաս է կազմում դիֆրակցիայի տեսությունը։ Ինչպես նշվել էր վերը, դիֆրակցիայի երևույթը առաջինը նկարագրել և փորձել են բացատրել Գրիմալդին ու Հուկը դեռևս 17-րդ դարում, իսկ իր առավել զարգացումն այն ստացավ Ֆրենելի աշխատություններում։ Հետագայում /1882թ./ Կիրխհոֆը Ֆրենելի տեսությանը տվեց մաթեմատիկական հիմնավորում, որտեղից էլ սկսեց դիֆրակցիայի երևույթի մանրակրկիտ հետազոտումը։ Կիրխհոֆի տեսությունը մոտարկային է։ Սրա հիմքում ընկած են Կիրխհոֆի եզրային պայմանները, որոնք առավել ստույգ կարող են կատարվել դիֆրակցիայի փոքր անկյունների համար և կարճ ալիքների դեպքում։ Չնայած նման սահմանափակումներին՝ Կիրխհոֆի տեսությունը հսկայական դեր խաղաց դիֆրակցիայի երևույթների հետազոտման մեջ։ Անտենաների ֆիզիկայում այն մինչև օրս էլ գտնում է լայն կիրառություն և, այս իմաստով, մինչև օրս ստեղծված մոտարկային տեսություններից, թերևս, ամենամասսայականն է։ Այս տեսության հիմնական թերությունն այն հակասականությունն է, որ բովանդակում են Կիրխհոֆի եզրային պայմանները։ Բանն այն է, որ ըստ Կիրխհոֆի պատկերացումների՝ էկրանի նյութը պետք է ունենա սև մարմնին բնորոշ հատկություններ, մինչդեռ սև մարմինը չի կարող նկարագրվել Մաքսվելի հավասարումների և նրանցից բխող եզրային պայմանների շրջանակներում։

Դիֆրակցիայի ժամանակակից մաթեմատիկական տեսության սկիզբը դրվեց 1896թ., երբ Զոմերֆելդն ստույգորեն լուծեց կիսահարթության եզրային հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը։ Այս լուծումը Զոմերֆելդից պահանջեց մաթեմատիկական բարձր արվեստ ու հնարամտություն։ Այնուհանդերձ լուծման վերջնական տեսքը անսպասելիորեն բավականին պարզ էր և թույլ էր տալիս հեշտությամբ վերլուծության ենթարկել այն, հանգել որակական նոր եզրակացությունների։ Նրանցից ամենակարևորն այն էր, որ ստացված լուծումը նկարագրվում էր ընկնող ու անդրադարձած հարթ ալիքների և Ֆրենելի ֆունկցիաների կոմբինացիաների տեսքով, ըստ որում՝ որպես Ֆրենելի ֆունկցիաների արգումենտներ հանդես են գալիս ընկնող, անդրադարձած և դիֆրակցված ճառագայթների էյքոնալները։ Այլ խոսքով՝ Զոմերֆելդը ցույց տվեց, որ դիֆրակցիոն խնդրի լուծումը կարելի է ներկայացնել որպես համապատասխան երկրաչափաօպտիկական դաշտերի ավելի կամ պակաս բարդության կոմբինացիաներ, ըստ որում հաճախության մեծացմանը զուգընթաց /կարճ ալիքներ/՝ այսպիսի լուծումները ավելի մոտենում են երկրաչափական օպտիկայի մոտավորությամբ ստացված լուծումներին։ Այս հանգամանքը հուշում էր, որ հնարավոր է ստեղծել կարճալիքային մոտարկային եղանակներ, որոնց օգնությամբ հնարավոր լիներ, օգտվելով տվյալ խնդրին հատուկ երկրաչափաօպտիկական պատկերացումներից, գտնել մոտավոր, սակայն ֆիզիկական առումով ավելի ակնառու և մաթեմատիկորեն ավելի դյուրընկալ լուծում։

1957թ. Ջ.Բ.Քելլերը հրատարակեց իր առաջին հետազոտությունները երկրաչափաօպտիկական տեսության /ԴԵՏ/ վերաբերյալ։ Այս աշխատանքներում նա, փաստորեն, ընդհանրացրեց լավ հայտնի քվազիդասական /ՎՔԲ՝ Վենցել-Քրամերս-Բրիլուենի/ մեթոդը՝ առաջադրելով Ֆերմայի ընդհանրացված սկզբունքը և առաջարկելով անդրադարձած և դիֆրակցված ալիքների /ճառագայթների/ տարածման կանխադրույթները /պոստուլատները/։

ԴԵՏ-ի մեթոդը, այսպիսով, օգտվում է երկրաչափաօպտիկական պատ-

կերացումներից, որոնք համեմատաբար ավելի պարզ են, քան թե ալիքային պատկերացումները։ Այն արդեն լայն կիրառություն է գտել ալիքների տարածման և, մասնավորապես, անտենաների ֆիզիկայի հետ առնչվող խնդիրներում։ Շատ բեղմնավոր է երկու վերոհիշյալ մեթոդների՝ Կիրխհոֆի ու ԴԵՏ-ի զուգակցումը, որով նրանք մեծ հաջողությամբ լրացնում են միմյանց։

Քելլերի պատկերացումների լույսի տակ սկսեցին աստիճանաբար վերանալ այնպիսի հասկացությունների տարբերության սահմանները, ինչպիսիք են տարածվող դաշտը, ալիքն ու ճառագայթը։ ԴԵՏ-ի շրջանակներում սրանք բոլորը նույնացվում են մեկ ընդհանուր՝ ճառագայթի հասկացության մեջ։

Քանի որ ԴԵՏ-ի հիմքում ընկած են ԵՕ-ի պատկերացումները, սրան ևս հատուկ են այն սահմանափակումները, որոնք կան ԵՕ-ում։ ԴԵՏ-ը և ԵՕ-ն կիրառելի չեն, օրինակ, կաուստիկական տիրույթներում /կիզակետերում, կիզակետային գծերի ու մակերևույթների վրա/, որտեղ ԵՕ-ի ու ԴԵՏ-ի մոտավորությամբ դաշտի ամպլիտուդները տարամիտում են։ Բանն այն է, որ ԵՕ-ի մոտավորությունը ենթադրում է, որ ալիքի երկարությունը հավասար է զրոյի և, հետևաբար, ճառագայթային խողովակի լայնական կտրվածքը կարող է անվերջ նեղանալ՝ կաուստիկական մակերևույթին մոտենալիս։ Էներգիայի պահպանման օրենքի շնորհիվ այս դեպքում էներգիայի հոսքի խտությունը կձգտի անվերջության։ Իրավիճակը նման է քվանտային էլեկտրադինամիկայում հանդիպող տարամիտումներին, որոնք պայմանավորված են այն բանով, որ երկրորդային քվանտացման պայմաններում էլեկտրոնը դիտվում է որպես կետային։ Նման տարամիտումներից կարելի է խուսափել՝ վերանորմավորելով տեսությունը։ ԵՕ-ում ու ԴԵՏ-ում կարելի է ձևափոխել ստացված արտահայտություններն այնպես, որ կաուստիկական մակերևույթների վրա դաշտերի արժեքներն աճելով՝ մնան վերջավոր, իսկ կաուստիկներից հեռու տիրույթներում վերածվեն երկրաչափաօպտիկականի։

Այսպես ձևափոխված տեսությունները կոչվում են հավասարաչափ ԵՕ և հավասարաչափ ԴԵՏ։

Հավասարաչափ ԵՕ-ի և ԴԵՏ-ի մեթոդներում կարևորագույն նշանակություն է ստանում կաուստիկական մակերևույթի տիպը։ Եթե այն հարթ կոր /մակերևույթ/ է տեսության հավասարաչափ տարբերակը համեմատաբար հեշտ է կառուցել և, հակառակը, բարդ տիպի կաուստիկների համար այս բանն անելը բարդանում է։ Վերջին տարիներին սկսեց զարգանալ մաթեմատիկայի մի նոր ճյուղ՝ հարթ /անհրաժեշտ թվով դիֆերենցելի/ արտապատկերումների առանձնահատկությունների տեսությունը։ Այս տեսության հեղինակներն են ամերիկացի մաթեմատիկոս Հ.Ուիթնին, ֆրանսացի Ռ.Թոմը և սովետական մաթեմատիկոս Վ.Առնոլդը։ Ստեղծված տեսությունը Թոմն անվանեց ,,աղետների,, /կատաստրոֆների/ տեսություն,, ձգտելով ընդգծել, թե ինչպես պարամետրերի դանդաղ փոփոխումը կարող է բերել սիստեմի վիճակի /կամ շարժման/ կտրուկ, թռիչքային փոփոխման: Օպտիկայում, օրինակ, անցումը կաուստիկական տիրույթով բերում է տրված կետով անցնող ճառագայթների թվի թռիչքաձև փոփոխման:

Ալիքային պատկերացումների տեսանկյունից խոսքը ընդհանուր դեպքում բազմաչափ օսցիլացնող ինտեգրալների /որոնք կարող են գերարագ վայրընթացի եղանակով հաշվվել/ մոտարկումների առանձնահատկությունների մասին է, երբ տեղի ունի ստացիոնար փուլի կետերի /կամ ,,թամբային,, կետերի/ կուտակում: Ալիքային ճակատների և մոտարկային ինտեգրալների պարզագույն առանձնահատկությունները անսպասելի և երջանիկ պատահականությամբ նկարագրվում են Լիի պարզ խմբերի օգնությամբ. $A_K \to SU_{k+1}$, $D_K = O_{2K}$, E_6, E_7, E_8.

Կանոնավոր բազմանիստների տեսության մեջ A_K-ին համապատասխանում են կանոնավոր բազմանկյունների պտույտների, D_K-ին՝ երկանիստների /դիէդրների/, E_6-ին՝ տետրաէդրի, E_7-ին՝ օկտաէդրի և E_8-ին իկոսաէդրի խմբերը:

Այլ խոսքով՝ յուրաքանչյուր կանոնավոր բազմանիստի կհամապատասխանի կաուստիկի և ալիքային ճակատի իր առանձնահատկությունը /իր օսցիլացնող ինտեգրալը/:

Դիֆերենցելի արտապատկերումների առանձնահատկությունների տեսությունը, փաստորեն, ֆունկցիաների էքստրեմումների հետազոտության հեռագնա ընդհանրացումն է, երբ այս ֆունկցիաները փոխարինվում են արտապատկերումներով, այսինքն՝ կամայական թվով փոփոխականներից կախված կամայական թվով ֆունկցիաների հավաքածուով: Այս տեսության հիմնական եզրակացություններից մեկն այն է, որ պետք է գոյություն ունենան միայն վերջավոր թվով ստանդարտ, ունիվերսալ պատկերներ, որոնք կարող են մեկընդմիշտ, մանրակրկիտորեն ուսումնասիրվել և որոնք կարող են ճանաչվել արտահայտման տարբեր ձևերում: Այսպես՝ եռաչափ տարածության մեջ, ինչպես ապացուցել է Թոմը 1955թ., կարող են իրացվել միայն յոթ ստանդարտ առանձնահատկություններ: Այժմ սրանք անվանվում են Թոմի յոթ ,,աղետներ,, /կատաստրոֆներ/:

Տեսության մյուս կարևոր եզրակացությունն այն է, որ հնարավոր է հետազոտել ալիքային ճակատների և կաուստիկների մետամորֆոզները ժամանակի ընթացքում՝ սրանց դասակարգման շրջանակներում:

Սովետական ֆիզիկոսներ Ց.Ա.Կրավցովի և Ց.Ի.Օռլովի աշխատանքները ցույց տվեցին, թե ինչպես կարելի է կիրառել ,,աղետների,, տեսությունը ցանկացած բարդ տիպի կաուստիկական մակերևույթի տիրույթում՝ ընդհանուր ձևով ԵՕ-ի և ԴՆՏ-ի հավասարաչափ տարբերակի կառուցման համար:

Քանի որ ինչպես ԵՕ-ն, այնպես էլ ԴՆՏ-ը Մաքսվելի հավասարումների կարճալիքային մոտարկման հետևություններն են, ապա ներկա ձեռնարկը, ըստ էության, Մաքսվելի համասեռ հավասարումների կարճալիքային մոտարկման առանձնահատկությունների հետազոտությունն է:

ԳԼՈՒԽ 1

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԱՄ ՃԱՌԱԳԱՅԹԱՅԻՆ ՕՊՏԻԿԱ /ԵՕ/

1.1 ԵՕ-ն որպես Հելմհոլցի կամ Մաքսվելի հավասարումների կարճալիքային մոտարկում

Երկրաչափական կամ ճառագայթային օպտիկա /ԵՕ/ ասելով հասկանում են ալիքների տարածման տեսության կարճալիքային սահմանային դեպքը, երբ ալիքի ամպլիտուդն ու փուլը տարածության և ժամանակի ոչ մեծ հատվածներում համարվում են հաստատուն, իսկ տարածման օրենքները համընկնում են հարթ ալիքի տարածման օրենքներին:

Սահմանափակվելով ստույգ մոնոքրոմատիկ ալիքների դեպքով՝ ցույց տանք, որ ալիքի երկարության կարգի տարածության հատվածներում այս հատկություններով օժտված ալիքները, իրոք, համապատասխանում են Հելմհոլցի /սկալյար դեպք/ կամ Մաքսվելի /էլեկտրամագնիսական դեպք/ հավասարումների կարճալիքային մոտարկային լուծումներին:

Գրենք Հելմհոլցի հավասարումը կամայական անհամասեռ, իզոտրոպ, դիէլեկտրական միջավայրի համար՝

$$\Delta f + K^2\varepsilon(r) f = 0, \qquad K = \omega/c \qquad /1.1.1/:$$

/1.1.1/-ի լուծումը փնտրենք Դեբայի վերլուծության ձևով՝

$$f = e^{iK\Psi}\sum \frac{A_m}{(iK)^m}, \qquad /1.1.2/,$$

որտեղ A_m-ը կոորդինատներից կախված դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիա է, $A_{-1} = 0$, $K = \frac{\omega}{c}$-ն մեծ թիվ է: Ժամանակային կախումը՝ $e^{-i\omega t}$-ն, մոնոքրոմատիկ ալիքի համար կպայմանավորվենք ամեն անգամ չնշել:

Տեղադրենք /1.1.2/ վերլուծությունը /1.1.1/ հավասարման մեջ: Պարզ ձևափոխությունից հետո /1.1.1/ հավասարումը գալիս է հետևյալ տեսքին՝

$$\sum_m \left[\frac{\Delta A_m}{(iK)^m} + \frac{2\vec{\nabla} A_m \vec{\nabla}\Psi + A_m\Delta\Psi}{(iK)^{m-1}} + \frac{A_m(\vec{\nabla}\Psi)^2 - \varepsilon(r)A_m}{(iK)^{m-2}}\right] e^{iK\Psi} = 0 \qquad /1.1.3/:$$

Քանի որ $K = \frac{\omega}{c}$-ն մեծ թիվ է, իսկ A_m-ը կոորդինատներից կախված, դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիա, /1.1.3/-ում գրված գումարելիների

մեջ գլխավոր անդամը երրորդն է, որն ըստ կարգի ունի $\frac{1}{(iK)^{m-2}}$ մեծություն: Երկրորդ գումարելին $\frac{1}{(iK)^{m-1}}$ կարգի անվերջ փոքր է, իսկ առաջինը՝ $\frac{1}{(iK)^m}$ կարգի: Հավասարեցնելով զրոյի m-ի նույն աստիճանն ունեցող գումարելիներն առանձին-առանձին և կրճատելով $e^{iK\Psi}$ ընդհանուր բազմապատկիչը, կստանանք անդրադարձ /ռեկուրենտ/ հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{aligned} &A_0(\vec{\nabla}\Psi)^2 - \varepsilon(r)A_0 = 0, \\ &2\vec{\nabla}A_0\vec{\nabla}\Psi + A_0\Delta\Psi = -\Delta A_{-1} \equiv 0 \\ &2\vec{\nabla}A_1\vec{\nabla}\Psi + A_1\Delta\Psi = -\Delta A_0, \qquad /1.1.4/: \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &2\vec{\nabla}A_m\vec{\nabla}\Psi + A_m\Delta\Psi = -\Delta A_{m-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Սահմանափակվենք /1.1.4/-ի առաջին երկու հավասարումներով և գրենք՝

$$(\vec{\nabla}\Psi)^2 = \varepsilon(r) \qquad /1.1.5/$$

$$2\vec{\nabla}A_0\vec{\nabla}\Psi + A_0\Delta\Psi = 0 \qquad /1.1.6/:$$

Եթե /1.1.2/-ում թողնենք միայն գլխավոր անդամը /$m = 0$/՝

$$f = A_0 e^{iK\Psi} \qquad /1.1.7/$$

և անվանենք այն զրոյական մոտավորության լուծում, ապա այս լուծման փուլային ֆունկցիան կորոշվի /1.1.5/ հավասարումից, իսկ ամպլիտուդը՝ A_0-ն /1.1.6/-ից: /1.1.5/ հավասարումն անվանում են էյկոնալի հավասարում, իսկ Ψ-ն՝ էյկոնալ: Այս տերմինն ունի հունական ծագում /$\varepsilon i\chi\tilde{\omega}\nu$ - պատկեր/: Մաթեմատիկական լեզվով /1.1.5/-ը /1.1.1/ հավասարման բնութագրիչն է: Ընդունված է, ընդհանրապես, հավասարումների բնութագրիչ ֆունկցիաներն անվանել էյկոնալներ, եթե անգամ հավասարումները չեն վերաբերում ալիքների տարածման հետ կապված խնդիրներին:

/1.1.6/ հավասարումը, որտեղից որոշվում է A_0 ամպլիտուդը, անվանում են փոխադրման հավասարում: Պարզաբանելու համար սրա ֆիզիկական բովանդակությունը՝ բազմապատկենք այն A_0-ով և ինտեգրենք մի v ծավալով, որտեղ $A_0 \neq 0$: Կստանանք՝

$$\int_v div(A_0^2\vec{\nabla}\Psi)\,dv = \oint A_0^2\vec{\nabla}\Psi\, d\vec{s} \qquad /1.1.6\text{-ա}/,$$

որտեղ S -ը V ծավալը պարփակող մակերևույթն է։

Այս ձևով գրված հավասարությունն արտահայտում է էներգիայի պահպանման օրենքը՝ ըստ ալիքի տարածման $\vec{\nabla}\Psi$ ուղղության։

/1.1.1/ հավասարումը հավասարապես կիրառելի է, օրինակ, ձայնային ալիքների դեպքում, եթե $K\sqrt{\varepsilon}=\frac{\omega}{V_{ձայն}}$ ։ Իսկ, եթե $K=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$,

$\varepsilon(r)=1-\frac{U(r)}{E}$ այնպես, որ $K^2\varepsilon(r)=\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$,

որտեղ E -ն մասնիկի էներգիան է, m -ը՝ մասսան, $U/r/$-ը՝ արտաքին դաշտի պոտենցիալ էներգիան, իսկ $\hbar$ -ը՝ Պլանկի հաստատունը, ապա /1.1.1/-ը Շրեդինգերի ստացիոնար ալիքային հավասարումն է՝ գրված մասնիկի ալիքային ֆունկցիայի համար, իսկ /1.1.5/-ը և /1.1.6/-ը՝ քվազիդասական /ՎՔԲ/ զրոյական մոտավորության հավասարումները։

Էլեկտրադինամիկայում /1.1.1/-ը նկարագրում է էլեկտրամագնիսական ալիքների բոլոր էական հատկությունները, բացառությամբ բևեռացման հատկության։ Այն բոլոր խնդիրներում, որոնցում դաշտի բևեռացումը և տարբեր բաղադրիչների փուլերի միջև եղած առնչությունները էական չեն, գործնականում կարելի է սահմանափակվել /1.1.1/ հավասարմամբ ու նրա լուծումներով։ Սակայն առավել ճշգրիտ ու հետևողական լինելու նպատակով քննարկենք այս նույն մոտավորությունը՝ ելնելով Մաքսվելի հավասարումներից։

Գրենք Մաքսվելի հավասարումների առաջին զույգը կամայական, իզոտրոպ և անհամասեռ դիէլեկտրական և մագնիսական միջավայրում տարածվող մոնոքրոմատիկ ալիքի համար՝

$$rot\,\vec{E}=ik\mu(r)\vec{H}, \qquad rot\,\vec{H}=-ik\varepsilon(r)\vec{E} \qquad /1.1.8/:$$

Փնտրենք /1.1.8/ հավասարումների լուծումները,

$$\vec{E}=\frac{e^{ik\Psi}}{\sqrt{\varepsilon(r)}}\sum_m\frac{\vec{A}_m}{(ik)^m}; \quad \vec{H}=\frac{e^{ik\Psi}}{\sqrt{\mu(r)}}\sum_m\frac{\vec{B}_m}{(ik)^m} \qquad /1.1.9/$$

տեսքով, որտեղ $\varepsilon(r)$ -ը և $\mu(r)$-ն, համապատասխանաբար, միջավայրի դիէլեկտրական ու մագնիսական թափանցելիություններն են։ Տեղադրենք /1.1.9/ վերլուծությունները /1.1.8/ հավասարումներում։ Կստանանք՝

$$\sum_m\frac{[\vec{\nabla}\Psi\vec{A}_m]-\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{B}_m}{(ik)^{m-1}}=-\sum_m\frac{rot\,\vec{A}_m+\sqrt{\varepsilon}[\vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\vec{A}_m]}{(ik)^m},$$
$$\sum_m\frac{[\vec{\nabla}\Psi\vec{B}_m]+\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{A}_m}{(ik)^{m-1}}=-\sum_m\frac{rot\,\vec{B}_m+\sqrt{\mu}[\vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\vec{B}_m]}{(ik)^m} \qquad /1.1.10/:$$

Հիշենք, որ K -ն մեծ թիվ է, իսկ $\vec{A}_m$ -ը և $\vec{B}_m$ -ը կոորդինատներից կախված, դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիաներն են։ Պահանջելով նաև, որ $\vec{A}_{-1}=\vec{B}_{-1}=0$, /1.1.10/-ից կարող ենք ստանալ՝

$m=0$-ի համար՝

$$[\vec{\nabla}\Psi\vec{A}_0]-\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{B}_0=0,$$
$$[\vec{\nabla}\Psi\vec{B}_0]+\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{A}_0=0; \qquad /1.1.11/$$

$m=1$-ի համար՝

$$[\vec{\nabla}\Psi\vec{A}_1]-\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{B}_1=-rot\,\vec{A}_0+\sqrt{\varepsilon}[\vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\vec{A}_0],$$
$$[\vec{\nabla}\Psi\vec{B}_1]+\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{A}_1=-rot\,\vec{B}_0+\sqrt{\mu}[\vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{\mu}},\vec{B}_0] \qquad /1.1.12/$$

Նախ՝ /1.1.11/ գծային համասեռ հավասարումների սիստեմն ունի զրոյից տարբեր ոչ տրիվիալ լուծումներ, եթե

$$(\vec{\nabla}\Psi)^2=\varepsilon\mu, \qquad /1.1.13/$$

որը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ էյքոնալի /1.1.5/ հավասարումը՝ գրված $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ բեկման ցուցիչով միջավայրի համար։ /1.1.11/-ից հետևում է, որ $\vec{A}_0\perp\vec{B}_0$, $\vec{\nabla}\Psi\perp\vec{A}_0$ և $\vec{\nabla}\Psi\perp\vec{B}_0$։ Նշանակենք՝

$$\vec{\nabla}\Psi=\vec{\tau}\sqrt{\varepsilon\mu}, \qquad /1.1.14/$$

որից հետո /1.1.11/ ու /1.1.12/ սիստեմները կգրվեն հետևյալ տեսքով՝

$$[\vec{\tau}\vec{A}_0]-\vec{B}_0=0,$$
$$[\vec{\tau}\vec{B}_0]+\vec{A}_0=0, \qquad /1.1.11,ա/$$

$$[\vec{\tau}\vec{A}_1]-\vec{B}_1=\vec{X}_0,$$
$$[\vec{\tau}\vec{B}_1]+\vec{A}_1=\vec{Y}_0, \qquad /1.1.12,ա/$$

որտեղ մենք մտցրեցինք նշանակումներ՝

$$-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left\{rot\,\vec{A}_0+\sqrt{\varepsilon}[\vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\vec{A}_0]\right\}\equiv\vec{X}_0 \qquad /1.1.15/$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left\{rot\,\vec{B}_0+\sqrt{\mu}[\vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{\mu}},\vec{B}_0]\right\}\equiv\vec{Y}_0$$

Մտցնենք նաև $\vec{n}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, որոնք $\vec{\tau}$ վեկտորի հետ կազմում են աջ օրթոգոնալ եռյակ՝

$$\vec{\tau}=[\vec{n}\,\vec{b}]. \qquad /1.1.16/$$

/1.1.11,ա/ սիստեմը կբավարարվի բևեռացման միայն երկու դեպքում, այն է՝

$$\vec{A}_0=\vec{n} \text{ և } \vec{B}_0=\vec{b}, \text{ կամ } \vec{A}_0=\vec{b} \text{ և } \vec{B}_0=-\vec{n}. \qquad /1.1.17/$$

Ընդհանուր դեպքում $\vec{A}_0$ և $\vec{B}_0$ վեկտորական ֆունկցիաները կներկայացվեն /1.1.17/-ի գծային կոմբինացիաների տեսքով՝

$$\vec{A}_0=\vec{n}\phi_1+\vec{b}\phi_2, \qquad \vec{B}_0=\vec{b}\phi_1-\vec{n}\phi_2, \qquad /1.1.18/$$

որտեղ ϕ_1 -ը և ϕ_2 -ը կոորդինատներից կախված կամայական սկալյար ֆունկցիաներ են, ըստ որում՝ $\vec{\tau}$ -ն $\nabla\Psi$ ուղղության միավոր վեկտորն է, $\vec{n}$ -ը նրա նորմալը, $\vec{b}$ -ն՝ բինորմալը:

Մյուս կողմից՝ /1.1.12,ա/-ից հետևում է, որ

$$(\vec{X}_0\vec{b})-(\vec{Y}_0\vec{n})=0, \quad (\vec{X}_0\vec{n})+(\vec{Y}_0\vec{b})=0 \qquad /1.1.19/$$

Տեղադրենք /1.1.19/-ում ամպլիտուդային ֆունկցիաների համար ըստացված /1.1.18/ արտահայտությունները: Հաշվի առնելով նաև /1.1.15/-ը, և /1.1.16/-ը՝ պարզ ձևափոխություններից հետո կստանանք հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝

$$\phi_1(\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{n}+\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{b})-\phi_2\nabla\vec{\tau}-2\vec{\tau}\nabla\phi_2-$$
$$-\phi_2\vec{\tau}\left(\sqrt{\varepsilon}\nabla\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\mu}\nabla\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)=0,$$
$$\phi_2(\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{n}+\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{b})+\phi_1\nabla\vec{\tau}+2\vec{\tau}\nabla\phi_1+$$
$$+\phi_1\vec{\tau}\left(\sqrt{\varepsilon}\nabla\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\mu}\nabla\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)=0. \qquad /1.1.20/$$

Բազմապատկենք /1.1.20/ հավասարումներից առաջինը ϕ_2 -ով, երկրորդը՝ ϕ_1 -ով և հանենք միմյանցից: Կստանանք՝

$$\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla\vec{\tau}+\vec{\tau}\nabla\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=0$$

հավասարումը, որը կարելի է գրել նաև

$$\mathrm{div}\left(\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\tau}\right)=0 \qquad /1.1.21/$$

տեսքով: Եթե ինտեգրենք /1.1.21/ հավասարումը մի v ծավալով, որտեղ $\phi_1\neq 0$, $\phi_2\neq 0$ և օգտվենք Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմից, կստանանք՝

$$\int_v \mathrm{div}\left(\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\tau}\right)dv=\oint_S\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\tau}\,d\vec{S}, \qquad /1.1.21,ա/$$

որը /1.1.6,ա/ փոխադրման հավասարման համաբանությունն է՝ գրված էլեկտրամագնիսական ալիքների համար:

Բազմապատկենք այժմ /1.1.20/ հավասարումներից առաջինը ϕ_1 -ով, երկրորդը՝ ϕ_2 -ով և գումարենք միմյանց: Պարզ ձևափոխություններից հետո կստանանք՝

$$\vec{\tau}\nabla\,\mathrm{arctg}\frac{\phi_2}{\phi_1}=\frac{\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{n}+\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}}{2} \qquad /1.1.22/$$

հավասարությունը: Սրա աջ մասի հակադարձ մեծությունը նշանակենք T -ով՝

$$T=\frac{2}{\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{n}+\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}}. \qquad /1.1.23/$$

/1.1.23/-ով որոշված մեծությունն անվանում են ճառագայթի պըտըման շառավիղ: Ձևափոխենք /1.1.22/ հավասարության ձախ մասը, մտցնելով $\vec{\tau}$ ուղղությամբ ճառագայթի երկարության l տարրի և պտտման՝ $\theta=\mathrm{arctg}\frac{\phi_2}{\phi_1}$ անկյան հասկացությունները՝

$$\vec{\tau}\nabla\,\mathrm{arctg}\frac{\phi_2}{\phi_1}=(\vec{\tau}\nabla)\theta=\left(\frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial}{\partial z}\right)\theta=\frac{d\theta}{dl}.$$

Ի վերջո /1.1.22/ հավասարումը կգրվի

$$\frac{d\theta}{dl}=\frac{1}{T} \qquad /1.1.24/$$

տեսքով: Ինտեգրելով /1.1.24/-ը ըստ ճառագայթի երկարության՝ կստանանք բևեռացման վեկտորի պտույտի անկյան մեծությունը՝ որպես ճառագայթի երկարության ֆունկցիա՝

$$\theta=\int_{(L)}\frac{dl}{T}. \qquad /1.1.25/$$

Ստացված հավասարումները լուծում են առաջադրված խնդիրը, այն է՝ ԵՕ-ի հիմնավորումը՝ որպես Մաքսվելի հավասարումների կարճալիքային մոտարկում: Իրոք, /1.1.13/ հավասարումից որոշվում է Ψ էյքոնալը, /1.1.20/ հավասարումներից՝ ϕ_1 և ϕ_2 ամպլիտուդային ֆունկցիաները, որոնք /1.1.18/ բանաձևերով արտահայտում են $\vec{E}$ և $\vec{H}$ ամպլիտուդները՝ զրոյական մոտավորությամբ: Եվ եթե սահմանափակվենք /1.1.9/ վերլուծության գլխավոր /զրոյական մոտավորության/ անդամներով, ապա ստացվող

$$E=\frac{\vec{A}_0}{\sqrt{\varepsilon}}e^{ik\Psi}, \qquad H=\frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\mu}}e^{ik\Psi} \qquad /1.1.26/$$

էլեկտրամագնիսական դաշտը $\vec{\tau}=\frac{\nabla\Psi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ուղղությամբ տարածվող հարթ ալիք է, իսկ $\vec{A}_0$ և $\vec{B}_0$ վեկտորական ֆունկցիաները տարածության $\frac{1}{k}$ կարգի /ալիքի երկարության կարգի/ հատվածներում դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիաներ են:

Համասեռ միջավայրի դեպքում $/\varepsilon = const,\ \mu = const/$ $\vec{\tau} = const$, $\vec{n} = const$ և $\vec{b} = const$՝

ա/ /1.1.21/ հավասարումը տարաբաժանվում է երկու անկախ հավասարումների՝

$$div\,(\phi_1^2 \vec{\tau}) = 0, \qquad /1.1.27,ա/$$

$$div\,(\phi_2^2 \vec{\tau}) = 0. \qquad /1.1.27,բ/$$

բ/ $\vec{n}\,rot\,\vec{n} + \vec{b}\,rot\,\vec{b} = 0$ և $T \to \infty$, այսինքն՝ ճառագայթի պտտման շառավիղը ձգտում է անվերջության և $\frac{d\theta}{dl} = 0$, էյքոնալը ուղիղ գիծ է, իսկ $\vec{E}, \vec{H}$ և $\vec{\tau}$ վեկտորները կազմում են Ֆրենեի անշարժ եռանիստ:

Այս դեպքում, իհարկե, $\vec{n}$՝ նորմալի և $\vec{b}$՝ բինորմալի հասկացությունները կորցնում են իրենց իմաստը, և $\vec{E}$ ու $\vec{H}$ վեկտորների ուղղությունները տարածության մեջ այլասերված են. ցանկացած փոխուղղահայաց վեկտորներ, որոնք ուղղահայաց են տարածման $\vec{\tau}$ ուղղությանը, կբավարարեն դրված հավասարումներին և, ի վերջո, Մաքսվելի հավասարումների զրոյական մոտարկմանը ըստ iK-ի հակադարձ աստիճանների:

Այսպիսով՝ համասեռ, իզոտրոպ միջավայրում գոյություն չունի բևեռացման առանձնաշնորհ ուղղություն /$\vec{E}$ և $\vec{H}$ վեկտորների դիրքը հարթության մեջ այլասերված է/, և, ինչպես նշվել է վերը, կարելի է բավարարվել սկալյար դեպքին համարժեք /1.1.27, ա և բ/ լուծումներով:

Շարադրված հետազոտությունները առաջինը կատարել է սովետական ֆիզիկոս Ս.Մ.Ռիտովը 1938թ.:

Քննարկենք վերջում ԵՕ-ի և նյութական կետի մեխանիկայի համաբանությունը /անալոգիան/: Գրենք Համիլթոն-Յակոբիի բանաձևերը նյութական կետի համար՝

$$\vec{P} = \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}; \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t}, \qquad /1.1.28/$$

որտեղ $\vec{P}$-ն մասնիկի իմպուլսն է, Ψ-ն՝ գործողությունը, $\mathcal{H}$-ը՝ Համիլթոնի ֆունկցիան:

$$f = A_0\, e^{i\Psi(\vec{r},t)} \qquad /1.1.29/$$

Ֆունկցիայի փուլը ներկայացնենք ժամանակի ու տարածության փոքր միջավայրերում

$$\Psi = \Psi_0 + \vec{r}\,\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} + t\,\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

վերլուծության տեսքով, այսինքն՝

$$f = A_0\, e^{i\Psi_0 + i\vec{r}\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} + it\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t}} \qquad /1.1.30/$$

Տարածության ու ժամանակի փոքր միջակայքերում /1.1.30/-ը կարելի է համարել հարթ ալիք՝

$$f = A_0\, e^{i\Psi_0 + i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \qquad /1.1.31/$$

եթե

$$\vec{k} = \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} \Psi, \quad \omega = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \qquad /1.1.32/$$

Համեմատելով /1.1.32/-ը /1.1.28/-ի հետ՝ տեսնում ենք, որ ԵՕ գործողությունը՝ Ψ-ն, համընկնում է նյութական կետի մեխանիկայում մտցված գործողության հետ Պլանկի $\hbar$ հաստատունի ճշգրտությամբ $/\vec{p} = \vec{k}\hbar/$, իսկ Համիլթոնի բնութագրական հավասարումը՝

$$(\vec{\nabla} \Psi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = 0$$

էյքոնալի՝ $K^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ տեսքով գրված հավասարմանը: Մասնիկների համար տեղի ունեն Համիլթոնի հավասարումները՝

$$\dot{\vec{P}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}}, \quad \vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{P}} \qquad /1.1.33/$$

և, ըստ նշված համաբանության՝

$$\dot{\vec{K}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{K}}. \qquad /1.1.34/$$

/1.1.34/-ից հետևում է, որ վակուումում

$$\omega = cK, \quad \dot{\vec{K}} = 0, \quad \dot{\vec{r}} = \vec{V} = c\vec{\tau}. \qquad /1.1.35/$$

1.2. ԵՕ-ի հիմնական հասկացությունները

Ալիքային մակերևույթ: Գրենք էյքոնալի հավասարումն անհամասեռ դիէլեկտրական ու մագնիսական միջավայրի դեպքում՝ դեկարտյան կոորդինատական համակարգում՝

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 = n^2(x,y,z), \qquad /1.2.1/$$

$$n(x,y,z) = \sqrt{\varepsilon(x,y,z)\,\mu(x,y,z)}$$

$\Psi(x,y,z) = const$ մակերևույթն անվանում են ալիքային մակերևույթ կամ երկրաչափական ալիքային ճակատ:

Ճառագայթ: Ալիքային մակերևույթի /ճակատի/ հասկացության հետ սերտորին առնչվում է ճառագայթի հասկացությունը։

Գրենք ալիքի էլեկտրական ու մագնիսական էներգիաների միջին արժեքների /ըստ ժամանակի/ արտահայտությունները՝ օգտվելով /1.1.26/ բանաձևերից /անկյունային փակագծերը նշանակում են միջինացում ըստ ժամանակի/՝

$$\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi}\vec{E}\vec{E}^* = \frac{A_0^2}{16\pi}, \qquad /1.2.2/$$

$$\langle w_H \rangle = \frac{\mu}{16\pi}\vec{H}\vec{H}^* = \frac{B_0^2}{16\pi},$$

Փոյնթինգի վեկտորի միջին արժեքը հավասար է՝

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi}[\vec{E}\vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}[\vec{A}_0\vec{B}_0]. \qquad /1.2.3/$$

Օգտվելով /1.1.8/ բանաձևերից՝ հաշվենք A_0^2, B_0^2 և $[\vec{A}_0\vec{B}_0]$ մեծությունները.

$$A_0^2 = B_0^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2,$$
$$[\vec{A}_0\vec{B}_0] = \vec{\tau}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

Հետևաբար՝

$$\langle w \rangle = \langle w_E \rangle + \langle w_H \rangle = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{8\pi} \qquad /1.2.2,ա/$$

և

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\tau}(\phi_1^2 + \phi_2^2) \qquad /1.2.3,ա/$$

Համեմատելով /1.2.2,ա/ և /1.2.3,ա/ հասկացությունները՝ կարող ենք գրել

$$\vec{S} = \langle w \rangle \vec{v}, \qquad /1.2.4/$$

որտեղ

$$\vec{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\tau}. \qquad /1.2.4,ա/$$

/1.2.4/-ից հետևում է, որ Փոյնթինգի վեկտորի միջին արժեքի /ըստ ժամանակի/ ուղղությունը համընկնում է երկրաչափական ալիքային ճակատի ուղղությանը, իսկ բացարձակ արժեքը հավասար է էներգիայի խտության միջին արժեքին՝ բազմապատկած $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ արագությամբ։ Այս նույնը ճշմարիտ է հարթ ալիքի համար, և հետևաբար ԵՕ-ի մոտավորությունում էներգիայի միջին խտությունը նույնպես տարածվում է լույսի՝ $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ արագությամբ։

Այսպիսով, ճառագայթները ալիքային $\Psi(x,y,z)=const$ մակերևույթի յուրաքանչյուր կետին ուղղահայաց հետագծեր են։ Քանի որ այս ուղղություն-

ները համընկնում են յուրաքանչյուր կետում Փոյնթինգի վեկտորի միջին արժեքի ուղղությանը, ապա ճառագայթը ԵՕ-ի մոտավորությունում որոշում է էներգիայի տարածման ուղղությունը։

Դիտենք ճառագայթի վրա որևէ կետի շառավիղ վեկտորը՝ $\vec{r}(l)$-ը, որպես ճառագայթի ու երկարության ֆունկցիա։ Այս դեպքում՝

$$\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}(l)) = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\partial\vec{r}}{\partial l} = \vec{\tau}\sqrt{\varepsilon\mu}, \qquad /1.2.5/$$

որտեղ՝

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dl} \qquad /1.2.5,ա/$$

Դիֆերենցենք /1.2.5/ հավասարումը ըստ l-ի՝

$$\frac{d}{dl}\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}(l)) = \frac{d\vec{r}}{dl}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\Psi) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\nabla}\Psi\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\Psi) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\Psi)^2 = \vec{\nabla}\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Այսպիսով՝

$$\frac{d}{dl}\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \vec{\nabla}\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad /1.2.6/$$

Եթե միջավայրը համասեռ է, /1.2.6/-ը բերվում է հետևյալ հավասարմանը՝

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = 0,$$

որտեղից՝

$$\vec{r} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 l \qquad /1.2.7/$$

/1.1.7/-ը ուղղի հավասարումն է, այլ խոսքով՝ համասեռ միջավայրում ճառագայթները ուղիղ գծեր են։

<u>Ճանապարհի օպտիկական երկարություն կամ օպտիկական ճանապարհ։</u> Դիցուք, ժամանակի երկու՝ dt միջակայքով բաժանված պահերի ալիքային ճակատների ալիքային հավասարումները տրված են, համապատասխանորեն, $\Psi=const$ և $\Psi+d\Psi=const$ ձևով։ Առանձնացնենք գոյություն ունեցող բոլոր ճառագայթներից այն, որն անցնում է $\Psi=const$ և $\Psi+d\Psi=const$ մակերևույթների վրա ընտրված P_1 և P_2 կետերով։

Եթե, ինչպես արել ենք վերը, ճառագայթի $\vec{r}(l)$ շառավիղ վեկտորը նկարագրենք որպես նրա l երկարության ֆունկցիա և օգտվենք /1.2.5/-ից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{d\Psi}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dl}\vec{\nabla}\Psi = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Այժմ ինտեգրենք ստացված հավասարումը ըստ P_1 և P_2 կետերը միացնող ճառագայթի երկարության՝

$$\Psi(P_2) - \Psi(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\varepsilon\mu}\, dl. \qquad /1.2.8/$$

Էյքոնալների՝ $\Psi(P_2)-\Psi(P_1)$ տարբերությունն անվանվում է ճառագայթի օպտիկական երկարություն P_1 և P_2 կետերի միջև։ Այսպիսով՝ էյքոնալն ստանում է օպտիկական ճանապարհի իմաստ։

/1.2.8/ արտահայտության աջ մասը կարելի է ձևափոխել՝ ի նկատի առնելով, որ $\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{c}{v}$, որտեղ v-ն, ինչպես ասել էինք, էներգիայի միջին խտության տարածման արագությունն է միջավայրում։ Քանի որ $\frac{dl}{dv} = dt$, ապա /1.2.8/-ը կարելի է գրել՝

$$\Psi(P_2) - \Psi(P_1) = c\int_{t_1}^{t_2} dt \qquad /1.2.8,ա/$$

այսինքն՝ $\Psi(P_2)-\Psi(P_1)$ օպտիկական երկարությունը հավասար է վակուումում լույսի արագության և P_1 կետից P_2-ը էներգիայի տարածման ժամանակամիջոցի արտադրյալին։

<u>ճառագայթային խողովակը և ինտենսիվության</u>

<u>օրենքը ճառագայթային խողովակում։</u> Ինչպես տեսնում ենք, ԷՕ-ի մոտավորությամբ էլեկտրամագնիսական ալիքները, իրոք, նկարագրվում են հարթ ալիքի օրինաչափություններով։ Սակայն իդեալական հարթ ալիքը տարածության մեջ գոյություն ունի ամենուրեք, մինչդեռ ճառագայթային պատկերացումները կապված են դաշտի, հատկապես լոկալ /տեղայնային/ հատկությունների հետ։ ԷՕ-ում այս հանգամանքը արտահայտվում է մի հասկացությամբ, որն ընդունված է անվանել ճառագայթային խողովակ։

Դիտարկենք նեղ խողովակը՝ կազմված $\Psi(\vec{r}) = a_1 = const$ ալիքային մակերևույթի dS_1 տարրից ելած ճառագայթներով։ dS_2-ով նշանակենք հաջորդ մի որևէ պահի $\Psi(\vec{r}) = a_2 = const$ ալիքային մակերևույթի վրա այն տարրը, որը հատում են dS_1-ից ելած բոլոր ճառագայթները։ Օգտվենք /1.1.21,ա/ բանաձևից, որտեղ որպես v ծավալ ընդունենք քննարկվող ճառագայթային խողովակի ծավալը՝

$$\int_v div\left(\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{r}\right)dv = \oint_S \frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{r}\,d\vec{S} \qquad /1.2.9/$$

Համաձայն վերը ասվածի /1.2.9/-ում

$$\vec{r}\,d\vec{S} = dS_2 - dS_1$$

և հետևաբար /1.2.9/-ը կարելի է գրել

$$\int_{S_2} \frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, ds = \int_{S_1} \frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, ds \qquad /1.2.10/$$

տեսքով։ /1.2.10/ հավասարումը արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$\int_{S_1} I_1\, dS = \int_{S_2} I_2\, dS \qquad /1.2.11/$$

որտեղ I_1-ը և I_2-ը ճառագայթային էներգիայի ինտենսիվությունների արժեքներն են dS_1 և dS_2 մակերևույթներով։ /1.2.11/-ից հետևում է, որ

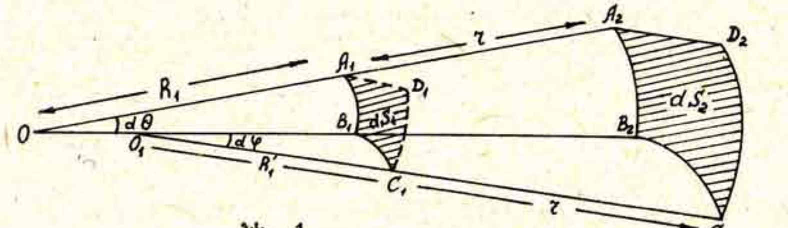
$$I_1\, ds_1 = I_2\, ds_2 \qquad /1.2.12/$$

կամ

$$I ds = const$$

/1.2.12/ հավասարումը ինտենսիվության օրենքն է ԷՕ-ում։ Այն պնդում է, որ ճառագայթային խողովակի երկայնքով Ids մեծությունը մնում է հաստատուն։

Քննարկենք ինտենսիվության օրենքը համասեռ միջավայրի /$\sqrt{\varepsilon\mu} = const$/ մասնավոր դեպքում, երբ ճառագայթները ուղիղ գծեր են։ Ենթադրենք՝ dS_1 և dS_2 մակերևութային տարրերը սահմանափակված են կորության գծերի հատվածներով /տես Նկ.1/, իսկ R_1-ը և R_1'-ը A_1B_1 և A_2B_2 հատվածների կորությունների գլխավոր շառավիղներն են։



Նկ. 1

Նկ.1-ից հետևում է, որ

$$A_1B_1 = R_1\, d\theta, \qquad B_1C_1 = R_1'\, d\varphi,$$

որտեղ $d\theta$-ն և $d\varphi$-ն այն անկյուններն են, որոնց տակ O և O_1 կետերից դիտվում են համապատասխանորեն A_1B_1 և B_1C_1 հատվածները։

Այսպիսով՝

$$ds_1 = A_1B_1 \cdot B_1C_1 = R_1R_1'\, d\theta\, d\varphi$$

$$ds_2 = A_2B_2 \cdot B_2C_2 = (R_1+r)(R_1'+r)\, d\theta\, d\varphi$$

Համաձայն /1.2.12/-ի

$$I_1R_1R_1' = I_2(R_1+r)(R_1'+r)$$

կամ

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1R_1'}{(R_1+r)(R_1'+r)} \qquad /1.2.13,ա/$$

Երբ

$$r \gg R_1', \quad r \gg R_1', \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1R_1'}{r^2}, \qquad /1.2.13,բ/$$

իսկ ընդհանուր դեպքում ինտենսիվության օրենքը կգրվի

$$I = \frac{const}{R_1 R_2} \qquad /1.2.14/$$

տեսքով, որտեղ R_1-ը և R_2-ը ճառագայթային խողովակը սահմանափակող մակերևույթի կորության գլխավոր շառավիղներն են։ $\frac{1}{R_1 R_2}$ մեծությունը, որը կորության երկու գլխավոր շառավիղների հակադարձ մեծությունների արտադրյալն է, կոչվում է մակերևույթի գաուսյան կորություն, իսկ /1.2.14/ բանաձևն ասում է, որ ուղղագիծ ճառագայթի ցանկացած կետում ինտենսիվությունը համեմատական է այդ կետը պարունակող ալիքային մակերևույթի գաուսյան կորությանը։ Մասնավորապես՝ եթե կորության երկու գլխավոր շառավիղները հավասար են միմյանց /գնդային ալիք/, /1.2.14/-ը կընդունի

$$I = \frac{const}{R^2} \qquad /1.2.15/$$

տեսքը։

<u>Ճառագայթային կոնգրուենցիա։</u> Ձևակերպենք այժմ մեկ նոր հասկացություն՝ ճառագայթների կոնգրուենցիայի հասկացությունը։ Ելնենք հետևյալ ակնհայտ նույնությունից

$$rot\, \vec{\nabla}\psi = rot \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau} = 0 \qquad /1.2.16/$$

/1.2.16/ հավասարումը որոշում է ճառագայթների այն բոլոր համակարգերը, որոնք կարող են գոյություն ունենալ իզոտրոպ միջավայրում՝ առանձնանալով կորերի ավելի ընդհանուր ընտանիքից։ Երբ $\sqrt{\varepsilon\mu} = const$ /համասեռ իզոտրոպ միջավայր/ /1.2.16/ հավասարումը ձևափոխվում է

$$rot\, \vec{\tau} = 0 \qquad /1.2.17/$$

տեսքի։ Ցույց տանք, որ անհամասեռ միջավայրի դեպքում նույնպես կարելի է ստանալ հավասարում, որը բացահայտորեն չպարունակի միջավայրի բնութագրերը։ Իրոք՝

$$rot(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}) = \sqrt{\varepsilon\mu}\, rot\, \vec{\tau} + [grad \sqrt{\varepsilon\mu}, \vec{\tau}]$$

և, եթե այն սկալյար ձևով բազմապատկենք $\vec{\tau}$ վեկտորով, կստանանք՝

$$\vec{\tau}\, rot\, \vec{\tau} = 0 \qquad /1.2.18/$$

Այսպիսով, ցանկացած իզոտրոպ /նաև՝ անհամասեռ/ միջավայրում ճառագայթների համակարգը բավարարում է /1.2.18/ հավասարմանը։

Կորերի այնպիսի համակարգը, որով լցված է տարածության տվյալ տիրույթն այնպես, որ նրա յուրաքանչյուր կետով անցնում է կոր, կոչվում է կոնգրուենցիա։ Կոնգրուենցիան կկոչվի նորմալ, եթե գոյություն ունենն մակերևույթների ընտանիքներ, որոնք հատում են կորերը ուղիղ անկյան տակ։ ԵՕ-ում մենք գործ կունենանք նորմալ կոնգրուենցիաների հետ։ Մասնավորապես՝ համասեռ իզոտրոպ միջավայրում ճառագայթների համա-

կարգը կազմում է ուղղագիծ նորմալ կոնգրուենցիա։

<u>Կիզակետ, կիզակետային մակերևույթ /կաուստիկ/, կիզակետային հարթություն։</u> Դիտարկենք նորմալ կոնգրուենցիայի երկու հարևան ճառագայթներ, որոնք հատում են $\Psi(x, y, z) = const$ ալիքային մակերևույթը։ Նկարագրենք այս մակերևույթը u, v կորագիծ կոորդինատական համակարգում՝ $\Psi(u,v) = const$։ Դիցուք՝ $/u, v/$ և $/u+du, v+dv/$ կետերը այն կետերն են, որտեղ երկու հարևան ճառագայթները հատում են $\Psi(u,v) = const$ մակերևույթը։

Նշանակենք ճառագայթի ընթացիկ կետի կոորդինատը $\vec{r}(l)$ շառավիղ վեկտորով և պարզենք հետևյալ հարցը. դիտարկվող ճառագայթների վրա գոյություն ունե՞ն արդյոք այնպիսի համապատասխան զույգ կետեր, որոնց միջև եղած հեռավորությունը երկրորդ կամ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է /ասում են, որ այդպիսի կետերում հարևան կորերն ունեն առաջին կարգի հատում/։ Այսպիսի կետերն անվանում են կիզակետեր /մասնավորապես այդպիսի կետեր էին նկ.1-ում պատկերված O և OO կետերը/։ Ասվածից հետևում է, որ կիզակետային կետը կբավարարի

$$\vec{r}(u, v, l) = \vec{r}(u+du, v+dv, l+dl)$$

հավասարմանը։ Վերլուծելով այս հավասարման աջ մասը շարքի՝ կստանանք

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial l} dl = 0 \qquad /1.2.19/$$

վեկտորական հավասարումը։

/1.2.19/ հավասարումը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ և $\frac{\partial \vec{r}}{\partial l}$ վեկտորները կոմպլանար են, այսինքն՝ բավարարում են

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial l}\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right] = 0 \qquad /1.2.20/$$

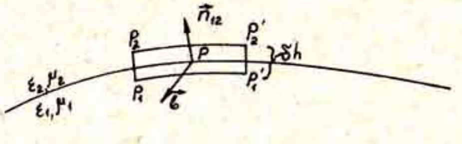
պայմանին։ Դիցուք՝ ճառագայթի $\vec{r}(l)$ շառավիղ վեկտորը m կարգի բազմանդամ է l-ի նկատմամբ.

$$\vec{r}(l) = \sum \vec{a}_m (u, v)\, l^m \qquad /1.2.21/$$

Այս դեպքում $\vec{\tau} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial l}$-ը $m-1$ կարգի բազմանդամ է, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$-ն և $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$-ն, յուրաքանչյուրը՝ m կարգի։ Տեղադրելով /1.2.21/-ը /1.2.20/-ում կստանանք, այսպիսով, $3m-1$ կարգի հավասարում, որն, ընդհանրապես ասած, ունի $3m-1$ թվով լուծումներ։ Մասնավորապես՝ եթե $l=1$ /տես /1.2.7/-ը/, ապա $\vec{r}(l)$-ը գծային ֆունկցիա է և յուրաքանչյուր ճառագայթի վրա կարող են գոյություն ունենալ երկու կիզակետ /3 - 1 = 2/։ Եթե u, v-ն ընդունում են հնարավոր բոլոր արժեքները, կիզակետերը կարող են վերածվել գծերի կամ մակերևույթի /կաուստիկ/։ Տվյալ կետում այս մակերևույթին տարած շոշափող հարթությունը կոչվում է կիզակետային հարթություն։

1.3. Ճառագայթների բեկման և անդրադարձման օրենքները, Ֆերմայի սկզբունքը

Մինչև այժմ մենք ենթադրում էինք, որ $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$-ն անընդհատ ֆունկցիա է կամ հաստատուն է։ Դիտարկենք այժմ ճառագայթի վարքը, երբ այն հատում է երկու համասեռ ε_1 և ε_2 թափանցելիություններով դիէլեկտրիկների սահմանը։ Նկ. 2-ում T-ն այս սահմանն է, $\vec n_{12}$-ը՝ սրա վրայի որևէ P կետում սահմանի հարթության նորմալը՝ ուղղված առաջին միջավայրից դեպի երկրորդը, $\vec b$-ն՝ բինորմալը։



Նկ. 2

Դատողությունները նույնպիսին են, ինչպիսիք որ կիրառվում էին Մաքսվելի հավասարումներում եզրային պայմանները նկարագրելիս։ Փոխարինենք սահմանը δh լայնության անցումնային շերտով, որտեղ $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$-ն փոփոխվում է շատ արագ՝ սահմանի մի կողմում ունեցած $n_1=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ արժեքից մինչև մյուս կողմում ստացվող $n_2=\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ արժեքը։ Դիտարկենք սահմանային մակերևույթի հարթ տարրը /Նկ.2/, որի P_1P_1' և P_2P_2' կողմերը զուգահեռ են, իսկ P_1P_2 և $P_1'P_2'$ կողմերը՝ ուղղահայաց բաժանման սահմանին։ Օգտվենք /1.2.16/ նույնությունից և Ստոքսի թեորեմի օգնությամբ գրենք հետևյալ հավասարությունը $P_1P_2P_2'P_1'$ կորով սահմանափակված մակերեսի համար՝

$$\int rot(\vec\tau\sqrt{\varepsilon\mu})\,\vec b\,d\vec s=\oint\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec\tau\,d\vec l \qquad /1.3.1/$$

Ձգտեցնենք զրոյի սահմանային շերտի δh լայնությունը։ Նկ.2-ից կարող ենք գրել՝

$$d\vec l=[\vec n_{12}\ \vec b\,]\,dl$$

որից հետո /1.3.1/ հավասարումից կստանանք՝

$$\oint\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec\tau\,d\vec l=\int[n_{12},(\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\vec\tau_2-\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\vec\tau_1)]\,\vec b\,dl=0 \qquad /1.3.2/$$

Քանի որ նկ. 2-ում պատկերված $P_1P_1'P_2'P_2$ ուղղանկյան դիրքը կամայական էր, կամայական է և $\vec b$ վեկտորի ուղղությունը։ Հետևաբար /1.3.2/ հավասարությունը տեղի ունի, երբ

$$[\vec n_{1,2},\ \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\vec\tau_2-\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\vec\tau_1]=0 \qquad /1.3.3/$$

/1.3.3/ հավասարումն ասում է, որ $\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec\tau$ վեկտորը /ճառագայթային վեկտորը կամ էյքոնալի գրադիենտը/ անընդհատ է երկու միջավայրերի սահմանին և կամ՝ $\vec N=\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\vec\tau_2-\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\vec\tau_1$ վեկտորը ուղղահայաց է բաժանման սահմանին։ /1.3.3/ հավասարումից հետևում է նաև՝

$$\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,[\vec n_{1,2}\,\vec\tau_2]=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,[\vec n_{1,2}\,\vec\tau_1], \qquad /1.3.4/$$

կամ

$$\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\sin\theta_2=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\sin\theta_1 \qquad /1.3.4,ա/$$

որտեղ θ_1-ը և θ_2-ը այն անկյուններն են, որոնք կազմում են ընկնող և բեկված ճառագայթները անկման կետում բաժանման մակերևույթին տարած $\vec n_{1,2}$ նորմալի հետ։ /1.3.4/ վեկտորական հավասարումից /կամ /1.3.3/-ից/ հետևում է նաև, որ ընկնող և բեկված ճառագայթներն անկման կետում բաժանման մակերևույթին տարած նորմալի հետ միասին գտնվում են նույն հարթության մեջ, իսկ /1.3.4,ա/ հավասարումից՝ որ ճառագայթների անկման անկյան ու բեկման անկյան սինուսների հարաբերությունը հավասար է երկրորդ միջավայրի բեկման ցուցչի /$n_2=\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$/ հարաբերությանը առաջինին /$n_1=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$/։

Այս երկու պնդումներն արտահայտում են բեկման օրենքը ճառագայթների համար /Սնելիուսի օրենքը/։ Այն ձևականորեն համընկնում է հարթ ալիքի համար Մաքսվելի հավասարումներից ստացվող օրենքին, սակայն եթե հարթ ալիքի համար այս օրենքն իրավացի էր ալիքի ցանկացած երկարության և բաժանման հարթ մակերևույթի դեպքում, ապա ճառագայթների համար վերն ստացված օրենքն իրավացի է ավելի ընդհանուր ձևի բաժանման մակերևույթների համար, պայմանով միայն, որ ալիքի երկարությունը բավականաչափ կարճ է, այնպես որ ընկնող ալիքային ճակատի և բաժանման մակերևույթի կորությունների շառավիղները շատ ավելի մեծ լինեն սրանից։

Ինչպես հարթ ալիքի դեպքում, այնպես էլ այստեղ կարելի է ակնկալել, որ բացի բեկված ճառագայթներից գոյություն ունի և անդրադարձվածը։ Եթե ենթադրենք, որ ճառագայթի հետագիծը սահմանին հասնելիս չի անցնում երկրորդ միջավայրը և մնում է առաջինում, ապա /1.3.3/ և /1.3.4/ հավասարումներում $\varepsilon_1\mu_1=\varepsilon_2\mu_2$, և կարելի է գրել

$$[\vec n_{1,2}\,\vec\tau_2]=[\vec n_{1,2}\,\vec\tau_1] \qquad /1.3.5/$$

կամ՝

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_1 \qquad /1.3.5,ա/$$

և

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

/1.3.5/ և /1.3.5,ա/ հավասարումներն ասում են, որ ընկնող ճառագայթը անկման կետում բաժանման մակերևույթին տարած նորմալի և անդրադարձած ճառագայթի հետ միասին գտնվում նույն հարթության մեջ և անկման անկյունը հավասար է անդրադարձման անկյանը։

Եզրակացնենք. Բեկման և անդրադարձման օրենքները ԵՕ-ում լոկալ բնույթ են կրում և կարող են կիրառվել բավականաչափ կարճ ալիքների համար բաժանման բավականաչափ կանոնավոր մակերևույթի ցանկացած կետի շրջակայքում։

Բեկման և անդրադարձման օրենքները ֆիզիկայում գործող մի ավելի ընդհանուր սկզբունքի՝ Ֆերմայի սկզբունքի հետևությունն են։ ԵՕ-ում այն կոչվում է ամենակարճ օպտիկական ճանապարհի սկզբունք և պնդում է, որ ցանկացած P_1 և P_2 կետերի միջև ճառագայթի օպտիկական /տես /1.2.3/--ը/ երկարությունն ամենակարճն է այս երկու կետերը միացնող մյուս բոլոր կորերի օպտիկական ճանապարհներից, որոնք ընկած են այդ ճառագայթի որևէ կարգավորված տիրույթում։ Կարգավորված ասելով, հասկանում ենք տարածության այնպիսի տիրույթ, որի յուրաքանչյուր կետով անցնում է միայն մեկ ճառագայթ /Այսպիսին է, օրինակ, տարածության այն մասը, որը լցված է կետային աղբյուրից առաքված ճառագայթներով և որտեղ ճառագայթները բեկման, սեփական կորության՝ անդրադարձման և այլ պատճառներով չեն հատում միմյանց/։

ԵՕ-ում Ֆերմայի սկզբունքը հետևում է Լագրանժի ինվարիանտության հայտանիշից, որն, իր հերթին, հետևվում է /1.2.16/ նույնությունից։ Քանի որ

$$\oint_L \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l} = 0 \qquad /1.3.6/$$

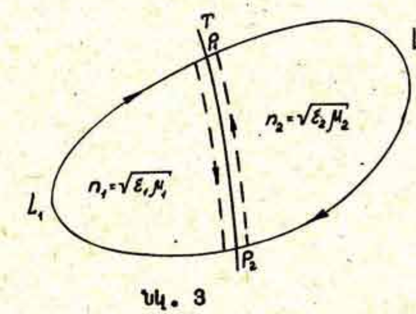
որտեղ ինտեգրումը գնում է կամայական բաց մակերևույթը պարփակող փակ՝ L կոնտուրով, ապա սրա վրա վերցված ցանկացած P_1 և P_2 կետերի համար կարելի է գրել՝

$$\int_{L_1(P_1P_2)} \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l} + \int_{L_2(P_2P_1)} \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l} = 0,$$

և հետևաբար՝

$$\int_{L(P_1P_2)} \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l} = inv \qquad /1.3.7/$$

/1.3.7/-ը կոչվում է Լագրանժի ինտեգրալ ինվարիանտ և նշանակում է, որ /1.3.7/ ինտեգրալի արժեքը ցանկացած P_1 և P_2 կետերի միջև կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից։ Լագրանժի ինվարիանտության հայտանիշը ճառագայթի պոտենցիալ բնույթի արտահայտությունն է։ Այն ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ L կոնտուրով սահմանափակված տիրույթում միջավայրի բեկման ցուցիչը անընդհատ չէ և ունի թռիչք որևէ կորի վրա՝ $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ արժեքից $\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ արժեքը։ Ապացուցելու համար այս պնդումը՝ դիտարկենք նկ. 3-ում պատկերված L կոնտուրը, որը հատում է $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ և $\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ բեկման ցուցիչներով միջավայրերի բաժանման T կորը։



Նկ. 3

Գրենք /1.3.6/ ինտեգրալը $L_1+P_1P_2$ և $L_2+P_2P_1$ փակ կոնտուրներով՝

$$\int_{L_1} \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\vec{\tau}_1\, d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\vec{\tau}_1\, d\vec{l} = 0$$

և

$$\int_{L_2} \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\vec{\tau}_2\, d\vec{l} + \int_{P_2}^{P_1} \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\vec{\tau}_2\, d\vec{l} = 0$$

Փոխենք երկրորդ հավասարման մեջ երկրորդ ինտեգրալի սահմանների տեղերը, գումարենք ստացված հավասարումն առաջինին և միավորենք L_1-ով և L_2-ով ինտեգրումները՝ ի նկատի ունենալով, որ $L_1+L_2=L$ ։ Արդյունքում կստանանք

$$\int_{L} \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_2} \left[\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\vec{\tau}_1 - \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\vec{\tau}_2\right] d\vec{l} = 0 \qquad /1.3.8/$$

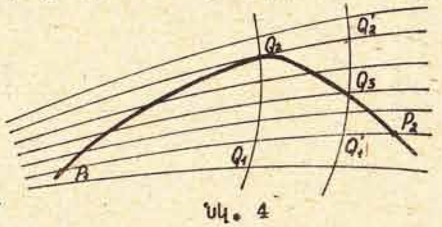
հավասարումը, որում վերջին ինտեգրալը հավասար է զրոյի` համաձայն Բեկման օրենքի /տես /1.3.2/-ը/: Այսպիսով, /1.3.8/ հավասարումը համընկավ /1.3.6/-ին և, հետևաբար, վերջինս իրավացի է նաև այն դեպքում, երբ L կոնտուրը հատում է երկու միջավայրերի բաժանման սահմանը:

Կիրառենք /1.3.6/ հավասարությունը Ֆերմայի սկզբունքի ապացուցման համար: Այս սկզբունքը պնդում է, որ իրական ճառագայթի վրա գտնըվող ցանկացած P_1 և P_2 կետերի միջև եղած օպտիկական

$$\Psi(P_2) - \Psi(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\varepsilon\mu}\, dl$$

ճանապարհը /տես /1.2.3/-ը/ ամենակարճն է այս երկու կետերը միացնող կորերի ընտանիքում:

Դիտարկենք նկ. 4-ում պատկերված ճառագայթային խողովակը:



Նկ. 4

Նկ. 4-ում երկու հարևան ալիքային ճակատներ հատվում են $P_1Q_1Q_1'P_2$ իրական ճառագայթի հետ Q_1 և Q_1' կետերում: Համեմատենք $P_1Q_1Q_1'P_2$ օպտիկական ճանապարհը կամայական $P_1Q_2Q_3P_2$ կորի հետ, որը հատվում է այս նույն ալիքային ճակատների հետ Q_2 և Q_3 կետերում: Կիրառենք /1.3.6/ ինտեգրալ հայտանիշը նկ. 4-ում պատկերված $Q_2Q_3Q_2'$ եռանկյունու նկատմամբ`

$$\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l}\right)_{Q_2Q_3} + \left(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l}\right)_{Q_3Q_2'} + \left(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l}\right)_{Q_2'Q_2} = 0 \qquad /1.3.9/$$

/1.3.9/ հավասարման մեջ երրորդ գումարելին վերցված է իրական ճառագայթի վրա և ուղղված է հակառակ, հետևաբար այն հավասար է $-\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\, dl\right)_{Q_2Q_2'}$ -ի: Սկալյար արտադրյալի ձևակերպումից հետևում է, որ

$$\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{\tau}\, d\vec{l}\right)_{Q_2Q_3} \leq \left(\sqrt{\varepsilon\mu}\, dl\right)_{Q_2Q_3}$$

Վերջապես, քանի որ $\vec{\tau}$ վեկտորն ուղղահայաց է $d\vec{l}$ -ին ալիքային ճակատի վրա, /1.3.9/ հավասարման երկրորդ գումարելին հավասար է զըրոյի: Ալիքային ճակատի հասկացության ձևակերպումից /տես /1.2.1-ը/ հետևում է, որ

$$\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\, dl\right)_{Q_2Q_2'} = \left(\sqrt{\varepsilon\mu}\, dl\right)_{Q_1Q_1'}$$

և, ի վերջո, /1.3.9/-ից ստանում ենք`

$$\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\, dl\right)_{Q_1Q_1'} \leq \left(\sqrt{\varepsilon\mu}\, dl\right)_{Q_2Q_3} \qquad /1.3.10/$$

Ինտեգրելով /1.3.10/ հավասարության ձախ մասը $P_1Q_1Q_1'P_2$, իսկ աջը` $P_1Q_2Q_3P_2$ կորերով` կստանանք.

$$\int_{P_1Q_1Q_1'P_2} \sqrt{\varepsilon\mu}\, dl \leq \int_{P_1Q_1Q_2P_2} \sqrt{\varepsilon\mu}\, dl \qquad /1.3.11/$$

/1.3.11/-ում հավասարության նշանը կդրվի միայն այն դեպքում, երբ $\vec{\tau}$ և $d\vec{l}$ վեկտորների ուղղությունները համընկնեն $P_1Q_2Q_3P_2$ կորի բոլոր կետերում, այսինքն, եթե այն իրական ճառագայթ է: Այս դեպքը բացառված է, քանի որ հենց սկզբից մենք դիտարկում էինք ճառագայթի կարգավորված տիրույթ, ուր յուրաքանչյուր կետով անցնում է սոսկ մի ճառագայթ:

Այսպիսով, /1.3.11/-ում հավաստի է միայն անհավասարության նշանը. Ֆերմայի սկզբունքն ապացուցված է:

Ապացուցման ընթացքում մենք ոչ մի էական սահմանափակում չդրեցինք միջավայրի բեկման ցուցիչի վարքի վրա: Ավելին` մենք ցույց տվեցինք, որ Լագրանժի ինվարիանտության հայտանիշը, որի վրա հիմնված էր այդ ապացույցը, հավաստի է ոչ միայն այն դեպքերում, երբ միջավայրի բեկման ցուցիչը կոորդինատներից կախված անընդհատ ֆունկցիա է, այլև երբ այն ունի խզումներ: Իրոք, Ֆերմայի սկզբունքին համապատասխանում են և՛ անդրադարձման, և՛ բեկված ճառագայթների տարածման օրենքները:

1.4. Երկրաչափական օպտիկայի մոտավորության կիրառելիության պայմանները

Երկրաչափական օպտիկայի մոտավորության կիրառելիության հարցը սերտորեն առնչվում է ալիքի մոնոքրոմատիկության աստիճանի հետ: Հարթ մոնոքրոմատիկ ալիքը, ըստ ձևակերպման, ունի հաստատուն ամպլիտուդ և անվերջ է տարածության ու ժամանակի մեջ: Եթե ալիքի ամպլիտուդը, ժամանակից կախված, փոփոխվում է, այն կարող է լինել մոնոքրոմատիկ միայն այս կամ այն չափով:

Դիտարկենք էլեկտրամագնիսական ալիք, որի ամպլիտուդը ֆունկցիա է և ժամանակից, և կոորդինատից: Եթե գոյություն ունի ինչ-որ միջին հաճախություն, ապա այս ալիքը կարելի է նկարագրել հետևյալ կերպ`

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t)\, e^{-i\omega_0 t} \qquad /1.4.1/$$

/1.4.1/ բանաձևով նկարագրվող ալիքի $\vec{E}_\omega(\vec{r})$ ֆուրյե պատկերը կլինի

$$\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0(\vec{r},t)\, e^{i(\omega-\omega_0)t}\, dt \qquad /1.4.2/$$

Եթե /1.4.2/ արտահայտության մեջ $\vec{E}_0(\vec{r},t)$ -ն հաստատուն է, ապա $\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = 0$: Եթե $\Delta t \sim \frac{1}{\omega-\omega_0}$ ժամանակահատվածում այն փոփոխվում է դանդաղ, $\vec{E}_{\omega}$ -ն զրոյից քիչ տարբերվող մեծություն է: Այսպիսով, եթե Δt ժամանակահատվածում $\vec{E}_0(\vec{r},t)$ -ն փոփոխվի զգալիորեն, ապա հաճախությունների $\Delta\omega$ միջակայքում, որի համար դիտվող ինտենսիվություններ ունեն նկատելի արժեքներ, կորոշվի

$$\Delta\omega\, \Delta t \gtrsim 1 \qquad /1.4.3/$$

առնչությունից: Այսպիսով. որքան ավելի փոքր է $\Delta\omega$ մեծությունը /որքան ավելի մոնոքրոմատիկ է ալիքը/, այնքան ավելի մեծ կլինի Δt -ն, և, հետևաբար, փոքր՝ ամպլիտուդի փոփոխման արագությունը:

Նման առնչություններ կարելի է ստանալ և ալիքային վեկտորի համար: Իրոք՝ $\vec{E}_0(\vec{r},t)e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$ ալիքի Ֆուրյե-պատկերը հետևյալն է՝

$$\vec{E}_{\vec{k}}(t) = \int \vec{E}_0(\vec{r},t)\, e^{i(\vec{k}_0-\vec{k})\vec{r}}\, d\vec{r} \qquad /1.4.5/$$

ՀամաՑան դատողություններով կարելի է գրել.

$$\Delta K_x \Delta x \gtrsim 1, \quad \Delta K_y \Delta y \gtrsim 1, \quad \Delta K_z \Delta z \gtrsim 1 \qquad /1.4.6/$$

/1.4.3/ և /1.4.6/ առնչությունները քվանտային մեխանիկայի հիմքում ընկած անորոշությունների առնչություններն են:

Ենթադրենք՝ ճառագայթումն սկսվել է ժամանակի $t=t_0$ պահին և վերջացել $t=t_0+\Delta t$ -ին: Վերն ասվածից հետևում է, որ ամպլիտուդի էական փոփոխության ժամանակը /զրոյից մինչև $\vec{E}_0$ և ապա՝ զրո/ Δt է, և հետևաբար նրա մոնոքրոմատիկության աստիճանը $\Delta\omega = |\omega-\omega_0| = \frac{1}{\Delta t}$ է: Կիրառել ԵՕ-ի մոտավորությունն այսպիսի ալիքի նկատմամբ, կնշանակի ենթադրել, որ $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$:

Երկրորդ՝ /1.4.6/ առնչությունից հետևում է՝

$$\Delta K_x \geqslant \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta K_y \geqslant \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta K_z \geqslant \frac{1}{\Delta z}, \qquad /1.4.7/$$

այսինքն՝ դիտարկվում է վերջավոր չափերի ճառագայթային փունջ /ճառագայթային խողովակ/, ըստ որում, ճառագայթների տարածման ուղղությունն այդ փնջում չի կարող լինել սույզ հաստատուն, ինչպես պահանջում է ԵՕ-ն: Օրինակ, եթե ճառագայթն ուղղված է z -ով $/\Delta K_z = 0,\ \Delta z \to \infty/$, ապա՝

$$\Delta\theta_x \sim \frac{1}{K\Delta x} \sim \frac{\lambda}{\Delta x}, \qquad \Delta\theta_y \sim \frac{1}{K\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \qquad /1.4.8/$$

որտեղ $\Delta\theta_x$-ը և $\Delta\theta_y$ -ը ճառագայթի ուղղության շեղումներն են-միջին

z ուղղությունից x և y հարթությունների մեջ /1.4.7/-ից /1.4.8/-ը ստանալու համար բավական է հիշել, որ $K_x = K\sin\theta\cos\varphi$ և $K_y = K\sin\theta\sin\varphi$ ու շեղման փոքր անկյունների համար փոխարինել $\sin\theta \sim \theta$ -ով. x հարթությունը $\varphi=0$ հարթությունն է, y հարթությունը՝ $\varphi=\frac{\pi}{2}$-ը/:

Այսպիսով՝ որքան ավելի մեծ լինեն Δt, Δx և Δy միջակայքերը, այնքան ավելի մեծ կլինի ալիքի մոնոքրոմատիկության աստիճանը, այնքան ավելի ուղղագիծ այն կտարածվի, այսինքն՝ այնքան ավելի հիմնավորված կդառնա ԵՕ-ի մոտավորության կիրառումը:

Մասնավորապես՝ /1.4.8/ առնչությունից հետևում է, որ ալիքի տարածման ուղղության շեղման մեծությունը համեմատական է ալիքի λ երկարությանը: $\lambda = 0$ դեպքը /երբ ցանկացած վերջավոր չափերի ճառագայթային փունջը կտարածվեր սույզ ուղղագիծ մաթեմատիկական /երկրաչափական/ իդեալականացում է, որին համապատասխանում է ԵՕ-ն:

/1.4.8/ առնչության ֆիզիկական բովանդակությունը լավ է պարզաբանում հետևյալ փորձույթը մտքով: Դիցուք՝ հարթ, կլանող էկրանի Δx, Δy բացվածքին, նրա հարթությանը ուղղահայաց՝ z ուղղությամբ ընկնում է իդեալական, մոնոքրոմատիկ հարթ ալիք: /1.4.8/ առնչություններից հետևում է, որ $\lambda = 0$ դեպքում էկրանի ստվերող կողմում կդիտվեր սկզբնական հարթ ալիքի՝ Δx, Δy լայնական չափերով սահմանափակված հատվածը, իսկ ալիքի ցանկացած վերջավոր երկարության դեպքում այն կտարամիտի, ըստ որում՝ տարամիտության աստիճանը կորոշվի /1.4.8/ առնչություններից: Նկարագրված երևույթը անվանվում է ալիքի դիֆրակցիա: Այն մանրամասնորեն կքննարկենք հաջորդ գլխում: /1.4.8/ առնչություններից հետևում է, որ որքան ավելի փոքր լինի ալիքի երկարությունը /որքան ավելի մեծ՝ Δx, Δy չափերը/, այնքան ավելի փոքր կլինեն դիֆրակցիոն էֆեկտները և հիմնավորված՝ ԵՕ-ի կիրառումը:

Այսպիսով. ԵՕ-ի օրենքների սահմանափակությունը պայմանավորված է այն հետևանքներով, որոնք առաջանում են, երբ ալիքի երկարությունը ենթադրվում է անվերջ փոքր: Այս ենթադրությունը, մասնավորապես, բերում է խիստ էական հակասությունների վերը ծանկերպված /տես § 1.2/ երկրաչափաօպտիկական հասկացություններում:

Իրոք, համաձայն ճառագայթային խողովակում գործող ինտենսիվությունների օրենքի /տես /1.2.12-ը/, այն կետերում, կամ այն մակերևույթների վրա, որտեղ ճառագայթային խողովակի լայնական կտրվածքը անվերջ նեղանում է /կիզակետեր կամ կաուստիկներ/ ԵՕ-ի ճառագայթի ամպլիտուդը ձգտում է անվերջության /տես, օրինակ, /1.2.14/ օրենքը, երբ $R_1 \to 0$, $R_2 \to 0$/: Ավելին՝ կարելի է ցույց տալ, որ կաուստիկի մոտով անցնելիս ԵՕ ճառագայթի էյքոնալն ունի խզում: Իրականում, վերջավոր ալիքի երկարության դեպքում, հասկանալի է, որ ճառագայթային խողովակի լայնական կտրվածքը փոքրանալով, կունենա միշտ վերջավոր մեծություն կաուստիկի վրա և հետևաբար կդիտվի միայն ամպլիտուդի, երբեմն շատ էական, բայց միշտ վերջավոր աճ /ասում են՝ ճառագայթների կիզակետում/:

Այսպիսով, ԵՕ-ի օրենքներն ու հասկացությունները կորցնում են իրենց ֆիզիկական իմաստը կաուստիկներին անմիջականորեն հարող տիրույթներում /և նրանց վրա/ և իրենց սկզբնական ձևով կիրառելի չեն այնտեղ:

Այնուամենայնիվ, ԵՕ-ն կարող է արդյունավետ լինել նաև կաուստիկական տիրույթներում: 3-րդ գլխում ցույց կտրվի, թե ինչպես կարելի է ձևափոխել ԵՕ-ի տեսությունը, որպեսզի այն կարողանա նկարագրել ֆիզիկական երևույթները կաուստիկական տիրույթներում և սրանցից հեռու՝ համապատասխանի ԵՕ պատկերացումներին /հավասարաչափ ԵՕ/: Կարճ ալիքների ենթադրությունը ԵՕ-ի կիրառելիության անհրաժեշտ, բայց ոչ բավարար պայմանն է: Իրոք, սահմանափակվելով /1.1.2/ և /1.1.9/ վերլուծություններում միայն զրոյական մոտավորության անդամներով, և հետևաբար ենթադրելով, որ $\kappa \to \infty$ / $\lambda \to 0$/, մենք միտումնավոր կերպով հաշվի չառանք այն հանգամանքը, որ գործնականում ԵՕ-ն կիրառվում է, ճիշտ է, շատ կարճ, սակայն վերջավոր երկարության ալիքների դեպքում և, քանի որ զրոյական մոտավորության /1.1.7/ և /1.1.16/ լուծումները Հելմհոլցի և Մաքսվելի հավասարումների ճշգրիտ լուծումները չեն, ապա արդյունքում կարող է ստացվել սխալների կուտակում: Ռեալ ֆիզիկական խնդիրներում այս սխալի գնահատականը պետք է կարողանա տալ ԵՕ-ի կիրառելիության բավարար պայմանները:

Գնահատել նշված սխալի մեծությունն այնքան էլ հեշտ չէ, քանի որ միշտ չէ, որ գոյություն ունի դիտարկվող խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Որոշակի գնահատումներ կարելի է անել՝ պահանջելով, որ սպասվելիք սխալը լինի ոչ ավելի մեծ, քան /1.1.2/ և /1.1.9/ վերլուծությունների առաջին՝ արհամարհվող, և զրոյական անդամների բացարձակ արժեքների հարաբերությունը: Նշանակենք այս մեծությունը δ -ով և գրենք

$$\delta \leq \left|\frac{A_1}{\kappa A_0}\right|, \quad \delta \leq \left|\frac{\vec{A}_1}{\kappa \vec{A}_0}\right|, \quad \delta \leq \left|\frac{\vec{B}_1}{\kappa \vec{B}_0}\right| \qquad /1.4.9/$$

ԵՕ-ի մոտավորության կիրառելիության բավարար պայմանների որոշման հարցին /1.4.9/ բանաձևերը տալիս են սոսկ սկզբունքային պատասխան: Այն տրամաբանական է և ունի ֆիզիկական պարզ հիմնավորում: Գործնականում, սակայն, օգտվելը /1.4.9/ պայմաններից դժվար է և կապված է A_1, $\vec{A}_1$, $\vec{B}_1$ ամպլիտուդների հաշվարկի հետ, որն ինքնին բարդ մաթեմատիկական խնդիր է:

Հարցի պատասխանը կարելի է փնտրել ու գտնել նաև էվրիստիկական եղանակով՝ մտցնելով տարածության մեջ ալիքի վերջավոր երկարություն ունեցող ճառագայթի լոկալիզացման պայմանը:

Դիցուք՝ կետային P_1 աղբյուրը և դիտման P_2 կետը որոշված են համապատասխանորեն $\vec{r}_1$ և $\vec{r}_2$ շառավիղ-վեկտորներով: P_1 և P_2 կետերը միացնող օպտիկական ճանապարհը /էյքոնալը/ անվանենք այն իրական ճառագայթը, որը որոշվում է /1.2.8/ բանաձևով՝

$$\Psi(P_2) - \Psi(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\varepsilon\mu}\, dl = \Psi_{իրական}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \qquad /1.4.10/$$

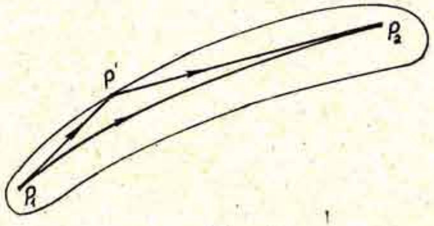
Ψ իրական $/\vec{r}_1, \vec{r}_2/$ ճառագայթի մերձակա տիրույթում ընտրենք որևէ P' կետ, որի շառավիղ-վեկտորն է $\vec{r}\,'$ -ը և տանենք ճառագայթներ P_1 -ից P' -ը և ապա՝ P' -ից P_2 -ը: Ստացված $P_1P'P_2$ բեկյալն անվանենք վիրտուալ ճառագայթ:

Ակնհայտ է, որ օպտիկական ճանապարհը այս ճառագայթի երկայնքով հավասար է $\Psi_{վիրտուալ}(\vec{r}_1, \vec{r}\,', \vec{r}_2) = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}\,') + \Psi(\vec{r}\,', \vec{r}_2)$ -ի:

Իրական ճառագայթի մերձակա տիրույթում կառուցենք

$$\vec{F}(\vec{r}\,') = \left|\Psi_{վիրտուալ}(\vec{r}_1, \vec{r}\,', \vec{r}_2) - \Psi_{իրական}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right| - \frac{\lambda}{2} = 0 \qquad /1.4.11/$$

մակերևույթը, որին պատկանում են բոլոր P' կետերը, պայմանով, որ վիրտուալ ու իրական էյքոնալների օպտիկական ճանապարհների տարբերությունը միշտ հաստատուն է և հավասար է ալիքի երկարության կեսին /Նկ.5/:



Նկ. 5

Այս մակերևույթը, այսպիսով, P_1P_2 միջակայքում Ֆրենելի առաջին գոտիների պարուրիչն է, իսկ նրանով պարփակված ծավալը՝ ճառագայթի Ֆրենելյան ծավալը: Այսպիսով՝ եթե ճառագայթը ոչ թե երկրաչափական, այլ ֆիզիկական հասկացություն է, ապա Ֆրենելյան ծավալը տարածության մեջ սրա լոկալիզացման տիրույթն է: Իրոք, առանձնացնելու համար տվյալ ճառագայթը անթափանց էկրանի վրա արված բացվածքի օգնությամբ, պետք է ընտրել այս բացվածքի չափերը ավելի մեծ, քան համապատասխան Ֆրենելյան ծավալի լայնական հատույթի չափերն են, այլապես այս ճառագայթով պայմանավորված դաշտը էապես կաղավաղվի։

Եթե /1.4.11/ հավասարման մեջ վիրտուալ և իրական ճառագայթների օպտիկական ճանապարհների տարբերությունը ոչ թե $\frac{\lambda}{2}$ -է, այլ $m\frac{\lambda}{2}$ /որտեղ m -ը ամբողջ թիվ է/, ապա մենք գործ ունենք բարձր կարգի Ֆրենելյան գոտիների հետ։ Բոլոր այն դեպքերում, երբ ֆրենելյան բարձր կարգի գոտիների ներդրումները ինտերֆերենցիայի հետևանքով փոխադարձաբար մարում են միմյանց /այս բանը ֆիզիկական ռեալ խնդիրներում համարյա միշտ տեղի ունի/, արդյունարար դաշտը որոշվում է ճառագայթի մերձավորագույն տիրույթով, այլ խոսքով ասած՝ նրա Ֆրենելյան ծավալով։ Հենց այս հանգամանքն էլ ի նկատի ունենալով՝ Յ.Ա.Կրավցովը և Յ.Ի.Օրլովը ձևակերպեցին ԵՕ-ի մոտավորության կիրառելիության հետևյալ բավարար պայմանները.

ա/ճառագայթի Ֆրենելյան ծավալի լայնական հատույթում ինչպես միջավայրի, այնպես էլ ալիքի պարամետրերը /միջավայրի բեկման ցուցիչը, ալիքի ամպլիտուդը և փուլի գրադիենտը/ չպետք է էապես փոփոխվեն։

բ/ դեպի նույն կետն ուղղված ճառագայթների Ֆրենելյան ծավալները չպետք է էականորեն հատվեն միմյանց հետ։

Նշանակենք ճառագայթի ամպլիտուդը A -ով, Ֆրենելյան ծավալի լայնական հատույթի չափը՝ $a_{ֆ}$ -ով։ Առաջին պայմանը պահանջում է հետևյալ անհավասարությունների կատարումը՝

$$a_{ֆ}\left|\frac{\vec{\nabla}_{\perp} A}{A}\right| \ll 1, \qquad /1.4.12,ա/$$

$$a_{ֆ}\left|\frac{\vec{\nabla}_{\perp}(\vec{\nabla}\Psi)}{\vec{\nabla}\Psi}\right| \ll 1, \qquad /1.4.12,բ/$$

$$a_{ֆ}\left|\frac{\vec{\nabla}_{\perp}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right| \ll 1, \qquad /1.4.12,գ/$$

որտեղ $\vec{\nabla}_{\perp} = \vec{\nabla} - \vec{\tau}(\vec{\tau}\vec{\nabla})$, այսինքն՝ $\vec{\nabla}$ օպերատորի՝ ճառագայթային ուղղահայաց մասը։

Երկրորդ պայմանի համար կարելի է գրել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\delta S \ll S, \qquad /1.4.13/$$

որտեղ S -ը ճառագայթի Ֆրենելյան ծավալի լայնական հատույթի մակերեսն է, δS -ը Ֆրենելի առաջին գոտիների ընդհանուր մասը։

/1.4.12/ և /1.4.13/ անհավասարությունները այն բավարար պայմաններն են, որոնց դեպքում կիրառելի է ԵՕ-ի մոտավորությունը։

Հետաքրքիր է նշել, որ /1.4.12,ա/ անհավասարությունը փաստորեն

համարժեք է

$$a_{ֆ} \ll R_{1,2} \qquad /1.4.14/$$

անհավասարությանը, որտեղ $R_{1,2}$ -ը ալիքային ճակատի կորության գլխավոր շառավիղներն են։ Երբ սկզբնական դաշտը տրված է մակերևույթի վրա, ապա սրանից փոքր /ալիքի երկարության կարգի/ հեռավորության վրա, Ֆրենելյան ծավալի լայնական չափը ալիքի երկարության կարգի է, և /1.4.14/-ը կգրվի՝

$$\lambda \ll R_1, \qquad \lambda \ll R_2 \qquad /1.4.14,ա/$$

տեսքով։ /1.4.14,ա/-ն այն անհրաժեշտ պայմանն էր, որի կատարումը ենթադրել էինք, երբ արտածում էինք ճառագայթների բեկման ու անդրադարձման օրենքները։ Տվյալ դեպքում անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները համընկան։

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. $t=0$ պահին ալիքային մակերևույթի հատույթը $x=a\cos\varphi$ և $y=b\sin\varphi$ հավասարումներով որոշվող էլիպս է։ Դիցուք՝ ալիքը տարածվում է v արագությամբ։ Որոշել ալիքային մակերևույթի հատույթի տեսքը $t>0$ պահերին։ Դիտարկել երկու դեպք. առաջին՝ ալիքը տարածվում է դեպի էլիպսի ներսը, երկրորդ՝ դեպի դուրս։ Քննարկել շրջանագծի դեպքը $/a=b=R/$։

Պատ.՝

$$x = a\cos\varphi\left\{1 \mp \frac{\frac{b}{a}vt}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\right\},$$

$$y = b\sin\varphi\left\{1 \mp \frac{\frac{a}{b}vt}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\right\}$$

Ցույց տալ, որ ալիքի՝ դեպի ներս տարածվելու դեպքում $t=\frac{b^2}{av}$ պահին առաջանում են շրջման կետեր։

2. Ստանալ $t = 0$ պահին նախորդ խնդրում դիտարկված ալիքի կաուստիկի հավասարումը։ Քննարկել շրջանագծի դեպքը։

Ցուցում. կաուստիկը որոշվում է որպես $/x,y/$ ալիքային մակերևույթի էվոլյուտ $/X,Y/$՝

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Պատ.՝

$x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ Բևեռային կոորդինատական համակարգում՝

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad Y = -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\varphi,$$

կամ՝

$$a^{2/3}X^{2/3} + b^{2/3}Y^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

3. Գլանային հայելու վրա, նրա գլխավոր օպտիկական առանցքին զուգահեռ ընկնում է հարթ ալիք: Որոշել անդրադարձած ճառագայթների առաջացրած կաուստիկի հավասարումը /գլանային աբերացիա/:

Ցուցում. օգտվել նախորդ խնդրի ցուցումից՝ նախապես ստանալով $x = R_0\cos\varphi$, $y = R_0\sin\varphi$ հավասարումներով որոշվող գլանից անդրադարձած ճառագայթների հավասարումը:

Պատ.՝

$$X = R_0\cos\varphi\left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right), \quad Y = R_0\sin^3\varphi$$

4. $y^2 = ax$ պարաբոլային գլանի վրա՝ նրա գլխավոր օպտիկական առանցքի նկատմամբ α ուղղությամբ ընկնում է հարթ ալիք: Որոշել անդրադարձած ճառագայթների առաջացրած կաուստիկի հավասարումը: Քննարկել $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ և $\alpha < 0$ դեպքերը և ցույց տալ, որ $\alpha = 0$-ի դեպքում առաջացած կաուստիկը /կիզակետը/ անկայուն գոյացություն է:

Պատ.՝

$$X = x\left\{1 - \frac{2\sin(\beta-\alpha)}{\sin 2\beta\cos\beta}\cos(2\beta-\alpha)\right\},$$

$$Y = x\left\{2tg\beta - \frac{2\sin(\beta-\alpha)}{\sin 2\beta\cos\beta}\sin(2\beta-\alpha)\right\}, \text{ որտեղ՝ } tg\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$$

Առաջին գլխի գրականությունը

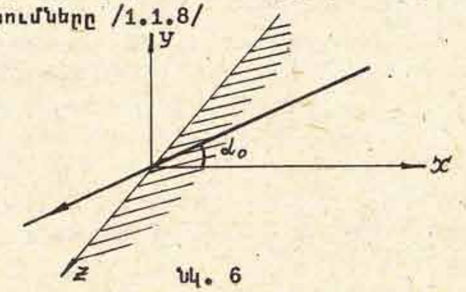
I. С.М.Рытов. ДАН СССР, т.ХУШ, №№ 4,5,I938.
2. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики. М., Наука, I973.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., Наука, I973.
4. В.И.Смирнов. Курс высшей математики. М., ГИТТЛ, т.П (гл.У).

ԳԼՈՒԽ 2

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

2.1. Հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսահարթության եզրին /Զոմերֆելդի խնդիրը/: Խնդրի դրվածքը և լուծման սկզբունքը

Դիցուք՝ հարթ էլեկտրամագնիսական ալիքը α_0 ուղղությամբ ընկնում է /նկ.6/ անվերջ բարակ իդեալական կիսահարթության / $y = 0$, $x > 0$, z / եզրին՝ վերջինիս ուղղահայաց: Դժվար չէ տեսնել, որ այս դեպքում խնդիրն ընդունում է երկչափ բնույթ: Իրոք, գրենք Մաքսվելի հավասարումները /1.1.8/



Նկ. 6

էլեկտրական ու մագնիսական դաշտերի բաղադրիչների տեսքով / $\varepsilon = \mu = 1$ /.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = ik H_x, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -ik E_x,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik H_y, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -ik E_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = ik H_z, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -ik E_z \qquad /2.1.1/$$

Խնդրի դրվածքից հետևում է, որ /2.1.1/ հավասարումների լուծումները z կոորդինատից կախված չեն, և ածանցյալները ըստ այս կոորդինատի, պետք է հավասարեցնել զրոյի: Կստանանք՝

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = ik H_x, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} = -ik E_x,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -ik H_y, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = ik E_y, \qquad /2.1.2,ա/$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = ik H_z, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -ik E_z$$

Հավասարումների /2.1.1,ա/ համակարգը տրոհվում է երկու անկախ համակարգերի՝

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=ikH_x,\quad \frac{\partial E_z}{\partial x}=-ikH_y,\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-ikE_z, \qquad /2.1.2/$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=-ikE_x,\quad \frac{\partial H_z}{\partial x}=ikE_y,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=ikH_z \qquad /2.1.3/$$

/2.1.2/ հավասարումներից առաջինն ու երկրորդը տեղադրելով երրորդում՝ կստանանք

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+k^2E_z=0 \qquad /2.1.2,ա/$$

հավասարումը։ Նույն ձևով /2.1.3/-ից ստացվում է

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+k^2H_z=0 \qquad /2.1.3,ա/$$

հավասարումը։ /2.1.2/ հավասարումներով որոշվող էլեկտրամագնիսական ալիքներն անվանենք էլեկտրական՝ E տիպի ալիքներ, իսկ /2.1.3/-ով որոշվողը՝ մագնիսական H տիպի։ Թե E, թե H տիպի ալիքների համար կարելի է գրել մեկ ընդհանուր հավասարում՝

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+k^2V=0, \qquad /2.1.4/$$

որի տարրական լուծումն ունի

$$e^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} \qquad /2.1.5/$$

տեսքը։ Բևեռային կոորդինատական համակարգում, որտեղ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$ ։ /2.1.5/ արտահայտությունը կընդունի

$$e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} \qquad /2.1.5,ա/$$

տեսքը։

Խնդրի հետագա լուծումը հարմար է ընտրել կոմպլեքս փոփոխականների տեսության մեթոդներով։ Եթե ենթադրենք, որ α փոփոխականն ընդունում է կոմպլեքս արժեքներ՝ $\alpha\to\alpha_0+i\beta$, ապա /2.1.5/ արտահայտությունը կընդունի

$$e^{ikr\cos(\theta-\alpha_0-i\beta)}=e^{ikr\cos(\theta-\alpha_0)ch\beta-kr\sin(\theta-\alpha_0)sh\beta} \qquad /2.1.6/$$

տեսքը, որն անհամասեռ հարթ ալիք է, երբ հավասար փուլերի հարթությունը /ալիքային ճակատ/ ուղղահայաց է տարածման ուղղությանը, իսկ հավասար ամպլիտուդների հարթությունը, ի տարբերություն համասեռ հարթ ալիքների, զուգահեռ է այս ուղղությանը։ Անհամասեռ հարթ ալիքը /$\beta\neq 0$/ վերջնական լուծման մեջ որևէ ներդրում չունի, սակայն այս հասկացությունը խիստ օգտակար է էկրանի եզրին մոտիկ տիրույթներում մակածված

հոսանքների վարքը ճշգրտորեն նկարագրելու համար։

Ինչպես E, այնպես էլ H տիպի ալիքների համար խնդրի լուծումը փնտրվում է որպես α կոմպլեքս հարթության վրա /2.5.1.5,ա/ տիպի անհամասեռ ալիքների գծային վերադրում /սուպերպոզիցիա/՝

$$\int_C P(\cos\alpha)\, e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}\, d\alpha \qquad /2.1.7/$$

և հանգում է C կոնտուրի հարմար ընտրության և եզրային պայմաններին բավարարելուն՝ համապատասխանորեն E և H տիպի ալիքների համար։ Այն հանգամանքը, որ լուծվում է դիֆրակցիոն խնդիր, այն է՝ գոյություն ունի կարուկ ընդհատում խնդրի պարամետրերի մինչև $x=0$, $y=0$ գծի վրա, անհրաժեշտաբար հանգեցնում է /2.1.7/ տիպի դաշտերի և սրանց կողմից $y=0$, $x>0$ կիսահարթության վրա մակածված հոսանքների համար երկու տիպի եզրային պայմանների՝ այն է՝ դաշտերի համար եզրային պայմանների բավարարմանը $x>0$, $y=0$ իդեալական հաղորդիչի վրա, և մակածված հոսանքների բացակայության պայմանը $x<0$ տիրույթում։ Ընտացվող ինտեգրալ հավասարումները, երբ փնտրվող $P(\cos\alpha)$ ֆունկցիան x պարամետրի փոփոխման երկու տարբեր տիրույթներում /$x<0$ և $x>0$/ բավարարում են երկու տարբեր հավասարումների, կոչվում են կրկնակ ինտեգրալ հավասարումներ։

Կանգ չառնելով այս հավասարումների լուծմանն առնչվող մանրամասների վրա՝ բերենք խնդրի լուծման վերջնական տեսքը։ Այն է՝

$$E_z=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\, e^{ikr}\left\{G(u)-G(v)\right\} \qquad /2.1.8/$$

E տիպի ալիքների կամ E բևեռացման համար և

$$H_z=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\, e^{ikr}\left\{G(u)+G(v)\right\} \qquad /2.1.9/$$

H բևեռացման համար։

/2.1.8/ և /2.1.9/ արտահայտություններում՝

$$G(x)=e^{-ix^2}F(x),\qquad F(x)=\int_x^{\infty}e^{i\mu^2}d\mu, \qquad /2.1.10/$$

$$u=-\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2},\qquad v=-\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2}$$

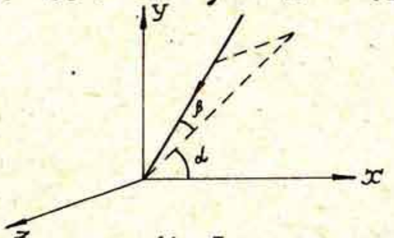
$F(x)$-ը Ֆրենելի ֆունկցիայի արտահայտության տարածված ձևերից մեկն է։

Դիֆրակցված դաշտի մյուս բաղադրիչները H_x-ը, H_y-ը E բևեռացված ալիքների համար և E_x-ը, E_y-ը H բևեռացված ալիքների համար կստացվեն համապատասխանաբար /2.1.2/ և /2.1.3/ հավասարումներից։

Այժմ ընդհանրացնենք ստացվածը եռաչափ դեպքի համար։ Դիցուք ընկնող ալիքը բնութագրվում է

$$\mathcal{U} = exp[-ik(x\cos\alpha_0\cos\beta + y\sin\alpha_0\cos\beta + z\sin\beta)] \qquad /2.1.11/$$

փուլային բազմապատկիչով: α_0 և β անկյունները ցույց են տրված նկ. 7-ի վրա:



Նկ. 7

Նկատենք, որ /2.1.11/ արտահայտությունը կստացվի երկչափ դեպքից, որը համապատասխանում է $\beta = 0$-ին, եթե վերջինում փոխարինենք $K \to K\cos\beta$ և բազմապատկենք $e^{-iKz\sin\beta}$: Իրոք՝

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} + K^2\mathcal{U} = 0$$

և

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + K^2\cos^2\beta V = 0 \qquad /2.1.12/$$

հավասարումները նույնանում են նման ձևափոխություններից հետո: Ավելին, հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ երկու էլեկտրամագնիսական ալիքները, որոնք բավարարում են Մաքսվելի հավասարումներին, կլինեն

E բևեռացման համար՝

$$\vec{E} = \left(-\frac{i\sin\beta}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x},\ -\frac{i\sin\beta}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y},\ \cos^2\beta\, \mathcal{U}\right)$$
$$\vec{H} = \left(-\frac{i}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y},\ \frac{i}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x},\ 0\right) \qquad /2.1.13/$$

բևեռացման համար՝

$$\vec{E} = \left(\frac{i}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y},\ -\frac{i}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x},\ 0\right)$$
$$\vec{H} = \left(-\frac{i\sin\beta}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x},\ -\frac{i\sin\beta}{K}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y},\ \cos^2\beta\, \mathcal{U}\right) \qquad /2.1.14/$$

Երբ $\beta = 0$, /2.1.13/ և /2.1.14/ դաշտերը վերածվում են երկչափ խնդրի համար ստացվող արտահայտություններին: Ընդհանրացման նման պարզ եղանակը պայմանավորված է նրանով, որ ցանկացած հարթ էլեկտրամագնիսական դաշտ այլասերված է. այն կարող է որոշվել $\vec{E}$ և $\vec{H}$ վեկտորների երկու բաղադրիչներով, երբ երրորդ բաղադրիչը որոշվում է

$div\vec{E}=0$ կամ $div\vec{H}=0$ հավասարումներից:

Քանի որ /2.1.12/ հավասարումը $K \to K\cos\beta$ փոխարինմամբ բերվում է /2.1.4/-ի տեսքի, ապա դիֆրակցիայի եռաչափ խնդիրը, երբ ընկնող ալիքն այլևս ուղղահայաց չէ կիսահարթության եզրին, կլուծվի միանգամայն համաբանորեն և արդյունքը կհամընկնի /2.1.8/-ին կամ /2.1.9/-ին, եթե վերջիններում ենթադրենք, որ $K = K\cos\beta$, իսկ իրենք՝ արտահայտությունները բազմապատկենք $e^{-iKz\sin\beta}$ -ով: Այսպիսով, հաշվի առնելով /2.1.13/-ը և /2.1.14/-ը E բևեռացման դեպքում ստանում ենք

$$E_z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\cos\beta\, e^{iK(r\cos\beta - z\sin\beta)}\left\{G(p) - G(q)\right\} \qquad /2.1.15/$$

և H բևեռացման դեպքում՝

$$H_z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\cos\beta\, e^{iK(r\cos\beta - z\sin\beta)}\left\{G(p) + G(q)\right\} \qquad /2.1.16/$$

արտահայտությունները,

$$p = -\sqrt{2Kr\cos\beta}\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}, \quad q = -\sqrt{2Kr\cos\beta}\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2} \qquad /2.1.17/$$

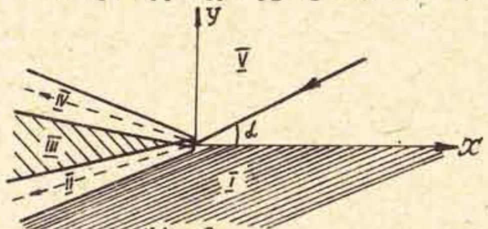
2.2. Զոմերֆելդի խնդրի լուծման կարճալիքային մոտարկումը

Քննարկենք E բևեռացմանը համապատասխանող /2.1.8/ դաշտի վարքը, երբ $Kr \gg 1$ /կարճ ալիքների դեպքը/: Երբ $Kr \gg 1$, ապա $u \gg 1$ և $v \gg 1$ բացառությամբ $\theta=\pi-\alpha_0$ և $\theta=\pi+\alpha_0$ ուղղությունների, որտեղ Ֆրենելի ֆունկցիաների արգումենտները վերածվում են զրոյի: Արտագրենք /2.1.8/ արտահայտությունը առավել բացահայտ տեսքով՝ օգտվելով /2.1.10/ նշանակումներից: Կստանանք՝

$$E_z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-iKr\cos(\theta-\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2Kr}\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}\right] - e^{-iKr\cos(\theta+\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2Kr}\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2}\right]\right\} \qquad /2.2.1/$$

/2.2.1/ տեսքով գրված դաշտերը ներկայացնում են երկու երկրաչափօպտիկական ալիքներ /հարթ ալիքներ/՝ $e^{-iKr\cos(\theta-\alpha_0)}$ և $e^{-iKr\cos(\theta+\alpha_0)}$, որոնցից առաջինն ընկնող, երկրորդը՝ անդրադարձած ալիքներն են, յուրաքանչյուրը՝ բազմապատկված համապատասխան Ֆրենելի ֆունկցիայով /հասկանալի է, որ $e^{-i\frac{\pi}{4}}/\sqrt{\pi}$ ընդհանուր գործակիցը տվյալ դեպքում էական չէ. այն կարելի է, ցանկության դեպքում, մտցնել Ֆրենելի ֆունկցիայի ձևակերպման մեջ/: Սրանցից յուրաքանչյուրը բավարարում է Մաքսվելի հավասարումներին և հանդիսանում է մյուսի հայելային անդրադարձումը դիֆրակցիայի հարթության նկատմամբ /տվյալ դեպքում Դիրիխլեի խնդրին համապատասխանող սիմետրիայի համար/:

Քանի որ խոսքը ընկնող և անդրադարձած ալիքների մասին էր, ամենաընդհանուր ֆիզիկական պատկերացումներից ելնելով, կարելի է /2.1.8/ կամ /2.2.1/ լուծման տիրույթը պայմանականորեն բաժանել հինգ տարբեր տիրույթների: Նկ. 8-ում այս տիրույթները նշանակված են հռոմեական թը-



Նկ. 8

վանշաններով: Դաշտի վարքը Ֆրենելի ֆունկցիայի արգումենտի մեծ արժեքների համար դիտարկելու նպատակով՝ անհրաժեշտ է առանձնացնել $\theta = \pi \pm \alpha_0$ ուղղություններին համապատասխանող ուղիղների շրջակայքը: Որպես այդպիսի շրջակայք՝ հարմար է ընտրել $u^2=1$ և $v^2=1$ կորերով սահմանափակված տիրույթը: Բացահայտ տեսքով այս հավասարումները կգրվեն

$$k r \cos(\theta \pm \alpha_0) + k r = 1 \qquad /2.2.2/$$

կամ

$$k(x \cos\alpha_0 \mp y \sin\alpha_0) + k\sqrt{x^2+y^2} = 1 \qquad /2.2.2,ա/$$

տեսքով: Բերենք այս հավասարումները կանոնական տեսքի՝ կատարելով պըտույտ դեկարտյան կոորդինատային համակարգում $\mp$ առանցքի շուրջը $\pi \pm \alpha_0$ անկյուններով՝

$$x = -x'\cos\alpha_0 \mp y'\sin\alpha_0 \qquad /2.2.3/$$

$$y = \pm x'\sin\alpha_0 - y'\cos\alpha_0$$

Այսպիսի ձևափոխություններից հետո /2.2.2,ա/ հավասարումները կբերվեն հետևյալ տեսքի՝

$$y'^2 = \frac{2}{k}\left(x' + \frac{1}{2k}\right) \qquad /2.2.4/$$

/2.2.4/ հավասարմամբ որոշվող կորը քառակուսային պարաբոլ է, որի առանցքը համընկնում է համապատասխանաբար ընկնող /անդրադարձած/ ալիքի ուղղությանը, գագաթը գտնվում է կիսահարթության եզրից $x' = -\frac{1}{2k}$ հեռավորության վրա, իսկ կիզակետը՝ էկրանի եզրին: Այսպիսի պարաբոլ-

ներով սահմանափակված տիրույթները նկ. 8-ում նշված են II և IV թվանշաններով: Երբ $u^2=\varepsilon$ և $\varepsilon \ll 1$, ապա $|u| \ll 1$ և դիտման կետը գտնվում է II տիրույթի խորքում: Երբ $v^2=\varepsilon$ և $\varepsilon \ll 1$, $|v| \ll 1$ և դիտարկվում են IV տիրույթի խորքի կետերը, իսկ երբ $u^2=\gamma$ և $v^2=\gamma$, $\gamma \gg 1$ և դիտարկվում են II և IV տիրույթներից դուրս ընկած կետերը:

Հասկանալի է, որ ընկնող ճառագայթի հասկացությունը հավասարի է միայն III և V տիրույթներում, անդրադարձածինը՝ միայն I -ում: Ելնելով այսպիսի՝ էապես երկրաչափաօպտիկական պատկերացումներից՝ V տիրույթը անվանվում է լույսի տիրույթ, III -ը՝ լույս-ստվերի, I -ը, որտեղ չկան երկրաչափաօպտիկական ճառագայթներ, ստվերի տիրույթ: Ելնելով $kr \gg 1$ պայմանից՝ յուրաքանչյուր տիրույթի համար կստանանք դաշտի համար մոտարկային արտահայտություններ, որոնք, մասնավորապես, կհիմնավորեն նկարագրված երկրաչափական պատկերը:

Այս նպատակով, նախ և առաջ, որոշենք և u-ի, և v-ի՝ Ֆրենելի ֆունկցիաների արգումենտների նշանները θ անկյան փոփոխման տարբեր տիրույթներում: Հիշենք, որ

$$u = -\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}, \qquad v = -\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2} \qquad /2.2.5/$$

Այստեղից հետևում է՝

$$u < 0 \quad \text{և} \quad v < 0, \quad \text{երբ} \quad 0 \le \theta \le \pi-\alpha_0 \qquad /2.2.6,ա/$$

$$u < 0 \quad \text{և} \quad v > 0, \quad \text{երբ} \quad \pi-\alpha_0 \le \theta \le \pi+\alpha_0 \qquad /2.2.6,բ/$$

$$u > 0 \quad \text{և} \quad v > 0, \quad \text{երբ} \quad \pi+\alpha_0 \le \theta \le 2\pi \qquad /2.2.6,գ/$$

Այժմ ստանանք /2.1.8/ արտահայտության մեջ մտնող $G(u)$ և $G(v)$ կամ որ նույնն է՝ Ֆրենելի ֆունկցիաների մոտարկային տեսքը $kr \gg 1$ պայմանի դեպքում: Երբ $G(x)$ ֆունկցիայի x արգումենտը դրական թիվ է, ապա՝

$$G(x) = e^{-ix^2}\int_x^\infty e^{i\mu^2}d\mu = e^{-ix^2}\int_x^\infty \frac{de^{i\mu^2}}{2i\mu} =$$

$$= \frac{i}{2x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{4}e^{-ix^2}\int_x^\infty \frac{e^{i\mu^2}}{\mu^4}d\mu$$

եթե երկու անգամ կատարենք ինտեգրում ըստ մասերի: Վերջին ինտեգրալի մոդուլը ավելի փոքր է, քան

$$\frac{1}{4x^3}$$

մեծությունը, հետևաբար, երբ $x > 0$, ապա

$$G(x) \simeq \frac{i}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad /2.2.7/$$

Շարունակելով մասերով ինտեգրման այս պրոցեսը՝ հանգում ենք հետևյալ մոտարկային շարքին՝

$$G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_n \frac{\Gamma(n+1/2)}{(ix^2)^{n+1/2}}, \qquad /2.2.7,ա/$$

որտեղ $\Gamma(n+1/2)$-ը Էյլերի գամմա ֆունկցիաներն են կիսամբողջ արգումենտներով:

Երբ $G(x)$ ֆունկցիայի արգումենտը փոքր է զրոյից / $x<0$/, նման մասերով ինտեգրումը կոռեկտ չէ, քանի որ $\mu = 0$ կետում ինտեգրալը կըտարամիտի: Այս դեպքում կարելի է օգտվել Ֆրենելի ֆունկցիաների հետևյալ հատկությունից՝

$$F(x) + F(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu^2} d\mu = \sqrt{\pi i} = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad /2.2.8/$$

Այսպիսով, $x<0$ դեպքում $F(x)$-ը կարելի է արտահայտել $F(-x)$-ով, օգտվելով /2.2.8/ բանաձևից և համաձայն /2.2.7/ և /2.2.7,ա/ բանաձևերի, գրել.

$$G(x) = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-ix^2} + \frac{i}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad /2.2.9/$$

և

$$G(x) = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-ix^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_n \frac{\Gamma(n+1/2)}{(ix^2)^{n+1/2}} \qquad /2.2.9,ա/$$

Մենք կսահմանափակվենք $G(x)$ ֆունկցիայի /2.2.7/ և /2.2.9/ արտահայտությունների՝ $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ մոտավորությամբ ստացված արժեքներով:

Դիտարկենք /2.1.8/ դաշտի վարքը առանձին-առանձին I, III և V տիրույթներում, չքննարկելով առայժմ II և IV տիրույթների հարցը, որտեղ հասկանալի է, /2.2.7/ և /2.2.9/ մոտարկումները իրավասու չեն:

I տիրույթում, համաձայն /2.2.6,գ/-ի՝ $U>0$, $V>0$ և դաշտի մոտարկումն ստանալու համար /2.1.8/ բանաձևի մեջ պետք է տեղադրել՝ $G(U)=\frac{i}{2U}$ և $G(V)=\frac{i}{2V}$: Օգտվելով U-ի և V-ի համար մեր ունեցած /2.2.5/ արտահայտություններից՝ կստանանք

$$E_{z_I} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ikr}}{2\sqrt{2kr}} \left\{ \frac{i}{\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2}} - \frac{i}{\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha_0}{2}}{\cos\theta + \cos\alpha_0} \frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}} \qquad /2.2.10/$$

Ըստ վերը մացված պատկերացումների՝ /2.2.10/ դաշտը մաքուր դիֆրակցիոն բնույթ ունի /I տիրույթում ԵՕ ճառագայթներ չկան/: Հարմար է այն նշանակել $E_z^{(դ)}$ ձևով: Երբեմն այն անվանվում է նաև եզրային ալիք, որը գլանային է և առաջված է կարծես թե էկրանի եզրին զուգահեռ գծային աղբյուրից: Նման պատկերացումը հավաստվում է ֆորմով.

սավերի կողմից էկրանի եզրը ընկալվում է որպես վառ լուսավորված գիծ:

/2.2.6,բ/ կամ III տիրույթում $U<0$ և $V>0$, հետևաբար $G(U)$-ի համար կօգտվենք /2.2.9/, իսկ $G(V)$-ի համար՝ /2.2.7/ բանաձևերից՝

$$E_{z_{III}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-iU^2} + \frac{i}{2U} - \frac{i}{2V} \right\} = e^{i(kr-U^2)} + E_z^{դ} = e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)} + E_z^{դ} = E_z^{ընկ} + E_z^{դ} \qquad /2.2.11/$$

Ի վերջո, /2.2.6,ա/ կամ V տիրույթում $U<0$, $V<0$ և պետք է օգտվել /2.2.9/ բանաձևից՝ ինչպես $G(U)$, այնպես էլ $G(V)$ ֆունկցիաների համար: Արդյունքում ստանում ենք՝

$$E_{z_V} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4} - iU^2} - \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4} - iV^2} + \frac{i}{2U} - \frac{i}{2V} \right\} = e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)} - e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)} + E_z^{դ} = E_z^{ընկ} - E_z^{անդր} + E_z^{դ} \qquad /2.2.12/$$

Այսպիսով, ստացված /2.2.10/, /2.2.12/ բանաձևերը թույլ են տալիս ստացված լուծումը ներկայացնել որպես երկրաչափաօպտիկական, կարճ՝ ԵՕ /ընկնող և անդրադարձած/ ու դիֆրակցիոն դաշտերի՝ երկրաչափական օպտիկայի տեսանկյունից միանգամայն բացատրելի կոմբինացիա՝

$$E_z = E_z^{ԵՕ} + E_z^{դ} \qquad /2.2.13/$$

որտեղ

$$E_z^{ԵՕ} = \begin{cases} e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)} - e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}, & \text{երբ } 0 < \theta < \pi-\alpha_0 \\ e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}, & \text{երբ } \pi-\alpha_0 < \theta < \pi+\alpha_0 \\ 0, & \text{երբ } \pi+\alpha_0 < \theta < 2\pi \end{cases} \qquad /2.2.14/$$

և

$$E_z^{դ} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{\alpha_0}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\alpha_0 + \cos\theta} \frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}} \qquad /2.2.15/$$

/2.2.14/ և /2.2.15/ արտահայտությունները $kr \gg 1$ պայմանի դեպքում գործնականորեն ճշգրիտ են ներկայացնում դաշտերը, բացառությամբ $U^2 = 1$ և $V^2 = 1$ /II և IV պարաբոլներով սահմանափակված/ տիրույթների:

$\theta = \pi \pm \alpha_0$ ուղղություններում դիֆրակցիոն դաշտի /2.2.15/ արտահայտությունը տարամիտում է: Հասկանալի է, որ այս տարամիտումը պայմանավորված է մոտարկային վերլուծությամբ, որը, ինչպես ասվել էր վերը, $U^2=1$ և $V^2=1$ պարաբոլների ներքին տիրույթում մաթեմատիկորեն կոռեկտ չէ:

Այնուամենայնիվ փորձենք գնահատել դաշտի արժեքը այդ ուղղություններում։ Երբ $\theta=\pi+\alpha_0$, ապա $u=0$, իսկ $v=-\sqrt{2kr}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha_0)=\sqrt{2kr}\sin\alpha_0>0$։ Հետևաբար, երբ $kr\gg 1$

$$G(u)=G(0)=\int_0^\infty e^{i\mu^2}d\mu=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$G(v)=G(\sqrt{2kr}\sin\alpha_0)=\frac{i}{2\sqrt{2kr}\sin\alpha_0}+O\left(\frac{1}{(kr)^3}\right)\ll 1$$

Այսպիսով /2.1.8/-ից կստանանք

$$E_z \simeq \frac{e^{ikr}}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right) \qquad /2.2.16/$$

Ինչպես տեսնում ենք, $\theta=\pi+\alpha_0$ անկման ուղղությամբ դիֆրակցիոն դաշտի մեծությունը նույն կարգի է, ինչ ընկնողինը՝ e^{ikr}, իսկ վարքը նման է հարթ ալիքի վարքին։

Անդրադարձած ճառագայթի՝ $\theta=\pi-\alpha_0$ ուղղությամբ $u=-\sqrt{2kr}\sin\alpha_0<0$, $v=0$ և /2.1.8/ արտահայտությունից /2.2.9/ բանաձևի օգնությամբ ստանում ենք՝

$$E_z=e^{ikr\cos 2\alpha_0}-\frac{e^{ikr}}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right), \qquad /2.2.17/$$

որը նույնպես հարթ ալիք է, ըստ մեծության նույն կարգի, ինչ ընկնող դաշտը։ Այսպիսով. դիֆրակցիոն դաշտը, լինելով գլանային ալիք, որի ամպլիտուդը մարում է հեռավորությունից կախված՝ $\frac{1}{\sqrt{kr}}$ օրենքով, անկման և անդրադարձման ուղղություններում իրեն պահում է որպես հարթ ալիք, հեռավորությունից չկախված ամպլիտուդով։

H բևեռացման դեպքում նույնանման դատողություններից և մաթեմատիկական ձևափոխություններից հետո, դաշտի /2.1.9/ արտահայտությունից ստանում ենք

$$H_z=H_z^{\text{գօ}}+H_z^{(\text{դ})}, \qquad /2.2.18/$$

որտեղ՝

$$H_z^{\text{գօ}}=\begin{cases} e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}+e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}, & \text{երբ } 0<\theta<\pi-\alpha_0 \\ e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}, & \text{երբ } \pi-\alpha_0<\theta<\pi+\alpha_0 \\ 0, & \text{երբ } \pi+\alpha_0<\theta<2\pi \end{cases} \qquad /2.2.19/$$

և

$$H_z^{(\text{դ})}=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\frac{\alpha_0}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\alpha_0+\cos\theta}\,\frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}} \qquad /2.2.20/$$

Ուշադրություն դարձնենք, H բևեռացման դեպքում /2.2.19/ արտահայտության յուրաքանչյուր գումարելին մյուսի հայելային անդրա-

դարձումն է դիֆրակցիայի հարթության նկատմամբ, այս անգամ արդեն նեյմանի խնդրին համապատասխանող սիմետրիայի համար։

2.3. Զոմերֆելդի խնդրի լուծումը՝ որպես ,,կիսաստվերային,, մոտարկում

/2.2.14/, /2.2.15/, /2.2.19/ և /2.2.20/ բանաձևերն ասում են, որ ընկնող ալիքը տարածվում է /գոյություն ունի/ θ անկյան փոփոխման՝ $\pi+\alpha_0-\theta>0$ անհավասարությամբ որոշվող տիրույթում, իսկ $\pi+\alpha_0-\theta<0$ անհավասարության դեպքում այն գոյություն չունի։ Նույն բանաձևերից՝ անդրադարձած ալիքի գոյության տիրույթը որոշվում է $\pi-\alpha_0-\theta>0$ անհավասարությունից և, հակառակ դեպքում, երբ $\pi-\alpha_0-\theta<0$, այն գոյություն չունի։ Մտցնենք $\chi(\varphi)$ խզվող ֆունկցիայի հասկացությունը՝

$$\chi(\varphi)=\begin{matrix} 1, & \text{երբ } \varphi>0 \\ 0, & \text{երբ } \varphi<0 \end{matrix} \qquad /2.3.1/$$

Նշանակենք, այնուհետև H_z-ը և E_z-ը մեկ ընդհանուր՝ $\mathcal{U}$ տառով /$E_z=\mathcal{U}_1$, $H_z=\mathcal{U}_2$/ և գրենք դաշտերի համար ստացված /2.2.13/, /2.2.14/, /2.2.15/ և /2.2.18/, /2.2.19/, /2.2.20/ արտահայտությունները հետևյալ տեսքով՝

$$\mathcal{U}_{1,2}=e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}\chi(\pi+\alpha_0-\theta)\mp e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}\chi(\pi-\alpha_0-\theta)-$$
$$-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}}\mp\frac{1}{\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2}}\right\}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \qquad /2.3.2/$$

Այստեղ վերևի նշանը կհամապատասխանի E_z-ին /$\mathcal{U}_1$-ին/, ներքևինը՝ H_z-ին /$\mathcal{U}_2$-ին/։ Դաշտերի մյուս բաղադրիչները որոշվում են համապատասխանաբար /2.1.2/ և /2.1.3/ բանաձևերով։ Ստացված մոտարկային վերլուծությունները, գրված /2.2.13-15/, /2.2.18-20/ կամ /2.3.2/ տեսքով, ընդունված է անվանել ,,անհավասարաչափ մոտարկումներ,, այն առումով, որ սրանք , բավականաչափ ճշգրիտ նկարագրելով $\theta=\pi\pm\alpha_0$ անկյուններից տարբեր ուղղություններով տարածվող դաշտերը, $\theta=\pi\pm\alpha_0$ ուղղություններում տարամիտում են։ Այս հանգամանքի ֆիզիկական էությունը հետևյալն է. ընկնող /$\theta=\pi+\alpha_0$/ և անդրադարձած /$\theta=\pi-\alpha_0$/ դաշտերը հարթ ալիքներ են, որոնք /տես գլուխ I/ տարածվում են հաստատուն լայնական կտրվածք ունեցող ճառագայթային խողովակով /ճառագայթների ,,խտությունը,, ըստ լայնական կտրվածքի հաստատուն է/, մինչդեռ նույն ուղղությամբ տարածվող դիֆրակցիոն ալիքն ունի գլանային բնույթ։ Գլանային ալիքին համապատասխանող ճառագայթային խողովակի լայնական կտրվածքը, համեմատական լինելով ալիքային ճակատի զառույան կորության՝ r -ին, փոփոխվում է գծային օրենքով։ Ունենալով տարածման նույն ուղղությունը՝ առաջնային /ընկնող ու անդրադարձած/ և դիֆրակցիոն ալիքների ճակատների կորությունները միանգամայն տարբեր են, որի հետևանքով առաջանում է խզում ԵՕ և դիֆրակցիոն ալիքների ամպլիտուդների միջև։ Այս խզումն իրականում վերանում է ամպլիտուդի լայնական դիֆուզիայով, որի հավաստիքն է ճշգրիտ լուծումը։ Եթե հնարավոր լինի նկարագրել այս դիֆրակցիան որևէ անալիտիկ բանաձևի օգնությամբ, ապա կարելի է ցույց տալ, որ $\pi \pm \alpha_0 = \theta$ ուղղությանը մոտենալիս դիֆրակցիոն ալիքների ամպլիտուդը պարզապես աճում է և ի վերջո նկարագրվում է /2.2.16/ և /2.2.17/ բանաձևերով։ Այսպիսի լուծումը կանվանվի արդեն ,,հավասարաչափ,, մոտարկում։

Հավասարաչափ մոտարկման մի օրինակ է /2.1.8/ լուծումը։ Այս դեպքում այն համընկնում է ստույգ լուծմանը։ Իրոք, /2.1.8/ լուծման մեջ /տես նաև 2.2.1-ը/ Ֆրենելի ֆունկցիաների արգումենտները, գրված

$$\sqrt{kr + kr\cos(\theta \pm \alpha_0)} = \sqrt{k}\,\sqrt{r + r\cos(\theta \pm \alpha_0)}$$

տեսքով, հանդիսանում են ԵՕ և դիֆրակցիոն ալիքների էյքոնալները՝ գրված քառակուսային արմատի տակ և բազմապատկված $\sqrt{k}$ -ով։ Եթե /2.2.1/ -ում ընկնող դաշտի էյքոնալը $\Psi_{\text{ընկ}} = -r\cos(\theta-\alpha_0)$-ն է, անդրադարձածինը՝ $\Psi_{\text{անդ}} = -r\cos(\theta+\alpha_0)$ -ն, իսկ դիֆրակցված գլանային ալիքինը՝ $\Psi_{\text{դ}} = r$ -ը, որոնք իրոք բավարարում են էյքոնալի հավասարումներին՝ գրված դեկարտյան /Ψ ընկ և Ψ անդ/ և գլանային /$\Psi_{\text{դ}}$/ կոորդինատական համակարգերում, ապա /2.3.2/ արտահայտությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\mathcal{U}_{1,2} = e^{-ik\Psi_{\text{ընկ}}}\chi\left(\sqrt{\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ընկ}}}\right) \mp e^{-ik\Psi_{\text{անդ}}}\chi\left(\sqrt{\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{անդ}}}\right) - D(\theta,\alpha_0)\frac{e^{ik\Psi_{\text{դ}}}}{\sqrt{r}} \qquad /2.3.3/$$

Այստեղ $\sqrt{\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ԵՕ}}}$ -ն դրական է համապատասխան ԵՕ ալիքի /ընկնող կամ անդրադարձած/ տարածման տիրույթում, իսկ

$$D(\theta,\alpha_0) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k}}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2}}\right\} \qquad /2.3.4/$$

Եթե /2.2.1/ արտահայտության մեջ Ֆրենելի ֆունկցիան ձևակերպենք $\frac{1}{\sqrt{\pi i}}\int e^{i\mu^2}d\mu$ տեսքով /$\frac{1}{\sqrt{\pi i}}$ բազմապատկիչը մտցնենք Ֆրենելի ֆունկցիայի ձևակերպման մեջ/, ապա Զոմերֆելդի խնդրի ստույգ /չմոտարկված/ լուծումը E բևեռացման համար կընդունի

$$E_z = E_{z\,\text{ընկ}}\,F\left(-\sqrt{k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ընկ}})}\right) - E_{z\,\text{անդ}}\,F\left(-\sqrt{k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{անդ}})}\right), \qquad /2.3.5/$$

իսկ H բևեռացման համար՝

$$H_z = H_{z\,\text{ընկ}}\,F\left(-\sqrt{k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ընկ}})}\right) + H_{z\,\text{անդ}}\,F\left(-\sqrt{k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{անդ}})}\right) \qquad /2.3.6/$$

տեսքը։

/2.3.5/ և /2.3.6/ արտահայտություններում անհրաժեշտ է միայն ճշտել Ֆրենելի ֆունկցիաների արգումենտների նշանները։ Դա անենք՝ օգտվելով /2.3.3/ տեսքով գրված արտահայտությունից։ Ի վերջո

$$\mathcal{U}_{1,2} = \mathcal{U}_{\text{ընկ}}\,F\left(\mp\sqrt{k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ընկ}})}\right) \mp \mathcal{U}_{\text{անդ}}\,F\left(\mp\sqrt{k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{անդ}})}\right) \qquad /2.3.7/$$

/2.3.7/ արտահայտության մեջ վերևի նշանը վերցվում է ԵՕ տիրույթի համար, ներքևինը՝ ստվերի։

/2.3.7/ արտահայտությունը նկարագրում է, այսպիսով, ինչպես ԵՕ, այնպես էլ դիֆրակցիոն դաշտերը՝ որպես սրանց կոմբինացիա։ Այսպիսի դաշտերը, որոնք պարունակում են ինֆորմացիա՝ ինչպես ԵՕ, այնպես էլ դիֆրակցիոն դաշտերի մասին, անվանվում են ,,կիսաստվերային,, դաշտեր։

Մեզ համար առավել էական է հետևյալը. /2.3.5-2.3.7/ լուծումները, իրոք, կարելի է համարել մոտարկային այն առումով, որ սրանք արտահայտվում են միայն երկրաչափաօպտիկական հասկացությունների /էյքոնալների/ միջոցով, իսկ երկրաչափաօպտիկական հասկացությունները, ինչպես մենք ցույց ենք տվել, կարճալիքային մոտարկային հասկացություններ են։ Զոմերֆելդի ստույգ լուծման արտահայտությունները, պարզապես, երկրաչափաօպտիկական էյքոնալների ավելի բարդ կոմբինացիաներ են։

/2.3.5-2.3.7/ արտահայտություններում $\Psi_{\text{դ}} = \Psi_{\text{ընկ}}$, $\Psi_{\text{դ}} = \Psi_{\text{անդ}}$ հավասարումներով որոշվում են լույս-ստվեր սահմանները ընկնող-դիֆրակցիոն և անդրադարձած-դիֆրակցիոն դաշտերի միջև։ Անցումը /2.3.7/-ից /2.3.3/-ին հիմնավորված է, երբ

$$k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ԵՕ}}) >> 1, \qquad /2.3.8/$$

այսինքն՝ $\mathcal{U}^2=1$ և $\mathcal{V}^2=1$ պարաբոլներից դուրս ընկած տիրույթում։ Համեմատելով /2.3.3/ և /2.3.7/ լուծումները՝ կարելի է ցույց տալ, օրինակ, որ $k(\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ԵՕ}}) = 10$ պայմանի դեպքում /$\Psi_{\text{դ}} - \Psi_{\text{ԵՕ}} \sim 1.5\lambda$/ սխալանքը կազմում է ընդամենը 5°/o։

Այժմ քննարկենք Զոմերֆելդի խնդրի լուծման կարճալիքային մոտարկումը եռաչափ դեպքի համար՝ օգտվելով /2.1.15/ և /2.1.16/ արտահայտություններից: Միանգամայն համաբան դատողություններով այս արտահայտություններից $kr \gg 1$ պայմանի դեպքում /բացառած այն տիրույթները, որտեղ $p^2=0$ և $q^2=0$/ ստանում ենք հետևյալ կարճալիքային մոտարկումը /2.1.15/ դաշտի համար ստվերում՝

$$E_z=-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi kr\cos\beta}}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2}}\right\}e^{ik(r\cos\beta-z\sin\beta)} \qquad /2.3.9/$$

Այստեղ $r=\sqrt{x^2+y^2}$ և $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=-tg\beta$, հետևաբար՝

$$r\cos\beta-z\sin\beta=\frac{r}{\cos\beta}\equiv S \qquad /2.3.10/$$

Այսպիսով՝

$$E_z=-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2k\pi}\cos\beta}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\theta-\alpha_0}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\theta+\alpha_0}{2}}\right\}\frac{e^{ikS}}{\sqrt{S}} \qquad /2.3.11/$$

/2.3.11/ արտահայտությունը խիստ նման է երկչափ դեպքի համար ստացված արտահայտություններին: Հիմնական տարբերությունը դիֆրակցիոն դաշտի էյքոնալի արտահայտության մեջ է, որն այս դեպքում որոշվում է /2.3.10/ ձևով:

Կարելի է ցույց տալ, որ Զոմերֆելդի ստույգ լուծման մեջ p և q արգումենտները, իրոք, արտահայտվում են ԵՕ և դիֆրակցիոն դաշտերի էյքոնալների օգնությամբ՝

$$\sqrt{2kr\cos\beta}\cos\frac{\theta\pm\alpha_0}{2}=\sqrt{kr\cos\beta\left(1+\cos(\theta\mp\alpha_0)\right)}=$$

$$=\sqrt{k\left(r\cos\beta+r\cos\beta\cos(\theta\mp\alpha_0)\right)}=\sqrt{k\left(\frac{r(1-\sin^2\beta)}{\cos\beta}+r\cos\beta\cos(\theta\mp\alpha_0)\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{kr}{\cos\beta}+kr\left(-\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}+\cos\beta\cos(\theta\mp\alpha_0)\right)}=\sqrt{k\left(\frac{r}{\cos\beta}+r\cos\beta\cos(\theta\mp\alpha_0)+z\sin\beta\right)}=$$

$$=\sqrt{k(S-\Psi_{\text{ԵՕ}})},\qquad \Psi_{\text{ԵՕ}}=-r\cos\beta\cos(\theta\mp\alpha_0)-z\sin\beta \qquad /2.3.12/$$

Ինչպես տեսնում ենք, եռաչափ դեպքում էլ Զոմերֆելդի ստույգ լուծումն ունի ,,կիսաստվերային,, բնույթ, այն լիովին արտահայտվում է ընկնող, անդրադարձող և դիֆրակցված ալիքների էյքոնալների միջոցով:

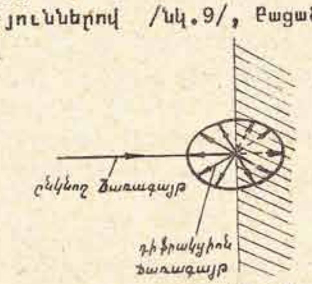
Զոմերֆելդի խնդրի լուծման այս բնորոշ առանձնահատկությունն է /,,կիսաստվերային,, բնույթը/, որ հիմք է տալիս պնդելու. ճառագայթի հասկացությունը ԵՕ-ի առանձնաշնորհը չէ և այն կարելի է ու պետք է վերագրել նաև դիֆրակցիոն դաշտերին: Ավելին՝ ճառագայթի հասկացությունն իմաստավորված է ոչ միայն կարճալիքային մոտավորության մեջ,

այլև ,,կիսաստվերային,, դաշտի համար, որը Զոմերֆելդի խնդրի դեպքում լիովին համընկնում է դաշտի ստույգ արտահայտություններին:

2.4. Դիֆրակցիոն ճառագայթների տարածման օրենքները և դիֆրակցիայի երկրաչափաօպտիկական տեսությունը /ԴԵՏ/

Հետևողականորեն, այնպես ինչպես առաջին գլխում, ձևակերպվեցին ընկնող և անդրադարձած ԵՕ ճառագայթների տարածման օրենքները, մտցվեցին էյքոնալի, ճառագայթային խողովակի, ճառագայթների կոնգրուենցիայի, օպտիկական երկարության և այլ հասկացությունները, այնպես էլ անհրաժեշտ է ձևակերպել ԴԵՏ-ում ճառագայթների տարածման օրենքները:

Մենք հիմնվում ենք Զոմերֆելդի խնդրի ճշգրիտ լուծման և նրա կարճալիքային մոտարկման վրա: Երկչափ խնդրի լուծումից, գրված /2.3.7/ կամ /2.3.2/ տեսքով, հետևում է, որ դիֆրակցիոն ճառագայթների էյքոնալը՝ $\Psi_{Դ} = r$ -ի: Նրանց ալիքային մակերևույթը մի գլան է, որի առանցքը էկրանի եզրն է, իսկ ճառագայթներն ուղղահայաց են այս գլանային մակերևույթին: Այլ խոսքով՝ դիֆրակցիոն ճառագայթները էկրանի ուղղագիծ եզրից տարածվում են եզրին ուղղահայաց հարթության մեջ բոլոր ուղղություններով /նկ.9/, բացած հովհարի տեսքով:

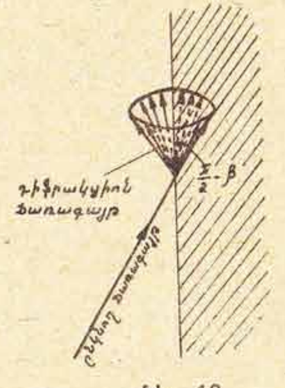


Նկ. 9

Այս ճառագայթներն այն կորերն են, որոնք անցնում են էկրանի եզրի անկման կետով և եզրից դուրս վերցված կետերով այնպես, որ նրանց երկարությունը մնում է հաստատուն և ամենակարճն է մնացած բոլոր հնարավոր կորերի երկարությունից: Յուրաքանչյուր դիֆրակցիոն ճառագայթի համար եզրի վրա անկման կետում կարելի է կանգնեցնել նորմալ այնպես, որ ընկնող ու դիֆրակցված ճառագայթները այս նորմալի հետ գտնվեն նույն հարթության մեջ և ընկած լինեն նորմալի տարբեր կողմերում:

Ասվածը Ֆերմայի սկզբունքի ընդհանրացումն է դիֆրակցիոն ճառագայթի համար: Ցույց տանք, որ եռաչափ խնդրի դեպքում նույնպես գործում է այս սկզբունքը: Ինչպես հետևում է դիֆրակցիոն ճառագայթի

$S = \frac{h}{\cos\beta}$ / β-ն էկրանի եզրի հետ ընկնող ճառագայթի կազմած անկյունն է/` էյքոնալի արտահայտությունից, այս դեպքում դիֆրակցված ճառագայթները կազմում են մի կոնային մակերևույթ, որի գագաթը դիֆրակցիայի կետն է /ընկնող ճառագայթի` եզրին անկման կետը/, իսկ կոնի կիսաբացվածքի անկյունը հավասար է $\pi/2 - \beta$ -ի /Նկ. 10/:



Նկ. 10

Երբ $\beta = 0$, դիֆրակցիայի կոնը կվերածվի նկ. 9-ում պատկերված բաց հովհարի: Երկու դեպքում էլ, եթե կիսահարթությունը մտովի լրացնենք մինչև լրիվ հարթություն, ապա նկ. 9-ում կամ նկ. 10-ում պատկերված դիֆրակցիոն ճառագայթներից կմնա միայն մեկը` համապատասխան անդրադարձած ճառագայթը, քանի որ նորմալի ընտրությունը եզրի բացակայության դեպքում դառնում է միակը:

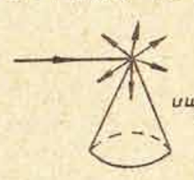
Ինչպես տեսնում ենք, այս դեպքում էլ դիֆրակցիոն ճառագայթների ուղղությունը որոշվում է համաձայն Ֆերմայի ընդհանրացված սկզբունքի. տրված երկու կետերով անցնող ճառագայթների օպտիկական երկարությունն էքստրեմալ է եզրի հետ ընդհանուր կետ ունեցող բոլոր կորերի ընտանիքում:

Այսպիսով` իմաստ չունի իմաստային տարբերություն փնտրել ճառագայթ, տարածվող դաշտ կամ ալիք հասկացությունների միջև: Իրավիճակը համանման է քվանտային մեխանիկայում մասնիկի և ալիքի հասկացությունների ընդհանրությանը: Հետագայում` ճառագայթ, ալիք կամ տարածվող դաշտ տերմինները մենք կկիրառենք` ելնելով այս հասկացության ավյալ հայտանիշը բնորոշելու հարմարությունից:

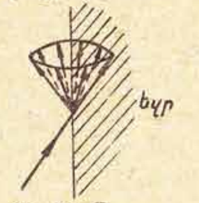
Դիֆրակցիայի երկրաչափաօպտիկական տեսությունը /ԴՆՏ-ը/ օգտվում է որպես նոր` դիֆրակցիոն ճառագայթի հասկացությունից և վերաբերում է այսպիսի ճառագայթների առաջացմանը, նրանց դասակարգմանը և տարածման օրենքներին: Իրենց կիրառելիության շրջանակներում այս օրենքներն առաջադրվում են և ընդունվում` որպես փորձից բխող ճշմարտություններ:

Հիմնական տարբերությունը ԾՕ-ի և ԴՆՏ-ի միջև այն է, որ ընկնող և անդրադարձած ճառագայթներից բացի պոստուլացվում են ճառագայթների ծագման ուրիշ ուղիներ: Բոլոր այն դեպքերում, երբ որևէ մարմնի հետ սկզբնական ալիքի փոխազդումից առաջանում է լույս-ստվերի սահման ԾՕ ալիքների համար, այսինքն` երբ ԾՕ լուծումն ունի խզում, պոստուլացվում է դիֆրակցիոն ճառագայթների առաջացում, որով հավասարակշռվում է այս խզումը: Դիֆրակցիոն ճառագայթներն առաջանում են, երբ սկզբնական /ընկնող/ ճառագայթը ընկնում է մարմնի եզրի կամ սայրի վրա և կամ էլ շոշափում է ողորկ մարմինը: Այսպիսի դեպքերում իրավացի են հետևյալ պոստուլատները.

1. Դիֆրակցիոն ճառագայթների կոնգրուենցիաներ առաջացնում են ոչ բոլոր ընկնող ճառագայթները, այլ միայն նրանք, որոնք ա/ընկնում են մարմնի անհամասեռ մասերի վրա /սայր, եզր, կորության խզում` նկ.նկ. 11-ա,բ,գ/, բ/շոշափում են մարմինը /նկ.12/:

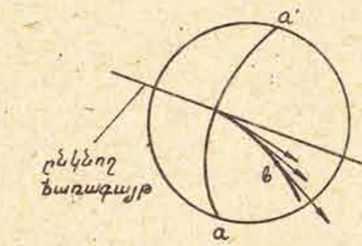


Նկ.11-ա



Նկ.11-բ

Նկ.11-գ



Նկ. 12

2. Յուրաքանչյուր ընկնող ճառագայթ, որը բավարարում է վերոհիշյալ պայմաններին, առաջացնում է անվերջ թվով դիֆրակցիոն ճառագայթներ, ընդ որում` սայրի դեպքում սրանք տարածվում են բոլոր ուղղություններ-

րով՝ առաջացնելով գնդային ալիք /նկ.11-ա/: Եզրին ընկնող ճառագայթը ընդհանուր դեպքում առաջացնում է դիֆրակցիոն ճառագայթներով կազմված կոն, որի գագաթը եզրի վրա է /նկ. 11-բ/: Այս կոնի կիսաբացվածքի անկյունը հավասար է ընկնող ճառագայթով և եզրին դիֆրակցիայի կետում տարած շոշափողով կազմված անկյանը: Այս պոստուլատը, ինչպես ասել էինք, հետևում է Ֆերմայի ընդհանրացված սկզբունքից և կարող է դիտվել որպես անդրադարձման օրենքի ընդհանրացում:

Ցուրահատուկ է ուռուցիկ, ողորկ մարմնի /նկ.12/ ստվերում դիֆրակցիոն ճառագայթների տարածման օրենքը: Դիֆրակցիոն ճառագայթները ,,պոկվում են,, ողորկ մակերևույթից՝ նրա ստվերոտ կողմից: Դրանք անվանվում են սահքի դիֆրակցիոն ճառագայթներ /սահքի ալիքներ/, որոնց առաջացման երևույթը կարելի է բացատրել հետևյալ ձևով. ողորկ մարմինը շոշափող յուրաքանչյուր ճառագայթ նրա մակերևույթի վրա մակածում է ,,մակերևութային,, Tб ճառագայթը /նկ. 12/, որն այս մակերևույթի գեոդեզիական /կարճագույն/ կորն է: Նրա ուղղությունը aa' հորիզոնի կետում համընկնում է ընկնող ճառագայթի ուղղությանը: Սահքի ճառագայթների կոնգրուենցիան ,,պոկվում է,, գեոդեզիական գծից, յուրաքանչյուր կետում՝ վերջինիս շոշափողի ուղղությամբ: Ասվածը նույնպես Ֆերմայի կարճագույն ճանապարհի սկզբունքի ընդհանրացումն է այժմ արդեն սահքի դիֆրակցիոն ճառագայթների համար:

3. Ցուրաքանչյուր դիֆրակցիոն ճառագայթ Հելմհոլցի կամ Մաքսվելի հավասարումների լուծման կարճալիքային մոտարկումն է և, հետևաբար, նկարագրվում է ԵՕ-ի օրենքներով:

-յուրաքանչյուր դիֆրակցիոն ճառագայթ նկարագրվում է կոորդինատներից կախված դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդով և արագ փոփոխվող /օսցիլացող/ փուլային ֆունկցիայով՝

$$\mathcal{U} = A e^{ik\Psi}, \quad \vec{E} = \vec{A} e^{ik\Psi}, \quad \vec{H} = \vec{B} e^{ik\Psi} \qquad /2.4.1/$$

- Ψ ֆունկցիան դիֆրակցիոն ճառագայթի էյքոնալն է և բավարարում է էյքոնալի հավասարմանը: Ինչպես և ԵՕ ճառագայթը, դիֆրակցիոն ճառագայթի էյքոնալը նույնպես ունի օպտիկական ճանապարհի իմաստ՝

$$\Psi(P_1,P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\varepsilon(\vec{r}(l))}\, dl \qquad /2.4.2/$$

- Ինչպես ԵՕ ճառագայթը, դիֆրակցիոն ճառագայթը համասեռ միջավայրում ուղիղ գիծ է:

- Դիֆրակցիոն ճառագայթի համար ալիքային մակերևույթի հասկացությունը ձևակերպվում է նույն ձևով, ինչպես ԵՕ-ում:

- Դիֆրակցիոն ճառագայթի ամպլիտուդը, ինչպես ԵՕ ճառագայթինը, բավարարում է փոխադրման հավասարմանը, ընդ որում, ինչպես ԵՕ-ում, $\vec{E}$, $\vec{H}$ և $\vec{\nabla}\Psi$ ուղղությունները փոխուղղահայաց են:

- Անհամասեռ միջավայրում էլեկտրամագնիսական դիֆրակցիոն ճառագայթի բևեռացման փոփոխությունն ըստ ճառագայթի երկարության, նկարագրվում է նույն՝ ԵՕ-ի բանաձևերով:

- Այն հանգամանքը, որ դիֆրակցիոն ճառագայթի ամպլիտուդը որոշվում է փոխադրման հավասարումից, թույլ է տալիս, ինչպես ԵՕ-ում, դիտարկել այս հավասարումը՝ որպես էներգիայի պահպանման օրենք դիֆրակցիոն ճառագայթային խողովակում և, ԵՕ-ի նմանությամբ, ընդգծել ԴԵՏ-ում դիֆրակցիայի լոկալ բնույթը:

4. Դիֆրակցիոն ճառագայթի ամպլիտուդը համեմատական է այն ծնող առաջնային ճառագայթի ամպլիտուդին անկման /դիֆրակցիայի/ կետում՝

$$\mathcal{U}_{\text{դ}} = \frac{e^{ikS}}{\sqrt{J}} D(\theta,\varphi;\alpha,\beta)\,\mathcal{U}_{\text{ընկ}} \qquad /2.4.3/$$

/2.4.3/ հավասարման մեջ S -ը դիֆրակցիոն ճառագայթի էյքոնալն է, J -ն՝ ճառագայթային կոորդինատներին անցնելու յակոբիանը, $\mathcal{U}_{\text{ընկ}}$-ը՝ ընկնող դաշտի ամպլիտուդը դիֆրակցիայի կետում. /ողորկ մարմնի դեպքում այն կետում, որտեղից ծայր է առնում ,,մակերևութային,, ճառագայթը/: $D(\theta,\varphi;\alpha,\beta)$ ֆունկցիան անվանվում է դիֆրակցիայի գործակից /անդրադարձման և բեկման գործակիցների համաբանությամբ/ և նկարագրում է դիֆրակցիոն դաշտի բաշխվածությունը՝ կախված անկման /α,β/ և դիֆրակցիայի /θ,φ/ անկյուններից: Էլեկտրամագնիսական ալիքների համար D -ն երկրորդ կարգի մատրից է:

5. Դիֆրակցիայի D գործակիցը /մատրիցը/ որոշվում է՝ ելնելով մարմնի երկրաչափական առանձնահատկություններից դիֆրակցիայի կետի շրջակայքում /սայրի և եզրի համար/ կամ ողորկ մարմնի երկրաչափական առանձնահատկություններով ,,մակերևույթի ճառագայթի,, շրջակայքում:

Այս պոստուլատներից հետևում է, որ տվյալ դիֆրակցիոն ճառագայթին համապատասխանող դաշտը առաքվում է մի ,,աղբյուրի,, կողմից՝ տեղադրված այդ ճառագայթի ելման կետում: Տարբեր դիֆրակցիոն ճառագայթների կհամապատասխանեն տարբեր ամպլիտուդ ունեցող ,,աղբյուրներ,, , ըստ որում D -գործակիցը այն աղ,,աղբյուրի,, ամպլիտուդն է, որն առաքում է դիֆրակցիոն ճառագայթ θ, φ ուղղությամբ, եթե միավոր ամպլիտուդով սկզբնական ալիքը տարածվում էր α, β ուղղությամբ:

Դիֆրակցիայի երկրաչափաօպտիկական տեսությունը, հիմնված վերոհիշյալ հինգ պոստուլատների վրա, առաջինը ձևակերպեց Ջ.Բ.Քելերը

1953 թվականին։
Այսպիսով, ԴՆՏ-ը հիմնավորված է ԵՕ-ի օրենքներով։ Մասնավորապես՝
3-րդ պոստուլատը ԵՕ ճառագայթների տարածման և մյուս օրինաչափություն-
ների ընդհանրացումն է դիֆրակցիոն ճառագայթների համար։
ԵՕ-ի և ԴՆՏ-ի միջև էական տարբերությունը առաջինի՝ անդրադարձ-
ման ու բեկման օրենքների և երկրորդի՝ դիֆրակցիայի օրենքի որակական
տարբերությունն է։ ԴՆՏ-ում դիֆրակցիոն ալիքի փուլը /դիֆրակցիոն ճա-
ռագայթի էյքոնալը/ որոշվում է Ֆերմայի ընդհանրացված սկզբունքից,
իսկ ամպլիտուդը՝ էվրիստիկական եղանակով, կողմնակի ճանապարհով ըն-
տացված դիֆրակցիոն գործակցի /մատրիցի/ օգնությամբ։ Նույնքանով, որ-
քանով ԵՕ-ում Ֆրենելի անդրադարձման ու բեկման գործակիցները որոշիչ
են անդրադարձած ու բեկված ճառագայթների ամպլիտուդների համար, նույն-
քանով էլ դիֆրակցիոն գործակիցը /մատրիցը/ որոշիչ է դիֆրակցիոն ճա-
ռագայթի ամպլիտուդի համար։
Այսպիսով, դիֆրակցիայի խնդիր լուծել ԴՆՏ-ի մոտավորությամբ՝
կնշանակի կարողանալ ինչ-որ եղանակով գտնել համապատասխան դիֆրակցիոն
գործակիցը /մատրիցը/։ Օրինակ, կորագիծ եզրերով էկրանի դեպքում ընկ-
նող հարթ ալիքի դիֆրակցիոն գործակիցը որոշվում է այդ կորագիծ եզրի
տվյալ կետում նրան շոշափող ուղղագիծ կիսաճարթության համար Զոմեր-
ֆելդի ճշգրիտ լուծման կարճալիքային մոտարկումից։ Նման քայլը հիմնա-
վորված է ԴՆՏ-ում դիֆրակցիայի լոկալ բնույթով, իսկ Զոմերֆելդի խըն-
դիրը այն մոդելային խնդիրն է, որը տվյալ դեպքում օգնում է այսպիսի
էվրիստիկական եղանակով որոշել դիֆրակցիոն գործակիցը։ Ասվածից հետե-
վում է ԴՆՏ-ի կիրառելիության սահմանափակումներից մեկը. քանի որ
դիֆրակցիոն գործակիցները /կամ մատրիցները/ որոշվում են մոդելային
խնդիրների հայտնի լուծումներից, ապա ԴՆՏ-ի կիրառելիությունը սահ-
մանափակված է այսպիսի լուծումների եղած հավաքածուով։ Հայտնի են մի
քանի մոդելային խնդիրներ՝ վերը քննարկված խնդիրը, խնդիրները սեպի
և անվերջ գլանի համար։ Որոշ դեպքերում կարելի է օգտվել նաև մոդելա-
յին խնդիրների մոտավոր լուծումներից։
Զոմերֆելդի երկչափ խնդրի կարճալիքային մոտարկման լուծումնե-
րից ստացվող դիֆրակցիոն գործակիցների արտահայտությունները տարամի-
տում էին լույս-ստվերի սահմանին՝ $\theta = \pi \pm \alpha_0$ ուղղություններում։ Այս-
պիսով՝ ԴՆՏ-ը իր սկզբնական ձևով կիրառելի չէ լույս-ստվերի սահմա-
նին։ Մյուս կողմից՝ 2.3 պարագրաֆում ցույց տրվեց, որ դիֆրակցիոն
դաշտի համար կարելի է գրել անալիտիկ արտահայտություններ՝ էյքոնալ-
ներից կախված Ֆրենելի ֆունկցիաների կոմբինացիաների տեսքով, որոնք
վերջավոր են լույս-ստվերի սահմանին /կիսաստվերային դաշտ/։ Զոմեր-

ֆելդի ստացած բանաձևերը, այս առումով, դիտվում են որպես „համասա-
րաչափ" մոտարկումներ, որոնք ուղղագիծ եզրերով էկրանի մասնավոր
դեպքում համընկնում են ճշգրիտ լուծմանը։

Այսպիսով, ԴՆՏ-ը կարելի է կիրառել լույս-ստվերի սահմանին ևս, եթե հնարավոր է համապատասխան կիսաստվերային դաշտը ներկայացնել, օրինակ, էյքոնալներից կախված Ֆրենելի ֆունկցիաների կոմբինացիայի տեսքով։

Ընդհանրացնելով ասածը՝ ձևակերպենք ԴՆՏ-ի մոտավորությամբ խնդիրների լուծման ալգորիթմը։

1. Լուծումը փնտրվում է որպես ճառագայթային դաշտերի՝

$$\mathcal{U} = \sum_n A_n e^{ik\Psi_n} = \sum_n \mathcal{U}_n \qquad /2.4.4/$$

գումար, որոնցից մեկը առաջնային դաշտն է և որոնցից յուրաքանչյուրը զրոյից տարբեր է տարածության մի տիրույթում, որի սահմաններն են, մեկը՝ դիֆրակցող մարմնի մակերևույթը, մյուսը՝ տվյալ գումարելուն համապատասխանող դաշտի լույս-ստվերի սահմանը։

2. Բոլոր գումարելիները /2.4.4-ում/, բացառությամբ առաջինի, որը համարվում է տրված, որոշվում են առաջնային /ընկնող/ դաշտից կամ ԵՕ-ի, կամ դիֆրակցիոն դաշտերի /ճառագայթների/ առաջացման ԴՆՏ-ի օրենքներով։

/2.4.4/ արտահայտության մեջ համապատասխան անդրադարձած, բեկված կամ դիֆրակցիոն դաշտերը կարող են ծագել ոչ միայն առաջնայինից, այլև անդրադարձումների, դիֆրակցիաների, բեկումների բարդ հաջորդականությունից։ Անմիջականորեն առաջնայինից ստացված դաշտերը կոչվում են համապատասխանորեն՝ առաջնային անդրադարձած, առաջնային բեկված, առաջնային դիֆրակցիոն։ Այն ալիքները, որոնք ստացվում են առաջնային անդրադարձած ալիքի անդրադարձումից, կոչվում են կրկնակի անդրադարձած, առաջնային դիֆրակցիոն ալիքի դիֆրակցիայից՝ կրկնակի դիֆրակցված և այլն։

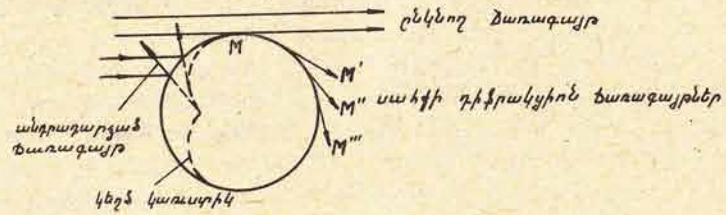
3. Հետազոտվում են այն տարամիտումները, որոնք ստացվում են լույս-ստվերի սահմանին և կաուստիկների վրա, համապատասխան „համասարաչափ" /չտարամիտող/ արտահայտություններ ստանալու համար։

Հասկանալի է, որ ալգորիթմի վերջին՝ երրորդ կետը, իրացվում է այն դեպքերում, երբ հետաքրքրություն են ներկայացնում, հատկապես, լույս-ստվերի և կամ կաուստիկական տիրույթները։

2.5. Դիֆրակցիոն ճառագայթների /ալիքների/ դասակարգումը: Կիսաստվերային դաշտերի կիրառությունը դիֆրակցիայի երկչափ խնդրում

Ընդհանրացնելով վերը քննարկածը և հիմնվելով ԴԵՏ-ի պոստուլատների վրա՝ դասակարգենք դիֆրակցիոն ալիքները ըստ նրանց առաջացման եղանակների՝ բնորոշելով յուրաքանչյուր դասի հիմնական առանձնահատկությունները:

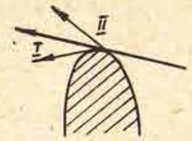
Սահքի ալիքներ: Դիֆրակցող մարմնի մակերևույթը ողորկ է: Լույս-ստվերի սահմանն առաջացնում են մարմինը շոշափող առաջնային ճառագայթները /Նկ.13/, որոնց համար, հասկանալի է, անդրադարձածի և առաջնայինի հատկությունները



Նկ. 13

վերանում են: Հորիզոնի M կետին մոտենալուն զուգընթաց՝ անդրադարձած ճառագայթի կեղծ կաուստիկը ընդհուպ մոտենում է մակերևույթին և շոշափում իրական ճառագայթը: Համապատասխան ճառագայթային խողովակը անվերջ նեղանում է, որը հանգեցնում է ամպլիտուդի տարամիտման լույս-ստվերի սահմանի ուղղությամբ: Կարելի է ցույց տալ, որ այս տիրույթում դաշտը նկարագրվում է Էյրիի ֆունկցիա պարունակող ինտեգրալ արտահայտությունների միջոցով: Ողորկ մարմնի ստվերում առաջանում են սահքի դիֆրակցիոն ալիքներ՝ հորիզոնից սկսվող ,,մակերևութային,, ճառագայթից, յուրաքանչյուր կետում նրան տարած շոշափողներից ,,պոկվող,, սահքի ճառագայթների փնջի տեսքով: Հիշյալ ,,մակերևութային,, ճառագայթը տրված մակերևույթի գեոդեզիական գիծն է:

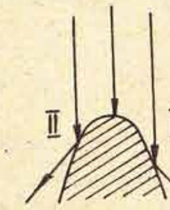
Եզրային ալիքներ: Երբ դիֆրակցող մարմնի մակերևույթի կոնտուրի ածանցյալն ունի խզումներ, այդ խզման կետերում առաջանում են լույս-ստվերի երկու սահմաններ /Նկ. 14/:



Նկ. 14

Նկ. 14-ում այդ՝ I և II սահմանները համապատասխանում են խզման կետից ելած երկու՝ ԵՕ ճառագայթների՝ առաջնային / I / և անդրադարձած / II /:

Այն դեպքում, երբ մարմինը /դիտվում է կորագիծ սեպ/ լրիվ լուսավորվում է առաջնային ճառագայթներով /Նկ. 15/, առաջնային դաշտը չունի խզումներ, և երկու ,,լույս-ստվեր,, սահմանները պայմանավորված են



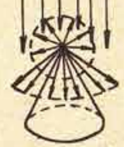
Նկ. 15

կորագիծ սեպի երկու նիստերից անդրադարձած ճառագայթներով:

Նկ. Նկ. 14-ում և 15-ում պատկերված կորագիծ սեպերի կողերը կիզակետային գծեր են եզրային ալիքների կոնգրուենցիայի համար: Այս դիֆրակցիոն ալիքները հավասարակշռում են ԵՕ դաշտի խզումները, իսկ լույս-ստվերի սահմանին լրիվ դաշտն արտահայտվում է Ֆրենելի ինտեգրալների միջոցով:

Վերը քննարկված կիմահարթության դեպքը կարելի է դիտել որպես կորագիծ սեպի խնդրի մասնավոր դեպք:

Գնդային դիֆրակցիոն ալիք: Այսպիսի ալիք դիտվում է, երբ մարմինը, որը ,,լուսավորված է,, առաջնային դաշտով, ունի կոնական գագաթ /Նկ. 16/:.



Նկ. 16

Լույս-ստվերի սահմանն ստեղծվում է կոնի գագաթից ու շրջակայքից անդրադարձած ճառագայթներով։ ԵՕ լուծման խզումները լույս-ստվերի սահմանին այս դեպքում հավասարակշռվում են գնդային դիֆրակցիոն ալիքով, որը տարածվում է կոնի գագաթից։

Ընդհանրապես դիֆրակցիոն ալիքները կարող են արտահայտվել թվարկված երեք հիմնական դասերի տարբեր կոմբինացիաների ձևով՝ կախված դիֆրակցող մարմնի առանձնահատկություններից և ընկնող ճառագայթի ուղղության և այդ մարմնի փոխադարձ դիրքից։

Ալիքների նշված բոլոր դասերին հատուկ է լույս-ստվերի սահմանը։ Այս սահմանի շրջակայքում ամպլիտուդները ձգտում են անվերջության և, հետևաբար, ինչպես ԵՕ, այնպես էլ դիֆրակցիոն ալիքների հասկացություններն իմաստազրկվում են։ Սրանք անցումային տիրույթներ են ԵՕ և դիֆրակցիոն դաշտերի միջև և հետևաբար դաշտերն էլ այստեղ յուրահատուկ բնույթ ունեն։ Դրանք կիսաստվերային դաշտեր են։

<u>Կիսաստվերային ալիքներ։</u> Ընդհանրապես կիսաստվերային դաշտը Հելմհոլցի կամ Մաքսվելի հավասարումների այնպիսի լուծումն է, որն անցումային տիրույթից դուրս ճեղքվում է ԵՕ և դիֆրակցիոն ալիքների գումարի։ Այն որոշելու համար անհրաժեշտ է ունենալ առաջնային ալիքը, այսինքն՝ սրա էյքոնալն ու ամպլիտուդը, լույս-ստվերի սահմանի հավասարումը և դիֆրակցիոն ալիքի էյքոնալը։ Տվյալների այս հավաքածուով կարելի է որոշել կիսաստվերային ալիքի տեսքը՝ ելնելով համապատասխան մոդելային խնդրի լուծումից։

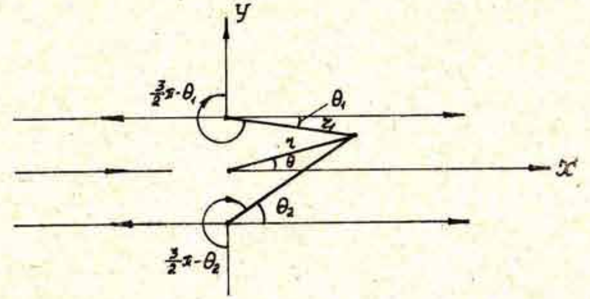
Երկչափ դեպքում կիսաստվերային դաշտը նկարագրվում է Ֆրենելի ֆունկցիաների օգնությամբ, որոնց արգումենտները առաջնային և դիֆրակցիոն ալիքների էյքոնալներն են։ Սահքի դիֆրակցիայի դեպքում սկալյար ալիքների կիսաստվերային դաշտերն արտահայտվում են Էյրիի ֆունկցիաների միջոցով /այս դեպքում ստացվում է պարզ կաուստիկ, որի շրջակայքում դաշտերը նկարագրվում են Էյրիի ֆունկցիայի օգնությամբ/։ Հնարավոր է նաև ուրիշ /Բեսելի ֆունկցիայի, Լեժանդրի բազմանդամի և այլն՝ կախված խնդրի սիմետրիայից/ հատուկ ֆունկցիաների կիրառությունը։

Կիսաստվերային դաշտերի առաջացումը բացատրվում է այն հանգամանքով, որ լույս-ստվերի սահմանում խմբվում են ճակատների տարբեր կորություն ունեցող ալիքներ /օրինակ՝ հարթ ու գլանային, հարթ ու գնդային և այլն/, որոնց տարածման ուղղությունները համընկնում են։ Հետևաբար ստեղծվում է իրավիճակ, երբ նույն ուղղությամբ տարածվում են ԵՕ և դիֆրակցված ճառագայթներ, իսկ համապատասխան ճառագայթային խողովակները փոփոխվում են տարբեր օրենքներով. առաջանում է խզում՝ առաջնային և դիֆրակցիոն ամպլիտուդների միջև։ Իրական՝ դիտվող ֆիզի-

կական պատկերում այս խզումը հարթեցվում է ամպլիտուդի լայնական ,,դիֆուզիայի,, ձևով։ Սրանով է պայմանավորված դիֆրակցիայի երևույթը։

Այսպիսով, կիսաստվերային ալիքները միանգամայն ուրույն դեր ունեն դիֆրակցիայի խնդիրներում և պետք է դիտարկվեն որպես ալիքների /ճառագայթների/ ինքնուրույն դաս։

Քննարկենք կիսաստվերային ալիքների կիրառման մեկ պարզ օրինակ։ Դիցուք, հարթ էկրանի $2a$ լայնություն ունեցող ճեղքին, նրա հարթության ուղղահայաց՝ x առանցքի ուղղությամբ, ընկնում է հարթ ալիք /Նկ. 17/։



Նկ. 17

Դիտարկենք E բևեռացված ալիքը և գրենք սրա E_z բաղադրիչի համար ԵՕ արտահայտությունը՝

$$E_{z\,\text{ԵՕ}} = e^{ikx}[\chi(\theta_1)-\chi(\theta_2)] - e^{-ikx}[\chi(\theta_1-\pi)-\chi(\theta_2-\pi)] \qquad /2.5.1/$$

2.3-ում առաջարկված ձևով։ Կառուցենք արտահայտություն /2.5.1/՝ ԵՕ դաշտին համապատասխանող կիսաստվերային դաշտի համար, պարագրաֆ 2.3.-ում ստացված /2.3.7/ կիսաստվերային ալիքի արտահայտության նմանությամբ։ Որոշենք նախ՝ էյքոնալները։ Ընկնող ճառագայթի էյքոնալը՝ $\Psi_{ընկ}$-ը, ըստ Նկ.17-ի՝ x-ն է, անդրադարձածինը՝ $\Psi_{անդ}=-x$։ Եզրային ճառագայթների էյքոնալները՝ որպես ուղղագիծ եզրից տարածվող գլանային ալիքի էյքոնալներ, կլինեն $\Psi_{1դ}=r_1$-ը վերին եզրի համար և $\Psi_{2դ}=r_2$-ը՝ ներքևինի։ Սահմանափակվենք միայն առաջնային դիֆրակցիայի մոտավորությամբ, այսինքն՝ արհամարհենք եզրերի միջև բազմակի դիֆրակցիաների ներդրումը և գրենք՝

$$E_z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{ikx}\left[F\left(-\sqrt{k(r_1-x)}\right) - F\left(\sqrt{k(r_2-x)}\right)\right] - e^{-ikx}\left[F\left(\sqrt{k(r_1+x)}\right) - F\left(\sqrt{k(r_2+x)}\right)\right]\right\} \qquad /2.5.2/$$

/2.5.2/ արտահայտության մեջ Ֆրենելի ֆունկցիաների արգումենտների նշանները համապատասխանում են նկ. 17-ում պատկերված P կետի դիրքին: Եթե, օրինակ, P կետը շեղվի վեր, հատելով լույս-ստվերի սահմանը, $\sqrt{k(z_1-x)}$ -ը կփոխի իր նշանը և կդառնա դրական /ստվերում/, մյուսները կպահպանեն իրենց նշանները:

/2.5.2/ լուծումը բավարարում է Հելմհոլցի հավասարմանը, ըստ որում այն գումարելիները, որոնք կախված են z_1 -ից, բավարարում են Դիրիխլեի եզրային պայմանին էկրանի վերին մասի վրա, իսկ այն գումարելիները, որոնք կախված են z_2 -ից՝ ներքևի մասի: Եթե կիսաստվերային դաշտերը, գրված /2.3.7/ տեսքով, մեկ կիսահարթության դեպքում համընկնում են ստույգ լուծմանը, ապա /2.5.2/ լուծումը դառնում է մոտավոր: Այն չի բավարարում եզրային պայմանին ամենուր, այլ երկու տարբեր էկրանների համար գրված անկախ լուծումների գծային վերադրում է: Այլ խոսքով՝ /2;5.2/ տեսքով գրված լուծման մեջ հաշվի չի առնված երկու էկրանների փոխազդեցությունը, այն է՝ բազմակի դիֆրակցիան առաջին և երկրորդ եզրերի միջև: Այս դաշտերի լույս-ստվեր սահմանը ուղղահայաց է ընկնող և անդրադարձած ճառագայթների լույս-ստվեր սահմանին և չի կարող անակնկալների բերել մեզ հետաքրքրող տիրույթում /$x > 0$/: Մյուս կողմից՝ բազմակի դիֆրակցված ալիքների ամպլիտուդները ընկնող ալիքի ամպլիտուդի նկատմամբ շատ ավելի փոքր են՝ $\left(\frac{1}{\sqrt{kz}}\right)^n$ կարգի, որտեղ n -ը դիֆրակցիայի կարգն է: Սրանով է հիմնավորված բազմակի դիֆրակցված ալիքների ներդրման արհամարհումը և /2.5.2/ լուծման մոտավորությունը:

$x > 0$ տիրույթում /2.5.2/ արտահայտության երկրորդ գումարելին չունի խզումներ և տարամիտություններ և իմաստ ունի դիտարկելու միայն առաջինը՝

$$\widetilde{E}_z = \frac{e^{i(kx-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi}}\left\{F(-\sqrt{k(z_1-x)}) - F(\sqrt{k(z_2-x)})\right\} \qquad /2.5.3/$$

Պարզ ձևափոխություններից հետո կարելի է գրել՝

$$\widetilde{E}_z = \frac{e^{i(kx-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\sqrt{k(z_1-x)}}^{\sqrt{k(z_2-x)}} e^{i\mu^2}\,d\mu \qquad /2.5.3,ա/$$

տեսքով:

2.2 պարագրաֆում արվածի նմանությամբ՝ առանձնացնենք այն տիրույթները, որտեղ կիրառելի չեն ԵՕ և ԴԵՏ-ի պատկերացումները /եզրային ալիքները և ճառագայթները/: $X > 0$ տիրույթում /նկ. 17/, երբ ընկնող

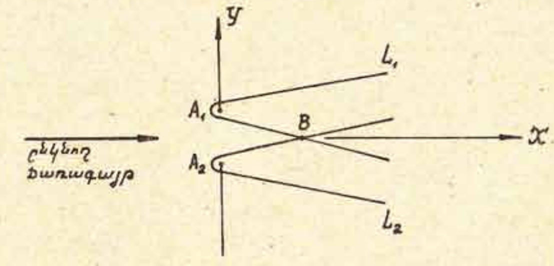
ու անդրադարձած ճառագայթների լույս-ստվեր սահմանները համընկնում են, առաջանում են երկու այդպիսի տիրույթներ, որոնք համապատասխանում են ընկնող ալիքի լույս-ստվերի սահմանների առաջին ու երկրորդ եզրերի համար՝

$$\sqrt{k(z_1-X)} = const \qquad /2.5.4/$$

և

$$\sqrt{k(z_2-X)} = const \qquad /2.5.5/$$

Նկ. 18-ում այս տիրույթները պատկերված են L_1 և L_2 պարաբոլներով՝



Նկ. 18

Կիրառական նպատակների համար բավական է /2.5.4/ ու /2.5.5/ հավասարումների աջ մասում գրված հաստատունը ընտրել հավասար $\sqrt{\pi}$ -ի, որպեսզի L_1 և L_2 պարաբոլներով պարփակված տիրույթից դուրս հնարավոր լինի սահմանափակվել Ֆրենելի ֆունկցիաների մոտարկային վերլուծության առաջին անդամով: Օգտվելով § 2.2-ի /2.2.7/ ու /2.2.9/ բանաձևերից՝ կարող ենք գրել

$$F(-\sqrt{k(z_1-x)}) \simeq \sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{i\,e^{ik(z_1-x)}}{2\sqrt{k(z_1-x)}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}(z_1-x)^{3/2}}\right) \qquad /2.5.6/$$

$$F(\sqrt{k(z_2-x)}) \simeq \frac{i\,e^{ik(z_2-x)}}{2\sqrt{k(z_2-x)}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}(z_2-x)^{3/2}}\right) \qquad /2.5.7/$$

Հաստատունի վերոհիշյալ ընտրության դեպքում՝

$$O\left(\frac{1}{k^{3/2}(z-x)^{3/2}}\right) \le \frac{1}{\pi^{3/2}} = 0{,}172$$

այսինքն՝ Ֆրենելի ֆունկցիաների մոտարկային վերլուծության առաջին անդամով սահմանափակվելու սխալանքը հաստատունի $\sqrt{\pi}$ արժեքի համար

17 °/o է, ինչը գործնականորեն ընդունելի է:

Տեղադրելով /2.5.6/ և /2.5.7/ վերլուծությունները /2.5.3/-ում կստանանք

$$\widetilde{E}_z = e^{ikx} - \frac{i}{2}\left(\frac{e^{ik(r_1-x)}}{\sqrt{k(r_1-x)}} - \frac{e^{ik(r_2-x)}}{\sqrt{k(r_2-x)}}\right) = e^{ikx} + O\left(\frac{1}{2\sqrt{k(r_1-x)}}\right) \qquad /2.5.8/$$

Այստեղ փակագծերում գրված արտահայտությունները համապատասխանում են առաջին ու երկրորդ եզրերից տարածվող գլանային ալիքների, որոնց ամպլիտուդը զգալիորեն ավելի փոքր է ընկնող ալիքի՝ e^{ikx} -ի ամպլիտուդից:

Նախ՝ որոշենք նկ.18-ում պատկերված A_1BA_2 տիրույթի հորիզոնական չափսը /հեռավորությունը էկրանից/, որտեղ, ըստ ասվածի, /2.5.8/ արտահայտությունը կնկարագրի դաշտը: Եթե ճեղքի լայնությունը հավասար է $2a$-ի, ապա $r_1=\sqrt{(a-y)^2+x^2}$ և $r_2=\sqrt{(a+y)^2+x^2}$: Համաձայն /2.5.4/ ու /2.5.5/ պայմանների՝ ստանում են երկու հավասարումներ՝

$$k\sqrt{(a-y)^2+x^2} = \pi + kx \qquad /2.5.9/$$

և

$$k\sqrt{(a+y)^2+x^2} = \pi - kx \qquad /2.5.10/$$

/2.5.9/ ու /2.5.10/ պարաբոլների համար B կետը, խնդրի սիմետրիայից ելնելով, $y=0$ կետն է: x - կոորդինատի համապատասխան արժեքը /A_1BA_2 տիրույթի հորիզոնական չափսը/ որոշվում է /2.5.9/ կամ /2.5.10/ հավասարման $y=0$ պայմանից և հավասար է՝

$$x = \frac{a^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} \qquad /2.5.10/$$

L_1 և L_2 պարաբոլների կիզակետերը գտնվում են համապատասխան էկրանների եզրերին /O_1 և O_2 կետերը/, գագաթները՝ սրանցից $\frac{\lambda}{4}$ հեռավորության վրա: A_1BA_2 տիրույթի հորիզոնական չափսը հավասար է, այսպիսով, $\frac{a^2}{\lambda}$ -ի:

Այս մեծությունն անվանում են Ֆրենելի պարամետր, և կարելի է պնդել, որ հաստատունի կամայական արժեքների դեպքում A_1BA_2 տիրույթի հորիզոնական չափսը համեմատական է Ֆրենելի պարամետրին:

Ֆրենելի պարամետրի մեծությունը ցույց է տալիս, թե էկրանից ինչպիսի հեռավորության վրա են սկսում փոխազդել եզրային դիֆրակցիոն ճառագայթները և առաջացնել Ֆրենելի ինտերֆերենցիոն պատկերը: Պարաբոլ-

ների L_1 և L_2 ճյուղերով սահմանափակված ընդհանուր տիրույթը անվանվում է Ֆրենելի տիրույթ. այս տիրույթում դաշտը չի կարելի դիտել ոչ որպես հարթ ալիք և ոչ էլ որպես հարթ ու գլանային ալիքների վերադրում, հետևաբար, չի կարելի կիրառել ԵՕ և ԴԵՏ-ը իրենց սկզբնական ձևով:

Հետազոտենք դաշտը ճեղքից շատ մեծ հեռավորությունների վրա, երբ իրավացի է $\frac{x}{a} \ll 1$ անհավասարությունը: Հարմար է x և y կոորդինատներից անցնել $x=r\cos\theta$ և $y=r\sin\theta$ բևեռային կոորդինատներին: Այդ դեպքում՝

$$\sqrt{k(r_1-x)} = \sqrt{k}\sqrt{\sqrt{(a-r\sin\theta)^2+r^2\cos^2\theta} - r\cos\theta} =$$

$$= \sqrt{k}\sqrt{\sqrt{a^2-2ar\sin\theta+r^2} - r\cos\theta} \approx \sqrt{k}\sqrt{r(1-\cos\theta)-a\sin\theta} \approx$$

$$\approx \sqrt{2kr}\,\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{a}{2r}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right) + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \qquad /2.5.11/$$

և

$$\sqrt{k(r_2-x)} \approx \sqrt{2kr}\,\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{a}{2r}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right) + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \qquad /2.5.12/$$

Հաշվի առնենք այն հանգամանքը, որ θ անկյան զրոյից տարբեր, նույնիսկ փոքր արժեքների դեպքում էլ էկրանից բավականաչափ մեծ հեռավորության վրա P դիտման կետը /նկ. 17/ կտեղափոխվի դեպի վեր՝ հատելով լույս-ստվերի սահմանը: Ինչպես ասել էինք, այս դեպքում Ֆրենելի առաջին ֆունկցիայի արգումենտի նշանը դաշտի /2.5.3/ արտահայտության մեջ կփոխվի՝ դառնալով դրական, իսկ /2.5.3,ա/ դաշտը կգրվի՝

$$\widetilde{E}_z = \frac{e^{ik(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{k(r_1-x)}}^{\sqrt{k(r_2-x)}} e^{i\mu^2}\, d\mu \qquad /2.5.13/$$

տեսքով:

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում /2.5.13/ ինտեգրալում՝

$$\mu = \xi a\sqrt{\frac{k}{2r}}\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2kr}\,\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\xi = \frac{\mu - \sqrt{2kr}\,\sin\frac{\theta}{2}}{a\sqrt{\frac{k}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}} \qquad /2.5.14/$$

որից հետո /2.5.13/ արտահայտությունը կընդունի

$$\widetilde{E}_z = \frac{e^{i(kx-2kr\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi r}}\, a\sqrt{k}\cos\frac{\theta}{2} \int_{-1}^{1} e^{ik\xi a\sin\theta}\, e^{i\frac{ka^2}{2r}\xi^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\xi \qquad /2.5.15/$$

տեսքը:

Քանի որ մենք դիտարկում ենք դաշտը էկրանից շատ մեծ հեռավորության վրա, ապա կարող ենք գրել՝

$$\frac{Ka^2}{2r}\cos^2\frac{\theta}{2} \ll 1 \qquad /2.5.16/$$

որտեղից

$$e^{i\frac{Ka^2}{2r}\xi^2\cos^2\frac{\theta}{2}} \sim 1$$

և

$$\tilde{E}_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{\sin(ka\sin\theta)}{k\sin\theta}\,\frac{e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}} \qquad /2.5.17/$$

Ստացված արտահայտությունը θ-ի ոչ շատ մեծ արժեքների համար /դիֆրակցիայի փոքր անկյուններ/ լիովին համընկնում է երկչափ ճեղքի համար Կիրխհոֆի դիֆրակցիոն տեսության մոտավոր ստացված բանաձևին:

/2.5.16/ պայմանը խոսում է այն մասին, որ /2.5.15/ ինտեգրալում էքսպոնենտի քառակուսային բաղադրիչն արհամարհելի փոքր է: Գործնական խնդիրներում բավական է սահմանափակվել

$$\frac{ka^2}{2r}\cos^2\frac{\theta}{2} \ll \frac{\pi}{4} \qquad /2.5.18/$$

պայմանով, որից, մասնավորապես, հետևում է՝

$$r \gg \frac{4a^2}{\lambda} \qquad /2.5.19/$$

պայմանը, որը գնահատում է Ֆրաունհոֆերյան տիրույթի ներքևի սահմանը:

Այսպիսի հեռավորության վրա փուլի որոշման սխալանքը $\frac{\pi}{4}$ -ի կարգի է:

Ամփոփենք: Կիսաստվերային դաշտի հասկացության օգնությամբ հնարավոր դարձավ նկարագրել երկչափ ճեղքի առաջացրած դիֆրակցիոն դաշտի էվոլյուցիան՝ սկսած էկրանի մոտակայքից մինչև հեռավոր տիրույթ. անմիջականորեն էկրանի մոտակայքում այն ուներ ԵՕ բնույթ /2.5.8 բանաձևը/ այնուհետև սկսվում են էական ինտերֆերենցիոն փոխազդեցությունները ԵՕ և եզրային ալիքների միջև միջանկյալ՝ Ֆրենելի տիրույթում /սրանք կարող են նկարագրվել 2.5.3 տիպի բանաձևերով, ինչպես նաև 2.5.15 բանաձևով/ և, վերջապես, էկրանից շատ մեծ /$r \gg \frac{4a^2}{\lambda}$/ հեռավորությունների վրա՝ Ֆրաունհոֆերյան տիրույթում, այն դառնում է մաքուր գլանային դիֆրակցիոն ալիք՝ երկչափ ճեղքին հատուկ անկյունային բաշխվածությամբ /2.5.17 բանաձևը/:

Մենք մանրամասնորեն հիմնավորեցինք կիսաստվերային դաշտի հասկացության կարևորությունը ԴԵՏ-ում: Կիսաստվերային դաշտը ոչ միայն հնարավորություն է ընձեռում անհրաժեշտության դեպքում ազատվելու մոտարկային լուծումներում առաջացող տարամիտումներից ու խզումներից, այլև բացահայտելու նրանց ֆիզիկական բովանդակությունը:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. /2.1.7/ բանաձևում C կոնտուրը կարելի է դեֆորմացնել $P(\cos\alpha)$ ֆունկցիայի անալիտիկության տիրույթում՝ նույնացնելով այն ամենաարագ վայրընթացի կորի հետ: Որոշել այս կորի հավասարումը:

Լուծում: /2.1.5,ա/ բանաձևում նշանակենք $\alpha = \alpha_1 + i\beta$ և գրենք փուլի արտահայտությունը $f(\alpha_1,\beta) = u(\alpha_1,\beta) + iv(\alpha_1,\beta)$ տեսքով: Ամենաարագ վայրընթացի ճանապարհը կորոշվի $ch\beta\cos(\theta-\alpha_1)=const$ հավասարումից: Կոշի-Ռիմանի պայմաններից հետևում է, որ $v(\alpha_1,\beta)=const$ կորի վրա $u(\alpha_1,\beta)$ -ի փոփոխման արագությունը հավասար է զրոյի, երբ $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$: Այս պայմանից որոշված կետը՝ $\theta=\alpha_1$, անվանում են ,,թամբային,, կետ: Այսպիսով ամենաարագ վայրընթացի կորը կոպլեքս հարթության վրա անցնում է $\theta=\alpha_1$, $\beta=0$,,թամբային,, կետով և հետևաբար ամենաարագ վայրընթացի կորը որոշվում է

$$ch\beta\cos(\theta-\alpha_1)=1 \qquad /1/$$

հավասարմամբ: Այս հավասարումից հետևում է, որ երբ $\beta \to \infty$ /1/, կորը ձգտում է $\alpha_1 = \theta \mp \frac{\pi}{2}$ ասիմպտոտներին: Գրենք /1/ հավասարումը $F(\alpha(\theta),\beta(\theta))$ ոչ բացահայտ տեսքով և հաշվենք սրա ածանցյալը: Օգտվելով /1/ հավասարումից՝ կստանանք

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F/\partial \alpha}{\partial F/\partial \beta} = -\frac{ch\beta}{sh\beta}\,tg(\theta-\alpha) = -ch\beta$$

երբ $\beta = 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = -1$:

Այսպիսով՝ /1/ կորը հատում է իրական առանցքը $-\frac{\pi}{4}$ անկյան տակ $\theta=\alpha_1$ կետում և ձգտում է $\alpha_1 = \theta \mp \frac{\pi}{2}$ ասիմպտոտներին, երբ $\beta \to \infty$:

2. $u = e^{ikr}$ հարթ ալիքն ընկնում է անվերջ իդեալական հաղորդիչ էկրանին՝ սրա հարթությանն ուղղահայաց: Ելնելով ԴԵՏ-ի պոստուլատնե-

րից՝ որոշել էկրանի վրայի $2a$ լայնության ճեղքի ստեղծած դիֆրակցիոն դաշտը էկրանից շատ մեծ հեռավորության վրա և դիֆրակցիայի փոքր անկյունների համար:

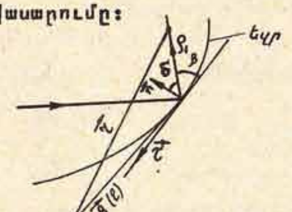
Ցուցում. դաշտը ներկայացնել որպես երկու եզրերի դիֆրակցիոն դաշտերի գումար, օգտվելով յուրաքանչյուր եզրին համապատասխանող դիֆրակցիոն դաշտի էյքոնալի և դիֆրակցիոն գործակցի արտահայտություններից, համաձայն /2.3.3/ և /2.3.4/: Դիֆրակցիայի փոքր անկյունների դեպքում $\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \gg \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ և այս երկուսի գումարում վերջինը կարելի է արհամարհել:

Պատ.

$$\mathcal{U} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}} \cos\frac{\theta}{2}\ \frac{\sin(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}$$

որտեղ θ -ն առանցքի հետ կազմած անկյունն է, r -ը՝ դիտման կետի հեռավորությունը ճեղքի կենտրոնից:

3. Ճառագայթների զուգահեռ փունջը ընկնում է կորագիծ էկրանի եզրին, առաջացնում դիֆրակցիոն ճառագայթներ /տես նկարը/: Ստանալ այս ճառագայթների կաուստիկների հավասարումը:



Լուծում: Էկրանի եզրը նկարագրենք $\vec{R}(l)$ շառավիղ-վեկտորով: $\vec{n}$ -ը եզրին տարած նորմալն է: δ -ն սրա կազմած անկյունը դիֆրակցիոն ճառագայթի հետ: $\frac{d\vec{R}}{dl} = \vec{\tau}$ -ն՝ եզրի շոշափողի ուղղությամբ միավոր վեկտորն է: Համաձայն նկարի՝ $(\vec{r}-\vec{R}(l))\vec{\tau} = \cos\beta\,|\vec{r}-\vec{R}(l)|$: Կաուստիկի /էվոլյուտի/ հավասարումը՝ $\rho_1 = |\vec{r}-\vec{R}(l)|$ -ը ստանալու համար անհրաժեշտ է /տես նախորդ գլխի 2,3,4 խնդիրները/ այս հավասարմանն ավելացնել և սրա՝ ըստ l -ի ածանցված հավասարումը, այն է՝

$$-\vec{\tau}\vec{\tau} + (\vec{r}-\vec{R}(l))\frac{d\vec{\tau}}{dl} = -\sin\beta\,\frac{d\beta}{dl}|\vec{r}-\vec{R}(l)| - \cos\beta\,\frac{\vec{r}-\vec{R}(l)}{|\vec{r}-\vec{R}(l)|}\vec{\tau}$$

Քանի որ $\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, որտեղ ρ -ն էկրանի կորությունն է դիֆրակցիայի կետում, $\vec{\tau}^2 = 1$, $(\vec{r}-\vec{R}(l))\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{|\vec{r}-\vec{R}(l)|}{\rho}\cos\delta$, $\frac{\vec{r}-\vec{R}(l)}{|\vec{r}-\vec{R}(l)|} = \cos\beta$,

$$\rho_1 = |\vec{r}-\vec{R}(l)| = \frac{\rho\sin^2\beta}{\cos\delta + \beta'\rho\sin\beta}$$

4. Ճառագայթն ընկնում է $\Phi = \frac{\pi}{n}$ բացվածքով իդեալական հաղորդիչ սեպի վրա: Ցույց տալ, որ այս դեպքում առաջանում են միայն սեպի կողերից անդրադարձած ԵՕ ճառագայթներ /չեն առաջանում դիֆրակցիոն ճառագայթներ/: Դիտարկել ուղղանկյուն /$\Phi = \frac{\pi}{2}$/ սեպի դեպքը:

Ցուցում. օգտվել իդեալական հաղորդիչ սեպի համար դիֆրակցիոն գործակցի արտահայտությունից:

Երկրորդ գլխի գրականությունը

I. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики. Москва, Наука, 1973.
2. В.А.Боровиков, Б.Е.Кинбер. Геометрическая теория дифракции. Москва, "Связь", 1973.
3. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функции комплексного переменного. Москва, ГИТТЛ, 1958.
4. J. B. Keller. The Geometrical Theory of Diffraction. „Symposium on Microwave Optics", 1953.

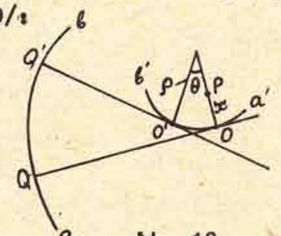
ԳԼՈՒԽ 3

ԱԼԻՔԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ԿԱՐՃԱԼԻՔԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

3.1. Դիֆրակցիոն դաշտը միաճյուղ պարզ կաուստիկի շրջակայքում և նրա կարճալիքային մոտարկային վերլուծությունը

Մեր նպատակն է ընդհանրացնել կիսաստվերային ալիքի հասկացությունը՝ վերանայելով դիֆրակցիոն ճառագայթների առաջացրած կաուստիկի ձևից։ Ինչպես լույս-ստվեր սահմանին, այնպես էլ այստեղ, ալիքի կիսաստվերային բնույթը պայմանավորված է նրանով, որ անալիտիկ ու հավասարաչափ /չտարամիտող/ մոտարկային արտահայտություններով նկարագրելով դաշտի վարքը կաուստիկներին անմիջականորեն հարող տիրույթներում և սրանց վրա՝ կաուստիկներից հեռու, ալիքը վերածվում է երկրաչափաօպտիկականի և որոշվում ԵՕ-ի օրենքներով։ Այսպիսի կիսաստվերային ալիքները անվանում ենք դաշտերի կիզակետային, կիզաձևային կամ կաուստիկական վերլուծություններ։ Կաուստիկի ձևից կախված՝ այլ կաուստիկական վերլուծությունը կարտահայտվի որոշակի անալիտիկ ֆունկցիայի միջոցով։ Այլ խոսքով՝ կաուստիկական վերլուծությանը մասնակցող ֆունկցիայի տեսքը հիմնականում որոշվում է խնդրի սիմետրիայի հատկություններից։

Քննարկենք պարզ կաուստիկի երկչափ դեպք։ Դիցուք՝ գոգավոր ab ալիքային ճակատին համապատասխանող կաուստիկը /նրա էվոլուտը/ կորն է /Նկ. 19/։



Նկ. 19

Գրենք ալիքին համապատասխանող դաշտի արժեքը P կետի շրջակայքում՝ ելնելով Հյուգենս-Կիրխհոֆի ինտեգրալից՝

$$\mathcal{U}(P) = \int \mathcal{U}\, e^{ikR}\, dl \qquad /3.1.1/$$

տեսքով, որտեղ ընդինտեգրալ ֆունկցիան կախված է ալիքային ճակատի

կետերից մինչև P կետը եղած R հեռավորությունից։ Նկ. 19-ում ինտեգրումը կատարվում է ըստ ab կորի l երկարության։

Ինչպես ասել էինք՝ $a'b'$ կաուստիկը ab կորի էվոլուտն է, և էվոլուտի հատկության համաձայն

$$Q'O' + \smile Q'O = QO \qquad /3.1.2/$$

որտեղ QO -ն և $Q'O'$-ը կաուստիկը շոշափող ճառագայթներն են՝ ուղղահայաց ab կորին։ ρ -ն կաուստիկի կորությունն է O կետում, $\smile Q'O = \rho\theta$ և $Q'O' = \mathcal{D} - \rho\theta$։ Ալիքային մակերևույթի վրայի Q' կետից մինչև O կետը եղած հեռավորությունը /երբ Q և Q' կետերը շատ հեռու չեն միմյանցից։ $\theta \ll 1$ և $\mathcal{D}$-ն բավականաչափ մեծ է/ կլինի՝

$$Q'O \sim Q'O' + \rho\sin\theta \approx \mathcal{D} - \rho\theta + \rho\theta - \rho\frac{\theta^3}{6} = \mathcal{D} - \rho\frac{\theta^3}{6}$$

և հետևաբար՝

$$R = Q'P \approx Q'O - x\sin\theta = \mathcal{D} - \rho\frac{\theta^3}{6} - x\theta \qquad /3.1.3/$$

որտեղ x -ը դիտման կետի՝ կաուստիկից ունեցած OP հեռավորությունն է։ Քանի որ $dl \sim d\theta$ և առանց մեծ սխալ թույլ տալու ինտեգրալի սահմանները շատ կարճ ալիքների համար կարելի է համարել անվերջ մեծ, արհամարհենք արագ փոփոխվող էքսպոնենտի նկատմամբ դանդաղ փոփոխվող արտադրիչի ներդնումը ինտեգրալի արժեքում և գրենք՝

$$\mathcal{U}(P) = e^{ik\mathcal{D}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\left(x\theta + \rho\frac{\theta^3}{6}\right)}\, d\theta \qquad /3.1.4/$$

Ստացված ինտեգրալը կոչվում է Էյրիի ինտեգրալ։ Այն կարելի է բերել կանոնական տեսքի՝ կատարելով փոխարինում

$$\frac{\rho\theta^3}{6} = \frac{\tau^3}{3}, \quad x\theta = \tau\xi, \quad \xi = x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}$$

Կստանանք

$$\mathcal{U}(P) \approx e^{ik\mathcal{D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\left(\tau\xi + \frac{\tau^3}{3}\right)}\, d\tau \qquad /3.1.5/$$

կամ

$$\mathcal{U}(P) \approx \frac{e^{ik\mathcal{D}}}{k^{1/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\left(k^{2/3}\xi\zeta + \frac{\zeta^3}{3}\right)}\, d\zeta = e^{ik\mathcal{D}}\, w(-k^{2/3}\xi) \qquad /3.1.5,ա/$$

որտեղ՝ $\zeta = k^{1/3}\tau$ ։

Այսպիսով՝ պարզ, միաճյուղ կաուստիկի շրջակայքում դաշտի օրինաչափությունները նկարագրվում են Էյրիի ֆունկցիայի միջոցով։

$w(-k^{2/3}\xi)$ ֆունկցիայի բնույթը օսցիլացող է $\xi < 0$ տիրույթում, իսկ $\xi > 0$ տիրույթում այն մոնոտոն է և նվազող։ $\xi < 0$ տիրույթը

/ $X < 0$ նկ. 19-ում/ լույսի տիրույթն է՝ ճառագայթային տիրույթը, իսկ $\xi > 0$ տիրույթը / $x > 0$ նկ. 19-ում/ կաուստիկական ստվերի տիրույթն է, որտեղ ճառագայթներ չկան և դաշտի արժեքը մոնոտոն կերպով նվազում է կաուստիկից հեռանալիս: Իրոք՝ $w(-K^{2/3}\xi)$ ֆունկցիայի կարճալիքային մոտարկումը / $/K^{2/3}\xi \gg 1/$ / ξ -ի բացասական արժեքների համար ունի

$$w(-K^{2/3}\xi) \sim \frac{\cos\left[K(-\xi)^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right]}{K^{1/3}(-\xi)^{1/4}} \qquad /3.1.6/$$

տեսքը, իսկ $\xi > 0$ տիրույթում այն գրվում է

$$w(-K^{2/3}\xi) = \frac{i}{K^{1/6}\xi^{1/4}}\, e^{-\frac{2}{3}K\xi^{3/2}} \qquad /3.1.7/$$

ձևով:

$\xi = 0$-ն այն կաուստիկի հավասարումն է, որտեղ /3.1.6/ և /3.1.7/ մոտարկային արտահայտությունները կորցնում են իրենց իմաստը:

Էյրիի ֆունկցիան բավարարում է

$$w''(-K^{2/3}\xi) - K^{2/3}w(-K^{2/3}\xi) = 0 \qquad /3.1.8/$$

հավասարմանը: Դիտարկենք երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ավելի ընդհանուր ձևը՝

$$\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} + \alpha(\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi} + K^2\beta(\xi)f(\xi) = 0 \qquad /3.1.9/$$

Եթե որպես $f(\xi)$ ֆունկցիա ընտրենք Էյրիի $w(-K^{2/3}\xi)$ ֆունկցիան, այսինքն՝

$$f(\xi) = w(-K^{2/3}\xi), \quad f'(\xi) = -K^{2/3}w'(-K^{2/3}\xi), \quad f''(\xi) = K^{4/3}w(-K^{2/3}\xi)$$

ապա /3.1.9/ հավասարումից կստացվի

$$w''(-K^{2/3}\xi) - \alpha(\xi)K^{2/3}w'(-K^{2/3}\xi) + K^{2/3}\beta(\xi)w(-K^{2/3}\xi) = 0 \qquad /3.1.9,ա/$$

հավասարումը, որի համադրումից /3.1.8/ հավասարմանը, եզրակացնում ենք՝

$$\alpha(\xi) = 0, \quad \beta(\xi) = -\xi \qquad /3.1.10/$$

Այսպիսով՝ ելնելով /3.1.9/ հավասարումից, կաուստիկի հավասարումը կարելի է գրել

$$\beta(\xi) = 0 \qquad /3.1.11/$$

ձևով:

Ընդունելով /3.1.9/ հավասարումը որպես Էյրիի ֆունկցիայի հավասարման ավելի ընդհանուր ձև /երբ $\alpha(\xi)=0$ և $\beta(\xi) = -\xi$ /, գրենք $f(\xi)$ ֆունկցիայի կարճալիքային մոտարկումը, օգտվելով /3.1.6/ արտահայտությունից՝

$$f(\xi) = const\cdot\frac{\cos\left[K\int_0^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi)}} \qquad /3.1.12/$$

Օգտվելով $f'(\xi) = -K^{2/3}w'(-K^{2/3}\xi)$ կապից՝ իսկույն կարող ենք գրել նաև

$$f'(\xi) = -const\, K\sqrt[4]{\beta(\xi)}\,\sin\left[K\int_0^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi - \frac{\pi}{4}\right] \qquad /3.1.13/$$

Այժմ ցույց տանք, որ /3.1.12/ /3.1.13/ մոտարկումը /3.1.9/ հավասարման լուծման կարճալիքային մոտարկման ընդհանուր տեսքի մասնավոր դեպքն է:

Փնտրենք /3.1.9/ հավասարման լուծումը՝

$$f(\xi) = e^{iKS(\xi)} \qquad /3.1.14/$$

տեսքով: Տեղադրելով /3.1.14/-ը /3.1.9/-ում՝ կստանանք

$$\left(\frac{dS}{d\xi}\right)^2 - \beta(\xi) + \frac{1}{iK}\left[\frac{d^2S}{d\xi^2} + \alpha(\xi)\frac{dS}{d\xi}\right] = 0. \qquad /3.1.15/$$

հավասարումը: Գրենք $S(\xi)$ ֆունկցիան Դեբայի վերլուծության ձևով՝ $\frac{1}{iK}$ -ի աստիճանների շարքի միջոցով՝

$$S(\xi) = \sum \frac{S_n(\xi)}{(iK)^n},$$

որից հետո կստանանք

$$\left(\frac{dS_0}{d\xi}\right)^2 - \beta(\xi) + \frac{1}{iK}\left[\frac{d^2S_0(\xi)}{d\xi^2} + \alpha(\xi)\frac{dS_0(\xi)}{d\xi} + 2\frac{dS_0(\xi)}{d\xi}\frac{dS_1(\xi)}{d\xi}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(iK)^2}\left[\frac{d^2S_1(\xi)}{d\xi^2} + \alpha(\xi)\frac{dS_1(\xi)}{d\xi} + \frac{dS_2(\xi)}{d\xi} + 2\frac{dS_0(\xi)}{d\xi}\frac{dS_2(\xi)}{d\xi}\right] + \ldots \qquad /3.1.16/$$

մոտարկային շարքը:

Զրոյական մոտավորությամբ /ըստ $\frac{1}{iK}$ -ի աստիճանների/ /3.2.16/-ից ունենք

$$\frac{dS_0(\xi)}{d\xi} = \pm\sqrt{\beta(\xi)}, \qquad S_0 = \pm\int\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi \qquad /3.1.17/$$

որը ճիշտ է, եթե տեղի ունի

$$\left(\frac{dS}{d\xi}\right)^2 \gg \frac{1}{iK}\left|\frac{d^2S(\xi)}{d\xi^2} + \alpha(\xi)\frac{dS(\xi)}{d\xi}\right|$$

անհավասարությունը:

/3.1.16/ մոտարկային վերլուծությունից առաջին /ըստ $\frac{1}{iK}$ -ի աստիճանների/ մոտավորությամբ ստանում ենք՝

$$\frac{d^2S_0(\xi)}{d\xi^2} + \alpha(\xi)\frac{dS_0(\xi)}{d\xi} + 2\,\frac{dS_0(\xi)}{d\xi}\,\frac{dS_1(\xi)}{d\xi} = 0 \qquad /3.1.18/$$

Այստեղից, հաշվի առնելով /3.1.17/-ը, ստանում ենք՝

$$S_1(\xi) = -\ln\sqrt[4]{\beta(\xi)} - \frac{1}{2}\int\alpha(\xi)d\xi + const \qquad /3.1.19/$$

Սահմանափակվելով նույն մոտավորությամբ՝ $f(\xi)$ ֆունկցիայի համար կստանանք հետևյալ մոտարկային արտահայտությունները՝

$$f(\xi) = \left[\sqrt{\beta(\xi)}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2}\left\{C_1 \exp\left[iK\int_{\tilde\xi}^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi\right] + C_2\exp\left[-iK\int_{\tilde\xi}^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi\right]\right\} \qquad /3.1.20/$$

երբ $\beta(\xi) > 0$ և

$$f(\xi) = \left[\sqrt{|\beta(\xi)|}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2} C_1'\, e^{-K\int_{\xi}^{\tilde\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi} \qquad /3.1.21/$$

երբ $\beta(\xi) < 0$, ըստ որում $\beta(\tilde\xi) = 0$, $\gamma(\xi) = e^{\int\alpha(\xi)d\xi}$.

/3.1.21/ արտահայտության մեջ երկրորդ անդամը միտումնավոր կերպով բաց է թողնված, քանի որ արագ աճող գումարելու առկայությունը չի կարող համատեղվել մոտարկային շարքի վարքի հետ։

C_1 , C_2 և C_1' հաստատունները կարելի է կապել միմյանց, եթե նկատի ունենանք ճառագայթի/դաշտի/ անընդհատությունը՝ կաուստիկական ստվերից /$\beta(\xi)<0$/ լույսի /$\beta(\xi)>0$/ տիրույթին անցնելու սահմանին։ Գրենք /3.1.21/ արտահայտությունը $\xi = \tilde\xi$ արժեքների համար։ Եթե ֆունկցիան դիֆերենցելի է կետի շրջակայքում, ապա այն կարելի է գրել Թեյլորի շարքի ձևով, սահմանափակվելով առաջին երկու անդամներով

$$\beta(\xi) = \beta(\tilde\xi) + \beta'(\tilde\xi)(\xi-\tilde\xi) = \beta'(\tilde\xi)(\xi-\tilde\xi)$$

որից հետո /3.1.21/ արտահայտությունը կընդունի

$$f(\xi\to\tilde\xi) = \left[\sqrt{|\beta'(\tilde\xi)(\xi-\tilde\xi)|}\,\gamma(\tilde\xi)\right]^{-1/2} C_1' \exp\left[-K\int_{\xi}^{\tilde\xi}\sqrt{|\beta'(\xi)(\tilde\xi-\xi)|}\,d\xi\right]$$

տեսքը։ Հետևելով $f(\xi)$ ֆունկցիան վարքին $\xi=\tilde\xi$ կաուստիկը հատելիս՝ նկատում ենք, որ անցումը կաուստիկական ստվերից /$\xi<\tilde\xi$/ ճառագայթային տիրույթ /$\xi>\tilde\xi$/ կկատարվի անընդհատորեն, եթե

$$C_1 = \frac{C}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad C_2 = \frac{C}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad C_1' = \frac{C}{2}$$

Ի վերջո՝ $f(\xi)$ ֆունկցիայի համար ստանում ենք՝

$$f(\xi) = C\,\frac{\cos\left[K\int_{\tilde\xi}^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{\beta(\xi)}\,\gamma(\xi)\right]^{1/2}}, \quad \xi > \tilde\xi \qquad /3.1.22/$$

և

$$f(\xi) = C\left[\sqrt{\beta(\xi)}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2}\exp\left[-K\int_{\xi}^{\tilde\xi}\sqrt{|\beta(\xi)|}\,d\xi\right], \quad \xi < \tilde\xi \qquad /3.1.23/$$

արտահայտությունները։

Վերը դիտարկված դեպքում $\alpha(\xi) = 0$, $\gamma(\xi) = 1$ և $\tilde\xi = 0$։ Այս արժեքների համար /3.1.22/-ը, իրոք, լիովին համընկնում է /3.1.12/-ին։ Իսկ /3.1.22/ և /3.1.23/ արտահայտությունները /3.1.9/ հավասարմանը բավարարող ֆունկցիաների կարճալիքային մոտարկումներն են՝ գրված ընդհանուր տեսքով։

3.2. Կաուստիկական վերլուծություններ։ ԵՕ և կաուստիկական վերլուծությունների միջև կապը

Սկալյար ալիք։ Սկալյար ալիքը ընդհանուր դեպքում բավարարում է Հելմհոլցի /1.1.1/ հավասարմանը։ Ցույց տանք, որ երկչափ խնդրում պարզ, միաձույլ /առանց հատուկ կետերի/ կաուստիկի շրջակայքում կարելի է կառուցել այս հավասարման մոտարկային հավասարաչափ /վերջավոր՝ կաուստիկի վրա/ լուծումներ՝ ունենալով $f_1(\xi_1), f_2(\xi_2)$ ֆունկցիաների հավաքածուն։ Այս ֆունկցիաները բավարարում են երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներին՝

$$\frac{d^2f_e(\xi_e)}{d\xi_e^2} + \alpha_e(\xi_e)\frac{df_e(\xi_e)}{d\xi_e} + K^2\beta_e(\xi_e)f_e(\xi_e) = 0 \qquad /3.2.1/$$

Մենք պնդում ենք, որ $f_e(\xi_e)$ ֆունկցիաների օգնությամբ կառուցված

$$U = \sum_{i_1,i_2=0,1} A^{i_1i_2}\,\frac{\gamma_1^{i_1}(\xi_1)\gamma_2^{i_2}(\xi_2)}{(iK)^{i_1+i_2}}\,\frac{d^{i_1}f_1(\xi_1)}{d\xi_1^{i_1}}\,\frac{d^{i_2}f_2(\xi_2)}{d\xi_2^{i_2}} \qquad /3.2.2/$$

լուծումը, որտեղ

$$i_e = 0,1, \quad \gamma_e^{i_e}(\xi_e) = e^{i_e\int\alpha_e(\xi_e)d\xi_e}, \quad A^{i_1i_2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m^{i_1,i_2}}{(iK)^m}, \qquad /3.2.3/$$

$\frac{1}{ik}$ -ի աստիճանների մոտարկային շարքի զրոյական մոտավորությամբ $A_0^{i_1 i_2}$ -ը /1.1.1/ հավասարման կարճալիքային հավասարաչափ մոտարկումն է միաճյուղ պարզ կաուստիկի /$\beta_1(\xi_1)=0$/ շրջակայքում:

Քանի որ նշված կաուստիկի շրջակայքում դաշտի վարքը նկարագրվում էր Էյրիի ֆունկցիայի և էքսպոնենտի միջոցով /տես /3.1.5/-ը/, որպես $f_1(\xi_1)$ և $f_2(\xi_2)$ ֆունկցիաներ ընտրենք

$$f_1(\xi_1) = w(-k^{2/3}\xi_1) \qquad /3.2.4/$$

և

$$f_2(\xi_2) = e^{ik\xi_2} \qquad /3.2.5/$$

ֆունկցիաները: Նախորդ պարագրաֆում ցույց տրվեց, որ $\alpha_1(\xi_1)=0, \gamma_1(\xi_1)=1, \beta_1(\xi_1)=-\xi_1$: $f_2(\xi_2)$ ֆունկցիայի համար գրված /3.2.1/ հավասարումից հետևում է, որ $\alpha_2(\xi_2)=0, \gamma_2(\xi_2)=\beta_2(\xi_2)=1$: Հավաստելով սրանք՝ արտագրենք /3.2.2/ լուծումը

$$U = \sum_{i_1,i_2=0,1} \frac{A^{i_1 i_2}}{(ik)^{i_1+i_2}} \cdot \frac{d^{i_1} f_1(\xi_1)}{d\xi_1^{i_1}} \cdot \frac{d^{i_2} f_2(\xi_2)}{d\xi_2^{i_2}} =$$
$$= \frac{A^{00}}{(ik)^0} f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) + \frac{A^{01}}{ik} f_1(\xi_1) f_2'(\xi_2) +$$
$$+ \frac{A^{10}}{ik} f_1'(\xi_1) f_2(\xi_2) + \frac{A^{11}}{(ik)^2} f_1'(\xi_1) f_2'(\xi_2) \qquad /3.2.2,ա/$$

տեսքով: Քանի որ $f_2'(\xi_2) = ik f_2(\xi_2)$, ապա /3.2.2,ա/ արտահայտությունն ավելի կպարզվի՝ ընդունելով

$$U = e^{ik\xi_2}\left\{A f_1(\xi_1) + \frac{B}{ik} f_1'(\xi_1)\right\} \qquad /3.2.2,բ/$$

տեսքը, որտեղ

$$A = A^{00} + A^{01}, \quad B = A^{10} + A^{11} \qquad /3.2.3/$$

Ցույց տանք, որ /3.2.2/ արտահայտությունը, իրոք, մոտարկային ձևով կբավարարի Հելմհոլցի /1.1.1/ հավասարմանը: Այս նպատակով տեղադրենք /3.2.2,ա/ տեսքով գրված մոտարկային արտահայտությունը Հելմհոլցի հավասարման մեջ և վերլուծենք A և B գործակիցները մոտարկային շարքի՝ ըստ -ի աստիճանների՝

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m}, \qquad B = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{(ik)^m} \qquad /3.2.6/$$

$$A_m = A_m^{00} + A_m^{01}, \qquad B_m = A_m^{10} + A_m^{11} \qquad /3.2.6,ա/$$

Չխորանալով մանրամասների մեջ՝ համառոտ նկարագրենք անհրաժեշտ գործողությունների հետագա ընթացքը: Օգտվենք /3.2.1/ հավասարումից, գրված $f_1(\xi_1)$ ՝ Էյրիի և $f_2(\xi_2)=e^{ik\xi_2}$ ֆունկցիաների համար և բացառենք ստացված արտահայտություններում երկրորդ կարգի ածանցյալները՝

$$f_1''(\xi_1) = -(ik)^2 \xi_1 f_1(\xi_1)$$
$$f_2''(\xi_2) = (ik)^2 f_2(\xi_2) \qquad /3.2.7/$$

Այստեղ հաշվի է առնված, որ $\beta_1(\xi_1)=-\xi_1$ և $\beta_2(\xi_2)=1$: Հեշտ է ցույց տալ նաև, որ

$$\vec{\nabla} f_1(\xi_1) = \vec{\nabla}\xi_1 f_1'(\xi_1), \qquad \vec{\nabla} f_1'(\xi_1) = -(ik)^2 \xi_1 \vec{\nabla}\xi_1 f_1(\xi_1) \qquad /3.2.8/$$

Ոչ բարդ ձևափոխություններից հետո Հելմհոլցի հավասարումը բերվում է

$$\hat{L}_1 f_1(\xi_1) + \hat{L}_2 f_1'(\xi_1) = 0 \qquad /3.2.9/$$

տեսքի: Մոտարկային իմաստով՝/ /3.2.9/ հավասարումը կարելի է ընդունել որպես գծայնորեն անկախ երկու և հավասարումների գումար, այսինքն՝

$$\hat{L}_1 f_1(\xi_1) = 0, \qquad \hat{L}_2 f_1'(\xi_1) = 0 \qquad /3.2.10/$$

որտեղ $\hat{L}_1$ -ը և $\hat{L}_2$ -ը բազմանդամներ են $\frac{1}{ik}$ -ի աստիճանների ձևով:

Առանձին-առանձին հավասարեցնելով / $\frac{1}{ik}$ /-ի հավասար աստիճաններ ունեցող անդամները զրոյի, զրոյական մոտավորությամբ կստանանք

$$[n^2 + \xi_1(\vec{\nabla}\xi_1)^2 - (\vec{\nabla}\xi_2)^2]A_0 - \xi_1 \vec{\nabla}\xi_1 \vec{\nabla}\xi_2 B_0 = 0,$$
$$-\xi_1 \vec{\nabla}\xi_1 \vec{\nabla}\xi_2 A_0 + [n^2 + \xi_1(\vec{\nabla}\xi_1)^2 - (\vec{\nabla}\xi_2)^2]B_0 = 0. \qquad /3.2.11/$$

Համասեռ հավասարումների սիստեմը կունենա ոչ տրիվիալ լուծումներ, եթե

$$\vec{\nabla}\xi_1 \vec{\nabla}\xi_2 = 0 \qquad /3.2.12/$$

և

$$-\xi_1(\vec{\nabla}\xi_1)^2 + (\vec{\nabla}\xi_2)^2 = (\vec{\nabla}\Psi)^2 = n^2 \qquad /3.2.13/$$

/3.2.12/ հավասարումից հետևում է, որ ξ_1 և ξ_2 կոորդինատական համակարգն օրթոգոնալ է, իսկ /3.2.13/ հավասարումը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ էյքոնալի հավասարում: Վերջինից հետևում է, որ

$$\Psi_{1,2} = \mp \int \sqrt{-\xi_1}\, d\xi_1 + \xi_2 = \mp \int \sqrt{\beta(\xi_1)}\, d\xi_1 + \xi_2 \qquad /3.2.14/$$

Այսինքն՝ /2.2.2/ լուծումից բխում է երկու հնարավոր էյքոնալների գոյությունը՝ Ψ_1-ը և Ψ_2-ը:

Վերջապես A_0 և B_0 գործակիցները որոշվում են փոխադրման հավասարումներից, որոնք ինչպես և § 1.1-ում, ստացվում են /3.2.10/ սիստեմից $\frac{1}{ik}$-ի առաջին մոտավորությամբ:

Այսպիսով, զրոյական մոտավորությամբ /3.2.2/ լուծումը կգրվի

$$U = e^{ik\xi_2}\left\{A_0 f_1(\xi_1) + \frac{B_0}{ik} f_1'(\xi_1)\right\} \qquad /3.2.15/$$

տեսքով:

Եթե /3.2.15/ արտահայտության մեջ $f_1(\xi_1)$ և $f_1'(\xi_1)$ ֆունկցիաները փոխարինենք իրենց /3.1.12/ և /3.1.13/ մոտարկումներով, կստանանք /$\beta_1(\xi_1)=-\xi_1$, $\tilde{\xi}_1=0$ /

$$U = Ce^{ik\xi_2}\left\{\frac{A_0}{\sqrt[4]{-\xi_1}} \cos\left[k\int_0^{\xi_1}\sqrt{\beta(\xi_1)}\,d\xi_1 - \frac{\pi}{4}\right] - B_0\sqrt[4]{-\xi_1}\,\sin\left[k\int_0^{\xi_1}\sqrt{\beta(\xi_1)}\,d\xi_1 - \frac{\pi}{4}\right]\right\} =$$

$$= C\left\{\left(\frac{A_0}{\sqrt[4]{-\xi_1}} + \sqrt[4]{-\xi_1}B_0\right)\exp\left[ik\left(\int_0^{\xi_1}\sqrt{-\xi_1} + \xi_2\right) - i\frac{\pi}{4}\right] + \left(\frac{A_0}{\sqrt[4]{-\xi_1}} - \sqrt[4]{-\xi_1}B_0\right)\exp\left[-ik\left(\int_0^{\xi_1}\sqrt{-\xi_1}\,d\xi_1 - \xi_2\right) + i\frac{\pi}{4}\right]\right\} =$$

$$= M_0 \exp\left[i\left(k\Psi_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right] + N_0 \exp\left[-i\left(k\Psi_2 - \frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad /3.2.16/$$

արտահայտությունը, որտեղ

$$M_0 = \frac{A_0}{\sqrt[4]{-\xi_1}} + \sqrt[4]{-\xi_1}B_0, \qquad N_0 = \frac{A_0}{\sqrt[4]{-\xi_1}} - \sqrt[4]{-\xi_1}B_0 \qquad /3.2.17/$$

իսկ Ψ_1-ը և Ψ_2-ը /3.2.14/ էյքոնալներն են և բավարարում են էյքոնալի /3.2.13/ հավասարմանը, ըստ որում Ψ_2-ը համապատասխանում է դեպի կաուստիկը եկող, իսկ Ψ_1-ը՝ կաուստիկից հեռացող /,,պոկված,,/ ճառագայթին:

/3.2.16/ լուցումն իրավացի է ամենուրեք ճշգրտության նույն աստիճանով ինչ /3.2.2,ա/ լուծումը /քանի որ վերջինս ստացված էր մեծ արժեքների համար/, բացառությամբ կաուստիկական տիրույթի / $\xi_1 = 0$/, որտեղ այն տարամիտում է: Հետևաբար M_0 և N_0 ամպլիտուդները դեպի կա-

ուստիկը եկող /N_0/ և նրանից հեռացող /M_0/ ճառագայթների ԵՕ ամպլիտուդներն են: Սրանք, համաձայն /3.2.17/ առնչությունների, կապված են $A_0 = A_0^{00} + A_0^{01}$, $B_0 = A_0^{10} + A_0^{11}$ ամպլիտուդների հետ՝

$$A_0 = \frac{1}{2}(M_0 + N_0)\sqrt[4]{-\xi_1} \quad \text{և} \quad B_0 = \frac{1}{2}(M_0 - N_0)\frac{1}{\sqrt[4]{-\xi_1}} \qquad /3.?.18/$$

հավասարումներով:

$A_0 = A_0^{00} + A_0^{01}$ և $B_0 = A_0^{10} + A_0^{11}$ ամպլիտուդները, ի տարբերություն ԵՕ՝ M_0 և N_0 ամպլիտուդների, անվանենք կաուստիկական վերլուծության ամպլիտուդներ: Հեշտ է տեսնել, որ կաուստիկական վերլուծության ամպլիտուդները վերջավոր կլինեն կաուստիկի վրա, եթե պահանջենք, որ

$$M_0 = N_0, \quad \text{երբ} \quad \xi_1 = 0 \qquad /3.2.19/$$

/3.2.19/ պայմանը պահանջում է, որ ճառագայթների ԵՕ ամպլիտուդներն անընդհատ լինեն կաուստիկի շոշափման կետում:

/3.2.16/ արտահայտությունից և /3.2.19/ պայմանից հետևում է, որ ԵՕ ամպլիտուդները մնում են անընդհատ, մինչդեռ սրանց փուլերն ունեն թռիչք՝ հավասար $\frac{\pi}{2}$-ի՝ $\xi_1=0$ կետով/ /կաուստիկով/ անցնելիս:

Այսպիսով, Հելմհոլցի հավասարման լուծումը պարզ միաճյուղ կաուստիկի շրջակայքում՝ /3.2.2/-ը $\frac{1}{ik}$-ի աստիճանների զրոյական մոտավորությամբ /3.2.15/ անալիտիկորեն և վերջավոր /հավասարաչափ մոտարկում/ ձևով է նկարագրում դաշտի վարքը կաուստիկի վրա, իսկ կաուստիկից հեռու տիրույթում ճեղքվում է ԵՕ տեսքի՝ դեպի կաուստիկը եկող և նրանից պոկված ճառագայթների: Այլ խոսքով /3.2.2/ տիպի լուծումներն ունեն ,,կիսաստվերային,, բնույթ, միայն թե այս դեպքում ստացված արտահայտությունը մոտարկային է, ի տարբերություն Զոմերֆելդի խնդրի, երբ կիսաստվերային դաշտը համընկավ ճշգրիտ լուծմանը /տես § 2.2/:

Սկալյար ալիքի քննարկումը վերջացնենք՝ ընդհանրացնելով /3.2.17/ և /3.2.18/ առնչությունները: /3.2.17/ առնչությունը ԵՕ և կաուստիկական վերլուծության ամպլիտուդների միջև կարելի է գրել՝

$$M_0^{p_1 p_2} = \frac{1}{2}\sum_{i_1, i_2 = 0,1} (-1)^{i_1 p_1 + i_2 p_2} \frac{A_0^{i_1 i_2}}{\left(\sqrt{\beta(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2} - i_1}} \qquad /3.2.20/$$

ձևով, որտեղ p_1 և p_2 ցուցիչները ընդունում են 0 և 1 արժեքներ: Սրանից հետևում է, որ

$$M_0^{00} = \frac{1}{2}\,\frac{A_0^{00} + A_0^{01}}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)}} + \frac{1}{2}\left(A_0^{10} + A_0^{11}\right)\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} = M_0$$

և /3.2.20,ա/

$$M_0^{10} = \frac{1}{2}\,\frac{A_0^{00} + A_0^{01}}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)}} - \frac{1}{2}\left(A_0^{10} + A_0^{11}\right)\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} = N_0$$

/3.2.20/ առնչություններից ստացվում են նաև M_o^{01} և M_o^{11} ամպլիտուդները, եթե /3.2.2/ արտահայտության մեջ դիտարկվեին նաև $f_2(\xi_2)=e^{-iK\xi_2}$ տիպի ալիքներ։ Գրենք

$$M^{p_1p_2}=\sum_m \frac{M_m^{p_1p_2}}{(iK)^m} \qquad /3.2.21/$$

ամպլիտուդները, որտեղ

$$M_m^{p_1p_2}=\frac{1}{2^2}\sum(-1)^{i_1p_1+i_2p_2}\frac{A_m^{i_1i_2}}{\left(\sqrt{\beta(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2}-i_1}} \qquad /3.2.21,ա/$$

Եթե բազմապատկենք /2.2.21,ա/ արտահայտությունը $(-1)^{p_1j_1+p_2j_2}$ -ով $/j_1,j_2=0,1/$ և գումարենք ըստ p_1,p_2 -ի, կստանանք՝

$$\sum_{p_1p_2=0,1}(-1)^{p_1j_1+p_2j_2}M_m^{p_1p_2}=\sum_{i_1,i_2}\sum_{p_1,p_2}(-1)^{(i_1+j_1)p_1+(i_2+j_2)p_2}\frac{A_m^{i_1i_2}}{\left(\sqrt{\beta(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2}-i_1}}=$$

$$=2^2\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}$$

այսինքն՝

$$A_m^{i_1i_2}=\left(\sqrt{\beta(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2}-i_1}\sum_{p_1,p_2}(-1)^{i_1p_1+i_2p_2}M_m^{p_1p_2} \qquad /3.2.22/$$

որտեղ $A_m^{i_1i_2}$ ամպլիտուդները $A^{i_1i_2}$ ամպլիտուդների մոտարկային շարքերի գործակիցներն են՝ արտահայտված $M^{p_1p_2}$ ամպլիտուդների մոտարկային շարքի գործակիցների միջոցով։

Առանցքայնորեն սիմետրիկ էլեկտրամագնիսական ալիք։ Դիցուք տրված է $f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), f_3(\xi_3)$ ֆունկցիաների հավաքածուն, որոնք բավարարում են

$$\frac{d^2f_e(\xi_e)}{d\xi_e^2}+d_e(\xi_e)\frac{df_e(\xi_e)}{d\xi_e}-(iK)^2\beta_e(\xi_e)f_e(\xi_e)=0 \qquad /3.2.23/$$

երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարմանը։

Մաքսվելի /1.1.8/ հավասարումների մոտարկային հավասարաչափ լուծումը /ենթադրում ենք, որ /1.1.8/-ում $\varepsilon=\mu=1$/ փնտրում ենք

$$\begin{matrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{matrix}=\sum_{\{i_{1,2,3}\}=0,1}\begin{matrix}\vec{A}^{i_1i_2i_3}\\ \vec{D}^{i_1i_2i_3}\end{matrix}\frac{\gamma_1^{i_1}(\xi_1)\gamma_2^{i_2}(\xi_2)\gamma_3^{i_3}(\xi_3)}{(iK)^{i_1+i_2+i_3}}\cdot\frac{d^{i_1}f_1(\xi_1)}{d\xi_1^{i_1}}\cdot\frac{d^{i_2}f_2(\xi_2)}{d\xi_2^{i_2}}\cdot\frac{d^{i_3}f_3(\xi_3)}{d\xi_3^{i_3}} \qquad /3.2.24/$$

տեսքով, որտեղ նշանակումները նույնն են, ինչ /3.2.2/-ում, և

$$\vec{A}^{i_1i_2i_3}=\sum\frac{\vec{A}_m^{i_1i_2i_3}}{(iK)^m},\qquad \vec{D}^{i_1i_2i_3}=\sum\frac{\mathcal{D}_m^{i_1i_2i_3}}{(iK)^m} \qquad /3.2.24,ա/$$

Ցույց տանք, որ $\frac{1}{iK}$ -ի աստիճանների մոտարկային շարքի զրոյական մոտավորությամբ /3.2.24/-ը /1.1.8/ հավասարումների հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկային լուծումն է առանցքայնորեն սիմետրիկ կաուստիկի դեպքում։

Առանցքայնորեն սիմետրիկ դաշտը բնութագրվում է Բեսելի և ցուցչային ֆունկցիաներով։ Ըստ այդմ՝

$$f_1(\xi_1)=e^{iK\xi_1},\quad f_1'(\xi_1)=iKf_1(\xi_1),\quad f_1''(\xi_1)=(iK)^2f_1(\xi_1) \qquad /3.2.25,ա/$$

$$f_2(\xi_2)=J_m(K\xi_2),\quad f_2'(\xi_2)=KJ_m'(K\xi_2),\quad f_2''(\xi_2)=K^2J_m''(K\xi_2) \qquad /3.2.25,բ/$$

$$f_3(\xi_3)=e^{im\varphi},\quad f_3'(\xi_3)=imf_3(\xi_3),\quad f_3''(\xi_3)=(im)^2f_3(\xi_3) \qquad /3.2.25,գ/$$

որտեղ $\xi_3=\xi_0\varphi=\frac{m}{K}\varphi$, -ը ամբողջ թիվ է։

Տեղադրելով /3.2.25/ արտահայտությունները համապատասխանորեն /3.2.23/ հավասարումների մեջ՝ կստանանք

$$d_1(\xi_1)=0,\qquad \gamma_1(\xi_1)=1,\qquad \beta_1(\xi_1)=1, \qquad /3.2.26,ա/$$

$$d_2(\xi_2)=\frac{1}{\xi_2},\qquad \gamma_2(\xi_2)=\xi_2,\qquad \beta_3(\xi_3)=1-\frac{\xi_0^2}{\xi_2^2}, \qquad /3.2.26,բ/$$

$$d_3(\xi_3)=0,\qquad \gamma_3(\xi_3)=1,\qquad \beta_3(\xi_3)=1 \qquad /3.2.26,գ/$$

$\vec{E}$ դաշտի համար /3.2.24/ արտահայտությունը կարելի է գրել բացահայտ տեսքով՝ օգտվելով /3.2.25/ և /3.2.26/ առնչություններից՝

$$\vec{E}=\left\{\vec{A}^{000}+\vec{A}^{100}+\vec{A}^{001}+\vec{A}^{101}\right\}f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)f_3(\xi_3)+$$

$$+\frac{\xi_2}{iK}\left(\vec{A}^{010}+\vec{A}^{110}+\vec{A}^{011}+\vec{A}^{111}\right)f_1(\xi_1)f_2'(\xi_2)f_3(\xi_3)=$$

$$\equiv\left[\vec{A}J_m(K\xi_2)+\frac{\vec{B}}{iK}\xi_2J_m'(K\xi_2)\right]e^{iK(\xi_1+\xi_0\varphi)} \qquad /3.2.27/$$

$\vec{H}$ դաշտի համար նույն ձևով կստանանք

$$\vec{H}=\left[\vec{C}J_m(K\xi_2)+\frac{\vec{D}}{iK}\xi_2J_m'(K\xi_2)\right]e^{iK(\xi_1+\xi_0\varphi)} \qquad /3.2.28/$$

որտեղ

$$\vec{C} = \vec{D}^{000} + \vec{D}^{100} + \vec{D}^{001} + \vec{D}^{101}$$

$$\vec{D} = \vec{D}^{010} + \vec{D}^{110} + \vec{D}^{011} + \vec{D}^{111} \qquad /3.2.28,ա/$$

Տեղադրենք դաշտերի /3.2.27/ և /3.2.28/ արտահայտությունները /1.1.8/ Մաքսվելի հավասարումներում /երբ $\varepsilon=\mu=1$/ և բացասենք $f_2(\xi_2)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալները՝ օգտվելով /3.2.23/ հավասարումից։ Մտցնելով նշանակումներ՝

$$\Psi = \int\sqrt{1-\frac{\xi_0^2}{\xi_2^2}}\, d\xi_2, \qquad \vec{\nabla}\Psi = \sqrt{1-\frac{\xi_0^2}{\xi_2^2}}\, \vec{\nabla}\xi_2 \qquad /3.2.29/$$

կստանանք հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ և $\vec{D}$ վեկտորական ամպլիտուդների նկատմամբ.

$$[(\vec{\nabla}\xi_1 + \xi_0\vec{\nabla}\varphi)\vec{A}] + \sqrt{\xi_2^2-\xi_0^2}\,[\vec{\nabla}\Psi\vec{B}] - \vec{C} = \frac{1}{iK}\,rot\,\vec{A},$$

$$[(\vec{\nabla}\xi_1 + \xi_0\vec{\nabla}\varphi)\vec{B}] - \frac{1}{\sqrt{\xi_2^2-\xi_0^2}}[\vec{\nabla}\Psi\vec{A}] - \vec{D} = \frac{1}{iK}\,rot\,\vec{B},$$

$$[(\vec{\nabla}\xi_1 + \xi_0\vec{\nabla}\varphi)\vec{C}] + \sqrt{\xi_2^2-\xi_0^2}\,[\vec{\nabla}\Psi\vec{D}] + \vec{A} = \frac{1}{iK}\,rot\,\vec{C},$$

$$[(\vec{\nabla}\xi_1 + \xi_0\vec{\nabla}\varphi)\vec{D}] - \frac{1}{\sqrt{\xi_2^2-\xi_0^2}}[\vec{\nabla}\Psi C] + \vec{B} = \frac{1}{iK}\,rot\,\vec{D} \qquad /3.2.30/$$

/3.2.30/ սիստեմից հետևում է, որ $\vec{A}$, $\vec{B}$ և $\vec{C}$, $\vec{D}$ վեկտորները միմյանց օրթոգոնալ չեն։ Դիտարկենք /3.2.30/ սիստեմի առաջին զույգը և երկրորդ զույգը առանձին-առանձին։ Յուրաքանչյուր զույգի առաջին հավասարումը բազմապատկենք $(\xi_2^2-\xi_0^2)^{-1/4}$-ով, երկրորդը $(\xi_2^2-\xi_0^2)^{1/4}$-ով, այնուհետև յուրաքանչյուր զույգի համար կազմենք գումար ու տարբերություն։ Արդյունքում կստանանք

$$[\vec{\gamma}^{(1)}\vec{M}] - \vec{P} = \frac{i}{K}\vec{X}, \qquad [\vec{\gamma}^{(2)}\vec{N}] - \vec{Q} = \frac{i}{K}\vec{Z},$$

$$[\vec{\gamma}^{(1)}\vec{P}] + \vec{M} = \frac{i}{K}\vec{Y}, \qquad [\vec{\gamma}^{(2)}\vec{Q}] + \vec{N} = \frac{i}{K}\vec{U} \qquad /3.2.31/$$

հավասարումների սիստեմը, որտեղ արված են նշանակումներ՝

$$\vec{\gamma}^{(1,2)} = \pm\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla}\xi_1 + \xi_0\vec{\nabla}\varphi \qquad /3.2.21,ա/$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{A}}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}} + \sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,\vec{B}, \qquad \vec{N} = \frac{\vec{A}}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}} - \sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,\vec{B},$$

$$\vec{P} = \frac{\vec{C}}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}} + \sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,\vec{D}, \qquad \vec{Q} = \frac{\vec{C}}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}} - \sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,\vec{D},$$

$$\vec{X} = rot\,\vec{M} + \frac{1}{2}[\vec{\beta}\vec{N}], \qquad \vec{Z} = rot\,\vec{N} + \frac{1}{2}[\vec{\beta}\vec{M}],$$

$$\vec{Y} = rot\,\vec{P} + \frac{1}{2}[\vec{\beta}\vec{Q}], \qquad \vec{U} = rot\,\vec{Q} + \frac{1}{2}[\vec{\beta}\vec{P}], \qquad /3.2.32,ա/$$

$$\vec{\beta} = \vec{\nabla}\xi_2/\xi_2\beta_2(\xi_2)$$

Եթե /3.2.31/ հավասարումներում բոլոր վեկտորական ֆունկցիաները վերլուծենք մոտարկային շարքի $\frac{1}{iK}$-ի աստիճանների տեսքով և հավասարեցնենք $\frac{1}{iK}$-ի հավասար աստիճան ունեցող անդամները զրոյի առանձին-առանձին, ապա, սահմանափակվելով զրոյական ու առաջին մոտավորություններով, կստանաք

$$[\vec{\gamma}^{(1)}\vec{M}_0] - \vec{P}_0 = 0, \qquad [\vec{\gamma}^{(2)}\vec{N}_0] - \vec{Q}_0 = 0,$$

$$[\vec{\gamma}^{(1)}\vec{P}_0] + \vec{M}_0 = 0, \qquad [\vec{\gamma}^{(2)}\vec{Q}_0] + \vec{N}_0 = 0 \qquad /3.2.33,ա/$$

և

$$[\vec{\gamma}^{(1)}\vec{M}_1] - \vec{P}_1 = -\vec{X}_1, \qquad [\vec{\gamma}^{(2)}\vec{N}_1] - \vec{Q}_1 = -\vec{Z}_1,$$

$$[\vec{\gamma}^{(1)}\vec{P}_1] + \vec{M}_1 = -\vec{Y}, \qquad [\vec{\gamma}^{(2)}\vec{Q}_1] + \vec{N}_1 = -\vec{U} \qquad /3.2.33,բ/$$

ռեկուրենտ հավասարումների սիստեմները։

/3.2.33,ա/ հավասարումներից հետևում է, որ

$$\vec{\gamma}^{(1)}\vec{\gamma}^{(1)} = 1 \quad և \quad \vec{\gamma}^{(2)}\vec{\gamma}^{(2)} = 1 \qquad /3.2.34/$$

/3.2.34/ հավասարումները էյքոնալների հավասարումներն են։ Սրանցից հետևում է, որ

$$S^{\mp} = \mp\int\sqrt{1-\frac{\xi_0^2}{\xi_2^2}}\, d\xi_2 + \xi_1 + \xi_0\varphi, \qquad \vec{\gamma}^{(1,2)} = \vec{\nabla}S^{\mp} \qquad /3.2.35/$$

ֆունկցիաները երկու ճառագայթների էյքոնալներն են և բավարարում են էյքոնալների հավասարմանը, երբ

$$\vec{\nabla}\Psi\vec{\nabla}\xi_1 = \vec{\nabla}\xi_2\vec{\nabla}\xi_1 = \vec{\nabla}\xi_2\vec{\nabla}\xi_3 = 0$$

այսինքն, երբ ξ_1 , ξ_2 և $\xi_3=\xi_0\varphi$ կոորդինատները կազմում են օրթոգոնալ ցանց:

2.1-ում արվածի նմանությամբ $\vec{M}_0$, $\vec{N}_0$, $\vec{P}_0$ և $\vec{Q}_0$ ամպլիտուդների համար կարելի է գրել հետևյալ արտահայտությունները.

$$\vec{M}_0=\vec{n}_1\Phi_1+\vec{b}_1\Phi_2, \qquad \vec{N}_0=\vec{n}_2F_1+\vec{b}_2F_2,$$
$$\vec{P}_0=-\vec{n}_1\Phi_2+\vec{b}_1\Phi_1, \qquad \vec{Q}_0=-\vec{n}_2F_2+\vec{b}_2F_1, \qquad /3.2.35/$$

որտեղ $\vec{n}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{\gamma}^{(1)}$ և $\vec{n}_2$, $\vec{b}_2$, $\vec{\gamma}^{(2)}$ վեկտորները կազմում են օրթոգոնալ եռյակներ

$$\vec{\gamma}^{(1)}=[\vec{n}_1\vec{b}_1] \quad , \quad \vec{\gamma}^{(2)}=[\vec{n}_2\vec{b}_2] \qquad /3.2.35,ա/$$

Քանի որ դիտարկվում է վակուում/համասեռ միջավայր/,ապա ճառագայթներն ուղիղներ են, և $\vec{n}_{1,2}$, $\vec{b}_{1,2}$ վեկտորները կորցնում են նորմալի ու Բինորմալի իմաստը: Հարմար է այս վեկտորներն ուղղել ալիքային մակերևույթների գլխավոր կորություններին համապատասխան հարթությունների մեջ, այսինքն՝ համատեղել սրանց որպես կաուստիկին տարած շոշափող և նորմալ՝ համապատասխան ճառագայթի և կաուստիկի շոշափման կետում:

§ 1.1-ում արվածի նմանությամբ /3.2.33,Բ/ հավասարումներից ստացվում են հետևյալ փոխադրման հավասարումները՝

$$div\,(\Phi_1^2\vec{\gamma}^{(1)})=0, \qquad div\,(F_1^2\vec{\gamma}^{(2)})=0, \qquad /3.2.36/$$
$$div\,(\Phi_2^2\vec{\gamma}^{(1)})=0, \qquad div\,(F_2^2\vec{\gamma}^{(2)})=0$$

Φ_1 , Φ_2 , F_1 և F_2 ֆունկցիաների համար: Նույն սխեմից ստացվում է, որ ճառագայթների պտտման շառավիղները՝ T_1 -ը և T_2 -ը, ձգտում են անվերջության: Այսպիսով, երկու Բևեռացումները միմյանցից անկախ են, իսկ Բևեռացման հարթությունը չունի պտույտ:

/3.2.34/ և /3.2.36/ հավասարումները թույլ են տալիս որոշելու $\vec{M}_0$, $\vec{P}_0$, $\vec{\gamma}^{(1)}$ և $\vec{N}_0$, $\vec{Q}_0$, $\vec{\gamma}^{(2)}$ վեկտորների օրթոգոնալ եռյակները, որոնք ունեն ԷՄ իմաստ: Համասեռ միջավայրում յուրաքանչյուր եռյակ անկախ է մյուսից: $\vec{M}_0$, $\vec{P}_0$, $\vec{\gamma}^{(1)}$ եռյակին հարմար է վերագրել ճառագայթ, որը ,,պոկվել,, է կաուստիկից /անդրադարձած ճառագայթ/, իսկ $\vec{N}_0$, $\vec{Q}_0$, $\vec{\gamma}^{(2)}$ եռյակին՝ ընկնող /դեպի կաուստիկը եկող/ ճառագայթ:

Եթե $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ և $\vec{D}$ վեկտորները նույնպես ներկայացնենք

$\frac{1}{ik}$ -ի աստիճանների մոտարկային շարքի տեսքով, ապա, համաձայն /3.2.31,ա/ նշանակումների, կստանանք

$$\vec{A}_0=\vec{A}_0^{000}+\vec{A}_0^{100}+\vec{A}_0^{001}+\vec{A}_0^{101}=\frac{1}{2}\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,(\vec{M}_0+\vec{N}_0),$$
$$\vec{B}_0=\vec{A}_0^{010}+\vec{A}_0^{110}+\vec{A}_0^{011}+\vec{A}_0^{111}=\frac{1}{2}\,\frac{\vec{M}_0-\vec{N}_0}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}},$$
$$\vec{C}_0=\vec{D}_0^{000}+\vec{D}_0^{100}+\vec{D}_0^{001}+\vec{D}_0^{101}=\frac{1}{2}\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,(\vec{P}_0+\vec{Q}_0)$$
$$\vec{D}_0=\vec{D}_0^{010}+\vec{D}_0^{110}+\vec{D}_0^{011}+\vec{D}_0^{111}=\frac{1}{2}\,\frac{\vec{P}_0-\vec{Q}_0}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}} \qquad /3.2.37/$$

Զրոյական մոտավորությամբ /ըստ $\frac{1}{ik}$ -ի աստիճանների/ դաշտերի /3.2.27/ և /3.2.28/ արտահայտությունները ԷՄ ամպլիտուդների միջոցով՝ համաձայն /3.2.37/-ի կգրվեն

$$\vec{E}=\frac{1}{2}\left\{(\vec{M}_0+\vec{N}_0)\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,J_m(k\xi_2)+\frac{\vec{M}_0-\vec{N}_0}{ik}\,\frac{\xi_2}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}}\,\frac{dJ_m(k\xi_2)}{d\xi_2}\right\}e^{ik(\xi_1+\xi_0\varphi)} \qquad /3.2.38,ա/$$

$$\vec{H}=\frac{1}{2}\left\{(\vec{P}_0+\vec{Q}_0)\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}\,J_m(k\xi_2)+\frac{\vec{P}_0-\vec{Q}_0}{ik}\,\frac{\xi_2}{\sqrt[4]{\xi_2^2-\xi_0^2}}\,\frac{dJ_m(k\xi_2)}{d\xi_2}\right\}e^{ik(\xi_1+\xi_0\varphi)} \qquad /3.2.38,Բ/$$

Որպեսզի /3.2.38/ արտահայտությունները լինեն վերջավոր, երբ $\xi_2=\xi_0$, անհրաժեշտ են հետևյալ պայմանները՝

$$\vec{M}_0=\vec{N}_0 \quad \text{և} \quad \vec{P}_0=\vec{Q}_0 \qquad \text{երբ} \quad \xi_2=\xi_0 \qquad /3.2.39/$$

Եթե հաշվի առնենք, որ կաուստիկի վրա $\partial\Psi_1=\partial\Psi_2=0$, $\vec{\gamma}^{(1)}=\vec{\gamma}^{(2)}$ և $\vec{n}_1=\vec{n}_2$, $\vec{b}_1=\vec{b}_2$, ապա $\xi_2=\xi_0=\frac{m}{k}$ հավասարումը կաուստիկի հավասարումն է, իսկ կաուստիկի վրա

$$\Phi_1=F_1 \qquad \text{և} \qquad \Phi_2=F_2 \qquad /3.2.39,ա/$$

/3.2.39,ա/ հավասարումները ճառագայթի անընդհատության պայմաններն են կաուստիկի մոտով անցնելիս:

$\xi_2>0$ տիրույթը լույսի տիրույթն է, որտեղ կան ճառագայթներ, $\xi_2<0$ տիրույթը՝ կաուստիկական ստվերն է: $\xi_2=\frac{m}{k}$ հավասարումը $r_k=\frac{m}{k}$ շառավղով գլանային մակերևույթի հավասարումն է: Երբ $m=0$ / $\xi_2=0$/, այս մակերևույթը վերածվում է գծի: Այս պատճառով էլ, երբեմն, արվածն անվանվում է կիզագծային վերլուծություն:

Եթե /3.2.38/ արտահայտություններում $f_2(\xi_2)=J_m(\kappa\xi_2)$ և $f_2'(\xi_2)=\kappa J_m'(\kappa\xi_2)$ ֆունկցիաները փոխարինենք իրենց կարճալիքային մոտարկումներով, համաձայն /3.1.22/ բանաձևի, կստանանք դաշտերի համար

$$\vec{E}=\vec{M}_o\, e^{i(\kappa S^- -\frac{\pi}{4})}+\vec{N}_o\, e^{-i(\kappa S^+ -\frac{\pi}{4})} \qquad /3.2.40,ա/$$

$$\vec{H}=\vec{P}_o\, e^{i(\kappa S^- -\frac{\pi}{4})}+\vec{Q}_o\, e^{-i(\kappa S^+ -\frac{\pi}{4})} \qquad /3.2.40,բ/$$

ԵՕ արտահայտությունները:

Ինչպես սկալյար դեպքում, այնպես էլ /3.2.38/ դաշտերն ունեն կիսաստվերային բնույթ. հավասարաչափ մոտարկային ձևով նկարագրելով դաշտերը կաուստիկական տիրույթում՝ կաուստիկից հեռու սրանք ,,ձեղքըվում,, են ԵՕ ճառագայթների՝ /3.2.40/-ի տեսքով:

Ինչպես սկալյար դեպքում, այնպես էլ այստեղ, ընդհանրացնենք /3.2.37/ և սրանից բխող՝ $\vec{M}_o$ և $\vec{N}_o$ ամպլիտուդների համար ստացվող արտահայտությունները: Նկատի առնելով, որ $\sqrt{\xi_2^2-\xi_o^2}=\xi_2\sqrt{1-\frac{\xi_o^2}{\xi_2^2}}=\gamma_2(\xi_2)\sqrt{\beta(\xi_2)}$, գրենք ԵՕ և կաուստիկական վերլուծության ամպլիտուդների միջև հետևյալ ընդհանուր առնչությունները՝

$$\vec{M}_o^{\,p_1p_2p_3}=\frac{1}{2^3}\sum_{\{i_{1,2,3}\}=0,1}(-1)^{i_1p_1+i_2p_2+i_3p_3}\frac{\vec{A}_o^{\,i_1i_2i_3}}{\left[\sqrt{\beta_2(\xi_2)}\,\gamma_2(\xi_2)\right]^{\frac{1}{2}-i_2}} \qquad /3.2.41/$$

$$\vec{N}_o^{\,p_1p_2p_3}=\frac{1}{2^3}\sum_{\{i_{1,2,3}\}=0,1}(-1)^{i_1p_1+i_2p_2+i_3p_3}\frac{\vec{D}_o^{\,i_1i_2i_3}}{\left[\sqrt{\beta_2(\xi_2)}\,\gamma_2(\xi_2)\right]^{\frac{1}{2}-i_2}}$$

տեսքով, որտեղ p_1 , p_2 և p_3 թվերն ընդունում են 0 և 1 արժեքները: /3.2.41/ հավասարություններից հետևում են

$$\begin{matrix}\vec{A}_o^{\,i_1i_2i_3}\\ \vec{D}_o^{\,i_1i_2i_3}\end{matrix}=\left[\sqrt{\beta_2(\xi_2)}\,\gamma_2(\xi_2)\right]^{\frac{1}{2}-i_2}\sum_{\{p_{1,2,3}\}=0,1}(-1)^{i_1p_1+i_2p_2+i_3p_3}\begin{matrix}\vec{M}_o^{\,p_1p_2p_3}\\ \vec{N}_o^{\,p_1p_2p_3}\end{matrix} \qquad /3.2.42/$$

առնչությունները:

/3.2.41/ և /3.242/ առնչություններն իրավացի են $\vec{M}$, $\vec{N}$, , $\vec{A}$, $\vec{B}$ վեկտորների մոտարկային շարքի ցանկացած մոտավորության համար:

Այսպիսով, իրոք /3.2.24/ վերլուծության զրոյական մոտավորությունը Մաքսվելի հավասարումների լուծման հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկումն է առանցքայնորեն սիմետրիկ դաշտերի համար և ունի կիսաստվերային ալիքի բնույթ:

3.3. Սկալյար և էլեկտրամագնիսական դաշտերի հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկումը միաչափ ,,էտալոնային,, ֆունկցիաների միջոցով

Վերը քննարկված կաուստիկական վերլուծությունները պարունակում էին հատուկ ֆունկցիաների և սրանց առաջին կարգի ածանցյալների կոմբինացիաները այնպես, որպեսզի կաուստիկից հեռու տիրույթներում դաշտերն ունենան ճառագայթային բնույթ, այսինքն՝ նկարագրվեն ԵՕ-ի կամ ԴԵՏ-ի օրենքներով և լինեն հավասարաչափ՝ կաուստիկի շրջակայքում: Սա, ինչպես ասացինք, կիսաստվերային դաշտի /ալիքի, ճառագայթի/ հասկացության ընդհանրացումն է:

Այս կամ այն հատուկ ֆունկցիայի կիրառությունը տվյալ կիսաստվերային դաշտում պայմանավորված է դիտարկվող խնդրի սիմետրիայով, կաուստիկի տիպով և ճյուղերի փոխադարձ դասավորությամբ: Այսպես, հատուկ կետեր չունեցող կաուստիկի համար, որն ունի միայն մեկ ճյուղ, կաուստիկական վերլուծությունն իրացվել Էյրիի ֆունկցիայի օգնությամբ, գլանային սիմետրիա ունեցող կաուստիկների համար՝ Բեսելի ֆունկցիայի օգնությամբ: Գնդային սիմետրիայի դեպքում հարկ կլինի օգտվել Լեժանդրի միակցված բազմանդամներից և Բեսելի գնդային ֆունկցիաներից, երկճյուղ կաուստիկի դեպքում՝ Վեբերի /պարաբոլային գլանի/ ֆունկցիաներից, էլիպսային սիմետրիայի դեպքում՝ Մաթյեի կամ Լամեի ֆունկցիաներից և այլն:

Բոլոր թվարկված վերլուծություններն ունեն մեկ ընդհանուր բնորոշ գիծ. որպես ֆունկցիաների հավաքածու կաուստիկական վերլուծություններում կիրառվում են ֆունկցիաներ /անվանենք սրանք ,,էտալոնային,,/, որոնք բավարարում են երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներին: Այս առումով իրավասու են հետևյալ երկու պնդումները:

Պնդում I

------- Դիցուք տրված է $f_\ell(\xi_\ell)$ $(\ell=1,2,3)$,,էտալոնային,, ֆունկցիաների հավաքածու: Այս ֆունկցիաները անընդհատ են, մինչև իրենց երկրորդ կարգի ածանցյալները և բավարարում են երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$\frac{d^2 f_\ell(\xi_\ell)}{d\xi_\ell^2}+\alpha_\ell(\xi_\ell)\frac{d f_\ell(\xi_\ell)}{d\xi_\ell}+\kappa^2\beta_\ell(\xi_\ell)f_\ell(\xi_\ell)=0 \qquad /3.3.1/$$

որտեղ $\alpha_\ell(\xi_\ell)$-ը կամայական ինտեգրելի ֆունկցիաներ են, իսկ $\beta_\ell(\xi_\ell)$ -ը՝ անվերջ թվով դիֆերենցելի՝ $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$ կետի շրջակայքում, իսկ $\beta_\ell(\xi_\ell)=0$, այսինքն ξ_ℓ -ը $\beta_\ell(\xi_\ell)=0$ հավասարման արմատն է:

Ապա՝ ճիշտ են նաև ստացված հավասարաչափ մոտարկային վերլուծությունների հետևյալ ընդհանրացումները Հելմհոլցի /1.1.1/ և Մաքսվելի /1.1.8/ հավասարումների համար՝

$$\mathcal{U} = \sum_{\ldots i_s \ldots} \frac{A^{i_1 \ldots i_s}}{(i\kappa)^{i_1+\ldots+i_s}} \prod_{\ell=1}^{s} \gamma_\ell^{i_\ell}(\xi_\ell) \frac{d^{i_\ell}}{d\xi_\ell^{i_\ell}} f_\ell(\xi_\ell) \qquad /3.3.2/$$

$$\begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{matrix} = \sum_{\ldots i_s \ldots} \begin{matrix} \vec{A}^{i_1 \ldots i_s} \\ \vec{D}^{i_1 \ldots i_s} \end{matrix} \frac{\prod_{\ell=1}^{s} \gamma_\ell^{i_\ell}(\xi_\ell) \frac{d^{i_\ell}}{d\xi_\ell^{i_\ell}} f_\ell(\xi_\ell)}{(i\kappa)^{i_1+\ldots+i_s}} \qquad /3.3.3/$$

ըստ որում

$$\gamma_\ell^{i_\ell}(\xi_\ell) = e^{i_\ell \int \alpha_\ell(\xi_\ell) d\xi_\ell}, \quad A^{i_1 \ldots i_s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^{i_1 \ldots i_s}}{(i\kappa)^m},$$

$$\vec{A}^{i_1 \ldots i_s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{A}_m^{i_1 \ldots i_s}}{(i\kappa)^m}, \quad \vec{D}^{i_1 \ldots i_s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{D}_m^{i_1 \ldots i_s}}{(i\kappa)^m} \qquad /3.3.4/$$

i_ℓ ինդեքսը ընդունում է երկու արժեք՝ 0 և 1, S -ը որոշվում է ֆունկցիաների հավաքածուով՝ խնդրի ազատության աստիճանների թվով:

§ 3.2-ում դիտարկված սկալյար խնդրում Հելմհոլցի հավասարման լուծման կարճալիքային մոտարկման համար ֆունկցիաների հավաքածուն բաղկացած էր երկու ֆունկցիաներից՝ Էյրիի ֆունկցիայից և էքսպոնենտից, այսինքն՝ $S=2$, էլեկտրամագնիսական ալիքի համար՝ Բեսելի ֆունկցիայից և երկու էքսպոնենտից, այսինքն՝ $S=3$: Եռաչափ տարածության մեջ ակնհայտ է, որ $S_{max} = 3$:

/3.3.2/, /3.3.3/ վերլուծություններից մասնավոր դեպքերում հետևում են /3.2.2/-ը և /3.2.24/-ը, երբ համապատասխանորեն՝ $S = 2$, $\alpha_1(\xi_1) = \alpha_2(\xi_2) = 0$, $\gamma_1(\xi_1) = \gamma_2(\xi_2) = 1$ և $S = 3$, $\alpha_1(\xi_1) = \alpha_3(\xi_3) = 0$, $\alpha_2(\xi_2) = \frac{1}{\xi_2}$, $\gamma_1(\xi_1) = \gamma_3(\xi_3) = 1$, $\gamma_2(\xi_2) = \frac{1}{\xi_2}$:

Պնդում II

Կիսաստվերային դաշտերի $A_m^{i_1 \ldots i_s}$, $\vec{A}_m^{i_1 \ldots i_s}$, $\vec{D}_m^{i_1 \ldots i_s}$ ամպլիտուդներն արտահայտվում են ՆՕ վերլուծության $M_m^{p_1 \ldots p_s}$, $\vec{M}_m^{p_1 \ldots p_s}$, $\vec{N}_m^{p_1 \ldots p_s}$ ամպլիտուդների միջոցով, որպես սրանց գծային կոմբինացիա՝

$$A_m^{i_1 \ldots i_s} = \chi^{i_1 \ldots i_s} \sum_{\{p_\ell\}=0,1} (-1)^{i_1 p_1 + \ldots + i_s p_s} M_m^{p_1 \ldots p_s} \qquad /3.3.5/$$

$$\begin{matrix} \vec{A}_m^{i_1 \ldots i_s} \\ \vec{D}_m^{i_1 \ldots i_s} \end{matrix} = \frac{\chi^{i_1 \ldots i_s}}{2^s} \sum_{\{p_\ell\}=0,1} (-1)^{i_1 p_1 + \ldots + i_s p_s} \begin{matrix} \vec{M}_m^{p_1 \ldots p_s} \\ \vec{N}_m^{p_1 \ldots p_s} \end{matrix} \qquad /3.3.6/$$

որտեղ

$$\chi^{i_1 \ldots i_s} = \prod_{\ell=1}^{s} \left[\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)} \gamma_\ell(\xi_\ell) \right]^{\frac{1}{2} - i_\ell} \qquad /3.3.7/$$

p_ℓ ինդեքսներն ընդունում են երկու արժեք՝ 0 և 1, իսկ $M_0^{p_1 \ldots p_s}$, $\vec{M}_0^{p_1 \ldots p_s}$, $\vec{N}_0^{p_1 \ldots p_s}$ ՆՕ ամպլիտուդներն են, որոնք բավարարում են փոխադրման հավասարմանը: կոորդինատային ֆունկցիաները բավարարում են օրթոգոնալության պայմանին

$$\vec{\nabla} \xi_\ell \vec{\nabla} \xi_{\ell'} = \delta_{\ell\ell'} \qquad /3.3.8/$$

և էյքոնալի հավասարմանը:

Երբ $S=2$, $\beta(\xi_1) = -\xi_1$, $\beta_2(\xi_2)=1$, $\gamma_1(\xi_1) = \gamma_2(\xi_2) = 1$, /3.3.5/ արտահայտությունը համընկնում է /3.2.18/-ին և երբ $S=3$, $\beta_1(\xi_1) = \beta_3(\xi_3) = \gamma_1(\xi_1) = \gamma_3(\xi_3) = 1$ իսկ $\beta_2(\xi_2) = 1 - \xi_0^2/\xi_2^2$, $\gamma_2(\xi_2) = \xi_2$ /3.3.6/-ի մոտավորության արտահայտությունները համընկնում են /3.2.41/, /3.2.42/ արտահայտություններին:

Սահմանափակվենք այս երկու պնդումների ապացուցման եղանակի սոսկ հակիրճ նկարագրությամբ:

Առաջին պնդումն ապացուցելու համար անհրաժեշտ է /3.3.2/ և /3.3.3/ վերլուծությունները տեղադրել, համապատասխանորեն, Հելմհոլցի /1.1.1/ և Մաքսվելի /1.1.8/ հավասարումներում և բացասել ստացված արտահայտություններում $\frac{d^2 f_\ell(\xi_\ell)}{d\xi_\ell^2}$ -ը /3.3.1/ հավասարման օգնությամբ: Հավասարեցնելով այնուհետև զրոյի $\frac{1}{i\kappa}$ -ի նույն աստիճաններ պարունակող անդամները, ստանում ենք ռեկուրենտ /անդրադարձ/ հավասարումների սիստեմ, որտեղից հաջորդաբար կարող են որոշվել ինչպես $A_m^{i_1 \ldots i_s}$, $\vec{A}_m^{i_1 \ldots i_s}$, $\vec{D}_m^{i_1 \ldots i_s}$ ամպլիտուդները, այնպես էլ ξ_ℓ կոորդինատային ֆունկցիաները: Ստացված լուծումներն,, այսպիսով, մոտարկային ձևով կբավարարեն Հելմհոլցի և Մաքսվելի հավասարումներին, ինչը պահանջում էր ապացուցել առաջին պնդումը: Սակայն ամեն անգամ ռեկուրենտ հավասարումների սիստեմ լուծելու փոխարեն կարելի է ամպլիտուդային և կոորդինատական ֆունկցիաների որոշումը հանգեցնել ՆՕ-ի փոխադրման և էյքոնալի հավասարումների լուծման:

Ասվածը անելու համար պետք է բաժանել ստացվող ռեկուրենտ հավասարումների աջ ու ձախ մասերը /3.3.7/ արտահայտության վրա և բազմապատկել $(-1)^{i_1 p_1 + \ldots + i_s p_s}$-ով: Գումարելով ստացված հավասարումները ըստ բոլոր $i_1 \ldots i_s$ -երի և հաշվի առնելով օրթոգոնալության /3.3.8/ պայմանը՝ Հելմհոլցի հավասարումից կստանանք

$$M_m^{p_1 \ldots p_s} \sum_{\ell=1}^{s} (\vec{\nabla} \psi_\ell)^2 = n^2 M_m^{p_1 \ldots p_s}, \quad n^2 = \varepsilon(\vec{r}) \mu(\vec{r}) \qquad /3.3.9/$$

$$2\vec{\gamma}^{p_1\dots p_s}\vec{\nabla} M_m^{p_1\dots p_s} + M_m^{p_1\dots p_s}\vec{\nabla}\vec{\gamma}^{p_1\dots p_s} = Y_{m-1}^{p_1\dots p_s} \qquad /3.3.10/$$

հավասարումները, որտեղ

$$\vec{\nabla}\Psi_e = \sqrt{\beta_e(\xi_e)}\,\vec{\nabla}\xi_e, \qquad /3.3.11/$$

$$\vec{\gamma}^{p_1\dots p_s} = \sum_{e=1}^{s}(-1)^{p_e}\vec{\nabla}\Psi_e, \qquad /3.3.12/$$

$$M_m^{p_1\dots p_s} = \sum_{\{i_e=0,1\}}(-1)^{i_1p_1+\dots+i_sp_s}\frac{A_m^{i_1\dots i_s}}{\varkappa^{i_1\dots i_s}} \qquad /3.3.13/$$

$$Y_m^{p_1\dots p_s} = \sum_{\{i_e=0,1\}}\frac{\Delta A_m^{i_1\dots i_s}}{\varkappa^{i_1\dots i_s}} \qquad /3.3.14/$$

իսկ Մաքսվելի հավասարումներից կստանանք

$$[\vec{M}_m^{p_1\dots p_s},\vec{\gamma}^{p_1\dots p_s}] + \mu(\vec{r})\vec{N}_m^{p_1\dots p_s} = \vec{X}_{m-1}^{p_1\dots p_s} \qquad /3.3.15/$$
$$[\vec{N}_m^{p_1\dots p_s},\vec{\gamma}^{p_1\dots p_s}] - \varepsilon(\vec{r})\vec{M}_m^{p_1\dots p_s} = \vec{Y}_{m-1}^{p_1\dots p_s}$$

հավասարումները, որտեղ

$$\left.\begin{matrix}\vec{M}_m^{p_1\dots p_s}\\ \vec{N}_m^{p_1\dots p_s}\end{matrix}\right\} = \sum_{\{i_e=0,1\}}\frac{(-1)^{i_1p_1+\dots+i_sp_s}}{\varkappa^{i_1\dots i_s}}\left\{\begin{matrix}\vec{A}_m^{i_1\dots i_s}\\ \vec{D}_m^{i_1\dots i_s}\end{matrix}\right. \qquad /3.3.16/$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{X}_m^{p_1\dots p_s}\\ \vec{Y}_m^{p_1\dots p_s}\end{matrix}\right\} = \sum_{\{i_e=0,1\}}\frac{(-1)^{i_1p_1+\dots+i_sp_s}}{\varkappa^{i_1\dots i_s}}\left\{\begin{matrix}\mathrm{rot}\,\vec{A}_m^{i_1\dots i_s}\\ \mathrm{rot}\,\vec{D}_m^{i_1\dots i_s}\end{matrix}\right. \qquad /3.3.16,բ/$$

$$\vec{M}_{-1}^{p_1\dots p_s} = \vec{N}_{-1}^{p_1\dots p_s} = \vec{X}_{-1}^{p_1\dots p_s} = \vec{Y}_{-1}^{p_1\dots p_s} = 0$$

/3.3.9/ և /3.3.15/ հավասարումների զրոյական մոտավորություններից ստացվում են

$$\left(\vec{\gamma}^{p_1\dots p_s}\right)^2 = \varepsilon(x,y,z)\mu(x,y,z) \qquad /3.3.17/$$

էյքոնալի հավասարումները: Այս հավասարումներով փոխկապված են տարածական / x, y, z / կոորդինատները և ξ_e կոորդինատական ֆունկցիաները:

Զրոյական մոտավորությամբ $M_0^{p_1\dots p_s}$, $\vec{M}_0^{p_1\dots p_s}$, $\vec{N}_0^{p_1\dots p_s}$ ամպլիտուդները բավարարում են ԵՕ-ի փոխադրման հավասարումներին: Դրանք ստացվում են /3.3.9/, /3.3.18/, /3.3.16/ հավասարումներից $\S$ 1.1-ում արվածի նմանությամբ:

Վերջապես բազմապատկենք /3.3.13/ և /3.3.16,ա/ արտահայտություն-

ները $(-1)^{p_1j_1+\dots+p_sj_s}$ -ով / $j=0,1$ / և գումարենք ըստ բոլոր p_e -երի: Հաշվի առնելով, որ

$$\sum_{\{p_e\}=0,1}(-1)^{p_1(i_1+j_1)+\dots+p_s(i_s+j_s)} = 2^s\,\delta_{j_1i_1}\dots\delta_{j_si_s}$$

կհանգենք երկրորդ պնդման /3.3.5/ և /3.3.6/ բանաձևերին:

Մնում է ապացուցել, որ ԵՕ ամպլիտուդների /3.3.5/ և /3.3.6/ կոմբինացիաներով արտահայտվող կաուստիկական վերլուծության /կիսատվերային ալիքների/ ամպլիտուդները վերջավոր են կաուստիկների վրա, այսինքն՝ իրոք /3.3.2/ և /3.3.3/ վերլուծությունները Հելմհոլցի և Մաքսվելի հավասարումների հավասարաչափ մոտարկային լուծումներն են:

Նույնպես չխորանալով մանրամասների մեջ՝ ասենք հետևյալը. ֆունկցիաները $\xi_e=\tilde{\xi}_e$ կետի շուրջը անվերջ կարգի դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, հետևաբար, դրանք կարելի է վերլուծել Թեյլորի շարքի այս կետի շրջակայքում և ցույց տալ, որ /3.3.2/ և /3.3.3/ վերլուծությունների վերջավոր լինելը կաուսաիկի վրա /$\beta_e(\tilde{\xi}_e)=0$/ հանգեցնում է /3.2.19/, /3.2.39/ տիպի պայմանների կատարման պահանջին $M_m^{p_1\dots p_s}$, $\vec{M}_m^{p_1\dots p_s}$, $\vec{N}_m^{p_1\dots p_s}$ ամպլիտուդների համար, այն է՝ ԵՕ ամպլիտուդների անընդհատության պայմանին, երբ ճառագայթն անցնում է կաուստիկի մոտով՝ շոշափելով սրան:

Ավարտելով այսքանով առաջին ու երկրորդ պնդումների հակիրճ ապացույցը՝ ցույց տանք, որ տարածության այն տիրույթում, որտեղ հավասարի են ԵՕ պատկերացումները, /3.3.2/ և /3.3.3/ արտահայտությունները նկարագրում են ԵՕ ճառագայթներ:

Այս նպատակով /3.3.2/ և /3.3.3/ վերլուծություններում էտալոնային ֆունկցիաները և սրանց ածանցյալները փոխարինենք իրենց /3.1.22/ կարճալիքային մոտարկումներով՝ գրված

$$\frac{d^{i_e}f_e(\xi_e)}{d\xi_e^{i_e}} = \frac{(ik)^{i_e}}{2[\beta_e(\xi_e)]^{\frac{1}{4}-i_e}}\sum_{\{p_e\}=0,1}(-1)^{i_ep_e}\exp\left[i\left(k\int_{\tilde{\xi}_e}^{\xi_e}\sqrt{\beta_e(\xi_e)}\,d\xi_e-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad /3.3.18/$$

ընդհանուր տեսքով: Կատարենք պարզ ձևափոխություններ

$$\mathcal{U} = \sum_{\{i_e\}=0,1}\frac{A_0^{i_1\dots i_s}}{(ik)^{i_1+\dots+i_s}}\prod_{e=1}^{s}\frac{\gamma_e^{i_e}(\xi_e)(ik)^{i_e}}{2\gamma_e^{\frac{1}{2}}(\xi_e)[\sqrt{\beta_e(\xi_e)}]^{\frac{1}{2}-i_e}}\sum_{p_e}(-1)^{i_ep_e}\exp\left[(-1)^{p_e}i\left(k\int_{\tilde{\xi}_e}^{\xi_e}\sqrt{\beta_e(\xi_e)}\,d\xi_e-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2^s}\sum_{\{p_e\}=0,1}\sum_{\{i_e\}=0,1}(-1)^{i_1p_1+\dots+i_sp_s}\frac{A_0^{i_1\dots i_s}}{\varkappa^{i_1\dots i_s}}\exp\left[i\left(k\Psi_{p_1\dots p_s}-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad /3.3.19/$$

Եթե հիմա օգտվենք /3.3.5/ առնչությունից, ապա /3.3.19/ արտահայտությունը կգրվի

$$\mathcal{U} = \sum_{\{P_\ell\}=0,1} M_0^{P_1\dots P_s} \exp\left[i\left(k\Psi_{P_1\dots P_s} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad /3.3.20/$$

տեսքով, որտեղ

$$\Psi_{P_1\dots P_s} = \sum_{\ell=1}^{s} (-1)^{P_\ell}\Psi_\ell$$

Համաբանորեն /3.3.6/ վերլուծությունները գալիս են

$$\begin{matrix}\vec{E} \\ \vec{H}\end{matrix} = \sum_{\{P_\ell\}=0,1} \begin{matrix}\vec{M}_0^{P_1\dots P_s} \\ \vec{N}_0^{P_1\dots P_s}\end{matrix} \exp\left[i\left(k\Psi_{P_1\dots P_s} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad /3.3.21/$$

տեսքի:

Այսպիսով, առաջարկված երկու պնդումները հնարավորություն են տալիս ստանալ Հելմհոլցի և Մաքսվելի հավասարումների հավասարաչափ մոտարկային լուծումներ կիսաստվերային ալիքների տեսքով: Սրանք ԵՕ վերլուծությունների այնպիսի գծային կոմբինացիաներ են, որոնք վերջավոր են կաուստիկների վրա, իսկ սրանցից հեռու տիրույթում համընկնում են ԵՕ ճառագայթային վերլուծություններին:

ԽՆԴԻՐ

Ցույց տալ, որ միաչափ՝ $\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial x^2} + k^2\mathcal{U} = 0$ հավասարման մոտարկային լուծումը, որոշված համաձայն /3.3.2/ բանաձևի, համընկնում է հավասարման ստույգ լուծմանը:

Լուծում
------- Ստույգ լուծման տեսքը $\mathcal{U} = \alpha \,{}^{\cos}_{\sin}(kx+c)$ -ն է $\frac{1}{ik}$ -ի ցանկացած մոտավորությամբ: Համաձայն / I / պնդումի՝ հավասարման մոտարկային լուծման տեսքն է՝

$$\mathcal{U} = A^0 f(\xi) + \frac{A'}{ik}\gamma(\xi) f'(\xi), \quad \gamma(\xi) = e^{\int \alpha(\xi)d\xi} \qquad /1/$$

Տեղադրելով /1/-ը դիտարկվող հավասարման մեջ և վերլուծելով A^0 և A' ամպլիտուդները ըստ $\frac{1}{ik}$ -ի աստիճանների, այնուհետև հավասարեցնելով զրոյի $\frac{1}{ik}$ -ի նույն աստիճան պարունակող անդամները առանձին-առանձին, կստանանք $\beta(\xi)(\vec\nabla\xi)^2 = 1$ էյքոնալի հավասարումը և $\vec\nabla(M_0^p\vec\gamma) = 0$, $p=0,1$ տեղափոխման հավասարումը, որտեղից

$$\vec\gamma^p = (-1)^p\sqrt{\beta(\xi)}\,\vec\nabla\xi, \quad M_0^p = \sum_{i=0,1}\frac{(-1)^{pi}A_0^i}{[\sqrt{\beta(\xi)}\gamma(\xi)]^{\frac{1}{2}-i}}$$

Էյքոնալի հավասարումը կապ է հաստատում ξ և x կոորդինատների միջև՝ $\sqrt{\beta(\xi)}\frac{d\xi}{dx} = 1$, $x = \int\sqrt{\beta(\xi)}d\xi$, իսկ փոխադրման հավասարումից որոշվում է՝ $M_0^p = C_p$: Համաձայն /3.3.5/ բանաձևի՝

$$A_0^i = [\sqrt{\beta(\xi)}\gamma(\xi)]^{\frac{1}{2}-i}\{C_0 + (-1)^i C_1\}$$

Ընտրելով $C_0 = C_1$ և $C_0 = -C_1$՝ կստանանք

$$\mathcal{U} = 2C_0\sqrt[4]{\beta(\xi)}\sqrt{\gamma(\xi)}f(\xi) \quad \text{և} \quad \mathcal{U} = 2C_0\frac{\sqrt{\gamma(\xi)}}{\sqrt[4]{\beta(\xi)}}f'(\xi) \qquad /2/$$

Եթե /2/-ում $f(\xi)$ և $f'(\xi)$ ֆունկցիաները փոխարինենք իրենց /3.3.20/ կամ /3.3.22/ մոտարկումներով, փուլային գումարելու ճշտությամբ կստանանք ստույգ լուծման արտահայտությունները:

Երրորդ գլխի գրականությունը

I. Э.Д.Газазян, М.И.Иванян."Равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла". Радиотехника и электроника, т.29, №5, 1984.

2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля.Москва, Наука, 1973.

Գ Լ ՈՒ Խ 4

ԱԼԻՔԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ԵՎ ԿԱՈՒՍՏԻԿՆԵՐԸ ,,ԱՂԵՏՆԵՐԻ,, ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՊԱՏԿԵՐԱՑՄԱՄԲ

/ՀԱՎԵԼՎԱԾ/

4.1. Դաշտի լոկալ հավասարաչափ մոտարկումը

Երկու ,,էտալոնային,, ինտեգրալներ

Պարզ միաձյուղ կաուստիկ: Դառնանք 3.1.-ում դիտարկված սկալյար ալիքի և պարզ միաձյուղ կաուստիկի դեպքին: Եթե /3.1.5/ արտահայտության մեջ մտցնենք նշանակումներ՝ $\xi=\xi_1$ և $D=-\xi_2$; ապա այն կստանա

$$I_1=\mathcal{U}(\xi_1,\xi_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\kappa(\frac{\tau^3}{3}+\tau\xi_1+\xi_2)}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa\varphi(\xi_1,\xi_2;\tau)}d\tau \qquad /4.1.1/$$

տեսքը: Ստացվածը մեր քննարկելիք ,,էտալոնային,, ինտեգրալներից առաջինն է: Ընդինտեգրալ արտահայտության փուլային ֆունկցիան՝

$$\varphi(\xi_1,\xi_2;\tau)=\frac{\tau^3}{3}+\tau\xi_1+\xi_2 \qquad /4.1.2/$$

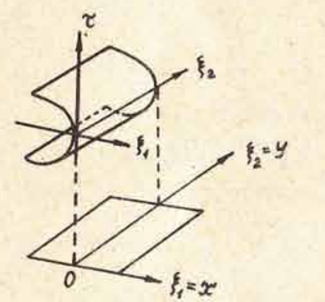
-ը

$\varphi(\xi_1,\xi_2;\tau)=const$ հավասարման միջոցով որոշում է որևէ ալիքային մակերևույթ: Համաձայն ստացիոնար փուլի մեթոդի՝ համապատասխան ճառագայթային մակերևույթի հավասարումը /էյքոնալների երկրաչափական տեղը/ որոշվում է որպես ինտեգրալ արտահայտության ստացիոնար փուլի կետերի երկրաչափական տեղ՝

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\tau^3}{3}+\tau\xi_1+\xi_2\right)=0,\ \tau^2+\xi_1=0,\ \tau=\sqrt{-\xi_1} \qquad /4.1.3/$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}=2\tau=2\sqrt{-\xi_1} \qquad /4.1.4/$$

/4.1.4/ հավասարումից հետևում է, որ $\xi_1=0$ կետում զրո է դառնում նաև $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}$ -ն, այսինքն՝ $\xi_1=0$ կետը հատուկ կետ է և տեղի ունի այլասերում: Պատկերենք /4.1.3/ ճառագայթային մակերևույթը τ , ξ_1 , ξ_2 եռաչափ տարածության մեջ և ստանանք այս մակերևույթի հատուկ կետերի / $\tau=0$, $\xi_1=0$ / արտապատկերը երկչափ՝ $x=\xi_1$, $y=\xi_2$ կոնֆիգուրացիոն հարթության վրա, որտեղ $\tau=0$ և տեղի ունի այլասերում /տես Նկ.20/:



Նկ. 20

Նկ. 20-ում x , y հարթության վրա պատկերված ուղիղը որոշված է /4.1.3/ հավասարմամբ ցանկացած ξ_2 -ի / D -ի/ համար, երբ $\tau=0$: Նկ. 20-ից երևում է, որ $x<0$ / $\xi_1<0$/ տիրույթը ճառագայթային տիրույթն է, մինչդեռ $x>0$ / $\xi_1>0$/ տիրույթում ճառագայթներ չկան: $\xi_1=0$ ուղիղը կաուստիկն է, ճառագայթային տիրույթի սահմանը, որի վրա տեղի ունի ճառագայթային թվի թռիչքաձև փոփոխություն՝ զրոյից մինչև երկու /տես § 3.1.1/:

Քննարկված /4.1.1/ ,,էտալոնային,, ինտեգրալը համապատասխանում է ,,աղետներից,, պարզագույնին, այն է՝ պարզ /առանց հատուկ կետերի/ միաձյուղ կաուստիկին:

Կուցաձև-կաուստիկ Դիտարկենք գլանային հայելուց անդրադարձած դաշտը, երբ ընկնող հարթ ալիքի տարածման ուղղությունը զուգահեռ է հայելու գլխավոր օպտիկական առանցքին: Մեզ հետաքրքրում է այս դիֆրակցիոն դաշտի լոկալ մոտարկումը հայելու $z=F$, $x=0$ կիզակետի շրջակայքում: Օգտվելով Կիրխհոֆի դիֆրակցիոն ինտեգրալից և շատ կարճ ալիքների համար /κ -ն մեծ թիվ է/ տարածելով ինտեգրալի սահմանները մինչև անվերջություն, կարելի է գրել հետևյալ արտահայտությունը դիֆրակցիոն դաշտի համար՝

$$\mathcal{U}(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}_0(x')\, e^{ik\sqrt{z^2+(x-x')^2}}\, dx' \qquad /4.1.5/$$

որտեղ

$$\mathcal{U}_0(x') = e^{-ik\frac{x'^2}{2F}}$$

Կիզակետի շրջակայքում / $z \to F$ և $x \to 0$/ ընդինտեգրալ արտահայտության փուլային Ֆունկցիան կարող ենք գրել հետևյալ մոտավոր տեսքով՝

$$-\frac{x'^2}{2F} + \sqrt{z^2+(x-x')^2} \simeq z + \frac{x^2}{2z} - \frac{xx'}{z} + \frac{x'^2}{2z} - \frac{x'^2}{8z^3} - \frac{x^2}{2F} =$$

$$\simeq z + \frac{x^2}{2F} - \frac{x'^2}{2}\cdot\frac{F-z}{F^2} - \frac{x'^4}{8F^3} - \frac{xx'}{F}$$

Մտցնենք նշանակումներ՝

$$F - z = \xi_2\left(\frac{F}{2}\right)^{1/2}, \quad x' = (2F^3)^{1/4}\tau, \quad x = -\left(\frac{F}{2}\right)^{1/4}\xi_1,$$

որոնցից հետո /4.1.5/ արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{U}(x\to 0, z\to F) \simeq e^{-ik(F+\frac{x^2}{2F})}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-ik\left[-\frac{\tau^4}{4} + \xi_2\frac{\tau^2}{2} + \xi_1\tau\right]\right\} d\tau =$$

$$= I_2\, e^{-ik(F+\frac{x^2}{2F})} \qquad /4.1.6/$$

Ստացվեց քննարկելիք ,,էտալոնային,, երկրորդ ինտեգրալը՝ I_2 -ը, որը հայտնի է Փերսիի ինտեգրալ անվամբ: Սրա փուլային Ֆունկցիան

$$\varphi(\xi_1, \xi_2; \tau) = \frac{\tau^4}{4} - \xi_2\frac{\tau^2}{2} - \xi_1\tau \qquad /4.1.7/$$

Բազմանդամ է: k թվի մեծ արժեքների համար I_2 ինտեգրալում, նույնպես հիմնական ներդրում ունեն ստացիոնար փուլի կետերը, որոնք կազմում են

$$\frac{\partial\varphi(\xi_1,\xi_2;\tau)}{\partial\tau} = \tau^3 - \xi_2\tau - \xi_1 = 0 \qquad /4.1.8/$$

Ճառագայթային մակերևույթը /էյքոնալների երկրաչափական տեղը/, որի հատուկ կետերը կորոշվեն

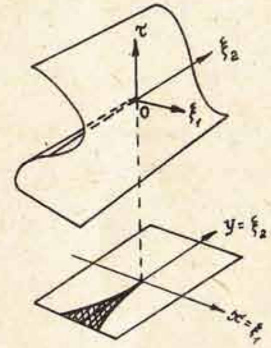
$$\frac{\partial^2\varphi(\xi_1,\xi_2;\tau)}{\partial\tau^2} = 3\tau^2 - \xi_2 = 0, \quad \tau = \left(\frac{|\xi_2|}{3}\right)^{1/2} \qquad /4.1.9/$$

հավասարումից: Տեղադրելով $\tau = \left(\frac{|\xi_2|}{3}\right)^{1/2}$ արժեքը /4.1.8/ հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}|\xi_2|^{3/2} = -\xi_1 \qquad /4.1.10/$$

հավասարումը: Սա կիսախորանարդային պարաբոլի հավասարում է:

Պատկերենք /4.1.8/ ճառագայթային մակերևույթը եռաչափ՝ τ, ξ_1, ξ_2 տարածության մեջ և ստանանք այս մակերևույթի հատուկ կետերի արտապատկերը երկչափ՝ $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$ կոնֆիգուրացիոն հարթության վրա /Նկ.21/:



Նկ.21

Լոկալ մոտարկման դեպքում /4.1.10/ հավասարումը x, y հարթության վրա ունի կտուցի ձև: Սա երկծյուղ կաուստիկ է: Այս ,,կտուցի,, ներսում /Նկ. 21-ում՝ ստվերված մասը/, ինչպես երևում է Նկ.21-ում պատկերված ճառագայթային մակերևույթի տեսքից, ճառագայթների թիվը ավելի շատ է և /4.1.10/ հավասարմամբ նկարագրվող կորի վրա տեղի ունի ճառագայթների թվի թռիչքային փոփոխությունը՝ ,,աղետը,,:

4.2. Կաուստիկները՝ որպես դիֆերենցելի արտապատկերումների առանձնահատկություններ: Կաուստիկների մետամորֆոզներն ու դասակարգումը

Ընդհանրացնելով նախորդ պարագրաֆում քննարկվածը և ալիքների տարածման տեսության այլ հայտնի փաստեր, կարելի է պնդել, որ այս տեսությունում, որպես կանոն, գործ ունենք արագ օսցիլացող Ֆունկցիաների ինտեգրալների հետ /Էյրի, Ֆրենել, Փերսի և այլն/: Այս ինտեգրալներն ունեն

$$I(\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^{\ell}\tau\, a(\tau, \ell)\, e^{ik\varphi(\ell;\tau)} \qquad /4.2.1/$$

տեսքը, որտեղ K -ն մեծ թիվ է, իսկ $a(\tau, \mathcal{C})$ -ն դիֆերենցելի ֆունկցիա է՝ զրոյից էապես տարբեր τ և $\mathcal{C}$ փոփոխականների սահմանափակ տիրույթում: Քանի որ որոշակի կաուստիկի կհամապատասխանի իր օսցիլացող ինտեգրալը, ապա կաուստիկների հնարավոր դասակարգումը կըհանգեցնի /4.2.1/ տիպի ,,էտալոնային,, ինտեգրալների հավաքածուի, իսկ ,,աղետների,, տեսության շրջանակներում, որտեղ կաուստիկները նույնացվում են որոշակի ,,աղետների,, հետ, սրանց դասակարգումը դառնում է հնարավոր:

Քննարկենք /4.2.1/ ինտեգրալը: Մենք գիտենք /տես գլուխ III /, որ էյքոնալի հավասարումը կապ է հաստատում x , y , z /$\vec{r}$/ և կաուստիկական վերլուծության ճառագայթային՝ ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 /$\mathcal{C}$/ կոորդինատների միջև, այսինքն՝ ճառագայթի հավասարումը ընդհանուր ձևով կարելի է գրել

$$\vec{r} = \vec{r}(\mathcal{C}), \qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \qquad /4.2.2/$$

Եթե խնդիրը բնութագրող բոլոր ֆունկցիաները /ալիքային մակերևույթի հավասարումը, միջավայրի բնութագրերի փոփոխման օրենքը տարածության մեջ/ անընդհատ են իրենց բոլոր ածանցյալներով մեկտեղ, ապա $\vec{r} = \vec{r}(\mathcal{C})$ հավասարումներում մենք գործ ունենք անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների հետ, որոնք այս դեպքում նկարագրում են դիֆերենցելի եռաչափ հիպերմակերևույթ վեցչափանի $\vec{r}$, $\mathcal{C}$ տարածության մեջ: Այս հիպերմակերևույթը կանվանենք ճառագայթային մակերևույթ:

Ընդլայնված տարածության օրինակ է $\vec{r}$, $\vec{P}$ փուլային տարածությունը, որտեղ $\vec{P} = \vec{\nabla}\Psi$ -ն էյքոնալի գրադիենտն է /որը հանդես է գալիս իմպուլսի դերում/: Այս դեպքում խոսում են լագրանժյան բազմակերպության մասին:

Ընդհանուր դեպքում՝ ճառագայթային մակերևույթը կարող է տրված լինել $\tau(\tau_1 \ldots \tau_m)$, $\mathcal{C}(\xi_1 \ldots \xi_n)$ տարածության մեջ, որն ընդլայնված է $\xi_1 \ldots \xi_n$ պարամետրերի հաշվին: Այս ընդլայնված տարածության չափը $m+n$ է: /4.2.1/ ինտեգրալը գրված է այս ընդհանուր դեպքի համար: Երբ $m = 1$ և $n = 1$, այս ինտեգրալին կհամապատասխանի, օրինակ, Էյրիի ֆունկցիան /§ 4.1՝ պարզ միաճյուղ կաուստիկ/, իսկ երբ $m = 1$, $n = 2$, օրինակ, Փերսիի ինտեգրալը /§ 4.1՝ ,,կտուցաձև,, կաուստիկ/: Առաջ անցնելով՝ ասենք, որ ,,աղետների,, տեսության կարևորագույն նըշանակությունը հենց այն է, որ նրա շրջանակներում ապացուցվում է մի պնդում, ըստ որի երկչափ տարածության մեջ ուրիշ ,,էտալոնային,, ինտեգրալներ /ուրիշ ,,աղետներ,,/ գոյություն ունենալ չեն կարող:

Ընդհանուր դեպքում կաուստիկը $m + n$ չափանի ճառագայթային մակերևույթի հատուկ կետերի արտապատկերումն է որևէ՝ ավելի ցածր չափի տարածության վրա: Ֆիզիկայի խնդիրներում այսպիսի կոնֆիգուրացիոն տարածության դեր կարող է խաղալ ֆիզիկական եռաչափ տարածությունը:

Ճառագայթային մակերևույթը /4.2.1/ ինտեգրալում ստացվում է որպես ստացիոնար փուլի կետերի երկրաչափական տեղ և որոշվում է

$$\frac{\partial \varphi(\tau; \mathcal{C})}{\partial \tau_k} = 0, \quad k = 1, 2 \ldots m \qquad /4.2.2/$$

հավասարումից, իսկ հատուկ կետերի երկրաչափական տեղը՝

$$\det \left| \frac{\partial^2 \varphi(\tau; \mathcal{C})}{\partial \tau_i \, \partial \tau_k} \right| = 0 \qquad /4.2.3/$$

հավասարումից: Արտապատկերումը /$\tau_1 \ldots \tau_m$, $\xi_1 \ldots \xi_n$ / տարածությունից /$\xi_1 \ldots \xi_n$ / տարածություն, համաձայն /4.2.2/ և /4.3.3/ բանաձևերի, նկարագրում է կաուստիկը կոնֆիգուրացիոն $\xi_1 \ldots \xi_n$ տարածության մեջ:

Ալիքային ճակատի տարածմանը զուգընթաց՝ ալիքային և համապատասխան կաուստիկական մակերևույթները ենթարկվում են մետամորֆոզների /տես առաջին գլխի առաջին գլխի երկրորդ խնդիրները/: Նախնականը ափսեաձև կաուստիկի ծագումն է. կաուստիկը ծագումից անմիջապես հետո ունի ափսեի տեսք /Յ.Բ.Զելդովիչ/: Ցրող միջավայրում ծագող օպտիկական կաուստիկներն, այսպիսով, կարող են տեսողությամբ ընկալվել որպես ,,թռչող ափսեներ,,: Այս բացատրությունը որոշ լույս է սփռում ,,չճանաչված թռչող օբյեկտների,, /НЛО / ֆիզիկական էության վրա:

Այնուհետև կաուստիկները շարունակում են ենթարկվել նորանոր մետամորֆոզների: Այս մետամորֆոզների դասակարգումը ,,աղետների,, տեսության շրջանակներում, խորհրդային մաթեմատիկոս Վ.Առնոլդի առաջարկով, արվում է բազմանիստների պույտների հետ կապված Լիի պարզ խմբերի հիման վրա: Ամերիկյան մաթեմատիկոս Հ.Ուիթնին ձևակերպեց մի թեորեմ տվյալ չափի տարածության մեջ իրացվող կաուստիկների հնարավոր տիպերի վերաբերյալ: Ըստ այս թեորեմի հարթության վրա ցանկացած հարթ ֆունկցիայի արտապատկերումից կարող են առաջանալ սոսկ ,,ծալքի,, /A_2, որին կհամապատասխանի I_1 էտալոնային ինտեգրալը/ և ,,դարսվածքի,, / A_3 , որին կհամապատասխանի Փերսիի I_2 ինտեգրալը/ տիպի կաուստիկներ, այսինքն՝ գծեր և ,,կտուցներ,,: Եռաչափ տարածության մեջ, բացի այս երկուսից, կարող են գոյություն ունենալ ևս հինգ կաուստիկներ՝ ,,ծիծեռնակի պոչ,, / A_4 /, օմբիլիկներ /մազիկներ երկու տիպի՝

$D_4^{\mp}$ /, ,,թիթեռնիկ,, և պարաբոլային օմբիլիկ, երկուսն էլ նիի A_5 խմբից: Կաուստիկների նշված տիպերը հայտնի են որպես Թոմի ,,յոթ,, տարրական ,,աղետներ,,` ֆրանսացի մաթեմատիկոս Ռ.Թոմի անվամբ: Սրանք կայուն գոյացություններ են, այսինքն` ալիքային ճակատի փոքր երերումները չեն բերում սրանց տիպերի փոփոխության: Ցանկացած ուրիշ կաուստիկական գոյացություն տրոհվում է` փոխակերպվելով հիշյալ յոթ տիպերից որևէ մեկին:

Եռաչափ կոնֆիգուրացիոն տարածության մեջ յուրաքանչյուր կայուն կաուստիկի, ըստ ,,աղետների,, տեսության, համապատասխանում է իր` /4.2.1/ տիպի օսցիլացող ինտեգրալը: Սրանք միմյանցից տարբերվում են ամպլիտուդային` $a(\tau;\mathcal{E})$ և փուլային $\varphi(\tau;\mathcal{E})$ ֆունկցիաներով:

Այսպիսով` հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկումները /կիսաստվերային դաշտերը/ կարող են իրացվել ինչպես ,,էտալոնային,, ֆունկցիաների /գլուխ III /, այնպես էլ ,,էտալոնային,, ինտեգրալների /գլուխ IV / օգնությամբ: Ըստ որում` կաուստիկների դասակարգումը ,,աղետների,, տեսության օգնությամբ հնարավորություն է ընձեռում որոշել նշված ,,էտալոնային,, ֆունկցիաները` կախված կաուստիկի տիպից, նրա ճյուղերի դասավորությունից և այլն: Այսպիսի էվրիստիկական /հանկարծագյուտ/ եղանակը լայն հեռանկարներ է բացում ալիքների տարածման և դիֆրակցիայի ամենաբարդ խնդիրների մոտարկային անալիտիկ լուծումներ ստանալու հարցում:

Չորրորդ գլխի գրականությունը

I. Ю.А.Кравцов, Ю.И.Орлов. Геометрическая оптика неоднородных сред.М., Наука, I980.
2. Ю.А.Кравцов, Ю.И.Орлов. Каустики, катастрофы и волновые поля. УФН, т.I4I, вып.4, I983.
3. В.И.Арнольд. Теория катастроф. М., Знание (сер. Математика и кибернетика, №9), I988.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ԳԱՋԱՋՅԱՆ ԷԴՄՈՆԴ ԴԱՎԹԻ

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Հրատարակչության խմբագիր՝ Լ.Գ.ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ
Տեխնիկական խմբագիր՝ Գ.Վ.ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

ԶԿ
Ստորագրված է տպագրության 26.05.1989 թ.:
Չափսը՝ 60.84 1/16: Թուղթ 1: Տպագրության եղանակը՝
,,Օֆսեթ,,: Հրատարակչական 5,0 մամուլ: Տպագրական 6,5
մամուլ 6,0 պայմանական մամուլի:
Տպաքանակ 300: Պատվեր 195 : Գինը՝ 20 կոպ.:
Երևանի համալսարանի հրատարակչություն, Երևան, Մռավյան փ. 1:
Издательство Ереванского университета,Ереван,ул.Мравяна № I

Երևանի համալսարանի ,,Ռոտապրինտ,, արտադրամաս,Երևան,Մռավյան 1:
Цех "Ротапринт"Ереванского университета,Ереван,ул.Мравяна №I