ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
Դիֆերենցիալ հավասարումների ամբիոն

Հ. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ,
Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ, Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ

ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ ԵՎ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Հաստատված է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլ–տետի խորհրդի կողմից որպես դասագիրք բուհերի ֆիզիկամա–թեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ – 2008

ՀՏԴ 512 (07)
ԳՄԴ 22.14 ց7
Բ-275

Հ. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ,
Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ, Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ

Բ-275 Բանախյան հանրահաշիվներ և սպեկտրալ տեսություն

Խմբագիր՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ի. Գ. Խաչատրյան

Գրախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Վ. Հ. Մարտիրոսյան,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Բ. Թ. Բատիկյան

ԵՊՀ հրատ., 2008 թ., 252 էջ:

Դիտարկվող բնագավառի հետ առնչվող գրքերի շարքում սույն ձեռնարկն առաջինն է հայերեն լեզվով: Այն նվիրված է կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվների տեսությանը, սպեկտրալ տեսությանը, կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվների գելֆանդյան տեսությանը և նրա կիրառություններին ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների տեսությունում:

Գիրքը մատչելի է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությամբ բարձր կուրսի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ասպիրանտների, գիտաշխատողների և դասավանդողների համար:

ԳՄԴ 22.14 ց7

ISBN 978-5-8084-0995-8

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ

Դիտարկվող բնագավառի հետ առնչվող գրքերի շարքում սույն ձեռնարկն առաջինն է հայերեն լեզվով: Այն նվիրված է կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվների տեսությանը, սպեկտրալ տեսությանը, կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվների գելֆանդյան տեսությանը և նրա կիրառություններին ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների տեսությունում:

Ձեռնարկը բաղկացած է չորս գլխից: Առաջին գլուխը նվիրված է կոմպլեքս նորմավորված հանրահաշիվների տեսությանը, երկրորդը՝ կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվների գելֆանդյան տեսությանը, որտեղ առանցքային է բոլոր կոմուտատիվ B^*– հանրահաշիվները բնութագրող Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմը: Երրորդ գլխում, հիմնվելով նախորդ գլուխներում զարգացված ապարատի վրա, ուսումնասիրվում է կոմպլեքս հիլբերտյան տարածությունում գործող գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշիվը և ապացուցվում է սպեկտրալ թեորեմի գելֆանդյան տարբերակը, որտեղից որպես հետևանք ստացվում է սահմանափակ նորմալ օպերատորների համար սպեկտրալ թեորեմը համապատասխան ֆունկցիոնալ հաշվի հետ միասին: Չորրորդ գլուխը նվիրված է ոչ կոմուտատիվ B^*– հանրահաշիվներին: Նրանում ապացուցվում են Բոխների թեորեմի աբստրակտ տարբերակը և ոչ կոմուտատիվ B^*– հանրահաշիվները բնութագրող Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմը:

Ձեռնարկում ընդգրկված են նաև վերջերս ստացված որոշ արդյունքներ: Դրանց մի մասի համար տրված են սխեմատիկ ապացույցներ, որոնք տեքստում բերված են մանր տառատեսակով:

Գիրքը մատչելի է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությամբ բարձր կուրսի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ասպիրանտների, գիտաշխատողների և դասավանդողների համար:

Գլուխ 1
ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

§ 1.1. Կոմպլեքս հանրահաշիվներ

Սահմանում 1.1.1: Դիցուք P–ն որևէ դաշտ է, իսկ A–ն P-ի նկատմամբ գծային տարածություն է: Կասենք A–ն P–ի նկատմամբ հանրահաշիվ է, եթե A–ում ներմուծված է ևս մեկ հանրահաշվական գործողություն՝ արտադրյալ, որը բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին (աքսիոմներին).

1) $(xy)z = x(yz) \quad (\forall x, y, z \in A)$,

2) $x(y+z) = xy + xz,\ (y+z)x = yx + zx \quad (\forall x, y, z \in A)$,

3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad (\forall x, y \in A,\ \forall \alpha \in P)$:

Երբ բավարարվում է նաև

4) $\exists e \in A$, որ $ex = xe = x \quad (\forall x \in A)$,

պայմանը, A–ն կոչվում է միավորով հանրահաշիվ, իսկ e–ն՝ նրա միավոր: Եթե 1) – 3) պայմանների հետ միասին բավարարվում է

5) $xy = yx \quad (\forall x, y \in A)$,

պայմանը, ապա A հանրահաշիվը կոչվում է կոմուտատիվ:

Նկատենք, որ հանրահաշիվը կարող է ունենալ մեկից ոչ ավելի թվով միավոր: Իրոք, եթե հանրահաշվի e և e' էլեմենտները միավորներ են, ապա $ee' = e'e = e'$, $e'e = ee' = e$ և, հետևաբար, $e = e'$:

Դիցուք A–ն հանրահաշիվ է: Հետևյալ կանոնական ընդլայնումը թույլ է տալիս A–ն լրացնել միավորով, այսինքն ներդնել ինչ–որ A' միավորով հանրահաշվի մեջ: Նշանակենք

$$A' = \{(x, \alpha) :\ x \in A,\ \alpha \in P\} = A \times P$$

և $(x, \alpha), (y, \beta) \in A'$ և $\lambda \in P$ համար սահմանենք

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta),$$

$$\lambda(x, \alpha) = (\lambda x, \lambda \alpha),$$

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) :$$

Հեշտ է ստուգել, որ այդ դեպքում A'–ի համար կբավարարվեն գծային տարածության աքսիոմները և հանրահաշվի 1)-3) աքսիոմները, ինչպես նաև 4) աքսիոմը, որում միավորի դերը կատարում է $(0,1)$ էլեմենտը: $x \mapsto (x,0)$ արտապատկերմամբ A–ն իզոմորֆ արտապատկերվում է A'–ի ինչ–որ ենթատարածության վրա: $x \in A$ էլեմենտը նույնացնելով $(x,0) \in A'$ էլեմենտի հետ՝ կարող ենք համարել, որ $A \subset A'$: Եթե A հանրահաշիվը կոմուտատիվ է, ապա A'–ը նույնպես կլինի կոմուտատիվ:

Հանրահաշիվը և նրա ենթահանրահաշիվը կարող են ունենալ տարբեր միավորներ: Օրինակ, e միավորով A հանրահաշվի դեպքում A' հանրահաշվի միավորն է $(0,1)$ էլեմենտը, իսկ նրա $\{(x,0) : x \in A\}$ ենթահանրահաշվի միավորն է $(e,0)$ էլեմենտը: Հետագայում, խոսելով միավորով հանրահաշվի միավոր ունեցող ենթահանրահաշվի մասին, կենթադրենք, որ ենթահանրահաշվի միավորը համընկնում է հանրահաշվի միավորի հետ:

Մենք հիմնականում կդիտարկենք այն դեպքը, երբ $P = \mathbb{C}$: Այդ դեպքում A հանրահաշիվը կոչվում է կոմպլեքս հանրահաշիվ:

Հանրահաշվում որպես M և G ենթատարածությունների MG արտադրյալ կհամարենք հետևյալ բազմությունը.

$$MG = \{xy : x \in M,\ y \in G :\}$$

Սահմանում 1.1.2: $J \subset A$ ենթատարածությունը կոչվում է ձախ (աջ) իդեալ, եթե $AJ \subset J$ $(JA \subset J)$:

J–ն կոչվում է երկկողմանի իդեալ (կամ, պարզապես, իդեալ), եթե այն և՛ ձախ, և՛ աջ իդեալ է:

J իդեալը կոչվում է սեփական, եթե $J \neq \{0\}$ և $J \neq A$:

J սեփական իդեալը կոչվում է մաքսիմալ, եթե գոյություն չունի J–ն պարունակող և J–ից տարբեր սեփական իդեալ:

Օրինակներ:

1) Եթե $\mathbb{C}^N$–ում երկու $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$, $z' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_N)$ վեկտորների արտադրյալը սահմանենք

$$zz' = \left(z_1 z'_1, z_2 z'_2, \ldots, z_N z'_N\right)$$

բանաձևով, ապա $\mathbb{C}^N$-ը կդառնա միավորով կոմուտատիվ հանրահաշիվ (միավորն է $e = (1, 1, \ldots, 1)$ վեկտորը):

2) Դիտարկենք $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{C})$ տարածությունը, որը բաղկացած է բոլոր $z = (z_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ սահմանափակ հաջորդականություններից: ℓ^∞–ի երկու $z = (z_k)_{k=1}^\infty$, $z' = (z'_k)_{k=1}^\infty$ էլեմենտների և $\alpha \in \mathbb{C}$ թվի համար սահմանենք

$$z + z' = \big(z_k + z'_k\big)_{k=1}^\infty , \quad \alpha z = (\alpha z_k)_{k=1}^\infty , \quad zz' = \big(z_k z'_k\big)_{k=1}^\infty :$$

Այդ դեպքում ℓ^∞–ը կդառնա միավորով կոմուտատիվ հանրահաշիվ, որում e միավորի դերը կատարում է այն հաջորդականությունը, որի բոլոր անդամները 1 են: Այս օրինակում գործ ունենք անվերջ չափանի հանրահաշվի հետ:

3) X գծային տարածությունում գործող բոլոր գծային օպերատորների $L(X)$ բազմությունը կդառնա միավորով հանրահաշիվ, եթե նրանում T, S օպերատորների արտադրյալը սահմանենք

$$(TS)(x) = T(Sx)$$

բանաձևով (միավորը նույնական արտապատկերումն է):

4) X բանախյան տարածություն գործող բոլոր գծային սահմանափակ օպերատորների $BL(X)$ բազմությունը միավորով կոմպլեքս հանրահաշիվ է: Բազմաչափ X-ի դեպքում $BL(X)$ հանրահաշիվը կոմուտատիվ չէ, ընդ որում, երբ X–ը անվերջ չափանի է, $BL(X)$–ը նույնպես անվերջ չափանի է:

Անվերջ չափանի սեպարաբել X հիլբերտյան տարածության դեպքում $BL(X)$–ը որպես օպերատորային նորմով բանախյան տարածություն սեպարաբել չէ: Իրոք, X–ն իզոմետրիկորեն իզոմորֆ է $L^2(0,1)$–ին, ուստի $BL(X)$–ը իզոմետրիկորեն իզոմորֆ կլինի $BL\left(L^2(0,1)\right)$–ին և մնում է ապացուցել, որ $BL\left(L^2(0,1)\right)$–ը սեպարաբել չէ: Ցույց տանք, որ $\forall\, M \subset BL\left(L^2(0,1)\right)$ ամենուրեք խիտ ենթաբազմության հզորությունը փոքր չէ կոնտինուումի հզորությունից: $t \in (0,1)$ համար $P_t \in BL\left(L^2(0,1)\right)$ օպերատորը սահմանենք

$$(P_t f)(x) = \chi_{(0,t)}(x) f(x) \quad \left(f \in L^2(0,1)\right)$$

բանաձևով ($\chi_{(0,t)}$–ն $(0,t)$ միջակայքի բնութագրիչ ֆունկցիան է)։ $0 < t_1 < t_2 < 1$ համար ունենք $(P_{t_2} - P_{t_1})\, f\,(x) = \chi_{(t_1,t_2)}(x) f(x)$, ուստի $\|(P_{t_2} - P_{t_1})\, f\| \leqslant \|f\|$ $\big(f \in L^2(0,1)\big)$ և, հետևաբար, $\|P_{t_2} - P_{t_1}\| \leqslant 1$։ Մյուս կողմից,

$$\|P_{t_2} - P_{t_1}\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|(P_{t_2} - P_{t_1})\, f\| \geqslant \left\|(P_{t_2} - P_{t_1})\, \frac{\chi_{(t_1,t_2)}}{\sqrt{t_2 - t_1}}\right\| = 1:$$

Այսպիսով, $t_1, t_2 \in (0,1)$, $t_1 \neq t_2$ դեպքում $\|P_{t_2} - P_{t_1}\| = 1$։ $\forall t \in (0,1)$ համար $\exists Q = Q_t \in M$, որ $\|P_t - Q_t\| < \dfrac{1}{2}$։ $t_1 \neq t_2$ դեպքում ունենք

$$\|Q_{t_2} - Q_{t_1}\| = \|(P_{t_2} - P_{t_1}) - (P_{t_2} - Q_{t_2} + Q_{t_1} - P_{t_1})\| \geqslant$$
$$\geqslant \|P_{t_2} - P_{t_1}\| - \|P_{t_2} - Q_{t_2} + Q_{t_1} - P_{t_1}\| \geqslant$$
$$\geqslant \|P_{t_2} - P_{t_1}\| - \|P_{t_2} - Q_{t_2}\| - \|Q_{t_1} - P_{t_1}\| > 0,$$

ուստի $Q_{t_1} \neq Q_{t_2}$։ Ապացուցվեց, որ $t \mapsto Q_t$ արտապատկերումը $(0,1)$ միջակայքը փոխմիարժեք արտապատկերում է M–ի մեջ և, հետևաբար, M–ի հզորությունը փոքր չէ կոնտինուումի հզորությունից։

5) Դիցուք X–ը լոկալ կոմպակտ տոպոլոգիական տարածություն է (այսինքն $\forall\, x \in X$ կետ ունի հարաբերական կոմպակտ շրջակայք)։ $C_b(X)$–ով նշանակենք բոլոր $f : X \to \mathbb{C}$ սահմանափակ և անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը։ $C_b(X)$–ը միավորով կոմպլեքս հանրահաշիվ է (միավորը նույնաբար 1 ֆունկցիան է), ինչպես նաև բանախյան տարածություն է, որում $f \in C_b(X)$ ֆունկցիայի նորմն է

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|:$$

Նշանակենք $C_0(X)$–ով բոլոր այն $f \in C_b(X)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որ $\forall\, \varepsilon > 0$ համար $\exists\, K_\varepsilon \subset X$ կոմպակտ, այնպես, որ

$$|f(x)| < \varepsilon \quad (x \in X \setminus K_\varepsilon):$$

$C_0(X)$–ի ֆունկցիաներին անվանում են ∞–ում անհետացող (0–ի ձգտող) ֆունկցիաներ։ Սա $C_b(X)$–ում փակ երկկողմանի իդեալ է։ Երբ X–ը կոմպակտ չէ, $C_0(X)$–ը միավոր չունի։

Նշանակենք $C_{00}(X)$–ով (կամ $C_c(X)$–ով) բոլոր այն $f \in C_b(X)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : \; f(x) \neq 0\}}$$

կրիչը կոմպակտ է: Պարզվում է (ինչն ակնհայտ չէ), որ

$$\overline{C_{00}(X)} = C_0(X) :$$

Այն դեպքում, երբ X–ը կոմպակտ է, կունենանք

$$C_{00}(X) = C_0(X) = C_b(X) = C(X),$$

որտեղ $C(X)$–ը բոլոր $f : X \to \mathbb{C}$ անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունն է:

6) Դիցուք E–ն որևէ բազմություն է, իսկ X–ը P դաշտի նկատմամբ հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում

$$J(E, X) = \{f : \; E \to X\}$$

արտապատկերումների բազմությունը կլինի P դաշտի նկատմամբ հանրահաշիվ, եթե $f_1, f_2, \in J(E, X)$, $\alpha \in P$ համար սահմանենք

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x),$$

$$(\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x) :$$

Երբ X-ում կա e միավոր, $J(E, X)$-ը նույնպես ունի միավոր և միավորի դերը կատարում է $f(x) \equiv e$ արտապատկերումը:

Այժմ բերենք իդեալների օրինակներ:

1) Դիցուք X–ը բանախյան տարածություն է: Այդ դեպքում $K(X)$ կոմպակտ գծային օպերատորների բազմությունը $BL(X)$–ի փակ երկկողմանի իդեալ է:

2) Դիտարկենք K կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիաների $C(K)$ տարածությունը (որը, ինչպես արդեն նշվեց, կոմուտատիվ հանրահաշիվ է): Դիցուք $E \subset K$: Նշանակենք

$$J_E = \{f \in C(K) : \; f(x) = 0, \; x \in E\} :$$

Պարզ է, որ J_E–ն իդեալ է (կոմուտատիվության առկայության շնոր– հիվ ավելորդ է խոսել աջ կամ ձախ իդեալների մասին. դրանք համ– ընկնում են): Պարզվում է, որ $C(K)$–ում բոլոր մաքսիմալ իդեալներն ունեն $J_{\{x_0\}}$ տեսքը, որտեղ $x_0 \in K$: Այս պնդումը մենք կապացու– ցենք հետագայում (տես՝ § 2.1, օրինակ 1):

Սահմանում 1.1.3: $x \in A$ էլեմենտը կոչվում է հակադարձելի ձախից (աջից), եթե գոյություն ունի այնպիսի $y \in A$, որ $yx = e$ ($xy = e$): Այդպիսի ամեն մի y էլեմենտ կոչվում է x–ի ձախ (աջ) հակադարձ:

Սահմանում 1.1.4: $x \in A$ էլեմենտը կոչվում է հակադարձելի, եթե գոյություն ունի այնպիսի $y \in A$, որ $xy = yx = e$: Այդպիսի y–ը կոչվում է x–ի հակադարձ և նշանակվում է x^{-1}-ով:

Միաժամանակ ձախից և աջից հակադարձելի էլեմենտը հա– կադարձելի է և նրա միակողմանի հակադարձերը համընկնում են: Իրոք, եթե $yx = e = xz$, ապա

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z :$$

Այստեղից բխում է, որ ոչ մի $x \in A$ էլեմենտ չի կարող ունենալ մեկից ավելի թվով հակադարձ (այսինքն՝ այնպիսի z, որ $xz = zx = e$): A հանրահաշվի բոլոր հակադարձելի էլեմենտների բազմու– թյունը կնշանակենք A^{-1}–ով: Պարզ է, որ $e \in A^{-1}$:

Նկատենք, որ միայն մի կողմից հակադարձելի էլեմենտի միա– կողմանի հակադարձը միակը չէ: Իրոք, դիցուք $x \in A$ էլեմենտը ձախից հակադարձելի է, իսկ աջից՝ ոչ: Դիցուք y-ը x էլեմենտի որևէ ձախ հակադարձ է: Այդ դեպքում հեշտ է ստուգել, որ ցանկացած $\lambda \in \mathbb{C}$ համար $y_\lambda = y + \lambda(e - xy)$ էլեմենտը ևս կլինի x-ի ձախ հակադարձ: Քանի որ $xy \neq e$, ուստի $\lambda_1 \neq \lambda_2$ դեպքում $y_{\lambda_1} \neq y_{\lambda_2}$:

§ 1.2. Բանախյան հանրահաշիվներ

Սահմանում 1.2.1: e միավորով A կոմպլեքս հանրահաշվում ներ– մուծված նորմը կոչվում է հանրահաշվական, եթե

1) $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad (\forall x, y \in A)$,

2) $\|e\| = 1$:

Սահմանում 1.2.2: Միավորով A հանրահաշիվը՝ նրանում ներմուծված հանրահաշվական նորմի հետ միասին կոչվում է նորմավորված հանրահաշիվ: Եթե A–ն նաև լրիվ է, ապա այն կոչվում է բանախյան (կամ Բանախի) հանրահաշիվ:

Դիցուք A հանրահաշվում ներմուծված նորմը բավարարում է

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

պայմանին: Կառուցենք նախորդ պարագրաֆում նշված A' ընդլայնումը և $(x, \alpha) \in A'$ համար սահմանենք

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| :$$

Հեշտ է տեսնել, որ A'–ը կհանդիսանա նորմավորված հանրահաշիվ: $x \mapsto (x, 0)$ արտապատկերումը A–ն իզոմետրիկորեն կարտապատկերի A'–ի փակ երկկողմանի իդեալի վրա, ընդ որում, եթե A–ն լրիվ է, ապա A'–ը (հետևաբար, նաև այդ իդեալը) կլինի լրիվ:

Այսպիսով, e միավորի գոյության և $\|e\| = 1$ պահանջները չեն հանգեցնում ընդհանրության մեծ կորստի և հետագայում դրանք կհամարենք բավարարված:

Բերենք բանախյան հանրահաշիվների օրինակներ: Ինչպես կտեսնենք, նախորդ պարագրաֆում դիտարկված կոմպլեքս հանրահաշիվներից շատերը բանախյան հանրահաշիվներ են: Այդ օրինակներում նորմի աքսիոմները ստուգվում են հեշտությամբ:

Օրինակներ:

1) $\mathbb{C}^N$-ը վերջավոր չափանի կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, որում $z = (z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_N) \in \mathbb{C}^N$ վեկտորի նորմն է

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |z_i| :$$

2) ℓ^∞-ը անվերջ չափանի կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, որում $z = (z_k)_{k=1}^\infty$ էլեմենտի նորմն է

$$\|z\| = \sup_k |z_k| :$$

3) X բանախյան տարածություն գործող բոլոր գծային սահմանափակ օպերատորների $BL(X)$ բազմությունը օպերատորային

նորմի նկատմամբ բանախյան հանրահաշիվ է: Ինչպես նշվեց նախորդ պարագրաֆում, բազմաչափ դեպքում այս հանրահաշիվը միավորով ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվ է, ընդ որում, եթե X–ն անվերջ չափանի սեպարաբել հիլբերտյան տարածություն է, ապա $BL(X)$–ն անվերջ չափանի ոչ սեպարաբել բանախյան տարածություն է:

4) Դիցուք X–ը լոկալ կոմպակտ տոպոլոգիական տարածություն է: Սահմանենք

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| \quad (f \in C_b(X)) :$$

Հեշտ է ստուգել, որ $C_b(X)$–ը բանախյան հանրահաշիվ է:

Երբ X–ը կոմպակտ է, կունենանք

$$C_{00}(X) = C_0(X) = C_b(X) = C(X),$$

որտեղ $C(X)$–ը բոլոր $f : X \to \mathbb{C}$ անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունն է: Այս դեպքում կարող ենք գրել

$$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)| :$$

5) Դիտարկենք $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ բազմության համար $C(T)$ հանրահաշիվը: Նշանակենք $A(T)$-ով $C(T)$-ի բոլոր այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք թույլ են տալիս անընդհատ շարունակություն $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ փակ շրջանի վրա, որոշելով անալիտիկ ֆունկցիա $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ բաց շրջանում: Հեշտ է ստուգել, որ $A(T)$–ն կլինի $C(T)$–ի փակ ենթահանրահաշիվ և կպարունակի $C(T)$–ի միավորը: Երբեմն $A(T)$–ին անվանում են դիսկ հանրահաշիվ: $f \in C(T)$ համար սահմանենք

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ

$$A(T) = \left\{f \in C(T) : \quad \hat{f}(n) = 0 \quad (n = -1, -2, \ldots)\right\} :$$

Բացի այդ, պարզվում է, որ $A(T)$–ն $C(T)$–ում չլրացվող ենթապարածություն է, այսինքն՝ գոյություն չունի այնպիսի $L \subset C(T)$ փակ ենթապարածություն, որ

$$C(T) = A(T) \oplus L\,:$$

Այն, որ $A(T) \neq C(T)$, ակնհայտ է, որովհետև $C(T)$–ին պատկանող $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ֆունկցիան չի պատկանում $A(T)$–ին:

Սահմանում 1.2.3: A կոմպլեքս հանրահաշիվը կոչվում է տոպոլոգիական հանրահաշիվ, եթե A–ն միաժամանակ հանդիսանում է տոպոլոգիական պարածություն և A-ում սահմանված գործողությունները անընդհատ են:

Բանախյան հանրահաշիվները հանդիսանում են տոպոլոգիական հանրահաշիվների մասնավոր դեպք: Ուստի վերը դիտարկված օրինակներում բերված հանրահաշիվները տոպոլոգիական են: Բերենք տոպոլոգիական հարահաշվի ևս մի կարևոր օրինակ:

Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է: Ω–ի վրա հոլոմորֆ ֆունկցիաների $H(\Omega)$ բազմությունն ակնհայտորեն կոմուտատիվ կոմպլեքս հանրահաշիվ է: $H(\Omega)$–ն կարելի է դարձնել տոպոլոգիական հանրահաշիվ հետևյալ կերպ: Վերցնենք Ω–ի որևէ $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ կոմպակտ սպառում, այսինքն՝ կոմպակտ բազմությունների հաջորդականություն, որն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

ա) $K_n \subset int\, K_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

բ) $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$:

$\Omega \neq \mathbb{C}$ դեպքում որպես K_n կարելի է վերցնել, օրինակ,

$$K_n = \left\{ x \in \Omega : \, |x| \leqslant n, \, \rho(x, \partial\Omega) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

բազմությունները, իսկ $\Omega = \mathbb{C}$ դեպքում կարելի է վերցնել $K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n\}$:

$p_n : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ կիսանորմերը սահմանենք

$$p_n(f) = \max_{z \in K_n} |f(z)| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

բանաձևերով: $f, g \in H(\Omega)$ համար սահմանենք

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)},$$

որտեղ a_n–երը որևէ դրական թվեր են, որոնց համար $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (օրինակ, կարելի է վերցնել $a_n = 2^{-n}$): Այդ դեպքում ρ–ն կլինի մետրիկա $H(\Omega)$–ում, ընդ որում $f_n \xrightarrow{\rho} f$ կնշանակի, որ Ω–ի ներսում $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$: Դեշտ է պեսնել, որ $(H(\Omega), \rho)$–ն կլինի տոպոլոգիական հանրահաշիվ:

§ 1.3. Էքսպոնենտ

$\forall x \in A$ համար սահմանենք

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(e^x - ը նշանակում է e թվի x աստիճանը, ոչ թե A հանրահաշվի e միավորի x աստիճանը): Վերը գրված շարքը զուգամետ է, քանի որ զուգամետ է նրա անդամների նորմերից կազմված շարքը: Ընդ որում կունենանք

$$\|e^x\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{n!} = e^{\|x\|} :$$

Էքսպոնենտի հատկությունները ստանալու համար բերենք մի քանի պնդումներ:

Լեմմա 1.3.1: *Եթե $a_n \to a$, ապա*

$$s_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a :$$

Ապացույց: Ունենք

$$\|s_n - a\| = \left\| \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} - a \right\| =$$

$$= \frac{\|(a_0 - a) + (a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)\|}{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|a_0 - a\| + \|a_1 - a\| + \cdots + \|a_n - a\|}{n+1} \ :$$

Վերցնենք $\forall \varepsilon > 0$ թիվ: N_1–ը ընտրենք այնպես, որ

$$\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N_1) :$$

Այդ դեպքում $n > N_1$ համար կունենանք

$$\|s_n - a\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|a_k - a\| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1+1}^{n} \|a_k - a\| < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \cdot (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| + \frac{\varepsilon}{2} \ :$$

Ունենք $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ուստի $N > N_1$ կարելի է ընտրել այնքան մեծ, որ

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N) :$$

Այդ դեպքում $n > N$ համար կունենանք

$$\|s_n - a\| < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.3.2: *Եթե $a_n \to a$, $b_n \to b$, ապա*

$$\sigma_n = \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab :$$

Ապացույց: Ունենք

$$\sigma_n = \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n+1} +$$

$$+ \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} \cdot b = x_n + y_n :$$

Նախորդ լեմմայից բխում է, որ $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$: Մնում է ցույց տալ, որ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: Քանի որ a_n–ը զուգամետ է, ուստի սահմանափակ է՝ $\exists M > 0$, որ

$$\|a_k\| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots) :$$

Ուստի

$$\|x_n\| \leqslant \frac{\|a_0(b_n - b)\| + \|a_1(b_{n-1} - b)\| + \cdots + \|a_n(b_0 - b)\|}{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|a_0\| \cdot \|b_n - b\| + \|a_1\| \cdot \|b_{n-1} - b\| + \cdots + \|a_n\| \cdot \|b_0 - b\|}{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{\|b_n - b\| + \|b_{n-1} - b\| + \cdots + \|b_0 - b\|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

որտեղ վերջին քայլը բխում է $\|b_n - b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ առնչությունից և նախորդ լեմմայից (որում կվերցնենք $A = \mathbb{C}$, $a_n = \|b_n - b\|$): Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 1.3.1: Դիցուք ունենք 2 շարքեր՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k + \cdots \tag{1.3.1}$$

և

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_k + \cdots \ : \tag{1.3.2}$$

Ելնելով դրանցից կազմենք

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_k + \cdots \qquad (1.3.3)$$

շարքը, որտեղ

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 :$$

(1.3.3)–ը կոչվում է (1.3.1) և (1.3.2) շարքերի Կոշու արտադրյալ:

Աբելի թեորեմը: *Դիցուք* (1.3.1), (1.3.2) *շարքերը և նրանց* (1.3.3) *Կոշու արտադրյալը զուգամետ են և*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad q = \sum_{k=0}^{\infty} c_k :$$

Այդ դեպքում

$$q = s \cdot p :$$

Ապացույց: Նշանակենք

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_n,$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_n, :$$

Ունենք

$$q_n = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) =$$

$$= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_0 =$$

$$= a_0 p_n + a_1 p_{n-1} + \cdots + a_n p_0 :$$

Նշանակենք

$$r_n = \frac{q_0 + q_1 + \cdots + q_n}{n+1} :$$

Կունենանք

$$r_n = \frac{a_0p_0 + (a_0p_1 + a_1p_0) + \cdots + (a_0p_n + a_1p_{n-1} + \cdots + a_np_0)}{n+1} =$$

$$= \frac{(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)p_0 + (a_0 + \cdots + a_{n-1})p_1 + \cdots + a_0p_n}{n+1} =$$

$$= \frac{s_np_0 + s_{n-1}p_1 + \cdots + s_0p_n}{n+1} = \frac{s_0p_n + s_1p_{n-1} + \cdots + s_np_0}{n+1} :$$

Այսպիսով՝

$$\frac{q_0 + q_1 + \cdots + q_n}{n+1} = \frac{s_0p_n + s_1p_{n-1} + \cdots + s_np_0}{n+1} : \qquad (1.3.4)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Ըստ պայմանի՝ $s_n \to s$, $p_n \to p$, $q_n \to q$: (1.3.4) հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ $n \to \infty$: Ըստ 1.3.1 լեմմայի՝ (1.3.4)-ի ձախ մասը կձգտի q–ին: Ըստ 1.3.2 լեմմայի՝ (1.3.4)–ի աջ մասը կձգտի $s \cdot p$–ին: Ուստի

$$q = sp :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ վերադառնանք էքսպոնենտի հատկությունների ուսումնասիրությանը: Դիցուք $a, b \in A$ էլեմենտները տեղափոխելի են՝

$$ab = ba :$$

Դիտարկենք

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} , \quad e^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}$$

շարքերը և հաշվենք նրանց Կոշու արտադրյալը՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_k + \cdots ,$$

որտեղ

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k}=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^kb^{n-k}\ ,$$

և օգտվելով նրանից, որ $\forall a,b\in A$ տեղափոխելի էլեմենտների համար տեղի ունի

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^kb^{n-k}$$

Նյուտոնի բինոմի բանաձևը (այն հիմնավորելու համար կարելի է կիրառել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը n բնական ցուցիչի նկատմամբ), կստանանք

$$c_n=\frac{(a+b)^n}{n!}\ :$$

Այսպիսով, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$ և $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!}$ շարքերի Կոշու արտադրյալը $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$ շարքն է, ուստի ըստ Աբելի թեորեմի՝

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}\ ,$$

$$e^a\cdot e^b=e^{a+b}\ : \tag{1.3.5}$$

Ապացուցվեց, որ $\forall a,b\in A$ տեղափոխելի էլեմենտների համար տեղի ունի (1.3.5)-ը: (1.3.5)–ում վերցնելով $a=x$, $b=-x$ և $a=-x$, $b=x$, կստանանք

$$e^x\cdot e^{-x}=e^{-x}\cdot e^x=e^0,$$

և քանի որ $e^0 = \exp(0) = e_A$, ուստի $\forall x \in A$ համար $e^x \in A^{-1}$, ընդ որում

$$\left(e^x\right)^{-1} = e^{-x} :$$

Նշենք, որ $\exp(A) = \{\exp(a) : \ a \in A\}$ բազմությունը հանդիսանում է A^{-1}–ի կարևոր ենթաբազմություն:

§ 1.4. Կոմպլեքս հոմոմորֆիզմներ

Սահմանում 1.4.1: Դիցուք A, B–ն կոմպլեքս հանրահաշիվներ են: $\varphi : A \to B$ արտապատկերումը կոչվում է հոմոմորֆիզմ, եթե այն գծային է և

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (\forall x, y \in A) :$$

Եթե $B = \mathbb{C}$, ապա հոմոմորֆիզմը կանվանենք կոմպլեքս հոմոմոր–ֆիզմ:

Լեմմա 1.4.1: *Դիցուք A–ն e միավորով կոմպլեքս հանրահաշիվ է: $\varphi : A \to \mathbb{C}$ նույնաբար 0–ից տարբեր կոմպլեքս հոմոմորֆիզ–մի համար*

$$\varphi(e) = 1, \quad \varphi(x) \neq 0 \quad \left(x \in A^{-1}\right) :$$

Ապացույց: $\exists x_0 \in A$, որ $\varphi(x_0) \neq 0$: Ունենք՝

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0 e) = \varphi(x_0)\varphi(e),$$

$$\varphi(x_0) \cdot [\varphi(e) - 1] = 0 :$$

Այստեղից ստանում ենք

$$\varphi(e) = 1 :$$

$\forall x \in A^{-1}$ համար

$$\varphi(x)\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi\left(xx^{-1}\right) = \varphi(e) = 1,$$

ուստի

$$\varphi(x) \neq 0 \quad (x \in A^{-1}) :$$

Լեմման ապացուցված է:

$\varphi : A \to \mathbb{C}$ հոմոմորֆիզմներին հաճախ անվանում են մուլտիպ–լիկատիվ ֆունկցիոնալներ:

Լեմմա 1.4.2: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$ և $\|x\| < 1$: Այդ դեպքում՝*

1) $\exists (e-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *(Նեյմանի շարք),*

2) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leqslant \dfrac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$,

3) $\forall \varphi : A \to \mathbb{C}$ *մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալի համար* $|\varphi(x)| < 1$*:*

Ապացույց: Նշանակենք

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k :$$

Ունենք

$$\|s_{n+m} - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x^k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \left\| x^k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \|x\|^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x\|^k$$

Քանի, որ $\|x\| < 1$, ուստի $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x\|^n < \infty$ և հետևաբար՝

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x\|^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

որտեղից կբխի, որ $\{s_n\}_1^\infty$ հաջորդականությունը A–ում ֆունդամենտալ է: A–ի լրիվության շնորհիվ՝ գոյություն ունի

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

սահմանը: Ցույց տանք, որ $s = (e-x)^{-1}$: Ունենք

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1}, \quad (e-x)s_n = e - x^{n+1},$$

որտեղ անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$ և հաշվի առնելով, որ $x^{n+1} \to 0$ (չէ՛ որ $\|x^{n+1}\| \leqslant \|x\|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), կստանանք

$$s(e-x) = (e-x)s = e,$$

ուստի $\exists (e-x)^{-1} = s$:

Լեմմայի 2) պնդումը բխում է 1)–ից՝

$$\|(e-x)^{-1} - e - x\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} x^n \right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|x^n\| = \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|} :$$

Ցույց տանք 3)–ը: Դրա համար ցույց տանք, որ

$$\varphi(x) \neq \lambda \quad (|\lambda| \geqslant 1) :$$

Իրոք, ըստ 1) պնդման՝ $e - \lambda^{-1}x \in A^{-1}$, ուստի ըստ նախորդ լեմմայի՝

$$\varphi\left(e - \lambda^{-1}x\right) = 1 - \lambda^{-1}\varphi(x) \neq 0,$$

$$\varphi(x) \neq \lambda :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.4.3: $\forall \varphi : A \to \mathbb{C}$ *մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ՝ որոշված* A *բանախյան հանրահաշվի վրա, անընդհատ է, ընդ որում* $\varphi \neq 0$ *դեպքում* $\|\varphi\| = 1$*:*

Ապացույց: Վերցնենք $\forall x \in A$ և ցույց տանք, որ

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x\| :$$

$x = 0$ դեպքում դա ակնհայտ է: Դիցուք $x \neq 0$: Վերցնենք կամայական $\lambda \in (0,\, 1)$ թիվ և նշանակենք $y = \lambda \dfrac{x}{\|x\|}$: Ունենք $\|y\| < 1$, ուստի ըստ նախորդ լեմմայի 3) կեփի՝

$$|\varphi(y)| < 1,$$

$$\left| \varphi\left(\frac{\lambda}{\|x\|}\, x \right) \right| < 1,$$

$$|\varphi(x)| < \lambda^{-1}\|x\|,$$

որտեղ անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 1-0$, կստանանք

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x\| :$$

Այստեղից բխում է, որ φ–ն սահմանափակ է և $\|\varphi\| \leqslant 1$: $\varphi \neq 0$ դեպքում 1.4.1 լեմմայից կբխի, որ $\varphi(e) = 1$, ուստի

$$1 \geqslant \|\varphi\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\varphi| \geqslant |\varphi(e)| = 1$$

և հետևաբար՝ $\|\varphi\| = 1$:
Լեմման ապացուցված է:

Պարզվում է, որ բանախյան հանրահաշիվների դեպքում 1.4.1 լեմման լիովին բնութագրում է մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալները (թեորեմ 1.4.1): Դա ցույց տալու նպատակով նախ ապացուցենք երկու լեմմա:

Լեմմա 1.4.4: *Դիցուք f-ն այնպիսի ամբողջ ֆունկցիա է, որ*

$$\operatorname{Re} f(z) \leqslant K|z|^N \quad (|z| > K), \tag{1.4.1}$$

որտեղ $K > 0$ և $N \in \mathbb{N}$ հաստատուններ են: Այդ դեպքում f-ը բազմանդամ է, որի կարգը չի գերազանցում N-ը:

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $f(0) = 0$ (հակառակ դեպքում $f(z)$-ի փոխարեն կարող ենք դիտարկել $f(z) - f(0)$ ֆունկցիան): Դիցուք

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \tag{1.4.2}$$

Կունենանք

$$\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\operatorname{Re} a_k \cos k\theta - \operatorname{Im} a_k \sin k\theta\right),$$
$$(r > 0,\ \theta \in [0,\ 2\pi])$$

որտեղից

$$\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right)\cos n\theta = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\operatorname{Re} a_k \cos k\theta \cos n\theta - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Im} a_k \sin k\theta \cos n\theta\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{1.4.3}$$

$$\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right)\sin n\theta = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\operatorname{Re} a_k \cos k\theta \sin n\theta - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Im} a_k \sin k\theta \sin n\theta\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots): \tag{1.4.4}$$

Քանի որ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|\, r^k < \infty$, ուստի (1.4.3), (1.4.4) շարքերը $[0,\ 2\pi]$-ում ըստ θ-ի հավասարաչափ զուգամետ են: (1.4.3)-ի և (1.4.4)-ի երկու կողմն ըստ θ-ի ինտեգրենք 0-ից 2π: Հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ աջ մասերում գրված շարքերը կարելի է ինտեգրել անդամ առ անդամ: Հաշվի առնելով, որ

$$\int_0^{2\pi} \cos k\theta \cos n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin k\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} \pi,\ \ k = n, \\ 0,\ \ k \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\theta \sin n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin k\theta d\theta = 0,$$

կստանանք

$$\operatorname{Re} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) \cos n\theta d\theta \quad \left(n \in \mathbb{N}\right),$$

$$\operatorname{Im} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) \sin n\theta d\theta \quad \left(n \in \mathbb{N}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 0 :$$

Ուստի

$$|\operatorname{Re} a_n| = \pm \operatorname{Re} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta \pm$$

$$\pm \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) \cos n\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) (1 \pm \cos n\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\pi} r^{N-n} \int_0^{2\pi} (1 \pm \cos n\theta)\, d\theta = 2Kr^{N-n},$$

$$|\operatorname{Re} a_n| \leqslant 2Kr^{N-n} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.4.5}$$

և նմանապես՝

$$|\operatorname{Im} a_n| = \pm \operatorname{Im} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta \pm$$

$$\pm \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) \sin n\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) (1 \pm \sin n\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\pi} r^{N-n} \int_0^{2\pi} (1 \pm \sin n\theta)\, d\theta = 2Kr^{N-n},$$

$$|\mathrm{Im}\, a_n| \leqslant 2Kr^{N-n} \quad (n \in \mathbb{N}) : \tag{1.4.6}$$

$n > N$ դեպքում (1.4.5)-ում և (1.4.6)-ում անցնելով սահմանի, երբ $r \to \infty$, կստանանք $\mathrm{Re}\, a_n = \mathrm{Im}\, a_n = 0$, որտեղից և (1.4.2)-ից կբխի, որ $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^k$:
Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.4.5: *Եթե f ամբողջ ֆունկցիան բավարարում է*

$$f(0) = 1, \tag{1.4.7}$$

$$f'(0) = 0, \tag{1.4.8}$$

$$0 < |f(z)| \leqslant e^{|z|} \tag{1.4.9}$$

պայմաններին, ապա $f(z) \equiv 1$:

Ապացույց: Քանի որ f-ը զրոներ չունի, ուստի գոյություն ունի $\ln f(z)$-ի միարժեք ռեգուլյար ճյուղ, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի g ամբողջ ֆունկցիա, որ

$$f(z) = e^{g(z)} : \tag{1.4.10}$$

(1.4.9)-ից և (1.4.10)-ից ունենք

$$\mathrm{Re}\, g(z) = \ln |f(z)| \leqslant |z| \quad (z \in \mathbb{C}),$$

որտեղից և 1.4.4 լեմմայից բխում է, որ g-ն գծային ֆունկցիա է՝

$$g(z) = az + b \quad (z \in \mathbb{C}) : \tag{1.4.11}$$

(1.4.10)-ից ունենք

$$f'(z) = f(z)g'(z), \tag{1.4.12}$$

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} : \tag{1.4.13}$$

(1.4.8), (1.4.11), (1.4.13)-ից ստանում ենք $a = 0$: Այստեղից և (1.4.11), (1.4.12)-ից ստանում ենք, որ

$$f'(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) : \tag{1.4.14}$$

(1.4.7), (1.4.14)-ից բխում է, որ $f(z) \equiv 1$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.4.1 (Գլիսոն–Կախան–Ժելյազկո): *Եթե φ–ն e միավորով A կոմպլեքս բանախյան հանրահաշվի վրա որոշված այնպիսի գծային ֆունկցիոնալ է, որ*

$$\varphi(e)=1, \quad \varphi(x)\neq 0 \quad (x\in A^{-1}),$$

ապա

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \quad (\forall x,y\in A)$$

(նախօրոք φ–ից անընդհատություն չի պահանջվում):

Ապացույց: Դիցուք x, $y\in A$: $\varphi(e)=1$ պայմանի շնորհիվ կունենանք

$$x=a+\varphi(x)\,e, \quad y=b+\varphi(y)\,e,$$

որտեղ

$$a,\, b\in \ker(\varphi)=\{x\in A:\ \varphi(x)=0\} :$$

Ուստի

$$xy=ab+a\varphi(y)+b\varphi(x)+\varphi(x)\,\varphi(y)\,,$$

և հետևաբար՝

$$\varphi(xy)=\varphi(ab)+\varphi(x)\,\varphi(y) : \tag{1.4.15}$$

(1.4.15)-ից բխում է, որ $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y) \quad (x,\, y\in A)$ հավասարությունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ եթե $a\in\ker(\varphi)$ կամ $b\in\ker(\varphi)$, ապա $ab\in\ker(\varphi)$:

Ենթադրենք, թե ապացուցված է նշվածի հետևյալ մասնավոր դեպքը. եթե $a\in\ker(\varphi)$, ապա $a^2\in\ker(\varphi)$: (1.4.15)-ում վերցնելով $x=y$, կստանանք

$$\varphi\left(x^2\right)=\varphi^2(x) \quad (x\in A) : \tag{1.4.16}$$

(1.4.16)-ում x-ը փոխարինելով $(x+y)$-ով՝ կունենանք

$$\varphi\left((x+y)^2\right)=\varphi^2(x+y)\,,$$

$$\varphi\left(x^2+xy+yx+y^2\right)=[\varphi(x)+\varphi(y)]^2\,,$$

$$\varphi\left(x^2\right)+\varphi\left(xy+yx\right)+\varphi\left(y^2\right)=\varphi^2\left(x\right)+2\varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)+\varphi^2\left(y\right),$$

որտեղից և (1.4.16)-ից կստանանք

$$\varphi\left(xy+yx\right)=2\varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right): \tag{1.4.17}$$

(1.4.17)-ից բխում է, որ եթե $x\in\ker\left(\varphi\right)$ և $y\in A$, ապա $xy+yx\in\ker\left(\varphi\right)$:

$$\left(xy-yx\right)^2=2\left[x\left(yxy\right)+\left(yxy\right)x\right]-\left(xy+yx\right)^2$$

նույնությունից և (1.4.16)-ից բխում է, որ $xy-yx\in\ker\left(\varphi\right)$: Քանի որ

$$xy=\frac{1}{2}\left[\left(xy+yx\right)+\left(xy-yx\right)\right],\quad yx=\frac{1}{2}\left[\left(xy+yx\right)-\left(xy-yx\right)\right],$$

ուստի $xy,\ yx\in\ker\left(\varphi\right)$:

Հետագա դատողությունները շարունակելու համար նախ ցույց տանք, որ φ ֆունկցիոնալը սահմանափակ է և $\|\varphi\|\leqslant1$:

Քանի որ հակադարձելի էլեմենտների վրա φ-ն զրո չի դառնում, ուստի ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$\|e-a\|\geqslant1\quad\left(a\in\ker\left(\varphi\right)\right): \tag{1.4.18}$$

(1.4.18)-ում a-ն փոխարինելով $-\frac{a}{\lambda}$-ով, որտեղ $\lambda\neq0$, կստանանք

$$\left\|e+\frac{a}{\lambda}\right\|\geqslant1\quad\left(a\in\ker\left(\varphi\right),\ \lambda\neq0\right),$$

$$\|a+\lambda e\|\geqslant|\lambda|\quad\left(a\in\ker\left(\varphi\right),\ \lambda\neq0\right): \tag{1.4.19}$$

(1.4.19)-ն ակնհայտորեն ճիշտ է նաև $\lambda=0$ դեպքում: Քանի որ $\forall x\in A$ էլեմենտ ներկայացվում է $x=a+\varphi\left(x\right)e$ տեսքով, որտեղ $a\in\ker\left(\varphi\right)$, ուստի (1.4.19)-ից կստանանք

$$|\varphi\left(x\right)|\leqslant\|a+\varphi\left(x\right)e\|=\|x\|,$$

$$|\varphi\left(x\right)|\leqslant\|x\|\quad\left(x\in A\right),$$

ինչը ցույց է տալիս, որ φ ֆունկցիոնալը սահմանափակ է և $\|\varphi\| \leqslant 1$:

Այժմ ցույց տանք, որ եթե $a \in \ker(\varphi)$, ապա $a^2 \in \ker(\varphi)$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $\|a\| = 1$: Իրոք, եթե նշված դեպքի համար պնդումն արդեն ապացուցված է, ապա $a \neq 0$ դեպքում $\dfrac{a}{\|a\|} \in \ker(\varphi)$ առնչությունից կբխի, որ $\left(\dfrac{a}{\|a\|}\right)^2 \in \ker(\varphi)$, ուստի $a^2 \in \ker(\varphi)$, իսկ $a = 0$ դեպքում $a^2 \in \ker(\varphi)$ առնչությունն ակնհայտ է:

Դիցուք $a \in \ker(\varphi)$ և $\|a\| = 1$: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան սահմանենք

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(a^k\right)\lambda^k}{k!} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

բանաձևով: $\left|\varphi\left(a^k\right)\right| \leqslant \left\|a^k\right\| \leqslant \|a\|^k = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$ գնահատականներից բխում է, որ f-ն ամբողջ ֆունկցիա է, ընդ որում $|f(\lambda)| \leqslant e^{|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$: Բացի այդ, $f(0) = \varphi(e) = 1$, $f'(0) = \varphi(a) = 0$: φ-ի անընդհատության շնորհիվ ունենք

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(\lambda^k a^k\right)}{k!} = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k a^k}{k!}\right) = \varphi\left(e^{\lambda a}\right),$$

և քանի որ $e^{\lambda a} \in A^{-1}$, ուստի $|f(\lambda)| > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C})$: Ըստ 1.4.5 լեմմայի՝ $f(\lambda) \equiv 1$ և հետևաբար, $\varphi\left(a^2\right) = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 1.5. Անալիտիկ ֆունկցիաներ

Սահմանում 1.5.1: Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, X–ը կոմպլեքս տոպոլոգիական վեկտորական տարածություն է, իսկ $f : \Omega \to X$: Այդ դեպքում՝
1) կասենք f–ը Ω–ում թույլ անալիտիկ (հոլոմորֆ) է, եթե $\forall \Lambda \in X^*$ համար $\Lambda f \in H(\Omega)$,
2) կասենք f–ը Ω–ում ուժեղ անալիտիկ (հոլոմորֆ) է, եթե $\forall z \in \Omega$

համար գոյություն ունի

$$\lim_{\omega\to z}\frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}=f'(z)$$

սահմանը:

Դիտողություն 1.5.1: Վերը գրված $\dfrac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}$ հարաբերությունը հասկացվում է որպես $(\omega-z)^{-1}$ սկալյարի և $f(\omega)-f(z)$ վեկտորի արտադրյալ:

Նկատենք, որ

$$\frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}\xrightarrow[\omega\to z]{}a$$

առնչությունը կարելի է գրել

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}a$$

համարժեք տեսքով: Քանի որ $\forall A:\mathbb{C}\to X$ գծային օպերատոր անընդհատ է և ունի

$$Ah=ha\quad(h\in\mathbb{C})$$

տեսքը, որտեղ $a\in X$, ուստի եթե X-ը նորմավորված տարածություն է, ապա վերը գրված առնչությունը համարժեք է այնպիսի $A\in BL(\mathbb{C},X)$ օպերատորի գոյությանը, որի համար

$$\frac{\|f(z+h)-f(z)-Ah\|}{|h|}\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

ինչը նշանակում է, որ f–ը z կետում ըստ Ֆրեշեի դիֆերենցելի է: Այսպիսով, $f:\Omega\to X$ ֆունկցիայի ուժեղ անալիտիկությունը նշանակում է Ω–ի վրա ըստ Ֆրեշեի դիֆերենցելիություն: ▶

Երբեմն կօգտվենք հետևյալ նշանակումներից.

$$D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|<r\},$$

$$\overline{D}(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|\leqslant r\},$$

$$\partial D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|=r\}:$$

Թեորեմ 1.5.1: *Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, X–ը բանախյան տարածություն է, իսկ $f : \Omega \to X$: Այդ դեպքում որպեսզի f–ը Ω–ում լինի ուժեղ անալիտիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն Ω–ում լինի թույլ անալիտիկ:*

Ապացույց: Անհրաժեշտությունն ակնհայտ է:
Բավարարություն: Վերցնենք կամայական $z_0 \in \Omega$ և ցույց տանք, որ

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} :$$

Նշանակենք

$$g(h) = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h},$$

$\gamma_r = \partial D(z_0, r)$ և ընտրենք $r > 0$ այնպես, որ $\overline{D}(z_0, 2r) \subset \Omega$: Դիցուք $0 < |h| < r$: Վերցնենք կամայական $\varphi \in X^*$: Ունենք $\varphi(f(\cdot)) \in H(\Omega)$, ուստի ըստ Կոշու բանաձևի՝

$$\varphi(g(h)) = \frac{1}{h}\left[\varphi\left(f(z_0+h)\right) - \varphi\left(f(z_0)m\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))}{\xi-(z_0+h)}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))}{\xi - z_0}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_{\gamma_{2r}} \varphi(f(\xi))\left[\frac{1}{\xi-(z_0+h)} - \frac{1}{\xi-z_0}\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\cdot h}{[\xi-(z_0+h)]\,(\xi-z_0)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{[\xi-(z_0+h)]\,(\xi-z_0)} :$$

Հետևաբար $0 < |h| < r$, $0 < |h'| < r$ համար

$$\varphi(g(h)) - \varphi(g(h')) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{[\xi-(z_0+h)]\,(\xi-z_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{[\xi-(z_0+h')]\,(\xi-z_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))}{\xi-z_0}\left[\frac{1}{\xi-(z_0+h)} - \frac{1}{\xi-(z_0+h')}\right] d\xi =$$

$$= \frac{h-h'}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{(\xi-z_0)\,[\xi-(z_0+h)]\,[\xi-(z_0+h')]}\ :$$

Հետագա դատողությունները պանելու համար ցույց տանք, որ f ֆունկցիան γ_{2r}–ի վրա սահմանափակ է:

Դիտարկենք $F_z : X^* \to \mathbb{C}\ \ (z \in \gamma_{2r})$ գծային անընդհատ ֆունկ– ցիոնալների ընտանիքը, որտեղ

$$F_z(\varphi) = \varphi(f(z)) \quad (\varphi \in X^*)\ :$$

Քանի որ $\forall\varphi \in X^*$ համար $\varphi(f(z))$ ֆունկցիան, լինելով անընդհատ, γ_{2r}–ի վրա սահմանափակ է, ուստի $\forall\varphi \in X^*$ ֆունկցիոնալի համար $\{F_z(\varphi):\ z \in \gamma_{2r}\}$ ընտանիքը (որին անվանում են φ–ի օրբիտա) սահմանափակ է: Հետևաբար, ըստ Բանախ–Շտեյնհաուսի թեորեմի՝ $\{\|F_z\|:\ z \in \gamma_{2r}\}$ ընտանիքը ևս սահմանափակ է՝

$$\sup_{z\in\gamma_{2r}} \|F_z\| < \infty\ :$$

Օգտվելով

$$\|x\| = \sup_{\varphi\in X^*,\,\|\varphi\|\leqslant 1} |\varphi(x)| \tag{1.5.1}$$

բանաձևից՝ կունենանք

$$\|F_z\| = \sup_{\varphi\in X^*,\,\|\varphi\|\leqslant 1} |F_z(\varphi)| = \sup_{\varphi\in X^*,\,\|\varphi\|\leqslant 1} |\varphi(f(z))| = \|f(z)\|\,,$$

ուստի

$$\sup_{z\in\gamma_{2r}} \|f(z)\| < \infty\ :$$

Դիցուք

$$\|f(z)\| \leqslant M \quad (\xi \in \gamma_{2r})\ :$$

Այդ դեպքում $\xi \in \gamma_{2r}$ համար կունենանք

$$|\varphi(f(z))| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|f(z)\| \leqslant M\,\|\varphi\| :$$

Քանի որ $\xi \in \gamma_{2r}$ համար $|\xi - z_0| = 2r$, և $|h|$, $|h'| < r$, ուստի

$$|\xi - (z_0 + h)| = |(\xi - z_0) - h| \geqslant |\xi - z_0| - |h| \geqslant 2r - r = r,$$

և նմանապես՝

$$\big|\xi - \big(z_0 + h'\big)\big| \geqslant r :$$

Հետևաբար, օգտվելով վերը $\varphi(g(h)) - \varphi(g(h'))$–ի համար ստացված ներկայացումից և ինտեգրալի գնահատականից՝ կստանանք, որ

$$\big|\varphi(g(h)) - \varphi(g(h'))\big| \leqslant \frac{|h-h'|}{2\pi} \cdot \frac{M\,\|\varphi\|}{2r \cdot r \cdot r}|\gamma_{2r}| = \frac{M}{r^2}\,\|\varphi\| \cdot |h - h'| :$$

Վերջինս տեղի ունի $\forall\varphi \in X^*$ համար: Դիցուք $\|\varphi\| \leqslant 1$: Այդ դեպքում

$$\big|\varphi\left(g(h) - g(h')\right)\big| = \big|\varphi(g(h)) - \varphi(g(h'))\big| \leqslant \frac{M}{r^2}|h - h'|,$$

և նորից օգտվելով (1.5.1) բանաձևից՝ կստանանք

$$\big|g(h) - g(h')\big| \leqslant \frac{M}{r^2}\,|h - h'|, \quad \big(0 < |h| < r,\ \ 0 < |h'| < r\big) :$$

Ստացված գնահատականներից և ֆունկցիաների համար Կոշու զուգամիտության սկզբունքից (որը կիրառելի է X–ի լրիվության շնորհիվ) կբխի, որ գոյություն ունի

$$\lim_{h\to 0} g(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

սահմանը (վերջինիս գոյությունը ապացուցելու համար կարելի էր չօգտվել ֆունկցիաների համար Կոշու զուգամետության սկզբունքից, այլ պարզապես ցույց տալ, որ $\forall\{h_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $h_n \to 0$ հաջորդականության համար $\{g(h_n)\}_{n=1}^\infty$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է):

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.5.2: Դիցուք

$$\gamma : z = z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

$\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության մեջ որևէ կոր է (սա նշանակում է, որ $z(\cdot) \in C[\alpha, \beta]$), X–ը բանախյան փարածություն է, $f : \gamma \to X$: Դիփարկենք $[\alpha, \beta]$–ի կամայական

$$P: \ \alpha = t_0 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

տրոհում, յուրաքանչյուր $[t_i, t_{i+1}]$ տրոհման հատվածից ընտրենք մե–կական $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ կետ և կազմենք

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(\xi_k\right)\right) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

գումարը ($z_k = f(t_k)$, $k = \overline{0, n}$): Նշանակենք

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad \lambda = \max_i \Delta t_i :$$

Եթե գոյություն ունի (X–ում նորմի իմաստով)

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

սահմանը (որը կախված չէ ո՛չ P տրոհումների ձևից, ո՛չ ξ_i կետերի ընտրությունից), ապա այն կոչվում է f–ի կորագիծ ինտեգրալ՝ տա–րածված γ կորով և նշանակվում

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

սիմվոլով:

Երբեմն կորագիծ ինտեգրալի սահմանման մեջ վերցնում են $\xi_i = t_i$:

Ինչպես դասական դեպքում, այստեղ էլ կարելի է ապացուցել, որ եթե γ կորն ուղղելի է, իսկ f–ն անընդհատ է, ապա

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

ինտեգրալը գոյություն ունի, և տեղի ունի

$$\left\| \int_\gamma f(z)\,dz \right\| \leqslant \sup_{z\in\gamma} \|f(z)\| \cdot |\gamma|$$

գնահատականը: Այստեղ էլ մենք ըստ էության գործ ունենք Ստիլ–տեսի ինտեգրալի հետ:

Պարզ է նաև, որ եթե

$$\exists \int_\gamma f(z)\,dz = x, \tag{1.5.2}$$

ապա $\forall\varphi \in X^*$ համար

$$\exists \int_\gamma \varphi\left(f(z)\right)\,dz = \varphi(x)\,: \tag{1.5.3}$$

Հաճախ օգտակար է լինում հետևյալ փաստը. եթե $x \in X$ այն–պիսին է, որ

$$\varphi(x) = 0 \quad (\forall\varphi \in X^*)\,,$$

ապա $x = 0$: Իրոք, դա բխում է Հան-Բանախի թեորեմի հետևանք հանդիսացող

$$\|x\| = \sup_{\varphi\in X^*, \|\varphi\|\leqslant 1} |\varphi(x)|$$

բանաձևից: Նշված փաստից բխում է, որ եթե (1.5.2) ինտեգրալը գոյություն ունի և $y \in X$ այնպիսին է, որ

$$\int_\gamma \varphi\left(f(z)\right)\,dz = \varphi(y) \quad (\forall\varphi \in X^*),$$

ապա $y = x$: Այս պատճառով երբեմն (1.5.3) հավասարությունը և վերցվում է որպես ինտեգրալի սահմանում: Անալիտիկ ֆունկ–ցիաների տեսության մի շարք փաստեր տեղափոխվում են նաև այս ընդհանուր դեպք: Դրանց մի մասը կարելի ապացուցել ճիշտ նույն դատողություններով, ինչպես սովորական դեպքում: Սակայն վերը նշված կապը (1.5.2)–ի և (1.5.3)–ի միջև թույլ է տալիս շատ փաստեր տարածել այս ընդհանուր դեպքի վրա՝ առանց դժվարությունների: Բերենք դրանցից մի քանի հիմնականները:

Կոշու թեորեմը: *Միակապ տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիայի ինտեգրալը՝ տարածված այդ տիրույթում ընկած կամայական փակ ուղղելի կորով, հավասար է զրոյի:*

Ապացույց: Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ միակապ տիրույթ է, $f : \Omega \to X$ անա–լիտիկ է, իսկ $\gamma \subset \Omega$ փակ ուղղելի կոր է: Այդ դեպքում $\forall \varphi \in X^*$ համար $\varphi(f(\cdot)) \in H(\Omega)$, ուստի Կոշու դասական թեորեմից կբխի, որ

$$\varphi\left(\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right) = \int\limits_{\gamma} \varphi(f(z))\,dz = 0 \quad (\forall \varphi \in X^*)$$

և հետևաբար՝

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0 :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Կոշու բանաձևը: *Եթե f ֆունկցիան անալիտիկ է Γ կոնտուրով սահմանափակված $\overline{\mathcal{D}}$ փակ տիրույթում, ապա $\forall z \in \mathcal{D}$ կետի համար ճիշտ է*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

բանաձևը:

Ապացույց: $\forall \varphi \in X^*$ համար ունենք

$$\varphi\left(f(z)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi\left(f(t)\right)}{t-z}\,dt = \varphi\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt\right),$$

որտեղից էլ կբխի մեր պնդումը:

Լիուվիլի թեորեմը: *Եթե $f : \mathbb{C} \to X$ ֆունկցիան (թույլ) անալիտիկ է ամբողջ $\mathbb{C}$ հարթության վրա և թույլ սահմանափակ է, ապա f–ը հաստատուն է:*

Ապացույց: $\forall\varphi \in X^*$ համար $\varphi(f(z))$–ը կլինի ամբողջ և սահմանափակ, ուստի Լիուվիլի դասական թեորեմից կբխի, որ

$$\varphi\left(f(z)\right) = \varphi\left(f(0)\right) \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

$$\varphi\left(f(z) - f(0)\right) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}) :$$

Այստեղ ֆիքսելով z–ը և օգտվելով φ–ի կամայականությունից՝ կստանանք

$$f(z) - f(0) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Կոշու տիպի ինտեգրալ: Մինչև Կոշու տիպի ինտեգրալի ուսումնասիրությանն անցնելը նկատենք, որ եթե $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to X$ ուժեղ անալիտիկ է, ապա f–ն ունի բոլոր կարգի ածանցյալները, ընդ որում $\forall\varphi \in X^*$ համար

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\varphi\left(f(x)\right) = \varphi\left(\frac{d^n}{dx^n}\,f(x)\right) \quad (x \in \Omega) : \tag{1.5.4}$$

Նշված պնդումը ապացուցելու համար կատարենք ինդուկցիա ըստ n–ի: $n = 0$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է: Այժմ դիցուք հայտնի է, որ f–ը Ω–ում ունի k–րդ կարգի ածանցյալ և տեղի ունի

$$\frac{d^k}{dx^k}\,\varphi\left(f(x)\right) = \varphi\left(\frac{d^k}{dx^k}\,f(x)\right) \quad (x \in \Omega,\ \varphi \in X^*) \tag{1.5.5}$$

հավասարությունը: Քանի որ $\varphi\left(f(\cdot)\right) \in H(\Omega)$, ուստի $\varphi(f(x))$–ը Ω-ում անվերջ դիֆերենցելի է: Մասնավորապես

$$\exists\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\,\varphi\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\varphi\left(\frac{d^k}{dx^k}\,f(x)\right) \quad (\forall\varphi \in X^*) :$$

Հետևաբար 1.5.1 թեորեմից կբխի, որ

$$\exists \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right) = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(f(x)\right) :$$

Օգտվելով վերջինիս գոյությունից և (1.5.5)–ից՝ դժվար չէ ցույց տալ, որ (1.5.4)–ը տեղի ունի նաև $n = k+1$ համար:

Այժմ դիցուք $\gamma \subset \mathbb{C}$ կամայական ուղղելի կոր է, իսկ $g : \gamma \to X$ անընդհատ ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t)}{t-z}\, dt \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma)$$

ինտեգրալը կոչվում է Կոշու տիպի: $\forall \varphi \in X^*$ համար կունենանք

$$\varphi\left(F(z)\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\left(g(t)\right)}{t-z}\, dt \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma) :$$

Աջ մասում ստացվածը, ինչպես հայտնի է կոմպլեքս անալիզից, հանդիսանում է γ–ի լրացման վրա անալիտիկ ֆունկցիա և

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\left(g(t)\right)}{t-z}\, dt\right) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\left(g(t)\right)}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

ուստի $\forall \varphi \in X^*$ համար

$$\frac{d^n}{dz^n} \varphi\left(F(z)\right) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\left(g(t)\right)}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

որը, շնորհիվ (1.5.4)-ի, կարելի է գրել

$$\varphi\left(\frac{d^n}{dz^n} F(z)\right) = \varphi\left(\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt\right) \quad (\varphi \in X^*)$$

տեսքով: Այստեղից կբխի, որ

$$\frac{d^n}{dz^n}F(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt:$$

Օգտվելով սրանից՝ հեշտ է ապացուցել

Վայերշտրասի I **թեորեմը:** *Եթե Ω տիրույթում անալիտիկ $f_n:\Omega\to X$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը Ω–ի ներսում (այսինքն՝ Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա) զուգամիտում է հավասարաչափ, ապա՝*

1) $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$ սահմանային ֆունկցիան կլինի (ուժեղ) անալիտիկ Ω–ում;

2) $f_n^{(p)}(z)\underset{x\to\infty}{\rightrightarrows}f^{(p)}(z)$ $(p=1,2,\ldots)$ (հավասարաչափ Ω–ի ներսում): ►

Քանի որ ամեն մի $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ տեսքի աստիճանային շարք (որում $a_n\in X$ $(n=0,1,2,\ldots)$) իր զուգամիտության շրջանի ներսում զուգամիտում է հավասարաչափ, ուստի Վայերշտրասի I թեորեմից բխում է, որ այդ զուգամիտության շրջանի ներսում

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

ֆունկցիան ուժեղ անալիտիկ է և նրա ածանցյալները կարելի է հաշվել անդամ առ անդամ դիֆերենցման միջոցով: Ճիշտ նույն դատողություններով, ինչպես դասական դեպքում, ցույց կտանք, որ եթե f–ն անալիտիկ է $D(z_0,R)$ շրջանում, ապա այդ շրջանում տեղի ունի

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

ներկայացումը, որտեղ

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt$$

(այստեղ $\gamma_r = \partial D(z_0, r)$, որտեղ $0 < r < R$ որևէ թիվ է): Իհարկե, սա ևս կարելի է անմիջապես բերել դասական դեպքին, քանի որ $\forall \varphi \in X^*$ համար $\varphi\left(f(\cdot)\right) \in H\left(D\left(z_0, R\right)\right)$ և $z \in D\left(z_0, R\right)$ համար

$$\varphi(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{\varphi(f(t))}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt\right](z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varphi\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt\right]\right\}(z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\varphi\left[a_n(z-z_0)^n\right] = \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\right):$$

§ 1.6. Վեկտոր – ֆունկցիաների ինտեգրումը

Երբեմն կարիք է լինում ինտեգրել որևէ (Q, μ) չափով տարածության վրա որոշված և ինչ–որ X տոպոլոգիական վեկտորական տարածությունից արժեքներ ընդունող ֆունկցիաները: Այլ կերպ ասած, այդպիսի f ֆունկցիային պետք է համապատասխանեցնել X տարածության որոշակի

$$\int\limits_{Q} f\,d\mu$$

վեկտոր, որն օժտված լինի թվային ֆունկցիայի ինտեգրալի հիմնական հատկություններով: Օրինակ, ցանկացած $\Lambda \in X^*$ ֆունկցիոնալի համար պետք է տեղի ունենա

$$\Lambda\left(\int\limits_{Q} f\,d\mu\right) = \int\limits_{Q}\left(\Lambda f\right)\,d\mu$$

հավասարությունը, քանի որ վերջավոր գումարների համար անալոգ հավասարությունը տեղի ունի, իսկ ինտեգրալը միշտ հանդիսանում է այդպիսի գումարների սահմանը՝ այս կամ այն իմաստով: Ինտեգ–րալի մեր սահմանումը հիմնված է լինելու միայն այդ պահանջի վրա:

Սահմանում 1.6.1: Դիցուք (Q, μ)–ն չափով տարածություն է, X–ն այնպիսի տոպոլոգիական վեկտորական տարածություն է, որ X^*–ն անջատում է X–ի կետերը, իսկ $f : Q \to X$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ ցանկացած $\Lambda \in X^*$ համար Λf սկալյար ֆունկցիան Q–ի վրա ըստ μ չափի ինտեգրելի է: Եթե գոյություն ունի այնպիսի $y \in X$ վեկտոր, որ ցանկացած $\Lambda \in X^*$ ֆունկցիոնալի համար

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu, \tag{1.6.1}$$

ապա y–ը կոչվում է ըստ μ չափի f ֆունկցիայի ինտեգրալ՝ տարած–ված Q բազմությամբ, և նշանակվում է $\int_Q f\, d\mu$ սիմվոլով:

Դիտողություն 1.6.1: Քանի որ X^*–ն անջատում է X–ի կետերը, ուստի ինտեգրալը (եթե այն գոյություն ունի) միակն է:

Քանի որ լոկալ ուռուցիկ X տարածության համար X^*–ն ան–ջատում է X–ի կետերը, ուստի ինտեգրալի սահմանման մեջ որպես X մասնավորապես կարելի է վերցնել կամայական լոկալ ուռուցիկ տոպոլոգիական վեկտորական տարածություն:

Թեորեմ 1.6.1: *Դիցուք՝*
1) X–ն այնպիսի տոպոլոգիական վեկտորական տարածու-թյուն է, որ X^*–ն անջատում է X–ի կետերը, իսկ μ–ն հավա–նականային բորելյան չափ է Q կոմպակտ հաուսդորֆյան տա–րածությունում,
2) $f : Q \to X$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f(Q)$ բազմության ուռուցիկ թաղանթը հարաբերական կոմպակտ է X–ում:

Այդ դեպքում $\int_Q f\, d\mu$ ինտեգրալը գոյություն ունի և պատկա–նում է $f(Q)$ բազմության ուռուցիկ թաղանթի փակմանը:

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք են–թադրել, որ X տարածությունն իրական է (կոմպլեքս տարածության դեպքը կոմպլեքս փարածությունների համար Հան–Բանախի թեորե–մի ապացույցի դափողություններին նման դափողություններով հեշ–փությամբ բերվում է նշված դեպքին): H–ով նշանակենք $f(Q)$ բազ–մության ուռուցիկ թաղանթը: Մենք պետք է ապացուցենք այնպիսի $y \in \overline{H}$ վեկտորի գոյությունը, որը ցանկացած $\Lambda \in X^*$ համար բա–վարարում է (1.6.1)–ին:

Դիցուք $L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$-ը X^*–ի վերջավոր ենթաբազմություն է և

$$E_L = \left\{ y \in \overline{H} : \ \Lambda y = \int\limits_Q (\Lambda f)\, d\mu \quad (\forall \Lambda \in L) \right\} :$$

Λ ֆունկցիոնալների անընդհափության շնորհիվ E_L բազմություն–ները փակ են և հետևաբար, կոմպակտ են, քանի որ $\overline{H}$–ը կոմպակտ է: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար բավական է ցույց տալ, որ E_L բազմություններից ոչ մեկը դատարկ չէ: Իրոք, այդ դեպքում E_L բազմությունները կկազմեն $\overline{H}$–ի կենտրոնացված համակարգ, և $\overline{H}$–ի կոմպակտությունից կբխի, որ բոլոր E_L բազմությունների հատումը դատարկ չէ: Այդ հատմանը պատկանող յուրաքանչյուր y վեկտոր կբավարարի թեորեմի պահանջներին:

$L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$-ը դիտարկենք որպես X տարածության ար–տապատկերում $\mathbb{R}^n$–ի մեջ: Դիցուք $K = L\,(f(Q))$: Նշանակենք

$$m_i = \int\limits_Q (\Lambda_i f)\ d\mu \quad (1 \leqslant i \leqslant n) : \tag{1.6.2}$$

Մենք պնդում ենք, որ $m = (m_1, \dots, m_n)$ կետը պատկանում է K բազմության S ուռուցիկ թաղանթին:

Քանի որ Q–ն կոմպակտ է և կոմպակտ բազմության անընդհատ պատկերը կոմպակտ է, ուստի K–ն կոմպակտ է: Քանի որ $\mathbb{R}^n$–ում կոմպակտ բազմության ուռուցիկ թաղանթը կոմպակտ է, ուստի $S \subset \mathbb{R}^n$ կոմպակտ բազմություն է: Եթե $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ կետը չի պատկանում S–ին, ապա, օգտվելով կոմպակտ և փակ չհատվող ուռուցիկ բազմությունների անջատման վերաբերյալ թեորեմից և $\mathbb{R}^n$–ում գծային ֆունկցիոնալների հայտնի տեսքից, եզրակացնում ենք, որ գոյություն ունեն այնպիսի $c_1, \ldots, c_n$ իրական թվեր, որոնց համար

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \quad (u = (u_1, \ldots, u_n) \in K) : \tag{1.6.3}$$

Ուստի

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Lambda_i f(q) < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \quad (q \in Q) : \tag{1.6.4}$$

Քանի որ μ–ն հավանականային չափ է ($\mu(Q) = 1$), ուստի (1.6.4)–ի երկու կողմն ինտեգրելով ստանում ենք $\sum_{i=1}^{n} c_i m_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$: Հետևաբար, $t \neq m$:

Ստացվածը ցույց է տալիս, որ $m \in S$: Քանի որ $K = L(f(Q))$, իսկ L արտապատկերումը գծային է, ուստի գոյություն ունի այնպիսի $y \in H$, որ $m = Ly$: Այդպիսի y վեկտորի համար ունենք

$$\Lambda_i y = m_i = \int_Q (\Lambda_i f)\, d\mu \quad (1 \leqslant i \leqslant n) :$$

Ուստի $y \in E_L$ և հետևաբար, $E_L \neq \emptyset$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.6.2: Ցանկացած ν վերջավոր դրական բորելյան չափ համապատունով բազմապատկելուց հետո կդառնա հավանականային, ուստի նախորդ թեորեմում ինտեգրալի գոյության մասին պնդումը ուժի մեջ կմնա նաև այդպիսի ν չափերի դեպքում: Չափի վերլուծության մասին Ժորդանի թեորեմի միջոցով նշված արդյունքը կարելի է ընդհանրացնել կամայական իրական վերջավոր չափերի և այնուհետև՝ կամայական կոմպլեքս չափերի դեպքերի համար:

Թեորեմ 1.6.2: *Դիցուք Q–ն կոմպակտ հաուսդորֆյան տարածություն է, X–ը բանախյան տարածություն է, $f : Q \to X$ անընդհատ արտապատկերում է և μ–ն Q–ի վրա դրական բորել–*

յան չափ է: Այդ դեպքում

$$\left\| \int_Q f\, d\mu \right\| \leqslant \int_Q \|f\|\, d\mu :$$

Ապացույց: Նշանակենք $y = \int_Q f\, d\mu$: Ըստ Հան–Բանախի թեորեմի հետևանքի՝ գոյություն ունի այնպիսի $\Lambda \in X^*$ ֆունկցիոնալ, որ $\Lambda y = \|y\|$ և $|\Lambda x| \leqslant \|x\|$ $(x \in X)$: Մասնավորապես՝

$$|\Lambda f(q)| \leqslant \|f(q)\| \quad (q \in Q) :$$

Հետևաբար

$$\|y\| = \Lambda y = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu \leqslant \int_Q \|f\|\, d\mu :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Վերջում մի փոքր կանգ առնենք A արժեքանի ֆունկցիաների ինտեգրման վրա, որտեղ A–ն բանախյան հանրահաշիվ է: Դիցուք Q–ն կոմպակտ հաուսդորֆյան տարածություն է, μ–ն Q–ի վրա բո–րելյան չափ է, իսկ $f : Q \to A$ անընդհատ ֆունկցիա է: Ըստ թեորեմ 1.6.1–ի՝ $\int_Q f\, d\mu$ ինտեգրալը գոյություն ունի: Ապացուցենք, որ այս դեպքում ինտեգրալն օժտված է հետևյալ լրացուցիչ հատկությամբ. եթե $x \in A$, ապա

$$x \int_Q f\, d\mu = \int_Q x f(p)\, d\mu(p), \tag{1.6.5}$$

$$\left(\int_Q f\, d\mu \right) x = \int_Q f(p) x\, d\mu(p) : \tag{1.6.6}$$

(1.6.5) բանաձևն ապացուցելու համար M_x–ով նշանակենք ձախից x էլեմենտով բազմապատկման օպերատորը: Ցանկացած $\Lambda \in A^*$ համար ունենք $\Lambda M_x \in A^*$, ուստի ինտեգրալի սահմանումից կունենանք

$$\Lambda M_x \int\limits_Q f\,d\mu = \int\limits_Q (\Lambda M_x f)\,d\mu = \Lambda \int\limits_Q (M_x f)\,d\mu \quad (\forall \Lambda \in A^*) :$$

Հետևաբար

$$M_x \int\limits_Q f\,d\mu = \int\limits_Q (M_x f)\,d\mu,$$

որտեղից էլ բխում է (1.6.5)–ը: (1.6.6)–ն ապացուցելու համար որպես M_x պետք է վերցնել աջից x էլեմենտով բազմապատկման օպերատորը:

§ 1.7. Սպեկտրի հիմնական հատկությունները

Լեմմա 1.7.1: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A^{-1}$, $h \in A$ և $\|h\| < \dfrac{1}{2}\left\|x^{-1}\right\|^{-1}$: Այդ դեպքում $x + h \in A^{-1}$ և*

$$\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| \leqslant 2\left\|x^{-1}\right\|^3 \|h\|^2 : \tag{1.7.1}$$

Ապացույց: Եթե $x, y \in A^{-1}$, ապա $y^{-1}x$ էլեմենտը հանդիսանում է $x^{-1}y$ էլեմենտի հակադարձը: Այսպիսով՝ $\forall x, y \in A^{-1}$ համար $x^{-1}y \in A^{-1}$, ուստի A^{-1}–ը խումբ է:

Ունենք $x + h = x\left(e + x^{-1}h\right)$: Քանի որ $\left\|x^{-1}h\right\| < \dfrac{1}{2}$, ուստի ըստ 1.4.2 լեմմայի՝ $\exists \left(e + x^{-1}h\right)^{-1}$ և

$$\left\|\left(e + x^{-1}h\right)^{-1} - e + x^{-1}h\right\| \leqslant \frac{\left\|x^{-1}h\right\|^2}{1 - \left\|x^{-1}h\right\|} \leqslant \frac{\left\|x^{-1}h\right\|^2}{1 - \frac{1}{2}} =$$
$$= 2\left\|x^{-1}h\right\|^2 :$$

Ուստի ըստ վերին ասվածի՝ $\exists (x+h)^{-1} = \left(e + x^{-1}h\right)^{-1} x^{-1}$ և

$$\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| = \left\|(e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + \right.$$

$$\left. + x^{-1}hx^{-1}\right\| = \left\|\left[(e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - e + x^{-1}h\right] x^{-1}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left(e+x^{-1}h\right)^{-1} x^{-1} - e + x^{-1}h\right\| \cdot \left\|x^{-1}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\|x^{-1}h\right\|^2 \cdot \left\|x^{-1}\right\| \leqslant 2\left\|x^{-1}\right\|^3 \|h\|^2 :$$

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.7.1: *Եթե A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, ապա A^{-1}–ը A–ում բաց բազմություն է, իսկ $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումը հանդիսանում է A^{-1}–ի հոմեոմորֆիզմ իր վրա:*

Ապացույց: Նախորդ թեորեմից բխում է, որ A^{-1}–ը A–ում բաց է, իսկ $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումն անընդհատ է: Քանի որ $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումը A^{-1}–ը փոխմիարժեք արտապատկերում է իր վրա և այդ արտապատկերման հակադարձը հենց ինքն է, ուստի այն հոմեոմորֆիզմ է:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.7.1: F–ով նշանակենք այն արտապատկերումը, որը $\forall x \in A^{-1}$ վեկտորին համապատասխանեցնում է x^{-1} վեկտորը՝

$$F(x) = x^{-1} \quad \left(x \in A^{-1}\right) :$$

Քանի որ A^{-1}–ը բաց է, ուստի իմաստ ունի խոսել F–ի դիֆերենցելիության մասին: (1.7.1) հավասարությունից բխում է, որ $\forall x \in A^{-1}$ համար

$$\frac{\left\|F\left(x+h\right) - F\left(x\right) - \left(-x^{-1}hx^{-1}\right)\right\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

ուստի F–ն ըստ Ֆրեշեի դիֆերենցելի է, և

$$\left[F'(x)\right] h = -x^{-1}hx^{-1} \quad (h \in A) : \blacktriangleright$$

Սահմանում 1.7.1: $\lambda \in \mathbb{C}$ թիվը կոչվում է $a \in A$ էլեմենտի համար ռեգուլյար կետ, եթե $\lambda e - a$ էլեմենտը հակադարձելի է՝ $\lambda e - a \in A^{-1}$:

a էլեմենտի բոլոր ռեգուլյար կետերի բազմությունը կոչվում է a–ի ռեզոլվենտային բազմություն և նշանակվում է $\Omega(a)$ սիմվոլով: $\Omega(a)$–ի վրա որոշված

$$R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}$$

ֆունկցիան կոչվում է a–ի ռեզոլվենտ:

$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \Omega(a)$ բազմությունը կոչվում է a էլեմենտի սպեկտր:

Թեորեմ 1.7.2: *$\forall a \in A$ համար՝*
1) $\Omega(a) \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, իսկ R_a–ն $\Omega(a)$–ի վրա ուժեղ անալիտիկ է,
2) $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ կոմպակտ է, որն ընկած է

$$\bar{D}\,(0, \|a\|) = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| \leqslant \|a\|\}$$

փակ շրջանում:

Ապացույց: 1) Ֆիքսենք $a \in A$ և դիտարկենք $g(\lambda) = \lambda e - a$ ֆունկցիան: $g : \mathbb{C} \to A$ անընդհատ ֆունկցիա է: Ըստ 1.7.1 թեորեմի՝ A^{-1} հակադարձելի էլեմենտների բազմությունը բաց է, ուստի նրա $g^{-1}\left(A^{-1}\right)$ նախապատկերը ևս կլինի բաց: Մնում է պեսնել, որ

$$\Omega(a) = g^{-1}\left(A^{-1}\right):$$

1.7.1 լեմմայի մեջ վերցնենք $x = \lambda e - a$, $h = (\mu - \lambda)e$, որտեղ $\lambda \in \Omega(a)$ նախօրոք ֆիքսված (կամայական) կետ է, իսկ μ–ն ընտրված է λ–ին այնքան մոտ, որ պատկանի $\Omega(a)$–ին: Այդ դեպքում λ–ին բավականաչափ մոտ μ–երի համար (1.7.1)–ի շնորհիվ կունենանք

$$\|R_a(\mu) - R_a(\lambda) + R_a(\lambda)(\mu - \lambda)eR_a(\lambda)\| \leqslant 2\,\|R_a(\lambda)\|^3\,|\mu - \lambda|^2,$$

որի երկու կողմը բաժանելով $|\mu - \lambda|$–ի վրա և անցնելով սահմանի, երբ $\mu \to \lambda$, կստանանք, որ

$$\exists \lim_{\mu \to \lambda} \frac{R_a(\mu) - R_a(\lambda)}{\mu - \lambda} = -R_a^2(\lambda)$$

կամ՝

$$\exists R'_a(\lambda) = -R_a^2(\lambda) \quad (\lambda \in \Omega(a)) : \tag{1.7.2}$$

2) Նախորդ պնդումից բխում է, որ $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \Omega(a)$ բազմությունը փակ է, և ապացույցն ավարտելու համար բավական է ցույց տալ, որ

$$\sigma(a) \subset \overline{D}\,(0, \|a\|) :$$

Դրա համար նկատենք, որ $|\lambda| > \|a\|$ պայմանին բավարարող λ կոմպլեքս թվերը հանդիսանում են a–ի համար ռեգուլյար կետեր: Իրոք, ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$e - \frac{a}{\lambda} \in A^{-1},$$

և հետևաբար

$$\lambda e - a = \lambda \left(e - \frac{a}{\lambda} \right) \in A^{-1},$$

ինչն էլ նշանակում է, որ $\lambda \in \Omega(a)$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Լեմմա 1.7.2: *$\forall a \in A$ համար $\sigma(a) \neq \emptyset$:*

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ ինչ–որ $a \in A$ համար $\sigma(a) = \emptyset$: Այդ դեպքում կունենանք $\Omega(a) = \mathbb{C}$ և նախորդ թեորեմից կբխի, որ R_a ռեզոլվենտը անալիտիկ է ամբողջ $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության վրա: Դիցուք $|\lambda| > \|a\|$: Այդ դեպքում ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$\exists \left(e - \frac{a}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n},$$

և հետևաբար

$$R_a(\lambda) = \left[\lambda \left(e - \frac{a}{\lambda} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{a}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}},$$

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} \quad (|\lambda| > \|a\|) : \tag{1.7.3}$$

Դիցուք $r > \|a\|$: Այդ դեպքում (1.7.3) շարքը

$$\gamma_r = \partial D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r\}$$

շրջանագծի վրա հավասարաչափ զուգամետ է (քանի որ ունի զուգամետ մաժորանտ՝ այն է՝ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{r^{n+1}}$ շարքը), ուստի այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել: Արդյունքում կստանանք

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} R_a(\lambda)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} \right] a^n : \tag{1.7.4}$$

Քանի որ $R_a(\lambda)$–ն անալիտիկ է $\mathbb{C}$–ում, ուստի ըստ Կոշու թեորեմի՝

$$\int\limits_{\gamma_r} R_a(\lambda)\, d\lambda = 0 :$$

Մյուս կողմից, ինչպես գիտենք,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

ինչը տեղադրելով (1.7.4)–ի մեջ՝ կստանանք

$$0 = e,$$

իսկ վերջինս հակասում է $\|e\| = 1$ պայմանին:
Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 1.7.2: A և B կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվները կոչվում են իզոմետրիկորեն իզոմորֆ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\varphi : A \to B$ բիեկտիվ հոմոմորֆիզմ, որ

$$\|\varphi(x)\|_B = \|x\|_A \quad (\forall x \in A) :$$

Սահմանում 1.7.3: A բանախյան հանրահաշիվը կոչվում է բանախյան մարմին, եթե $A \setminus \{0\} = A^{-1}$:

Գելֆանդ–Մազուրի թեորեմը: *Յանկացած կոմպլեքս բանախյան մարմին իզոմետրիկորեն իզոմորֆ է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթությանը:*

Ապացույց: $\forall a \in A$ համար $\sigma(a) \neq \varnothing$, ուստի $\exists \lambda(a) \in \sigma(a)$: Սա նշանակում է, որ $\lambda(a)e - a \notin A^{-1}$, ուստի ըստ պայմանի՝ $\lambda(a)e - a = 0$, կամ՝

$$a = \lambda(a)e :$$

Ցույց տանք, որ $\lambda(a)$–ն կլինի որոնելի իզոմետրիան: Նախ նկատենք, որ եթե ինչ–որ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ համար

$$a = \lambda_1 e = \lambda_2 e,$$

ապա $\lambda_1 = \lambda_2$, քանի որ կունենանք

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = \|(\lambda_1 - \lambda_2)e\| = \|\lambda_1 e - \lambda_2 e\| = \|a - a\| = 0 :$$

Օգտվելով սրանից՝ հեշտ է տեսնել, որ $\lambda(a)$–ն կհանդիսանա հոմոմորֆիզմ A–ից $\mathbb{C}$: Ունենք, որ

$$\|a\| = |\lambda(a)| \quad (\forall a \in A) :$$

Այստեղից կբխի, որ եթե $\lambda(a) = 0$, ապա $a = 0$, ուստի $\lambda(a)$–ն փոխմիարժեք (ինեկտիվ) է: Հեշտ է տեսնել, որ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ պարր ունի նախապատկեր (այն է՝ λe էլեմենտը): Հետևաբար $\lambda(\cdot) : A \to \mathbb{C}$ կհանդիսանա իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ A–ի և $\mathbb{C}$–ի միջև: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.7.4: $a \in A$ էլեմենտի սպեկտրալ շառավիղ է կոչվում

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

մեծությունը: 1.7.2 լեմմայի շնորհիվ $\sigma(a) \neq \varnothing$, ուստի այս սահմանումը կոռեկտ է:

1.7.2 թեորեմից բխում է, որ $\forall a \in A$ համար

$$0 \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\| : \qquad (1.7.5)$$

Գելֆանդի բանաձևը: $\forall a \in A$ *համար*

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{1.7.6}$$

(գրված սահմանի գոյությունը ևս ապացուցվում է):
Ապացույց: Ըստ 1.7.2 թեորեմի՝ $R_a(\lambda)$–ն $\Omega(a)$ ռեզոլվենտային բազմության վրա ուժեղ անալիտիկ է: Դիցուք $|\lambda| > \|a\|$: Այդ դեպքում ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$\exists \left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n},$$

և հետևաբար

$$R_a(\lambda) = \left[\lambda\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}},$$

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} \qquad (|\lambda| > \|a\|)\ : \tag{1.7.7}$$

Դիցուք $r > \|a\|$: Այդ դեպքում (1.7.7) շարքը

$$\gamma_r = \partial D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = r\}$$

շրջանագծի վրա հավասարաչափ զուգամետ է (քանի որ ունի զուգամետ մաժորանտ՝ այն է $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\|a\|^n}{r^{n+1}}$ շարքը): (1.7.7)–ի երկու կողմը բազմապատկենք λ^m–ով ($m \geqslant 0$) և ինտեգրենք γ_r–ով: Հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ կարող ենք կատարել անդամ առ անդամ ինտեգրում և արդյունքում կստանանք

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} R_a(\lambda)\, \lambda^m d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \lambda^{m-n-1} d\lambda\right] a^n\ :$$

Բայց ինչպես գիտենք՝

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\lambda^{m-n-1}d\lambda=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m,\end{cases}$$

ինչը տեղադրելով վերը ստացվածի մեջ՝ կստանանք

$$a^m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\lambda^m R_a(\lambda)\,d\lambda \quad (r>\|a\|,\ \ m=0,1,2,\ldots): \qquad (1.7.8)$$

Սպեկտրալ շառավղի սահմանումից բխում է, որ $|\lambda|>\rho(a)$ պայմանին բավարարող λ–ն a–ի ռեգուլյար կետ է, ուստի $\lambda^m R_a(\lambda)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $|\lambda|>\rho(a)$ տիրույթում: Բազմակապ տիրույթների համար Կոշու թեորեմից (որը հիմնավորվում է նույն ձևով, ինչպես դասական դեպքում) բխում է, որ $r>\rho(a)$ դեպքում

$$\int\limits_{\gamma_r}\lambda^m R_a(\lambda)\,d\lambda$$

ինտեգրալի արժեքը կախված չէ r–ի ընտրությունից: Այստեղից և (1.7.8)–ից կբխի, որ

$$a^n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\lambda^n R_a(\lambda)\,d\lambda \quad (r>\rho(a),\ \ n=0,1,2,\ldots): \qquad (1.7.9)$$

Քանի որ $R_a(\lambda)$ ֆունկցիան γ_r–ի վրա անընդհատ է, ուստի

$$\mathcal{M}(r)=\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left\|R_a\left(re^{i\theta}\right)\right\|<\infty \quad (r>\rho(a)),$$

և (1.7.9) բանաձևում կիրառելով ինտեգրալի գնահատականը՝ կստանանք, որ $\forall r>\rho(a)$ համար

$$\|a^n\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot r^n\cdot\mathcal{M}(r)\cdot 2\pi r=r^{n+1}\mathcal{M}(r),$$

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant r\sqrt[n]{r\mathcal{M}(r)},$$

որտեղից կբխի, որ

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r \quad (\forall r > \rho(a)),$$

իսկ այստեղից էլ, r–ի կամայականության շնորհիվ, կստանանք

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho(a) : \tag{1.7.10}$$

Ապացույցն ավարտելու համար մնում է ցույց տալ, որ

$$\rho(a) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} : \tag{1.7.11}$$

Դիցուք $\lambda \in \sigma(a)$: Նկատենք, որ այդ դեպքում

$$\lambda^n \in \sigma\left(a^n\right) \quad (n \geqslant 1) :$$

Իրոք, ունենք

$$\begin{aligned} &\lambda^n e - a^n = \\ &\quad = (\lambda e - a)\left(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}\right) : \end{aligned} \tag{1.7.12}$$

Եթե ենթադրենք, թե $\exists\, (\lambda^n e - a^n)^{-1}$, ապա (1.7.12)–ի երկու կողմը աջից բազմապատկելով $(\lambda^n e - a^n)^{-1}$–ով՝ կստանանք

$$\begin{aligned} &(\lambda e - a)\left[\left(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}\right)\cdot\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\cdot\,(\lambda^n e - a^n)^{-1}\right] = e : \end{aligned} \tag{1.7.13}$$

Նշանակենք

$$x = \lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}, \quad y = \lambda^n e - a^n :$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$(\lambda e - a)x = x(\lambda e - a),$$

$$(\lambda e - a)y = y(\lambda e - a) :$$

Հետևաբար նաև

$$(\lambda e-a)y^{-1}=\left(y^{-1}y\right)\left[(\lambda e-a)y^{-1}\right]=y^{-1}\left[y(\lambda e-a)\right]y^{-1}=$$

$$=y^{-1}\left[(\lambda e-a)y\right]y^{-1}=y^{-1}(\lambda e-a)\left(yy^{-1}\right)=y^{-1}(\lambda e-a),$$

ուստի (1.7.13)–ի ձախ մասը կարելի է ձևափոխել այսպես՝

$$(\lambda e-a)\left[xy^{-1}\right]=x\left[(\lambda e-a)y^{-1}\right]=x\left[y^{-1}(\lambda e-a)\right]=$$

$$=\left[xy^{-1}\right](\lambda e-a),$$

և (1.7.13)–ից կբխի, որ

$$\left(xy^{-1}\right)(\lambda e-a)=e,$$

կամ որ նույնն է՝

$$\left[\left(\lambda^{n-1}e+\lambda^{n-2}a+\cdots+\lambda a^{n-2}+a^{n-1}\right)\left(\lambda^{n}e-a^{n}\right)^{-1}\right]\cdot$$
$$\cdot(\lambda e-a)=e: \tag{1.7.14}$$

(1.7.13)–ից և (1.7.14)–ից կբխի, որ $\exists(\lambda e-a)^{-1}$, ինչը հակասում է $\lambda\in\sigma(a)$ պայմանին:

Այսպիսով, եթե $\lambda\in\sigma(a)$, ապա $\lambda^n\in\sigma\left(a^n\right)$ $(n\geqslant 1)$, ուստի (1.7.5)-ից կբխի, որ

$$|\lambda|^n\leqslant\rho\left(a^n\right)\leqslant\left\|a^n\right\|,$$

$$|\lambda|\leqslant\left\|a^n\right\|^{\frac{1}{n}}\quad(\forall\lambda\in\sigma(a),\ \ n\geqslant 1): \tag{1.7.15}$$

Վերջինից էլ կբխի, որ

$$\rho(a)=\sup\left\{|\lambda|:\ \lambda\in\sigma(a)\right\}\leqslant\left\|a^n\right\|^{\frac{1}{n}}\quad(n\geqslant 1),$$

ուստի տեղի ունի (1.7.11)–ը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.7.3: *Դիցուք $a \in A$ և $\lambda, \mu \in \Omega(a)$: Այդ դեպքում տեղի ունի Հիլբերտի*

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\mu - \lambda) R_a(\mu) R_a(\lambda) \tag{1.7.16}$$

նույնությունը:

Ապացույց: Ունենք

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda e - a)^{-1} - (\mu e - a)^{-1} =$$

$$= (\mu e - a)^{-1} \Big[(\mu e - a)(\lambda e - a)^{-1} - e \Big] =$$

$$= R_a(\mu) \Big\{ [(\mu - \lambda) e + (\lambda e - a)] (\lambda e - a)^{-1} - e \Big\} =$$

$$= R_a(\mu) \Big\{ (\mu - \lambda)(\lambda e - a)^{-1} + (\lambda e - a)(\lambda e - a)^{-1} - e \Big\} =$$

$$= (\mu - \lambda) R_a(\mu) R_a(\lambda) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.7.1: *Դիցուք $a \in A$ և $\lambda, \mu \in \Omega(a)$: Այդ դեպքում*

$$R_a(\mu) R_a(\lambda) = R_a(\lambda) R_a(\mu) : \tag{1.7.17}$$

Ապացույց: $\lambda = \mu$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է: Դիցուք $\lambda \neq \mu$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝

$$R_a(\mu) R_a(\lambda) = \frac{R_a(\lambda) - R_a(\mu)}{\lambda - \mu}, \tag{1.7.18}$$

որտեղ փոխելով λ և μ պառերի դերերը՝ կստանանք

$$R_a(\lambda) R_a(\mu) = \frac{R_a(\mu) - R_a(\lambda)}{\mu - \lambda} : \tag{1.7.19}$$

(1.7.18)-ից և (1.7.19)-ից կբխի (1.7.17)-ը:
Հետևանքն ապացուցված է:

§ 1.8. Սպեկտրալ շառավղի բանաձևի հետևանքներ

Սահմանում 1.8.1: A բանախյան հանրահաշվի a էլեմենտը կոչվում է նիլպոտենտ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $n = n(a)$ բնական թիվ, որ

$$a^n = 0$$

($n = 1$ դեպքում կունենանք $a = 0$):

Սահմանում 1.8.2: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է քվազինիլպոտենտ, եթե $\rho(a) = 0$:

Սահմանում 1.8.3: A բանախյան հանրահաշվի բոլոր քվազինիլպոտենտ էլեմենտների բազմությունը կոչվում է A–ի ռադիկալ և նշանակվում է $\mathrm{Rad}(A)$:

Լեմմա 1.8.1: *Նիլպոտենտ էլեմենտը քվազինիլպոտենտ է:*

Ապացույց: Դիցուք $a \in A$ նիլպոտենտ է՝ $\exists k \in \mathbb{N}$, որ $a^k = 0$: Այդ դեպքում կունենանք

$$a^n = 0 \quad (n \geqslant k),$$

ուստի

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} = 0 :$$

Լեմման ապացուցված է:

Հետևանք 1.8.1: *Եթե $a \in A$ նիլպոտենտ է, ապա $\sigma(a) = \{0\}$:*

Ապացույց: Իրոք, ունենք $\rho(a) = 0$, ուստի $\sigma(a) \subset \{0\}$: Քանի որ $\sigma(a) \neq \varnothing$, ուստի $\sigma(a) = \{0\}$: ▶

Լեմմա 1.8.2: *$\forall a, b \in A$ համար $\rho(ab) = \rho(ba)$:*

Ապացույց: Ունենք

$$(ab)^n = \underbrace{\underline{ab}\,\underline{ab}\ldots\underline{ab}}_{n} = a(\underbrace{\underline{ba}\,\underline{ba}\ldots\underline{ba}}_{n-1})b = a(ba)^{n-1}b,$$

ուստի

$$\|(ab)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|a\|^{\frac{1}{n}} \cdot \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} \|b\|^{\frac{1}{n}} ,$$

և հետևաբար

$$\rho(ab) = \lim_{n\to\infty} \|(ab)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \|a\|^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|b\|^{\frac{1}{n}} :$$

Ունենք

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n-1}}\right\}^{\frac{n}{n-1}}$$

և օգտվելով $f(x, y) = x^y$ ֆունկցիայի անընդհատությունից, կստանանք

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} = \left\{\lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n-1}}\right\}^{\lim \frac{n}{n-1}} = \rho(ba) :$$

Այսպիսով,

$$\rho(ab) \leqslant \rho(ba) \lim_{n\to\infty} \|a\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|b\|^{\frac{1}{n}} :$$

Երբ $a \neq 0$, $b \neq 0$, սա նշանակում է, որ

$$\rho(ab) \leqslant \rho(ba) : \tag{1.8.1}$$

Վերջինս ակնհայտորեն տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ a և b էլեմենտներից մեկն ու մեկը կամ երկուսը հավասար են 0–ի:

(1.8.1)–ում փոխելով a և b պառերի դերերը՝ կստանանք

$$\rho(ba) \leqslant \rho(ab) : \tag{1.8.2}$$

(1.8.1)–ից և (1.8.2)–ից կբխի, որ $\rho(ab) = \rho(ba)$:
Լեմման ապացուցված է:

Իրականում պարզվում է, որ վերն ապացուցված լեմման հանդիսանում է հետևյալ՝ առավել ընդհանուր պնդման հետևանքը.

Լեմմա 1.8.3: $\forall a, b \in A$ *համար* $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$: [1]

[1] տես՝ [17], гл. 10, упр. 2, с. 291.

Ապացույց: Ցույց տանք, որ

$$\Omega(ab)\setminus\{0\}=\Omega(ba)\setminus\{0\}\,: \tag{1.8.3}$$

Նախ ցույց տանք, որ

$$\Omega(ab)\setminus\{0\}\subset\Omega(ba)\setminus\{0\}\,: \tag{1.8.4}$$

Դիցուք $\lambda\in\Omega(ab)\backslash\{0\}$: Դա նշանակում է, որ $\lambda\neq 0$ և գոյություն ունի $(\lambda e-ab)^{-1}$ հակադարձը: $(\lambda e-ba)^{-1}$-ի գոյությունը ցույց տալու և այն գտնելու համար նախ համարենք, թե

$$|\lambda|>\max\{\|ab\|\,,\,\|ba\|\} \tag{1.8.5}$$

և $(\lambda e-ba)^{-1}$–ը արտահայտենք $(\lambda e-ab)^{-1}$–ով: Օգտվելով 1.4.2 լեմմայից՝ կունենանք

$$\exists\,(\lambda e-ba)^{-1}=\left[\lambda\left(e-\frac{ba}{\lambda}\right)\right]^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(e-\frac{ba}{\lambda}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ba)^n}{\lambda^n}=\frac{1}{\lambda}\left[e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ba)^n}{\lambda^n}\right]:$$

Ունենք

$$(ba)^n=\underbrace{\underline{ba}\,\underline{ba}\ldots\underline{ba}}_{n}=b(\underbrace{\underline{ab}\,\underline{ab}\ldots\underline{ab}}_{n-1})a=b(ab)^{n-1}a\quad(n\geqslant 1),$$

ուստի

$$(\lambda e-ba)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left[e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(ab)^{n-1}a}{\lambda^n}\right]=\frac{1}{\lambda}\left[e+\frac{1}{\lambda}b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ab)^{n-1}}{\lambda^{n-1}}a\right],$$

և ստացված գումարում կատարելով $m=n-1$ գումարման ինդեքսի փոխարինում, կստանանք

$$(\lambda e-ba)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left[e+\frac{1}{\lambda}b\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ab)^m}{\lambda^m}a\right]:$$

Բայց քանի որ $\|ab\| < |\lambda|$, ուստի

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m}{\lambda^m} = \left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)^{-1},$$

և կստանանք

$$(\lambda e - ba)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left[e + \frac{1}{\lambda} b \left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)^{-1} a\right] =$$

$$\frac{1}{\lambda}\left\{e + b\left[\frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)^{-1}\right] a\right\} = \frac{1}{\lambda}\left\{e + b\left[\lambda\left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)\right]^{-1} a\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[e + b\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a\right],$$

$$(\lambda e - ba)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left[e + b(\lambda e - ab)^{-1} a\right] : \tag{1.8.6}$$

Այսպիսով, (1.8.5) պայմանի դեպքում տեղի ունի (1.8.6)–ը: Պարզ–վում է, որ եթե $\lambda \neq 0$ և $\exists\,(\lambda e - ab)^{-1}$, ապա $\exists\,(\lambda e - ba)^{-1}$, և տեղի ունի (1.8.6)–ը: Իրոք, նշանակենք

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[e + b\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a\right]$$

և ցույց տանք, որ

$$(\lambda e - ba)\, x = x\,(\lambda e - ba) = e : \tag{1.8.7}$$

Ունենք

$$(\lambda e - ba)\, x = \lambda x - bax = e + b\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a - \frac{ba}{\lambda} -$$

$$-\frac{bab}{\lambda}\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a = e - \frac{ba}{\lambda} + b\left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)(\lambda e - ab)^{-1}\, a =$$

$$= e - \frac{ba}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}\,(\lambda e - ab)\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a = e - \frac{ba}{\lambda} + \frac{ba}{\lambda} = e,$$

և նման ձևով

$$x(\lambda e - ba) = \lambda x - xba = e + b(\lambda e - ab)^{-1} a - \frac{ba}{\lambda} -$$

$$-\frac{1}{\lambda} b(\lambda e - ab)^{-1} aba = e - \frac{ba}{\lambda} + b(\lambda e - ab)^{-1}\left[e - \frac{ab}{\lambda}\right] a =$$

$$= \frac{\lambda e - ba}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}(\lambda e - ab)^{-1}(\lambda e - ab) a = e - \frac{ba}{\lambda} + \frac{ba}{\lambda} = e,$$

որտեղից էլ բխում է (1.8.7)–ը:

Արանով իսկ (1.8.4)–ը հիմնավորվեց: (1.8.4)-ում փոխելով a և b պառերի դերերը՝ կստանանք նաև

$$\Omega(ba) \setminus \{0\} \subset \Omega(ab) \setminus \{0\} : \tag{1.8.8}$$

(1.8.4)–ից և (1.8.8)–ից կբխի (1.8.3)–ը:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.8.1 (Լ'Պաժ)**:** *Եթե* $\exists k > 0$, *որ*

$$\rho(a) \geqslant k\,\|a\| \quad (\forall a \in A),$$

ապա A*–ն կոմուտատիվ է:*

Ապացույց: Ֆիքսենք կամայական $a, b \in A$ և ցույց տանք, որ

$$ab = ba :$$

Դիտարկենք

$$f(\lambda) = e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

ֆունկցիան ($e^{\lambda a}$, $e^{-\lambda a}$ էքսպոնենտներ են և ոչ թե A հանրահաշվի e միավորի աստիճաններ): Օգտվելով թեորեմի պայմանից և 1.8.2 լեմմայից՝ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ համար կունենանք

$$\|f(\lambda)\| = \left\|e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}\right\| \leqslant \frac{1}{k}\rho\left(e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}\right) = \frac{1}{k}\rho\left(b e^{-\lambda a} e^{\lambda a}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\rho(b) \leqslant \frac{\|b\|}{k} :$$

Բայց $f : \mathbb{C} \to A$ ուժեղ անալիտիկ է, ընդ որում

$$f'(\lambda) = e^{\lambda a}[a, b]e^{-\lambda a} \quad ([a, b] = ab - ba) :$$

Ստացվեց, որ ամբողջ $\mathbb{C}$–ի վրա անալիտիկ ֆունկցիան ուժեղ սահմանափակ է, ուստի ըստ Լիուվիլի թեորեմի՝ $f(\lambda)$–ն հաստատուն է: Հետևաբար $f'(\lambda) \equiv 0$: Մասնավորապես,

$$f'(0) = 0,$$

կամ որ նույնն է՝

$$[a, b] = 0,$$

$$ab = ba :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.8.4: Դիցուք A–ն և B–ն կոմպլեքս նորմավորված հանրահաշիվներ են: Այդ դեպքում կասենք, որ B–ն A–ի ընդլայնում է, եթե՝
1) $A \subset B$ և B–ում սահմանված գումարման, բազմապատկման, սկալյարով բազմապատկման գործողությունների նեղացումները A–ի վրա համընկնում են A–ում սահմանված համապատասխան գործողությունների հետ,
2) B–ի նորմի նեղացումը A–ի վրա համարժեք է A–ի նորմին:

1) պայմանը նշանակում է, որ A–ն հանդիսանում է B–ի գծային ենթապարածություն է և ենթաօղակ: Ընդ որում, քանի որ A–ն նորմավորված հանրահաշիվ է, ուստի A–ում կա միավոր: Երբեմն լրացուցիչ շեշտում են, որ A–ն պարունակում է B–ի միավորը: 2) պայմանը նշանակում է, որ B–ի նորմը A–ում ծնում է նույն զուգամիտությունը, ինչ որ A–ի նորմը: Երբեմն պահանջում են, որ B–ի նորմի նեղացումն A–ի վրա ուղղակի համընկնի A–ի նորմի հետ:

Մեզ կհետաքրքրի այն դեպքը, երբ A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ B–ն նրա բանախյան ընդլայնումն է:

Սահմանում 1.8.5: $a \in A$ տարրը կոչվում է 0–ի տոպոլոգիական բաժանարար, եթե

$$\inf \{\|ax\| + \|xa\| : \ x \in S(A)\} = 0,$$

որտեղ, ինչպես միշտ,

$$S(A) = \{x \in A : \|x\| = 1\} = \partial B(0,1) :$$

Այլ կերպ ասած, a–ն կոչվում է 0–ի տոպոլոգիական բաժանարար, եթե $\exists\{x_n\}_1^\infty \subset S(A)$, այնպես, որ

$$ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad x_n a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 :$$

Կարելի է նաև սահմանել նաև 0–ի ձախ և աջ տոպոլոգիական բաժանարարներ (դրանք այնպիսի a–երն են, որոնց համար համապատասխանաբար $ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ կամ $x_n a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), և այդ դեպքում վերը սահմանված 0–ի տոպոլոգիական բաժանարարը կկոչվի երկկողմանի: Հետագայում մեզ պետք կգան միայն երկկողմանի բաժանարարներ:

Լեմմա 1.8.4: *Եթե $\{a_n\}_1^\infty \subset A^{-1}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $a \in \partial A^{-1}$ էլեմենտին, ապա $\left\|a_n^{-1}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$:*

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ $\left\|a_n^{-1}\right\| \not\to \infty$: Այդ դեպքում $\left\{\left\|a_n^{-1}\right\|\right\}_{n=1}^\infty$ հաջորդականությունից կարելի է անջատել $\left\{\left\|a_{n_k}^{-1}\right\|\right\}_{k=1}^\infty$ սահմանափակ ենթահաջորդականություն: Դիցուք

$$\left\|a_{n_k}^{-1}\right\| \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots) :$$

k_0 համարն ընտրենք այնպես, որ

$$\|a_{n_k} - a\| < \frac{1}{M} \quad (k > k_0) :$$

Այդ դեպքում $k > k_0$ համար կունենանք

$$\left\|e - a_{n_k}^{-1} a\right\| = \left\|a_{n_k}^{-1}(a_{n_k} - a)\right\| \leqslant \left\|a_{n_k}^{-1}\right\| \cdot \|a_{n_k} - a\| < 1,$$

ուստի $a_{n_k}^{-1} a \in A^{-1}$ $(k > k_0)$ և հետևաբար (քանի որ A^{-1}–ը խումբ է) $a = a_{n_k}\left(a_{n_k}^{-1} a\right) \in A^{-1}$, ինչը հակասություն է, քանի որ A^{-1}–ը բաց է, իսկ $a \in \partial A^{-1}$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.8.2: *∂A^{-1}–ի կետերը 0–ի տոպոլոգիական բաժանարարներ են:*

Ապացույց: Դիցուք $a \in \partial A^{-1}$ կամայական կետ է: Ընտրենք որևէ $\{a_n\}_1^\infty \subset A^{-1}$, որ $a_n \to a$: Ըստ նախորդ լեմմայի՝ $\|a_n^{-1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$: Նշանակենք $x_n = \frac{a_n^{-1}}{\|a_n^{-1}\|}$: Պարզ է, որ $\{x_n\}_1^\infty \subset S(A)$: Ցույց տանք, որ

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n a = 0 :$$

Ցույց տանք գրված առնչություններից առաջինը (մյուսն ապացուցվում է ճիշտ նույն ձևով): Ունենք

$$\|ax_n\| = \|ax_n - a_n x_n + a_n x_n\| \leqslant \|(a-a_n)x_n\| + \|a_n x_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \|a-a_n\| \cdot \|x_n\| + \left\| a_n \cdot \frac{a_n^{-1}}{\|a_n^{-1}\|} \right\| = \|a-a_n\| + \frac{1}{\|a_n^{-1}\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.8.6: $A \setminus A^{-1}$–ի էլեմենտներին կանվանենք A հանրահաշվի սինգուլյար էլեմենտներ: Կնշանակենք

$$\operatorname{sing}(A) = A \setminus A^{-1} :$$

Սահմանում 1.8.7: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է ժառանգական սինգուլյար, եթե A բանախյան հանրահաշվի ցանկացած B բանախյան ընդլայնման համար $a \in \operatorname{sing}(B)$:

Թեորեմ 1.8.3: *0–ի տոպոլոգիական բաժանարարները ժառանգական սինգուլյար էլեմենտներ են:*

Ապացույց: Դիցուք $a \in A$ հանդիսանում է 0–ի տոպոլոգիական բաժանարար, իսկ B–ն A–ի կամայական բանախյան ընդլայնում է: Ցույց տանք, որ $a \in \operatorname{sing}(B)$: Ենթադրենք հակառակը՝ $a \in B^{-1}$: Այդ դեպքում $\exists b \in B$, որ

$$ba = ab = e :$$

Ըստ պայմանի՝ $\exists \{x_n\}_1^\infty \subset S(A)$, որ A–ի նորմով

$$ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad x_n a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 : \tag{1.8.9}$$

Քանի որ B–ի նորմը A–ում ծնում էր նույն զուգամիտությունը, ինչ որ A–ի նորմը, ուստի (1.8.9) առնչությունները տեղի ունի նաև B–ի նորմով, և արտադրյալի անընդհատությունից կբխի, որ (B–ի նորմով)

$$x_n = b(ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 :$$

Քանի որ $\{x_n\}_1^\infty \subset A$, ուստի նաև A–ի նորմով $x_n \to 0$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ

$$\|x_n\|_A = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.8.2: *∂A^{-1}–ի կետերը ժառանգական սինգուլյար էլեմենտներ են:*

Ապացույցը բխում է 1.8.2 և 1.8.3 թեորեմներից: ►

Թեորեմ 1.8.4: *Դիցուք V–ն և W–ն X տոպոլոգիական տարածության բաց ենթաբազմություններ են, ընդ որում $V \subset W$ և $W \cap \partial V = \emptyset$: Այդ դեպքում V–ն հանդիսանում է W–ի ինչ–որ կոմպոնենտների միավորումը:*

Ապացույց: $\mathcal{F}$–ով նշանակենք W–ի բոլոր այն կոմպոնոնտների բազմությունը, որոնք հատվում են V–ի հետ: Դիցուք $\Omega \in \mathcal{F}$ կամայական կոմպոնենտ է: Ցույց տանք, որ $\Omega \subset V$: Նշանակենք $U = X \setminus \overline{V}$: Քանի որ $W \cap \partial V = \emptyset$ և $\Omega \subset W$, ուստի $\Omega \cap \partial V = \emptyset$ և հետևաբար

$$\Omega = (\Omega \cap V) \cup (\Omega \cap U) :$$

Այստեղ $(\Omega \cap V)$-ն և $(\Omega \cap U)$-ն բաց են, ընդ որում $\Omega \cap V \neq \emptyset$: Ուստի, Ω–ի կապակցվածությունից կբխի, որ $\Omega \cap U = \emptyset$ և հետևաբար՝

$$\Omega = \Omega \cap V \subset V :$$

Ստացվեց, որ $\forall \Omega \in \mathcal{F}$ համար $\Omega \subset V$, ուստի

$$V = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{F}} \Omega :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիցուք B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում: Այդ դեպքում $A^{-1} \subset B^{-1}$ ակնհայտ առնչությունից բխում է, որ $\forall a \in A$ համար

$$\Omega_A(a) \subset \Omega_B(a) \tag{1.8.10}$$

և հետևաբար՝

$$\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a) : \tag{1.8.11}$$

1.8.4 թեորեմից օգտվելով՝ կարող ենք ստանալ առավել սպառիչ ինֆորմացիա՝ $\sigma_A(a)$ և $\sigma_B(a)$ սպեկտրների միջև եղած կապի մասին:

Թեորեմ 1.8.5: *Դիցուք B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում: Այդ դեպքում՝*

1) A^{-1}–ը հանդիսանում է $A \cap B^{-1}$ բազմության որոշ կոմպոնենտների ընտանիքի (որը կարող է լինել դատարկ) միավորումը,

2) $\forall a \in A$ համար $\sigma_A(a)$–ն հանդիսանում է $\sigma_B(a)$–ի և $\Omega_B(a)$–ի որոշ սահմանափակ կոմպոնենտների ընտանիքի (որը կարող է լինել դատարկ) միավորումը: Մասնավորապես, $\partial\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$:

Ապացույց: 1) A^{-1}–ը և $A \cap B^{-1}$–ը հանդիսանում են A–ում բաց բազմություններ (վերջին բազմության բաց լինելը բխում է նրանից, որ A–ում B–ից մակածված (ինդուկցված) տոպոլոգիան բաղկացած է $A \cap V$ տեսքի բազմություններից, որտեղ V–ն բաց է B–ում): Ունենք նաև, որ $A^{-1} \subset A \cap B^{-1}$, ուստի ըստ նախորդ թեորեմի՝ բավական է ցույց տալ, որ

$$\partial A^{-1} \cap \left(A \cap B^{-1}\right) = \varnothing : \tag{1.8.12}$$

Քանի որ A–ն փակ է, ուստի $\partial A^{-1} \subset A$ և (1.8.12)–ը կնշանակի, որ

$$\partial A^{-1} \cap B^{-1} = \varnothing : \tag{1.8.13}$$

(1.8.13)–ը ցույց տանք հակասող ենթադրության մեթոդով՝ դիցուք

$$\exists a \in \partial A^{-1} \cap B^{-1} :$$

Այդ դեպքում $\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A^{-1}$, որ $a_n \to a$: Քանի որ B^{-1}–ի վրա որոշված $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումը անընդհատ է (նույնիսկ դի–ֆերենցելի է), ուստի

$$a_n^{-1} \longrightarrow a^{-1}$$

և հետևաբար $\left\{\left\|a_n^{-1}\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ինչը հակասում է 1.8.4 լեմմային:

2) Նկատենք, որ

$$\partial\Omega_A(a) \cap \Omega_B(a) = \varnothing : \tag{1.8.14}$$

Իրոք, դիցուք $\lambda_0 \in \partial\Omega_A(a)$: Այդ դեպքում, հեշտ է տեսնել, որ $\lambda_0 e - a \in \partial A^{-1}$, ուստի (1.8.13)–ից կբխի, որ $\lambda_0 e - a \notin B^{-1}$, այսինքն՝ $\lambda_0 \notin \Omega_B(a)$:

Քանի որ $\Omega_A(a)$, $\Omega_B(a)$ բաց են, ուստի (1.8.10), (1.8.14), առնչու–թյուններից և 1.8.4 թեորեմից կբխի, որ $\Omega_A(a)$–ն հանդիսանում է $\Omega_B(a)$ –ի որոշ կոմպոնենտների միավորումը: Հետևաբար, $\Omega_B(a)$–ի մնացած կոմպոնենտները չեն կարող հատվել $\Omega_A(a)$ –ի հետ (երկու կոմպոնենտներ կա՛մ չեն հատվում, կա՛մ համընկնում են), ուստի այդ կոմպոնենտները կպարունակվեն $\sigma_A(a)$–ում (ավելին, դրանք կպա–րունակվեն $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ում): Ստացվեց, որ $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ն իր մեջ ամբողջությամբ պարունակում է $\Omega_B(a)$-ի որոշ կոմպոնենտներ և չի հատվում $\Omega_B(a)$–ի մնացած կոմպոնենտների հետ: Քանի որ

$$\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a) \subset \Omega_B(a),$$

ուստի այստեղից կբխի, որ $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ն հանդիսանում է $\Omega_B(a)$–ի որոշ կոմպոնենտների միավորումը: Այդ կոմպոնենտները կլինեն սահմանափակ, քանի որ սահմանափակ է $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ն:

(1.8.14)–ից բխում է, որ

$$\partial\sigma_A(a) = \partial\Omega_A(a) \subset \sigma_B(a) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.8.3: *Եթե A բանախյան հանրահաշվի a էլեմենտի $\sigma_A(a)$ սպեկտրն ամենուրեք նոսր է, ապա A–ի ցանկացած B բանախյան ընդլայնման համար*

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(a) :$$

Ապացույց: Իրոք, կունենանք $\sigma_A(a) = \partial\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$, և քանի որ $\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a)$ հակառակ ներդրումը միշտ ճիշտ է, ուստի $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$: ►

Հետևանք 1.8.4: *Եթե B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում, $a \in A$ և $\sigma_B(a)$–ի լրացումը կապակցված է, ապա*

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(a) :$$

Ապացույց: Իրոք, դիտարկվող դեպքում $\Omega_B(a)$–ն չունի սահմանափակ կոմպոնենտներ (չէ՞ որ $\sigma_B(a)$–ն կոմպակտ է): ►

Վերը նշված հետևանքի ամենակարևոր կիրառությունը վերաբերում է $\sigma_B(a) \subset \mathbb{R}$ դեպքին (ակնհայտ է, որ $\sigma_B(a)$–ի կոմպակտության շնորհիվ $\sigma_B(a) \subset \mathbb{R}$ դեպքում $\Omega_B(a)$–ն կապակցված է):

Դիտողություն 1.8.1: Նկատենք, որ նախորդ թեորեմի պայմաններում

$$\partial\sigma_A(a) \subset \partial\sigma_B(a) : \tag{1.8.15}$$

◄ Իրոք, (1.8.11)–ից բխում է, որ

$$int\,\sigma_B(a) \subset \operatorname{int}\sigma_A(a) :$$

Ըստ 1.8.5 թեորեմի՝

$$\partial\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a) :$$

Կունենանք

$$\partial\sigma_A(a) \cap [int\,\sigma_B(a)] \subset \partial\sigma_A(a) \cap (int\,\sigma_A(a)) = \emptyset,$$

ուստի $\partial\sigma_A(a)$–ի կետերը չեն կարող լինել $\sigma_B(a)$–ի ներքին կետեր, և հետևաբար հանդիսանում են $\sigma_B(a)$–ի եզրային կետեր: ►

Օրինակ: Դիցուք $A = A(T)$, $B = C(T)$ և $a(z) = z$ $(z \in T)$: Այդ դեպքում կունենանք $\sigma_A(a) = \overline{D}(0,1)$, $\sigma_B(a) = T$ և հետևաբար $\sigma_B(a) = \partial\sigma_A(a)$:

Խնդիր: Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $a \in A$ որևէ էլեմենտ է: Դիտարկենք A–ի որևէ B բանախյան ընդլայնում: (1.8.15) առնչության շնորհիվ A–ն ընդլայնելիս a էլեմենտի սպեկտրի եզրի կետերի թիվն ավելանում է, հետևաբար ավելանում է ընդհանրապես a–ի սպեկտրի ժառանգական սինգուլյար կետերի թիվը ($\lambda \in \sigma_A(a)$ կետը կոչվում է ժառանգական սինգուլյար, եթե այդպիսին է $\lambda e - a \in A$ էլեմենտը): Հարցը հետևյալն է՝ կարելի՞ է արդյոք գտնել A–ի այնպիսի B ընդլայնում, որ $\sigma_B(a)$–ն բաղկացած լինի միայն ժառանգական սինգուլյար կետերից: ►

Թեորեմ 1.8.6: *Դիցուք A բանախյան հանրահաշվի համար $\exists M > 0$ թիվ, որ*

$$\|x\| \cdot \|y\| \leqslant M \|xy\| \quad (\forall x, y \in A) : \tag{1.8.16}$$

Այդ դեպքում A–ն իզոմորֆ–իզոմետրիկ է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս թվերի դաշտին:

Ապացույց: Ցույց տանք, որ $A^{-1} = A \setminus \{0\}$: Նախ համոզվենք, որ

$$\partial A^{-1} = \{0\} : \tag{1.8.17}$$

Իրոք, դիցուք $a \in \partial A^{-1}$: $\exists \{a_n\}_1^\infty \subset A^{-1}$, որ $a_n \to a$: Ըստ 1.8.4 լեմմայի՝ $\left\|a_n^{-1}\right\| \to \infty$, հետևաբար

$$\|a_n\| = \frac{\|a_n\| \left\|a_n^{-1}\right\|}{\left\|a_n^{-1}\right\|} \leqslant \frac{M \left\|a_n \cdot a_n^{-1}\right\|}{\left\|a_n^{-1}\right\|} = \frac{M\|e\|}{\left\|a_n^{-1}\right\|} = \frac{M}{\left\|a_n^{-1}\right\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

որտեղից կստացվի, որ

$$\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0 \Rightarrow a = 0 :$$

Այժմ դիցուք $a \in A$ կամայական ոչ 0–ական էլեմենտ է, ցույց տանք, որ $a \in A^{-1}$: Քանի որ $\sigma(a)$–ն դատարկ չէ և կոմպակտ է, ուստի $\partial\sigma(a) \neq \varnothing$: Դիցուք $\lambda \in \partial\sigma(a)$: Այդ դեպքում կունենանք $\lambda e - a \in \partial A^{-1}$ և (1.8.17)–ից կբխի, որ $\lambda e - a = 0$, կամ՝

$$a = \lambda e :$$

Քանի որ $a \neq 0$, ուստի $\lambda \neq 0$ և հետևաբար $\lambda^{-1} e$ էլեմենտը կհանդիսանա a–ի համար հակադարձ էլեմենտ: Այսպիսով՝ $a \in A^{-1}$: Հետևաբար մեր պնդումը կբխի Գելֆանդ–Մազուրի թեորեմից: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.8.7: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $a \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, և $\sigma(a) \subset \Omega$: Այդ դեպքում $\exists \delta > 0$, այնպես, որ $\|b\| < \delta$ պայմանին բավարարող ցանկացած $b \in A$ էլեմենտի համար $\sigma(a+b) \subset \Omega$:*

Ապացույց: $\mathbb{C}\setminus\Omega$–ն $\Omega(a)$–ում ընկած փակ բազմություն է: Նկատենք, որ $R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}$ ֆունկցիան $\mathbb{C}\setminus\Omega$ բազմության վրա սահմանափակ է: Իրոք, $|\lambda| > \|a\|$ համար ունենք $\left\|\dfrac{a}{\lambda}\right\| < 1$, ուստի

$$R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1} = \left[\lambda\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\lambda^n},$$

$$\|R_a(\lambda)\| \leqslant |\lambda|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{a^n}{\lambda^n}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{a}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\left\|\frac{a}{\lambda}\right\|},$$

ինչը ցույց է տալիս, որ $|\lambda| > \|a\|$ համար $R_a(\lambda)$–ն սահմանափակ է և դեռ ավելին՝

$$R_a(\lambda) \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0 :$$

Նշանակենք

$$E_1 = (\mathbb{C}\setminus\Omega) \cap \overline{D}(0, \|a\|), \quad E_2 = (\mathbb{C}\setminus\Omega) \setminus \overline{D}(0, \|a\|) :$$

E_1–ը կոմպակտ է, իսկ $R_a(\lambda)$–ն անընդհատ է E_1–ի վրա (հիշենք, որ $R_a(\lambda)$–ն իր որոշման տիրույթում անալիտիկ է), ուստի $R_a(\lambda)$–ն E_1–ի վրա սահմանափակ է: Այսպիսով,

$$\mathbb{C}\setminus\Omega = E_1 \cup E_2,$$

և $R_a(\lambda)$–ն E_1, E_2 բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա սահմանափակ է, ուստի այն կլինի սահմանափակ $\mathbb{C}\setminus\Omega$–ի վրա՝ $\exists M > 0$, որ

$$\|R_a(\lambda)\| \leqslant M \quad (\lambda \in \mathbb{C}\setminus\Omega) :$$

$\delta > 0$ ընտրենք այնպես, որ $\delta M \leqslant 1$: Այդ դեպքում կունենանք, որ $\|b\| < \delta$ և $\lambda \notin \Omega$ համար

$$\left\|(\lambda e - a)^{-1}b\right\| \leqslant \left\|(\lambda e - a)^{-1}\right\| \cdot \|b\| = \|R_a(\lambda)\| \cdot \|b\| < \delta M \leqslant 1$$

ուստի
$$e - (\lambda e - a)^{-1} b \in A^{-1}$$
և քանի որ $\lambda e - a \in A^{-1}$, իսկ
$$\lambda e - (a + b) = (\lambda e - a)\left[e - (\lambda e - a)^{-1} b\right],$$
ուստի $\lambda e - (a + b) \in A^{-1}$ և հետևաբար $\lambda \notin \sigma(a + b)$:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 1.9. Սպեկտրալ շառավղի կիսանընդհատությունը

Սահմանում 1.9.1: Դիցուք X–ը մետրիկական փարածություն է, $f : X \to \mathbb{R}$ արտապատկերում է, իսկ $x_0 \in X$: Այդ դեպքում կասենք, որ f ֆունկցիան x_0 կետում վերևից (ներքևից) կիսանընդհատ է, եթե $\forall \varepsilon > 0$ համար $\exists \delta > 0$, այնպես, որ $\rho(x, x_0) < \delta$ համար
$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (f(x) > f(x_0) - \varepsilon):$$
Կասենք f–ը X–ի վրա վերևից (ներքևից) կիսանընդհատ է, եթե f–ը վերևից (ներքևից) կիսանընդհատ է X–ի յուրաքանչյուր կետում:

Պարզ է, որ f–ը x_0 կետում անընդհատ կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ այն x_0 կետում կիսանընդհատ է միաժամանակ վերևից և ներքևից:

Թեորեմ 1.9.1: *Ցանկացած A բանախյան հանրահաշվի համար ρ սպեկտրալ շառավիղը A–ի վրա վերևից կիսանընդհատ է:*

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $a \in A$ կետ և ցույց տանք, որ ρ–ն a կետում վերևից կիսանընդհատ է: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Ունենք
$$\sigma(a) \subset \overline{D}(0, \rho(a)) \subset D(0, \rho(a) + \varepsilon)$$
ուստի թեորեմ 1.8.7-ից կբխի, որ $\exists \delta > 0$, այնպես, որ $\|b - a\| < \delta$ դեպքում
$$\sigma(b) = \sigma(a + (b - a)) \subset D(0, \rho(a) + \varepsilon),$$

որտեղից էլ կբխի, որ $\|b-a\| < \delta$ համար

$$\rho(b) < \rho(a) + \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.9.2: Դիցուք X, Y-ը տոպոլոգիական տարածություններ են և $\varphi : X \to 2^Y$: Կասենք, որ φ-ն $x_0 \in X$ կետում կիսանընդհատ է վերևից, եթե $\forall V \supset \varphi(x_0)$ շրջակայքի համար $\exists U \ni x_0$ շրջակայք, որ $\varphi(x) \supset V$ $(x \in U)$:

Թեորեմ 1.8.7-ից բխում է, որ $\varphi : A \to 2^{\mathbb{C}}$, $\varphi(a) = \sigma(a)$ ֆունկցիան A-ի վրա վերևից կիսանընդհատ է:

Խնդիր: Դիցուք X, Y մետրիկական տարածություններ են, Y-ը կոմպակտ է, և $\varphi : X \to 2^Y$: Ապացուցել կիսանընդհատության հետևյալ հայտանիշը. որպեսզի φ-ն X-ի վրա լինի կիսանընդհատ վերևից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $x_n \in X$, $y_n \in \varphi(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow y \in \varphi(x)$:

Սպեկտրալ շառավիղը, ընդհանրապես ասած, խզվող ֆունկցիա է: Համապատասխան օրինակը կառուցելու նպատակով նախ մի փոքր խոսենք կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատորների մասին:

Դիցուք H–ն անվերջ չափանի սեպարաբել կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է,

$$e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

հաջորդականությունը H–ի օրթոնորմավորված բազիս է, իսկ $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ սահմանափակ հաջորդականություն է՝

$$\alpha = \sup_n |\alpha_n| < \infty : \tag{1.9.1}$$

Կառուցենք $A : H \to H$ օպերատորը հետևյալ կերպ: e_n վեկտորների վրա A–ն սահմանենք

$$Ae_n = \alpha_n e_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.9.2}$$

բանաձևով: Եթե $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n e_n \in H$ կամայական վեկտոր է, ապա Ax–ը կսահմանենք

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A e_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n e_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \alpha_{n-1} e_n \tag{1.9.3}$$

բանաձևով: Քանի որ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ շարքի զուգամիտության շնորհիվ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

ուստի (1.9.1)–ից կբխի, որ նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n-1}\alpha_{n-1}|^2 < \infty,$$

և հետևաբար (1.9.3)–ի աջ մասում գրված շարքը զուգամետ է: Հեշտ է տեսնել, որ A օպերատորը գծային է: Կամայական $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n \in H$ վեկտորի համար ունենք

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{n-1}\alpha_{n-1}|^2 \leqslant \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_{n-1}|^2 = \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \alpha^2 \|x\|^2,$$

այսինքն՝

$$\|Ax\| \leqslant \alpha \|x\| \quad (x \in H):$$

Հետևաբար A օպերատորը սահմանափակ է, և $\|A\| \leqslant \alpha$: Մյուս կողմից, $n \geqslant 0$ համար

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ae_n\| = \|\alpha_n e_{n+1}\| = |\alpha_n|,$$

ուստի

$$\alpha = \sup_n |\alpha_n| \leqslant \|A\|,$$

և հետևաբար

$$\|A\| = \alpha : \tag{1.9.4}$$

A օպերատորը կոչվում է α_n կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատոր:[2]

Հաշվենք A–ի սպեկտրալ շառավիղը: Դիցուք $k \in \mathbb{N}$ կամայական թիվ է: Նշանակենք

$$\alpha_n^{(k)} = \alpha_n \alpha_{n+1} \cdots \alpha_{n+(k-1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\alpha^{(k)} = \sup_n \left|\alpha_n^{(k)}\right| :$$

Կունենանք $\alpha^{(k)} < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, և հեշտ է տեսնել, որ A^k–ն կհանդիսանա $\alpha_n^{(k)}$ կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատոր:[3] Ուստի ըստ (1.9.4) բանաձևի՝

$$\left\|A^k\right\| = \alpha^{(k)} = \sup_n \left|\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{n+i}\right|,$$

և հետևաբար՝

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \sup_{m\geqslant 0} \left|\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{m+i}\right|^{\frac{1}{k}} : \tag{1.9.5}$$

Օգտագործելով կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատորները՝ կառուցենք $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ նիլպոտենտ օպերատորների հաջորդականություն, որը ըստ օպերատորային նորմի զուգամիտում է դրական սպեկտրալ շառավիղ ունեցող օպերատորի: Նշված հաջորդականության օրինակը պատկանում է Կակուտանիին:

Ընտրենք որևէ $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ դրական թվերի հաջորդականություն՝ այնպես, որ $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ և

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln \varepsilon_k}{2^{k+1}}$$

[2] Դիցուք $p \in \mathbb{N}$ կամայական թիվ է: Դժվար չէ տեսնել, որ (1.9.2)–ը $Ae_n = \alpha e_{n+p}$ առնչությունով փոխարինելիս ևս (1.9.4)–ը կմնա ուժի մեջ:

[3] տես տողատակում արված նախորդ դիտողությունը:

շարքը լինի զուգամետ (օրինակ, $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$)։ $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականությունը կառուցենք հետևյալ կերպ։ $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր երկրորդ անդամը (սկսած ամենաառաջինից) վերցնենք հավասար ε_0–ի, այսինքն՝

$$\alpha_0 = \varepsilon_0,\ \alpha_2 = \varepsilon_0,\ \alpha_4 = \varepsilon_0, \ldots\ :$$

$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության մնացած անդամներից յուրաքանչյուր երկրորդը վերցնենք հավասար ε_1–ի, այսինքն՝

$$\alpha_1 = \varepsilon_1,\ \alpha_5 = \varepsilon_1,\ \alpha_9 = \varepsilon_1,\ \ldots\ :$$

Այնուհետև $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության հաջորդականության մնացած անդամներից յուրաքանչյուր երկրորդը վերցնենք հավասար ε_3–ի և այլն։ Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ դրական թվերի հաջորդականություն, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_3,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0, \ldots :$$

A–ով նշանակենք α_n կշիռներով միակողմանի փեղաշարժի օպերատորը։ $k \geqslant 0$ համար $\left\{\alpha_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$–ով նշանակենք այն հաջորդականությունը, որը ստացվում է $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության մեջ բոլոր ε_k–երը 0–ներով փոխարինելիս։ A_k–ով նշանակենք $\alpha_n^{(k)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ կշիռներով միակողմանի փեղաշարժի օպերատորը։ Օրինակ, A_2–ին համապատասխան կշիռների հաջորդականությունը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, 0,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_3,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, 0,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0, \ldots :$$

Կառուցումից և վերը կշիռներով միակողմանի փեղաշարժի օպերատորի աստիճանների համար ստացված ներկայացումից բխում է, որ

$$A_k^{2^{k+1}} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $A - A_k$ օպերատորները ևս հանդիսանում են կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատորներ, ընդ որում

$$\|A - A_k\| = \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) :$$

Հետևաբար $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$-ը նիլպոտենտ օպերատորների հաջորդականություն է, որը օպերատորային նորմով զուգամիտում է A օպերատորին: Համոզվենք, որ $\rho(A) > 0$: Դրա համար նկատենք, որ

$$\alpha_0 = \varepsilon_0,$$

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2 = \varepsilon_0^2\varepsilon_1,$$

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 = \varepsilon_0^4\varepsilon_1^2\varepsilon_2,$$

և ընդհանրապես, եթե $n = 2^p - 2$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, ապա

$$\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n = \varepsilon_0^{2^{p-1}}\varepsilon_1^{2^{p-2}}\cdots\varepsilon_{p-1} :$$

Ուստի $n = 2^p - 2$ համար

$$\ln(\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n) = \sum_{k=0}^{p-1} 2^{p-1-k}\ln\varepsilon_k = 2^p\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}},$$

կամ

$$\ln\left[\prod_{i=0}^{n}\alpha_i\right]^{\frac{1}{n+1}} = \frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}} : \qquad (1.9.6)$$

Քանի որ $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}$ շարքը զուգամետ է, ուստի

$$\frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}$$

հաջորդականությունը ներքևից սահմանափակ է: Հետևաբար

$$e^{\frac{2^p}{2^p-1}\sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}}$$

հաջորդականությունը կլինի ներքևից սահմանափակ ինչ–որ $r > 0$ թվով: Նշանակենք

$$k_p = 2^p - 1 \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

այդ դեպքում (վերցնելով $n = 2^p - 2$) (1.9.6)–ից կստանանք

$$\sup_{m\geqslant 0}\left|\prod_{i=0}^{k_p-1}\alpha_{m+i}\right|^{\frac{1}{k_p}} \geqslant \left|\prod_{i=0}^{k_p-1}\alpha_i\right|^{\frac{1}{k_p}} = \left[\prod_{i=0}^{2^p-2}\alpha_i\right]^{\frac{1}{2^p-1}} =$$

$$= \left[\prod_{i=0}^{n}\alpha_i\right]^{\frac{1}{n+1}} \geqslant r,$$

և (1.9.5)–ից կբխի, որ

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty}\sup_{m\geqslant 0}\left|\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{m+i}\right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{p\to\infty}\sup_{m\geqslant 0}\left|\prod_{i=0}^{k_p-1}\alpha_{m+i}\right|^{\frac{1}{k_p}} \geqslant r :$$

Այսպիսով, $\rho(A) \geqslant r > 0$:

Ստացվածը ցույց է տալիս, որ $A_n \to A$ առնչությունից չի բխում, որ $\rho(A_n) \to \rho(A)$ (չէ՞ որ $\rho(A_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, իսկ $\rho(A) > 0$), այսինքն՝ սպեկտրալ շառավիղը խզվում է:

§ 1.10. Թվային պատկեր և հանրահաշվական թվային պատկեր

Դիցուք H-ը կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է: Դիտարկենք $BL\,(H)$ գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշիվը:

Սահմանում 1.10.1: $T \in BL(H)$ օպերատորի թվային պատկեր է կոչվում

$$W(T) = \{(Tx, x) : \ \|x\| = 1\}$$

բազմությունը:

Տյոպլից-Խաուսդորֆի թեորեմ: $\forall T \in BL(H)$ համար $W(T)$-ն ուռուցիկ բազմություն է:

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ►

Խնդիր: Բերել օպերատորի օրինակ, որի թվային պատկերը փակ չէ:

Թեորեմ 1.10.1: *$\forall T \in BL(H)$ համար $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$:*

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ►

Հետևանք 1.10.1: *$\forall T \in BL(H)$ համար $\operatorname{conv} \sigma(T) \subset \overline{W(T)}$:*

Ապացույցը բխում է նախորդ թեորեմից և Տյոպլից-Խաուսդորֆի թեորեմից:

Ֆիքսենք կամայական $x \in H$, $\|x\| = 1$: Դիտարկենք $BL(H)$-ի վրա որոշված

$$\varphi_x(T) = (Tx, x)$$

ֆունկցիոնալը: $\forall T \in BL(H)$ համար ունենք

$$|\varphi_x(T)| = |(Tx, x)| \leqslant \|Tx\| \cdot \|x\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\|,$$

ուստի φ_x-ը սահմանափակ է և $\|\varphi_x\| \leqslant 1$: Մյուս կողմից

$$\varphi_x(I) = 1,$$

ուստի $\|\varphi_x\| = 1$:

Այժմ դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է, A^*-ը A-ի համալուծն է, իսկ

$$S(A^*) = \{\varphi \in A^* : \ \|\varphi\| = 1\} :$$

Նշանակենք

$$\mathcal{P}(A, x) = \{\varphi \in S(A^*) : \ \varphi(x) = 1\} \quad (x \in H) :$$

$\mathcal{P}(A, e)$-ի փոխարեն կգրենք $\mathcal{P}(A)$: $\mathcal{P}(A)$-ին կանվանենք նորմալիզացված վիճակների բազմություն, իսկ նրա էլեմենտներին՝ նորմալիզացված վիճակներ: Ըստ Բանախ-Ալաօգլուի թեորեմի՝ $S(A^*)$-ը թույլ կոմպակտ է, ուստի $\mathcal{P}(A)$-ն ևս կլինի թույլ* կոմպակտ: Ակնհայտ է, նաև, որ $\mathcal{P}(A)$-ն ուռուցիկ է, այսինքն՝ եթե $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(A)$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, ապա $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathcal{P}(A)$:

Վերն ասվածից բխում է, որ $\varphi_x \in \mathcal{P}\left(BL\left(H\right)\right)$:

Սահմանում 1.10.2: $a \in A$ էլեմենտի հանրահաշվական թվային պատկեր է կոչվում

$$V(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \mathcal{P}(A)\}$$

բազմությունը:

Քանի որ $\mathcal{P}(A)$-ն թույլ* կոմպակտ է, ուստի $V(a)$-ն կլինի $\mathbb{C}$-ում կոմպակտ բազմություն: Հեշտ է տեսնել, որ $V(a)$-ն նաև ուռուցիկ է:

Թեորեմ 1.10.2: *$\forall T \in BL(H)$ համար $\overline{W(T)} = V(T)$:*

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ►

Եթե ուզում ենք ընդգծել, որ a էլեմենտի հանրահաշվական թվային պատկերը դիտարկվում է A հանրահաշվի նկատմամբ, ապա $V(a)$-ի փոխարեն կգրենք $V(a, A)$:

Դիցուք B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում, և $a \in A$: Նկատենք, որ

$$V(a, A) = V(a, B) :$$

Իրոք, ըստ Հան Բանախի թեորեմի $\varphi \to \varphi|_A$ արտապատկերումը $\mathcal{P}(B)$-ն արտապատկերում է $\mathcal{P}(A)$-ի վրա: Հիշենք, որ $\sigma_A(a)$-ն և $\sigma_B(a)$-ն կարող են իրարից տարբեր լինել:

Բերենք հանրահաշվական թվային պատկերի որոշ հատկություններ:

1° $\forall a \in A$ համար $V(a) \subset \overline{B}(0, \|a\|)$:

◄ Իրոք, $\lambda \in V(a)$ համար ունենք $|\lambda| = |\varphi(a)| \leqslant \|a\|$: ►

2° Դիցուք $a, b \in A$, իսկ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: Այդ դեպքում՝

1) $V(a + b) \subset V(a) + V(b)$,

2) $V(\alpha e + \beta a) = \alpha + \beta V(a)$:

Ապացույցն ակնհայտ է: ►

3° $\forall a \in A$ համար

$$V(a) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\left(z, \|ze - a\|\right) :$$

Ապացույց: Դիցուք $\lambda \in V(a) \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{P}(A)$ այնպես, որ $\lambda = \varphi(a)$: Այդ դեպքում $\forall z \in \mathbb{C}$ համար կունենանք

$$|z - \lambda| = |\varphi(ze) - \varphi(a)| = |\varphi(ze - a)| \leqslant \|ze - a\|,$$

ուստի $\lambda \in \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)$: Այսպիսով՝

$$V(a) \subset \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)\ :$$

Այժմ ցույց տանք, որ նաև

$$\bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - a\|) \subset V(a)\ :$$

Դիցուք $\lambda \in \bigcap\limits_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)$: Եթե a-ն և e-ն գծորեն կախյալ են, ապա կունենանք $a = \mu e$, ուստի

$$V(a) = \{\mu\}\ :$$

Ունենք $\lambda \in \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)$ $(\forall z \in \mathbb{C})$, որտեղ վերցնելով $z = \mu$, կստանանք $\lambda = \mu \in V(a)$:

Այժմ դիցուք a-ն և e-ն գծորեն անկախ են: Նշանակենք $L = \mathrm{sp}\{a, e\}$ (այսինքն՝ a և e վեկտորների գծային թաղանթը): $\forall u \in L$ վեկտոր միակ ձևով կգրվի

$$u = \alpha e + \beta a$$

գծային կոմբինացիայի տեսքով: Սահմանենք $\varphi_0 : L \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալը՝ $\forall u = \alpha e + \beta a \in L$ համար վերցնելով

$$\varphi_0(u) = \alpha + \beta\lambda\ :$$

Ակնհայտ է, որ φ_0-ն կլինի գծային: Համոզվենք, որ

$$|\varphi_0(u)| \leqslant \|u\| \quad (u \in L)\ : \tag{1.10.1}$$

Դիցուք $u = \alpha e + \beta a$: Երբ $\beta = 0$, (1.10.1)-ը դառնում է ակնհայտ: Դիցուք $\beta \neq 0$: Ունենք

$$\lambda \in \overline{D}\,(z, \|ze - a\|) \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

որտեղ վերցնելով $z = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, կստանանք

$$\left|\lambda + \frac{\alpha}{\beta}\right| \leqslant \left\|-\frac{\alpha}{\beta}e - a\right\|,$$

որի երկու կողմը բազմապատկելով $|\beta|$-ով՝ կստանանք

$$|\varphi_0(u)| = |\alpha + \beta\lambda| \leqslant \|\alpha e + \beta a\| = \|u\| :$$

Քանի որ $\varphi_0(e) = 1$, ուստի $\|\varphi_0\|_L = 1$: Բացի այդ, $\varphi_0(a) = \lambda$: Ըստ Հան-Բանախի թեորեմի՝ $\exists\varphi \in S(A^*)$, որ

$$\varphi(u) = \varphi_0(u) \quad (u \in L) :$$

Այդ դեպքում կունենանք $\varphi \in \mathcal{P}(A)$ և $\lambda = \varphi(a)$, ուստի $\lambda \in V(a)$: Հատկությունն ապացուցված է:
4° $\forall a \in A$ համար $\sigma(a) \subset V(a)$:
Ապացույց: Ցույց տանք, որ

$$\mathbb{C} \setminus V(a) \subset \Omega(a) :$$

Դիցուք $\lambda \in \mathbb{C} \setminus V(a)$: Ըստ նախորդ հատկության՝ $\exists z \in \mathbb{C}$ այնպես, որ

$$|z - \lambda| > \|ze - a\|,$$

որտեղից կբխի, որ

$$e - (z - \lambda)^{-1}(ze - a) \in A^{-1} :$$

Ունենք

$$e - (z - \lambda)^{-1}(ze - a) = (z - \lambda)^{-1}\left[(z - \lambda)e - (ze - a)\right] =$$

$$= (z - \lambda)^{-1}\left[ze - \lambda e - ze + a\right] = (z - \lambda)^{-1}(a - \lambda e),$$

ուստի (քանի որ $z - \lambda \neq 0$),

$$a - \lambda e = (z - \lambda)\Big[e - (z - \lambda)^{-1}(ze - a)\Big] \in A^{-1},$$

և հետևաբար՝ $\lambda \in \Omega(a)$:

Հատկությունն ապացուցված է:

Այժմ դիցուք A-ն և B-ն բանախյան հանրահաշիվներ են, իսկ $\pi : A \to B$ հոմոմորֆիզմը բավարարում է

$$\pi(e) = e, \quad \|\pi(a)\| \leqslant \|a\|$$

պայմաններին (ճիշտ կլիներ գրել՝ $\pi(e_A) = e_B$, $\|\pi(a)\|_B \leqslant \|a\|_A$, սակայն ինդեքսում A-ն և B-ն մենք բաց կթողնենք՝ նշանակումները չծանրաբեռնելու համար):

Այդ դեպքում նկատենք, որ

$$V(\pi(a)) \subset V(a) :$$

Իրոք, դա բխում է նրանից, որ եթե $\varphi \in \mathcal{P}(B)$, ապա

$$\psi = \varphi(\pi(\cdot)) \in \mathcal{P}(A) :$$

§ 1.11. Փակտոր – հանրահաշիվ

Դիցուք A–ն գծային փարածություն է, իսկ $N \subset A$ ենթափարածություն է: $\forall x \in A$ համար $\pi(x)$–ով նշանակենք A–ի այն հարակից դասն ըստ N–ի, որը պարունակում է x–ը, այլ կերպ ասած՝

$$\pi(x) = x + N :$$

A/N–ով նշանակենք բոլոր հարակից դասերի բազմությունը: A/N–ում սահմանենք գումարման և սկալյարով բազմապատկման գործողությունները հետևյալ բանաձևերով՝

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y), \quad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x) :$$

Նկատենք, որ սահմանումները կոռեկտ են, այսինքն՝ եթե $\pi(x) = \pi(x')$, $\pi(y) = \pi(y')$, ապա

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x') + \pi(y'), \quad \alpha\pi(x') = \alpha\pi(x) :$$

Իրոք, քանի որ $\pi(x) = \pi(x')$, $\pi(y) = \pi(y')$, ուստի $x - x'$, $y - y' \in N$ և հետևաբար

$$(x + y) - (x' + y'),\ \alpha x - \alpha x' \in N,$$

որտեղից կբխի, որ

$$\pi(x + y) = \pi(x' + y'), \quad \pi(\alpha x') = \pi(\alpha x)$$

և հետևաբար՝

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y) = \pi(x' + y') = \pi(x') + \pi(y'),$$

$$\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x) = \pi(\alpha x') = \alpha\pi(x') :$$

Այս ձևով գործողությունները սահմանելու դեպքում A/N–ը դառնում է գծային տարածություն (նրանում 0–ի դերը տանում է $\pi(0) = N$ դասը), որին անվանում են A–ի ֆակտոր–տարածություն ըստ N ենթատարածության: Պարզ է, որ $\pi : A \to A/N$ կլինի գծային արտապատկերում, ընդ որում

$$\ker(\pi) = N :$$

π–ն կոչվում է ֆակտոր–արտապատկերում կամ կանոնական արտա–պատկերում՝ A–ից A/N–ի վրա:

Այժմ դիցուք A–ն հանրահաշիվ է, իսկ N–ը A–ում երկկողմանի իդեալ է: Եթե $x' - x$, $y' - y \in N$, ապա

$$x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y)$$

նույնությունից կբխի, որ $x'y' - xy \in N$ և հետևաբար $\pi(x'y') = \pi(xy)$: Ուստի

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \quad (x, y \in A)$$

բանաձևով A/N–ում ներմուծված բազմապատկման գործողությունը կլինի կոռեկտ, և հեշտ է տեսնել, որ A/N–ը կդառնա հանրահաշիվ: Եթե e–ն A–ի միավորն է, ապա $E = e + N$ կլինի միավոր A/N–ում:

Այժմ դիցուք A–ն գծային նորմավորված փարածություն է, իսկ $N \subset A$ փակ ենթափարածություն է: A/N–ում ներմուծենք նորմ՝

$$\|\pi(x)\| = \inf\{\|x+z\| : \, z \in N\}$$

բանաձևով: Հեշտ է տեսնել, որ այս սահմանումը կոռեկտ է (այսինքն՝ եթե $\pi(x) = \pi(x')$, ապա $\|\pi(x)\| = \|\pi(x')\|$): Ֆունկցիոնալ անալիզի դասընթացում ապացուցվել է, որ սա իրոք A/N–ում հանդիսանում է նորմ, ընդ որում եթե A–ն լրիվ է, ապա A/N–ը ևս լրիվ է: Պարզ է նաև, որ $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \quad (x \in A)$:

Այժմ դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $N \subset A$ փակ սեփական երկկողմանի իդեալ է: Դիցուք $x_1, x_2 \in A$ կամայական էլեմենտներ են: Այդ դեպքում $\forall \delta > 0$ համար $\exists y_1, y_2 \in N$, որ

$$\|x_i + y_i\| \leqslant \|\pi(x_i)\| + \delta \quad (i = 1, 2),$$

ինչն անմիջապես բխում է ֆակտոր–նորմի սահմանումից: Քանի որ $(x_1 + y_1)\,(x_2 + y_2) \in x_1 x_2 + N$, ուստի

$$\|\pi(x_1 x_2)\| \leqslant \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leqslant \|x_1 + y_1\| \, \|x_2 + y_2\| \leqslant$$

$$\leqslant (\|\pi(x_1)\| + \delta)\,(\|\pi(x_2)\| + \delta)\,,$$

որտեղից և δ–ի կամայականությունից կբխի, որ

$$\|\pi(x_1 x_2)\| \leqslant \|\pi(x_1)\| \cdot \|\pi(x_2)\| \, :$$

Ցույց տանք, որ նաև $\|\pi(e)\| = 1$ (e–ն A–ի միավորն է): Իրոք, քանի որ N–ը սեփական իդեալ է, ուստի $\pi(e) \neq N$ և

$$\|\pi(e)\| = \|\pi(e \cdot e)\| \leqslant \|\pi(e)\| \cdot \|\pi(e)\|$$

առնչությունից կբխի, որ $\|\pi(e)\| \geqslant 1$: Մյուս կողմից, ունենք $\|\pi(x)\| \leqslant \leqslant \|x\| \, (x \in A)$, ուստի $\|\pi(e)\| \leqslant \|e\| = 1$ և հետևաբար $\|\pi(e)\| = 1$:

Այսպիսով ապացուցվեց, որ եթե A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ N–ը A–ի սեփական երկկողմանի փակ իդեալ է, ապա A/N–ը ևս բանախյան հանրահաշիվ է:

§ 1.12. Ֆակտոր – հանրահաշվի էլեմենտների հանրահաշվական թվային պատկերը

Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $J \subset A$ երկկողմանի փակ (սեփական) իդեալ է: Ինչպես նախորդ պարագրաֆում տեսանք, յուրաքանչյուր այդպիսի իդեալ ծնում է π_J: $A \to A/J$ կանոնական հոմոմորֆիզմ՝

$$\pi_J(a) = a + J,$$

ընդ որում

$$\|\pi_J(a)\| \leqslant \|a\|, \qquad \pi_J(e) = e_{A/J} :$$

Ֆիքսենք կամայական $a \in A$ և նշանակենք $\hat{a} = \pi_J(a)$: Ֆակտոր–նորմը կնշանակենք երեք գծով՝ $|||\cdot|||$: Ըստ § 1.10-ի վերջում ապացուցված արդյունքների՝

$$V(\hat{a}) \subset V(a) :$$

Ըստ այդ պարագրաֆի մեջ հանրահաշվական թվային պատկերի 3° հատկության՝

$$V(\hat{a}) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, |||z\hat{e} - \hat{a}|||) :$$

Ըստ ֆակտոր–նորմի սահմանման՝

$$|||z\hat{e} - \hat{a}||| = \inf_{j \in J} \|ze - (a + j)\|,$$

ուստի

$$\overline{D}\,(z, |||z\hat{e} - \hat{a}|||) = \bigcap_{j \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - (a + j)\|),$$

և հետևաբար

$$V(\hat{a}) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \bigcap_{j \in J} \overline{D}\,(z, \|ze - (a + j)\|) =$$

$$= \bigcap_{j \in J} \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - (a + j)\|) = \bigcap_{j \in J} V(a + j) :$$

Այստեղից անմիջապես բխում է նաև վերը գրված $V(\hat{a}) \subset V(a)$ առնչությունը (չէ՞ որ $0 \in J$):

§ 1.13. Հերմիտյան և նորմալ էլեմենտներ

Խնդիր 1: Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, և $a \in A$: Նշանակենք

$$\rho_+(a) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(a)\},$$

$$\rho_-(a) = \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(a)\},$$

$$v_+(a) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in V(a)\},$$

$$v_-(a) = \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in V(a)\} :$$

$\rho_+(a)$, $\rho_-(a)$, $v_+(a)$, $v_-(a)$ մեծություններին անվանում են համապատասխանաբար a էլեմենտի վերին սպեկտրալ աբսցիս, ստորին սպեկտրալ աբսցիս, վերին թվային աբսցիս, ստորին թվային աբսցիս (պարզ է, որ $v_-(a) \leqslant \rho_-(a)$ և $\rho_+(a) \leqslant v_+(a)$):

Ապացուցել, որ

$$v_+(a) = \lim_{t\to+0} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t},$$

$$\rho_+(a) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t},$$

$$v_-(a) = \lim_{t\to-0} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t},$$

$$\rho_-(a) = \lim_{t\to-\infty} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t} : \blacktriangleright$$

Կարելի է ներմուծել նաև սպեկտրալ և թվային օրդինատներ (սահմանումների մեջ Re–ն կփոխարինենք Im–ով):

Սահմանում 1.13.1: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է հերմիտյան, եթե $V(a) \subset \mathbb{R}$:

A բանախյան հանրահաշվի հերմիտյան էլեմենտները կազմում են իրական գծային տարածություն, որը նշանակվում է $\mathcal{H}(A)$:

Թեորեմ 1.13.1: *Որպեսզի $a \in A$ էլեմենտը լինի հերմիտյան, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\|\exp(ita)\| = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) :$$

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Սահմանում 1.13.2: $v(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(a)\}$ կանվանենք a էլեմենտի թվային շառավիղ:

Սահմանում 1.13.3: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է հերմիտյան իմաստով պրոհվող, եթե $\exists h, k \in \mathcal{H}(A)$, որ $a = h + ik$:

Դժվար չէ տեսնել, որ $a = h + ik \quad (h, k \in \mathcal{H}(A))$ ներկայացումը, եթե այն գոյություն ունի, միակն է:

Սահմանում 1.13.4: Հերմիտյան իմաստով պրոհվող $a = h + ik$ $(h, k \in \mathcal{H}(A))$ էլեմենտի համալուծ է կոչվում $a^+ = h - ik$ էլեմենտը:

Սահմանում 1.13.5: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է նորմալ, եթե a–ն հերմիտյան իմաստով պրոհվում է՝ $a = h + ik$, որտեղ $h, k \in \mathcal{H}(A)$, ընդ որում $[h, k] = hk - kh = 0$:

Վերջին հավասարությունը համարժեք է $aa^+ = a^+a$ հավասարությանը:

Թեորեմ 1.13.2: *Եթե $a \in A$ էլեմենտը նորմալ է, ապա*

$$\operatorname{conv} \sigma(a) = V(a) :$$

Այս թեորեմը ևս ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Սահմանում 1.13.6: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է քվազինորմալ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $a^+ \in A$ էլեմենտ, որ $[a, a^+] = 0$ և $\left\|\exp\left(\overline{\lambda} a - \lambda a^+\right)\right\| = o\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right)$, երբ $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

Ակնհայտ է, որ նորմալ էլեմենտը քվազինորմալ է, ընդ որում 1.13.6 սահմանման մեջ հանդես եկող a^+ էլեմենտը a էլեմենտի համալուծն է:

Խնդիր 2: Դիցուք $f : D(0, 1) \to A$ այնպիսի A-արժեքանի անալիտիկ ֆունկցիա է, որ $\forall \lambda \in D(0, 1)$ համար $f(\lambda)$-ն քվազինորմալ էլեմենտ է A-ում: Ապացուցել, որ $f(D(0, 1))$-ը կոմուտատիվ ենթաբազմություն է A հանրահաշվում: ▶

Սահմանում 1.13.7: Դիցուք J-ն իդեալ է A բանախյան հանրահաշվում: Կասենք J իդեալն օժտված է (GFP) հատկությամբ, եթե կամայական x-ի և քվազինորմալ a-ի դեպքում $[a, x] \in J$ պայմանից բխում է, որ $[a^+, x] \in J$:

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ A-ում կամայական փակ իդեալ օժտված է (GFP) հատկությամբ:

Սահմանում 1.13.8: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է սուբնորմալ, եթե գոյություն ունի A–ի այնպիսի B բանախյան ընդլայնում և այնպիսի $n \in B$ նորմալ էլեմենտ, որ

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(n) \bigcup \bigcup_j w_j,$$

որտեղ w_j–երը $\sigma_B(n)$–ի լրացման ինչ-որ կոմպոնենտներ են:

Եթե a–ն սուբնորմալ է, ապա պարզվում է, որ

$$\operatorname{conv} \sigma_A(a) = \operatorname{conv} \sigma_B(a) = V(a) : \blacktriangleright$$

(վերջին հավասարությունը բխում է 1.13.2 թեորեմից):
Խնդիր 4: Կամայական A բանախյան հանրահաշվում նկարագրել այն a էլեմենտները, որոնց համար

$$\operatorname{conv} \sigma(a) = V(a) : \blacktriangleright$$

Օրինակ: Որպես A վերցնենք $BL\left(L^2(0,1)\right)$–ը: Դիտարկենք նույնաբար 1 կորիզով Վոլտերայի ինտեգրալ օպերատորը՝

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \left(f \in L^2(0,1)\right) :$$

Սա Հիլբերտ–Շմիդտի օպերատոր է, ուստի լիովին անընդհատ է: Դժվար չէ ցույց տալ, որ V–ն չունի սեփական արժեքներ: Ուստի $\sigma(V) \subset \{0\}$: Այլ կերպ ասած՝ V–ն քվազինիլպոտենտ է: Պարզվում է, որ V–ի հանրահաշվական թվային պատկերը հանդիսանում է

$$\frac{1-\cos t}{t^2} \pm i\,\frac{t-\sin t}{t^2} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

կորերով սահմանափակված փակ ուռուցիկ փիրույթը: Ուստի V օպերատորն օժտված չէ նախորդ խնդրում նշված հատկությամբ: $\blacktriangleright$

Նշենք, որ ինչպես այս, այնպես էլ նախորդ պարագրաֆներում թվային պատկերին և հանրահաշվական թվային պատկերին վերաբերող նյութը հանդիսանում է հիմնականում վերջերս ստացված արդյունքներից ի մի բերված նյութ և ունի ավելի շատ ինֆորմացիոն բնույթ:

§ 1.14. Սուբհարմանիկ ֆունկցիաներ և դրանց որոշ կիրառություններ բանախյան հանրահաշիվներում

Այս պարագրաֆում մենք կբերենք սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների մասին որոշ փաստեր [4], [21] գրքերից և կտպանանք դրանց որոշ կիրառություններ բանախյան հանրահաշիվներում: Փաստերի մի մասի համար կտրվեն սխեմատիկ ապացույցներ:

Սահմանում 1.14.1: Դիցուք $f : \mathcal{D} \to [-\infty, \infty)$, որտեղ $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ տիրույթ է: f–ը կոչվում է սուբհարմոնիկ, եթե՝

1) f–ը $\mathcal{D}$–ում կիսանընդհատ է վերևից, այսինքն՝

$$f(\lambda_0) \leqslant \overline{\lim_{\lambda\to\lambda_0}} f(\lambda) \quad (\forall \lambda_0 \in \mathcal{D}),$$

2) եթե $\lambda_o \in \mathcal{D}$ և $r > 0$ այնպիսին են, որ $\overline{D(\lambda_0, r)} \subset \mathcal{D}$, ապա

$$f(\lambda_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) d\theta :$$

Պարզ է, որ հարմոնիկ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է:

Լեմմա 1.14.1: *Դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ տիրույթ է, $f : \mathcal{D} \to A$ անալիտիկ ֆունկցիա է և $p \geqslant 1$: Այդ դեպքում $\|f\|^p$-ը սուբհարմոնիկ է:*

Ապացույց: Նախ դիտարկենք $A = \mathbb{C}$ դեպքը: Ըստ անալիտիկ ֆունկցիաների համար միջին արժեքի թեորեմի՝

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \quad \left(\overline{D(\lambda_0, r)} \subset \mathcal{D}\right),$$

ուստի

$$|f(\lambda_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right| d\theta :$$

Հետևաբար $|f|$–ը սուբհարմոնիկ է: Այժմ դիցուք $p > 1$, իսկ q–ն p–ի համալուծ ցուցիչն է $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$: Օգտվելով Հյոլդերի անհավասարությունից՝ կունենանք

$$|f(\lambda_0)|^p \leqslant \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right| d\theta \right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-p} \cdot \left\{ \left[\int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_0^{2\pi} 1^q \cdot d\theta \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^p =$$

$$= (2\pi)^{-p} (2\pi)^{\frac{p}{q}} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta,$$

և հետևաբար $|f|^p$–ը սուբհարմոնիկ է:

Այժմ անցնենք ընդհանուր դեպքի ապացույցին: Դիցուք $\overline{D(\lambda_0, r)} \subset \mathcal{D}$: Ըստ Հան-Բանախի թեորեմի հետևանքի՝ $\exists \Lambda \in A^*$ այնպիսին, որ $\|\Lambda\| = 1$ և $\|f(\lambda_0)\| = \Lambda f(\lambda_0)$: Ըստ վերն ապացուցվածի՝ $|\Lambda f|^p$-ը սուբհարմոնիկ է, ուստի

$$\|f(\lambda_0)\|^p = [\Lambda f(\lambda_0)]^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \Lambda f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \|\Lambda\|^p \cdot \left\| f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right\|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\| f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) \right\|^p d\theta :$$

Լեմման ապացուցված է:

Օկա–Ռոպշտեյնի թեորեմը: *Եթե* $\gamma: \quad z = z(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$ *ժորդանյան կորն ընկած է* $\mathcal{D}$ *տիրույթում, և* $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$ *սուբհարմոնիկ ֆունկցիա է, ապա*

$$\overline{\lim_{t \to 0}}\, f(z(t)) = f(z(0)) :$$

Ապացույցը տես՝ [4] գրքում: ▶

Լեմմա 1.14.2: *Եթե* A*–ն բանախյան հանրահաշիվ է, և* $a \in A$*, ապա*

$$\left\|a^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} \downarrow \rho(a) :$$

Ապացույցը բխում է (1.7.6) բանաձևից և հետևյալ առնչություններից.

$$\left\|a^{2^{n+1}}\right\|^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \left\|a^{2^n} \cdot a^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leqslant \left(\left\|a^{2^n}\right\| \cdot \left\|a^{2^n}\right\|\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \left\|a^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.14.3: *Եթե* $u \geqslant 0$*, ապա որպեսզի* $\ln u$ *լինի սուբհարմոնիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ *համար* $|e^{\alpha z}|\, u$ *ֆունկցիան լինի սուբհարմոնիկ:* ▶

Վեզենտիինի թեորեմը: *Եթե* $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to A$ *անալիտիկ է, ապա* $\lambda \mapsto \rho(f(\lambda))$ *ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է:*

Ապացույց: Ըստ 1.14.1 լեմմայի՝ $\lambda \mapsto \left\|f^{2^n}(\lambda)\right\|$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է: 1.14.3 լեմմայի օգնությամբ ցույց կտանք, որ $\frac{1}{2^n} \ln \left\|f^{2^n}(\lambda)\right\|$ ֆունկցիան ևս կլինի սուբհարմոնիկ: 1.14.2 լեմմայից կբխի, որ

$$\frac{1}{2^n} \ln \left\|f^{2^n}(\lambda)\right\| \downarrow \ln\left(\rho(f(\lambda))\right),$$

ուստի $\ln\left(\rho(f(\lambda))\right)$ ևս կլինի սուբհարմոնիկ, և հետևաբար, սուբհարմոնիկ կլինի

$$\rho(f(\lambda)) = e^{\ln(\rho(f(\lambda)))}$$

ֆունկցիան:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.14.1: *Որպեսզի b էլեմենտը լինի քվազինիլպոտենտ* ($b \in \mathrm{Rad}(A)$)*, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}\rho(a+\lambda b) = 0 \quad (\forall a \in A) : \tag{1.14.1}$$

Ապացույց: Ֆիքսած $\lambda \neq 0$ համար նշանակելով $t = \dfrac{1}{\lambda}$, կունենանք

$$\frac{1}{|\lambda|}\rho(a+\lambda b) = \frac{1}{|\lambda|}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|(a+\lambda b)^n\|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|(b+ta)^n\|} =$$
$$= \rho(b+ta) :$$

Ուստի (1.14.1)–ը համարժեք է

$$\lim_{t\to 0}\rho(b+ta) = 0 \quad (\forall a \in A) \tag{1.14.2}$$

առնչությանը: Քանի որ $\rho(b+ta) \geqslant 0$, ուստի (1.14.2)–ը համարժեք է

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\,\rho(b+ta) = 0 \quad (\forall a \in A) \tag{1.14.3}$$

առնչությանը: Քանի որ $t \mapsto b+ta$ ֆունկցիան անալիտիկ է, ուստի Վեզենտինիի թեորեմից կբխի, որ $\rho(b+ta)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է, և Օկա–Ռոտշտեյնի թեորեմից կբխի, որ (1.14.3)–ը համարժեք է $\rho(b) = 0$ առնչությանը:
Թեորեմն ապացուցված է:
Կլեյնեկե–Շիրոկովի թեորեմը: *Եթե որևէ* $a, b \in A$ *համար*

$$[a;\,[a,b]] = 0,$$

ապա

$$[a,b] \in \mathrm{Rad}(A) :$$

Ապացույց: Դիտարկենք $f(\lambda) = \exp(\lambda a)\, b \exp(-\lambda a)$ ֆունկցիան: Սա A արժեքանի ամբողջ անալիտիկ ֆունկցիա է: Գրենք f–ի Թեյլորի վերլուծությունը՝

$$f(\lambda) = f(0) + \lambda f'(0) + \frac{\lambda^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$f(0) = b, \quad f'(0) = [a, b], \quad f''(0) = [a, [a, b]],$$

$$f'''(0) = [a, [a, [a, b]]],$$

և այլն: Ուսփի թեորեմի պայմաններում

$$f''(0) = f'''(0) = \cdots = 0,$$

և կստանանք

$$f(\lambda) \equiv b + \lambda[a, b],$$

հետևաբար

$$\frac{\rho(b + \lambda[a, b])}{|\lambda|} = \frac{\rho(f(\lambda))}{|\lambda|} = \frac{\rho\,(exp(\lambda a)\, b\, exp(-\lambda a))}{|\lambda|} =$$

$$= \frac{\rho\,(exp(-\lambda a)\, exp(\lambda a)\, b)}{|\lambda|} = \frac{\rho(b)}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0,$$

և նախորդ թեորեմից կբխի, որ $[a, b] \in \mathrm{Rad}(A)$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.14.1: *Եթե* $a, b \in A$, *ապա* $[a, b] \neq e$*:*

I **ապացույց:** Ենթադրենք հակառակը՝ $[a, b] = e$: Այդ դեպքում կստանանք

$$[a; [a, b]] = [a; e] = 0,$$

և Կլեյնեկե–Շիրոկովի թեորեմից կբխի, որ $[a, b] \in \mathrm{Rad}(A)$: Ստացվեց, որ

$$e \in [a, b] \in \mathrm{Rad}(A),$$

ինչը հակասություն է, քանի որ $\rho(e) = 1 \neq 0$:
II **ապացույցը** կտարենք պարզ (իտերացիոն) մեթոդով՝ չօգտագործելով Կլեյնեկե–Շիրոկովի թեորեմը: Ենթադրենք հակառակը՝ $\exists a, b \in A$, որ

$$[a, b] = e\ :$$

Այդ դեպքում $n = 1, 2, \dots$ համար կունենանք

$$[a^n, b] = a^n b - ba^n = aa^{n-1}b - ba^n = a\left(ba^{n-1} + \left[a^{n-1}, b\right]\right) - ba^n =$$

$$= aba^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] - ba^n = (ba+e)a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] - ba^n =$$

$$= ba^n + a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] - ba^n = a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right],$$

$$[a^n, b] = a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] :$$

Օգտվելով վերջինից և կիրառելով ինդուկցիա՝ հեշտությամբ կստանանք, որ

$$[a^n, b] = na^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) :$$

Ուստի

$$n\left\|a^{n-1}\right\| = \|[a^n, b]\| = \|a^n b - ba^n\| \leqslant \|a^n b\| + \|ba^n\| \leqslant$$

$$\leqslant \|a^n\|\,\|b\| + \|b\|\,\|a^n\| = 2\,\|a^n\|\,\|b\| = 2\left\|a^{n-1}\cdot a\right\|\|b\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\|a^{n-1}\right\|\cdot\|a\|\cdot\|b\|,$$

որտեղից $a^{n-1} \neq 0$ դեպքում կստանանք

$$n \leqslant 2\|a\|\,\|b\| :$$

Հետևաբար, եթե a-ն նիլպոտենտ չէ, ապա

$$n \leqslant 2\|a\|\,\|b\| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ինչը հակասություն է: Ուստի a-ն նիլպոտենտ է:

Քանի որ $[a, b] = e$, ուստի

$$[-b, a] = e,$$

և վերը արված դատողություններում a-ն փոխարինելով $(-b)$-ով, իսկ b-ն a-ով՝ կստանանք, որ $(-b)$-ն նիլպոտենտ է, կամ որ նույնն է՝ b-ն նիլպոտենտ է:

Այսպիսով, a-ն և b-ն նիլպոտենտ են, ընդ որում

$$[a,b]=e:$$

Վարը (տես՝ թեորեմ 2.2.1) կոմուտատիվ դեպքի համար մենք կտեսնենք, որ $\mathrm{Rad}(A)$ ռադիկալը A-ի իդեալ է (դատողությունները մեծամասամբ կիրառելի են նաև ոչ կոմուտատիվ դեպքում): Ուստի $a,b\in\mathrm{Rad}(A)$ առնչությունից և

$$e=[a,b]=ab-ba$$

ներկայացումից կբխի, որ $e\in\mathrm{Rad}(A)$, ինչը հակասություն է: Հետևանքն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.14.1: Վերն ապացուցված հետևանքից բխում է, որ X բանախյան տարածությունում գործող ցանկացած A, B գծային անընդհատ օպերատորների համար $[A,B]\neq I$: Երբ A և B օպերատորներից գոնե մեկն անսահմանափակ է, $[A,B]=I$ առնչությունը կարող է տեղի ունենալ. այդպիսի իրավիճակ է քվանտային մեխանիկայից հայտնի Հայզենբերգի անորոշություններում: ▶

§ 1.15. Ֆունկցիոնալ հաշիվ

Դիցուք $\Omega\subset\mathbb{C}$ բաց բազմություն է, K–ն Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմություն է, $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\subset\Omega$ կողմնորոշված հատվածներ են, որոնցից ոչ մեկը չի հատվում K–ի հետ և $\Gamma=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\gamma_j$: Այդ դեպքում $\varphi:\Gamma\to\mathbb{C}$ ֆունկցիայի ինտեգրալը՝ տարածված Γ–ով, սահմանվում է

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi(\lambda)\,d\lambda=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\gamma_j}\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

բանաձևով: Ինչպես հայտնի է կոմպլեքս անալիզի դասընթացից, Γ–ն կարելի է ընտրել այնպես, որ այն K–ի յուրաքանչյուր կետ շրջանցի մի անգամ, այսինքն՝

$$Ind_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{\lambda - z} = \begin{cases} 1, & z \in K, \\ 0, & z \notin \Omega, \end{cases} \tag{1.15.1}$$

և այդ դեպքում յուրաքանչյուր $f \in H(\Omega)$ հոլոմորֆ ֆունկցիայի համար ճիշտ է

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}(\lambda - z)^{-1}f(\lambda)\,d\lambda \quad (z \in K) \tag{1.15.2}$$

Կոշու բանաձևը:

(1.15.1)–ի հետ կապված հաճախ ասում են, որ Γ–ն ընդգրկում է K–ն Ω–ում:

Նշենք, որ K–ն, Ω–ն և Γ–ն կարող են կապակցված չլինել:

Լեմմա 1.15.1: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ և Γ կոնտուրն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ն Ω–ում: Այդ դեպքում*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\alpha - \lambda)^n(\lambda e - x)^{-1}d\lambda = (\alpha e - x)^n \quad (n \in \mathbb{Z}) : \tag{1.15.3}$$

Ապացույց: (1.15.3)–ի ձախ մասը նշանակենք y_n–ով: Ըստ Հիլբերտի (1.7.16) նույնության՝ $\lambda \notin \sigma(x)$ համար

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1},$$

ուստի

$$\begin{aligned} y_n = (\alpha e - x)^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\alpha - \lambda)^n d\lambda + (\alpha e - x)^{-1} \cdot \\ \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\alpha - \lambda)^{n+1}(\lambda e - x)^{-1}d\lambda : \end{aligned} \tag{1.15.4}$$

Քանի որ $Ind_{\Gamma}(\alpha) = 0$, ուստի (1.15.4)–ի առաջին գումարելին հավասար է 0–ի: Հետևաբար,

$$(\alpha e - x)y_n = y_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}) : \tag{1.15.5}$$

(1.15.5)–ից բխում է, որ բավական է (1.15.3)–ն ապացուցել $n = 0$ դեպքում: Այսպիսով, մենք պետք է ապացուցենք, որ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda e - x)^{-1}d\lambda = e : \tag{1.15.6}$$

Դիցուք Γ_r–ը 0 կենտրոնով և $r > \|x\|$ շառավղով դրականորեն կողմնորոշված շրջանագիծն է: Γ_r–ի վրա ունենք

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n :$$

Անդամ առ անդամ ինտեգրելով այս շարքը՝ կստանանք (1.15.6)–ը, որում Γ–ն փոխարինված կլինի Γ_r–ով: Սակայն (1.15.6)–ում ենթինտեգրալ ֆունկցիան x էլեմենտի ռեզոլվենտն է, որն իրենից ներկայացնում է $\sigma(x)$–ի լրացման վրա հոլոմորֆ A–արժեքանի ֆունկցիա: Բացի այդ

$$Ind_{\Gamma_r}(z) = 1 = Ind_{\Gamma}(z) \quad (\forall z \in \sigma(x)) :$$

Ուստի, համաձայն Կոշու թեորեմի, (1.15.6)–ի ձախ մասը չի փոխվի, եթե Γ–ն փոխարինենք Γ_r–ով:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.15.1: *Դիցուք*

$$R(\lambda) = \sum_{j=0}^{n}p_j\lambda^j + \sum_{m,k=1}^{N}c_{m,k}(\lambda - \alpha_m)^{-k} \tag{1.15.7}$$

ռացիոնալ ֆունկցիա է, A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$ և $R(\lambda)$–ն $\sigma(x)$–ի վրա բևեռներ չունի: Նշանակենք

$$R(x) = \sum_{j=0}^{n}p_jx^j + \sum_{m,k=1}^{N}c_{m,k}(x - \alpha_m e)^{-k} \tag{1.15.8}$$

Դիցուք $\Omega \supset \sigma(x)$ բաց բազմությունն $R(\lambda)$–ի բևեռներ չի պարունակում, իսկ Γ կոնտուրն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ը Ω–ում: Այդ դեպքում

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda :$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է լեմմա 1.15.1-ից: ▶

Նշենք, որ (1.15.8)–ը հանդիսանում է բանախյան հանրահաշվի էլեմենտից ռացիոնալ ֆունկցիայի ամենաբնական սահմանումը: Թեորեմ 1.15.1–ը ցույց է տալիս, որ Կոշու բանաձևը ևս բերում է նույն արդյունքին: Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 1.15.1: Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, իսկ $H(\Omega)$–ն Ω–ում հոլոմորֆ բոլոր կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիաների հանրահաշիվ է: Ըստ թեորեմ 1.8.7–ի,

$$\Omega_A = \{x \in A : \sigma(x) \subset \Omega\} \tag{1.15.9}$$

բազմությունը բաց է A–ում:

$\tilde{H}\left(\Omega_A\right)$ բազմությունը որոշվում է հետևյալ կերպ: Այն բաղկացած է բոլոր $\tilde{f} : \Omega_A \to A$ ֆունկցիաներից, որտեղ $\tilde{f}$–ը ստացվում է $f \in H(\Omega)$ ֆունկցիայից՝

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \tag{1.15.10}$$

բանաձևով, որում Γ–ն $\sigma\left(x\right)$–ը Ω–ում ընդգրկող կամայական կոնտուր է:

Բերված սահմանումը պահանջում է որոշակի պարզաբանումներ:

1) Քանի որ Γ–ն գտնվում է $\sigma(x)$–ից դրական հեռավորության վրա և $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումն անընդհատ է A^{-1}–ում, ուստի (1.15.10)–ում ենթինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է, հետևաբար, ինտեգրալը գոյություն ունի և $\tilde{f}(x)$–ն իսկապես հանդիսանում է A հանրահաշվի էլեմենտ:

2) Ենթինտեգրալ ֆունկցիան իրականում հանդիսանում է $\sigma(x)$–ի լրացման վրա անալիտիկ A–արժեքանի ֆունկցիա (ավելի ճիշտ,

$\sigma(x)$–ի լրացման և f–ի անալիտիկության տիրույթի հատման վրա անալիտիկ A–արժեքանի ֆունկցիա): Ուստի Կոշու թեորեմից բխում է, որ $\tilde{f}(x)$–ը կախված չէ Γ կոնտուրի ընտրությունից, եթե Γ–ն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ը Ω–ում:

3) Եթե $x = \alpha e$ և $\alpha \in \Omega$, ապա (1.15.10)–ից ստանում ենք

$$\tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e \, : \tag{1.15.11}$$

Նկատենք, որ $\alpha e \in \Omega_A$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha \in \Omega$: Եթե $\alpha \in \mathbb{C}$ և $\alpha e \in A$ կետերը նույնացնենք, ապա յուրաքանչյուր $f \in H(\Omega)$ ֆունկցիա կարելի է դիտարկել որպես Ω_A–ի ինչ–որ ենթաբազմության (ավելի կոնկրետ, Ω_A–ի և e էլեմենտով A–ում ծնված միաչափ ենթատարածության հատման) արտապատկերում A–ի մեջ: Այդ դեպքում $\tilde{f}$–ը կարելի է դիտարկել որպես f ֆունկցիայի շարունակություն: Այս կոնտեքստում հաճախ $\tilde{f}(x)$–ի փոխարեն գրում են պարզապես $f(x)$: Այս ենթավերնագրի տակ մենք կօգտագործենք $\tilde{f}(x)$ նշանակումը, քանի որ այն հնարավորություն է ընձեռում խուսափել որոշ երկիմաստություններից, որոնք կարող են թյուրիմացությունների բերել:

4) Եթե $u, v : \Omega_A \to A$, ապա uv արտադրյալը սահմանվում է

$$(uv)(s) = u(s)v(s) \quad (s \in \Omega_A)$$

բանաձևով: Հեշտ է տեսնել, որ Ω_A–ի վրա որոշված բոլոր A արժեքանի ֆունկցիաները կազմում են հանրահաշիվ:

Թեորեմ 1.15.2: *$\tilde{H}(\Omega_A)$–ն կոմպլեքս հանրահաշիվ է, իսկ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումն իզոմորֆիզմ է $H(\Omega)$ և $\tilde{H}(\Omega_A)$ հանրահաշիվների միջև: Այդ արտապատկերումն անընդհատ է հետևյալ իմաստով.*

եթե $f_n \in H(\Omega)$ $(n = 1, 2, \dots)$ և f_n–ը Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային, ապա

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) \quad (x \in \Omega_A) \, : \tag{1.15.12}$$

Եթե $u(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \Omega)$ և $v(\lambda) = 1$ $(\lambda \in \Omega)$, ապա ցանկացած $x \in \Omega_A$ համար $\tilde{u}(x) = x$ և $\tilde{v}(x) = e$:

Ապացույց: Վերջին պնդումը բխում է թեորեմ 1.15.1–ից: (1.15.10) ինտեգրալ ներկայացումից ակնհայտորեն բխում է, որ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը գծային է: Եթե $\tilde{f} = 0$, ապա

$$f(\alpha)e = \tilde{f}(\alpha e) = 0 \quad (\alpha \in \Omega),$$

ուստի $f = 0$: Հետևաբար, $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է:

Անընդհատության վերաբերյալ պնդումն ապացուցելու համար բոլոր f_n–երի համար (1.15.10)–ում պետք է վերցնել միևնույն Γ կոնտուրը և օգտվել ինտեգրալի գնահատականից ու Γ կոնտուրի վրա $\left\|(\lambda e - x)^{-1}\right\|$ մեծության սահմանափակությունից:

Մնում է ապացուցել, որ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը մուլտիպլիկատիվ է: Ավելի ճիշտ, պետք է ցույց տալ, որ եթե $f, g \in H(\Omega)$ և $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ $(\lambda \in \Omega)$, ապա

$$\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \quad (x \in \Omega_A) : \tag{1.15.13}$$

Եթե f–ը և g–ն Ω–ում բևեռներ չունեցող ռացիոնալ ֆունկցիաներ են և $h = fg$, ապա $h(x) = f(x)g(x)$ (այստեղ $f(x)$–ը և $g(x)$–ը սահմանվում են այնպես, ինչպես թեորեմ 1.15.1–ում, իսկ նշված հավասարությունը ստուգվում է անմիջականորեն): Ըստ թեորեմ 1.15.1–ի՝ Ω–ում բևեռներ չունեցող յուրաքանչյուր R ռացիոնալ ֆունկցիայի համար $R(x) = \tilde{R}(x)$, ուստի դիտարկվող դեպքում (1.15.13)–ն ապացուցված է: Ընդհանուր դեպքը Ռունգեյի թեորեմի միջոցով բերվում է արդեն դիտարկված դեպքին: Ըստ Ռունգեյի թեորեմի՝ f և g ֆունկցիաները կարելի է Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ մոտարկել f_n և g_n ռացիոնալ ֆունկցիաների հաջորդականություններով: Այդ դեպքում $f_n g_n$ հաջորդականությունը նույն իմաստով կզուգամիտի h–ին, և քանի որ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը վերը նշված իմաստով անընդհատ է, ուստի ընդհանուր դեպքում (1.15.13)–ը կստացվի սահմանային անցումով:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.15.1: Նկատենք, որ $\tilde{H}\left(\Omega_A\right)$ հանրահաշիվը կոմու–տատիվ է, քանի որ կոմուտատիվ է նրան իզոմորֆ $H(\Omega)$ հանրա–հաշիվը: Այլ կերպ ասած, յուրաքանչյուր $x \in \Omega_A$ համար $\tilde{f}(x)$–ը և $\tilde{g}(x)$–ը տեղափոխելի են: Սակայն $\tilde{f}(x)$–ը և $\tilde{f}(y)$–ը, ընդհանրապես ասած, կարող են տեղափոխելի չլինել: ►

Թեորեմ 1.15.3: *Դիցուք $x \in \Omega_A$ և $f \in H(\Omega)$:*
1) $\tilde{f}(x)$ էլեմենտը A–ում հակադարձելի է այն և միայն այն դեպ–քում, երբ $f(\lambda) \neq 0$ $(\lambda \in \sigma(x))$,
2) $\sigma\left(\tilde{f}(x)\right) = f\left(\sigma(x)\right)$ (սպեկտրների արտապատկերման մա–սին թեորեմ):

Ապացույց: 1) Եթե $f(\lambda) \neq 0$ $(\lambda \in \sigma(x))$, ապա $g = \dfrac{1}{f}$ ֆունկցիան անալիտիկ է ինչ–որ Ω_1 բաց բազմության վրա, որտեղ $\sigma(x) \subset \Omega_1 \subset \Omega$: Քանի որ $f(\lambda)g(\lambda) = 1$ $(\lambda \in \Omega_1)$, ուստի նախորդ թեորեմից բխում է, որ $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$ և հետևաբար $\tilde{f}(x) \in A^{-1}$: Հակառակը, եթե ինչ–որ $\alpha \in \sigma(x)$ համար $f(\alpha) = 0$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $h \in H(\Omega)$ ֆունկցիա, որ

$$(\lambda - \alpha)h(\lambda) = f(\lambda) \quad (\lambda \in \Omega),$$

որտեղից և նախորդ թեորեմից ստանում ենք

$$(x - \lambda e)\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x)(x - \alpha e)\ : \tag{1.15.14}$$

Քանի որ $x - \alpha e \notin A^{-1}$, ուստի (1.15.14)–ից բխում է, որ $\tilde{f}(x) \notin A^{-1}$:
2) Ֆիքսենք որևէ $\beta \in \mathbb{C}$: Ըստ սահմանման, $\beta \in \sigma\left(\tilde{f}(x)\right)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\tilde{f}(x) - \beta e \notin A^{-1}$: $f - \beta$ ֆունկցիայի վրա կիրառելով 1) պնդումը՝ ստանում ենք, որ $\tilde{f}(x) - \beta e \notin A^{-1}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f - \beta$ ֆունկցիան $\sigma(x)$–ի վրա ունի զրո, այսինքն՝ $\beta \in f(\sigma(x))$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.15.4 (թեորեմ բարդ ֆունկցիայի վերաբերյալ)**:** *Դիցուք $x \in \Omega_A$, $f \in H(\Omega)$, Ω_1–ը $f(\sigma(x))$–ը պարունակող բաց բազմու–թյուն է, $\Omega_0 = \{\lambda \in \Omega :\ f(\lambda) \in \Omega_1\}$, $g \in H(\Omega_1)$ և $h(\lambda) = g\left(f(\lambda)\right)$*

$(\lambda \in \Omega_0)$*: Այդ դեպքում* $\tilde{f}(x) \in \Omega_{1,A}$ *և* $\tilde{h}(x) = \tilde{g}\left(\tilde{f}(x)\right)$ *(կարճ ասած, եթե* $h = g \circ f$, *ապա* $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$*):*

Ապացույց: Թեորեմ 1.15.3–ի 2) պնդումից բխում է, որ $\sigma\left(\tilde{f}(x)\right) \subset \Omega_1$, ուստի $\tilde{g}\left(\tilde{f}(x)\right)$-ը սահմանված է կոռեկտ:

Փիքսենք որևէ Γ_1 կոնտուր, որն ընդգրկում է $f(\sigma(x))$–ը Ω_1–ում: Գոյություն ունի այնպիսի W բաց բազմություն, որ $\sigma(x) \subset W \subset \Omega_0$ և

$$Ind_{\Gamma_1}(f(\lambda)) = 1 \quad (\lambda \in W) : \tag{1.15.15}$$

Փիքսենք որևէ Γ_0 կոնտուր, որն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ը W–ում: Եթե $t \in \Gamma_1$, ապա $\dfrac{1}{t-f} \in H(W)$: Ուստի թեորեմ 1.15.2–ը (որում որպես Ω պետք է վերցնել W–ն) ցույց է տալիս, որ $t \in \Gamma_1$ համար

$$\left[te - \tilde{f}(x)\right]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} [t - f(\lambda)]^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda : \tag{1.15.16}$$

Քանի որ Γ_1 կոնտուրը ընդգրկում է $\sigma\left(\tilde{f}(x)\right)$–ը Ω_1–ում, ուստի, օգտվելով (1.15.15), (1.15.16)–ից, վերջնականապես ստանում ենք

$$\tilde{g}\left(\tilde{f}(x)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} g(t)\left[te - \tilde{f}(x)\right]^{-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} g(t)\,[t - f(\lambda)]^{-1}\, dt\,(\lambda e - x)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} g\left(f(\lambda)\right)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} h(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \tilde{h}(x) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ մենք կբերենք կառուցված ֆունկցիոնալ հաշվի որոշ կի–րառություններ: Սկզբում խոսքը կգնա արմատների և լոգարիթմի գոյության մասին: Ասում են, որ $x \in A$ էլեմենտն ունի m աստիճանի արմատ, եթե $\exists y \in A$ այնպես, որ $y^m = x$: Եթե $\exists y \in A$, այնպես, որ $x = \exp(y)$, ապա y–ը կոչվում է x–ի լոգարիթմ:

Նշենք, որ § 1.3–ում մեր տված էքսպոնենտի սահմանումը շարքի միջոցով համարժեք է (1.15.10)–ի միջոցով տրվող սահմանմանը: Իրոք, դիցուք $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$: Քանի որ $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ մասնակի գումարները $n \to \infty$ դեպքում $\mathbb{C}$–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտում են $f(z)$–ին, ուստի թեորեմ 1.15.2–ից բխում է, որ $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in A)$: Պարզ է, որ ասվածը ուժի մեջ է մնում e^z–ը կամայական ամբողջ ֆունկցիայով փոխարինելու դեպքում:

Թեորեմ 1.15.5: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$ և x էլեմենտի $\sigma(x)$ սպեկտրը չի անջատում 0–ն և ∞–ը (այսինքն՝ 0 կետը պատկանում է սպեկտրի լրացման անսահմանափակ կոմպոնենտին): Այդ դեպքում՝*
1) x էլեմենտն A–ում ունի ցանկացած աստիճանի արմատ,
2) x էլեմենտն A–ում ունի լոգարիթմ,
3) $\forall \varepsilon > 0$ համար գոյություն ունի այնպիսի P բազմանդամ, որ $\|x^{-1} - P(x)\| < \varepsilon$:

Բացի դրանից, եթե $\sigma(x) \subset (0, \infty)$, ապա 1)–ում x–ի արմատները կարելի է ընտրել այնպես, որ դրանք լինեն նմանատիպ հատկությամբ օժտված էլեմենտներ:

Ապացույց: Քանի որ 0 կետը պատկանում է $\sigma(x)$–ի լրացման անսահմանափակ կոմպոնենտին, ուստի գոյություն ունի ինչ–որ $\Omega \supset \sigma(x)$ միակապ տիրույթում անալիտիկ f ֆունկցիա՝ այնպես, որ

$$\exp(f(\lambda)) = \lambda :$$

Թեորեմ 1.15.4–ից բխում է, որ $\exp\left(\tilde{f}(x)\right) = x$, ուստի $y = \tilde{f}(x)$ հանդիսանում է x–ի լոգարիթմ: Դիցուք $z = \exp\left(\frac{y}{m}\right)$: Այդ դեպքում $z^m = x$: Եթե $\sigma(x) \subset (0, \infty)$, ապա f–ը կարելի է ընտրել այնպես, որ այն $\sigma(x)$–ի վրա լինի իրական: Ըստ սպեկտրների արտա–

պատկերման մասին թեորեմի՝ դիտարկվող դեպքում $\sigma(y) \subset \mathbb{R}$: Նորից կիրառելով սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմը՝ ստանում ենք, որ $\sigma(z) \subset (0, \infty)$: Սրանով իսկ թեորեմի 1), 2) պնդումները և վերջին պնդումն ապացուցված են:

3) պնդումն ապացուցելու համար նկատենք, որ $\dfrac{1}{\lambda}$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\sigma(x)$–ը պարունակող ինչ–որ միակապ տիրույթում, ուստի, ըստ Ռունգեի թեորեմի, $\dfrac{1}{\lambda}$ ֆունկցիան նշված տիրույթի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով, որտեղից և թեորեմ 1.15.2–ի անընդհատության պնդումից էլ բխում է 3)–ը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Բերված արդյունքները տրիվիալ չեն նույնիսկ վերջավոր չափանի A հանրահաշվի դեպքում: Օրինակ, թեորեմ 1.15.5–ի 2) պնդումից բխում է, որ n–րդ կարգի M քառակուսային մատրիցն ունի լոգարիթմ այն և միայն այն դեպքում, երբ 0–ն չի հանդիսանում M–ի սեփական արժեք, այսինքն՝ երբ M մատրիցը հակադարձելի է:

Սահմանում 1.15.2: A բանախյան հանրահաշվի p էլեմենտը կոչվում է իդեմպոտենտ, եթե $p^2 = p$:

Ակնհայտ է, որ 0–ն և e–ն իդեմպոտենտներ են:

Սահմանում 1.15.3: p իդեմպոտենտը կոչվում է ոչ տրիվիալ, եթե $p \neq 0$ և $p \neq e$:

Թեորեմ 1.15.6: *1) Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$, P–ն մի փոփոխականից բազմանդամ է և $P(x) = 0$: Այդ դեպքում $\sigma(x)$–ը ընկած է P բազմանդամի զրոների բազմության մեջ:*
2) Եթե p–ն իդեմպոտենտ է, ապա $\sigma(x) \subset \{0, 1\}$:

Ապացույց: 1) Ըստ սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմի՝

$$P(\sigma(x)) = \sigma(P(x)) = \sigma(0) = \{0\},$$

որտեղից էլ բխում է 1) պնդումը: 1) պնդման մեջ վերցնելով $P(z) = z^2 - z$, կստանանք 2) պնդումը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.15.7: *Դիցուք* $\sigma(a) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$*, որտեղ* $E_1, E_2, \ldots, E_n$*-ը* $\mathbb{C}$ *կոմպլեքս հարթության զույգ առ զույգ չհատվող ոչ դատարկ կոմպակտ ենթաբազմություններ են (*$n \geqslant 2$*): Այդ դեպքում գոյություն ունեն* $p_1, \ldots, p_n$ *ոչ տրիվիալ իդեմպոտենտներ, որոնք պատկանում են* $\left\{(ze-a)^{-1} : z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\right\}$ *բազմության գծային թաղանթի փակմանը, այնպես, որ*

$$e = p_1 + \cdots + p_n,$$

$$p_k p_j = 0 \quad (k \neq j) :$$

Ավելին, եթե $E_j = \{\xi_j\}$*, ապա* $\sigma(ap_j) = \{\xi_j, 0\}$*, և* $ap_j - \xi_j p_j$*-ն քվազինիլպոտենտ է (այսինքն՝* $\rho\,(ap_j - \xi_j p_j) = 0$*):*

Ապացույց: Դիցուք $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$-ը համապատասխանաբար $E_1, \ldots, E_n$–ը պարունակող, զույգ առ զույգ չհատվող բաց բազմություններ են: Դիցուք $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ և $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան որոշվում է

$$f_k(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_k \\ 0, & z \in \Omega \setminus \Omega_k \end{cases}$$

բանաձևով: Այդ դեպքում $f_k \in H(\Omega)$ և $f_k^2 = f_k$: Դիցուք $p_k = \tilde{f}_k(a)$: Այդ դեպքում $p_k^2 = p_k$ և p_k-ն պատկանում է $\left\{(ze-a)^{-1} : z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\right\}$ բազմության գծային թաղանթի փակմանը: Քանի որ $\sigma(p_k) = \sigma\left(\tilde{f}_k(a)\right) = f_k(\sigma(a)) = \{0, 1\}$, ուստի $p_k \neq 0, e$: Քանի որ $f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_k(z) = 1 \quad (z \in \Omega)$ և $f_k(z) f_j(z) = 0 \;\; (z \in \Omega,\, k \neq j)$, ուստի

$$e = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \quad \text{և} \quad p_k p_j = 0 \quad (k \neq j) :$$

Դիցուք $E_j = \{\xi_j\}$, իսկ $g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիաները որոշվում են

$$g(z) = (z - \xi_j) f_j(z), \quad h(z) = z f_j(z)$$

բանաձևերով: Ունենք $\sigma(ap_j) = \sigma\left(\tilde{h}(a)\right) = h(\sigma(a)) = \{\xi_j, 0\}$: Պարզ է, որ եթե $z \in \sigma(a)$, ապա $g(z) = 0$: Ուստի $\sigma\left(\tilde{g}(a)\right) = g(\sigma(a)) = \{0\}$: Բայց $\tilde{g}(a) = ap_j - \xi_j p_j$, հետևաբար $\rho\left(ap_j - \xi_j p_j\right) = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.15.1: *Եթե A հանրահաշվում գոյություն ունի չկապակցված սպեկտրով էլեմենտ, ապա A–ն պարունակում է ոչ տրիվիալ իդեմպոտենտ:* ▶

Թեորեմ 1.15.8: *Դիցուք f–ը պարզ զրոներով ամբողջ ֆունկցիա է, $f(0) \neq 0$, $a \in A$ և $\tilde{f}(a) = 0$: Այդ դեպքում $\sigma(a) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, որտեղ $f(\lambda_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, q)$,*

$$(a - \lambda_1 e)(a - \lambda_2 e) \cdots (a - \lambda_q e) = 0,$$

և գոյություն ունեն այնպիսի $p_1, \ldots, p_q$ ոչ տրիվիալ իդեմպոտենտներ, որոնք պատկանում են $\left\{(ze - a)^{-1} : z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\right\}$ բազմության գծային թաղանթի փակմանը և

$$e = p_1 + \cdots + p_q,$$

$$p_k p_j = 0 \quad (k \neq j),$$

$$ap_j = \lambda p_j \quad (j = 1, \ldots, q):$$

Ապացույց: Սպեկտրների արտապատկերման թեորեմի շնորհիվ՝ $f(\sigma(a)) = \sigma\left(\tilde{f}(a)\right) = \{0\}$: Քանի որ $\sigma(a)$-ն կոմպակտ է, իսկ f-ն ամբողջ ֆունկցիա է, ուստի $\sigma(a)$ բազմությունը վերջավոր է, և հետևաբար, $\sigma(a) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, որտեղ $f(\lambda_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, q)$: Ըստ թեորեմ 1.15.7–ի՝ գոյություն ունեն ոչ տրիվիալ $p_1, \ldots, p_q$ իդեմպոտենտներ, այնպիսիք, որ $\sigma(a_j) = \{0\}$ $(j = 1, \ldots, q)$, որտեղ $a_j = ap_j - \lambda_j p_j$: $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան սահմանենք

$$g(z) = \begin{cases} (z - \lambda_1)^{-1} \cdots (z - \lambda_q)^{-1} f(z), & z \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}, \\ f'(\lambda_j) \prod\limits_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}, & z = \lambda_j \quad (j = 1, \ldots, q) \end{cases}$$

բանաձևով: Այդ դեպքում g-ն ամբողջ ֆունկցիա է, $g(z) \neq 0$ $(z \in \sigma(a))$ և հետևաբար՝ $0 \notin \sigma(\tilde{g}(a))$: Քանի որ

$$g(z)(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_q) = f(z) \quad (z \in \mathbb{C}),$$

ուստի

$$\tilde{g}(a)(a-\lambda_1 e)\cdots(a-\lambda_q e) = \tilde{f}(a) = 0 :$$

Բայց քանի որ $\tilde{g}(a) \in A^{-1}$, ուստի $(a-\lambda_1 e)\cdots(a-\lambda_q e) = 0$: Դիցուք $Q(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_q)$ $(z \in \mathbb{C})$: Քանի որ $p_1^2 = p_1$, ուստի $p_1^q = p_1$, հետևաբար

$$p_1 Q(ap_1) = p_1(ap_1-\lambda_1 e)\cdots(ap_1-\lambda_q e) =$$

$$= p_1(ap_1-\lambda_1 e)\cdots p_1(ap_1-\lambda_q e) =$$

$$= (ap_1-\lambda_1 p_1)\cdots(ap_1-\lambda_q p_1) = p_1^q Q(a) = 0 :$$

Բայց $p_1(ap_1-\lambda_1 e) = ap_1-\lambda_1 p_1 = a_1$, հետևաբար

$$a_1(ap_1-\lambda_2 e)\cdots(ap_1-\lambda_q e) = 0 : \qquad (1.15.17)$$

Թեորեմ 1.15.7–ի շնորհիվ $\sigma(ap_1) = \{\lambda_1, 0\}$, որտեղից և սպեկտրների արտապատկերման թեորեմից բխում է, որ $j = 2, \ldots, q$ համար $\sigma(ap_1-\lambda_j e) = \{\lambda_1-\lambda_j, -\lambda_j\}$, և հետևաբար $ap_1-\lambda_j e \in A^{-1}$: Այստեղից և (1.15.17)-ից բխում է, որ $a_1 = 0$: Նման ձևով կստանանք, որ $a_2 = \cdots = a_q = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.15.4: $T \in BL(X)$ օպերատորի կետային սպեկտր է կոչվում T օպերատորի սեփական արժեքների բազմությունը:

T օպերատորի կետային սպեկտրը նշանակվում է $\sigma_p(T)$ սիմվո–լով: $A = BL(X)$ դեպքում սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմը թույլ է տալիս այսպիսի ճշգրտում:

Թեորեմ 1.15.9: *Դիցուք $T \in BL(X)$, Ω–ն $\mathbb{C}$–ում բաց բազմություն է, $\sigma(T) \subset \Omega$ և $f \in H(\Omega)$: Այդ դեպքում՝*
1) եթե $x \in X$, $\alpha \in \Omega$ և $Tx = \alpha x$, ապա $\tilde{f}(T)x = f(\alpha)x$,
2) $f(\sigma_p(T)) \subset \sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)$,

3) եթե $\alpha \in \sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)$ և $f-\alpha$ ֆունկցիան Ω բազմության կոմպոնենտներից ոչ մեկում նույնաբար զրո չի դառնում, ապա $\alpha \in f\left(\sigma_p(T)\right)$,
4) եթե f ֆունկցիան Ω բազմության կոմպոնենտներից ոչ մեկում հաստատուն չէ, ապա $f\left(\sigma_p(T)\right)=\sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)$։

Ապացույց: 1) $x=0$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է: Դիցուք $x\neq 0$ և $Tx=\alpha x$: Այդ դեպքում $\alpha\in\sigma(T)$: Գոյություն ունի այնպիսի $g\in H(\Omega)$ ֆունկցիա, որ

$$f(\lambda)-f(\alpha)=g(\lambda)(\lambda-\alpha) \quad (\lambda\in\Omega)\ : \tag{1.15.18}$$

(1.15.18)–ից և թեորեմ 1.15.2–ից բխում է, որ

$$\tilde{f}(T)-f(\alpha)I=\tilde{g}(T)(T-\alpha I)\ : \tag{1.15.19}$$

(1.15.19)–ից և $(T-\alpha I)x=0$ հավասարությունից էլ բխում է 1) պնդումը:

Այսպիսով, եթե α–ն T օպերատորի սեփական արժեք է, ապա $f(\alpha)$–ն $\tilde{f}(T)$ օպերատորի սեփական արժեք է: Ուստի 2) պնդումը բխում է 1)–ից:

Եթե տեղի ունեն 3)–ի պայմանները, ապա

$$\alpha\in\sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)\subset\sigma\left(\tilde{f}(T)\right)=f\left(\sigma(T)\right), \tag{1.15.20}$$

ուստի

$$f^{-1}(\alpha)\cap\sigma(T)\neq\varnothing\ : \tag{1.15.21}$$

Եթե s–ը $f^{-1}(\alpha)\cap\sigma(T)$ բազմության կուտակման կետ է, ապա այն կլինի կուտակման կետ նաև $\sigma(T)$–ի համար, և քանի որ $\sigma(T)$–ն կոմպակտ է, կստանանք $s\in\sigma(T)\subset\Omega$: Ստացվեց, որ $f-\alpha$ ֆունկցիայի զրոների բազմությունն ունի Ω–ին պատկանող կուտակման կետ: Ըստ միակության թեորեմի՝ $f-\alpha$ ֆունկցիան Ω բազմության՝ s–ը պարունակող կոմպոնենտի վրա նույնաբար դառնում է զրո, ինչը հակասում է պայմանին: Հետևաբար, $f^{-1}(\alpha)\cap\sigma(T)$ բազմությունը կուտակման կետ չունի: Քանի որ $f^{-1}(\alpha)\cap\sigma(T)$

բազմությունը սահմանափակ է, ուստի այն վերջավոր է: Դիցուք $\sigma(T)$–ում $f-\alpha$ ֆունկցիայի զրոներն են $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ թվերը, ընդ որում յուրաքանչյուր զրո վերցվում է այնքան անգամ, որքան իր պատիկությունն է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $g\in H(\Omega)$ ֆունկցիա, որը $\sigma(T)$–ի վրա զրոներ չունի և

$$f(\lambda)-\alpha=g(\lambda)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n): \tag{1.15.22}$$

Կունենանք

$$\tilde{f}(T)-\alpha I=\tilde{g}(T)(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_n I): \tag{1.15.23}$$

Թեորեմ 1.15.3–ի 1) պնդումից բխում է, որ $\tilde{g}(T)$ էլեմենտը հակադարձելի է $BL(X)$–ում: Մյուս կողմից, ըստ պայմանի, α–ն $\tilde{f}(T)$ օպերատորի սեփական արժեք է, ուստի $\ker\left(\tilde{f}(T)-\alpha I\right)\neq\{0\}$, որտեղից և (1.15.23)–ից բխում է, որ $T-\lambda_i I$ օպերատորներից գոնե մեկի համար $\ker(T-\lambda_i I)\neq\{0\}$: Այդպիսի օպերատորին համապատասխան λ_i կետն ընկած կլինի $\sigma_p(T)$–ում: Հաշվի առնելով, որ $f(\lambda_i)=\alpha$, ստանում ենք $\alpha\in f\left(\sigma_p(T)\right)$:
4) պնդումն անմիջապես բխում է 2), 3) պնդումներից:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.15.2: Նկատենք, որ նախորդ թեորեմի 3) և 4) պնդումներում f–ի վրա դրվող լրացուցիչ պայմանն էական է: Իրոք, դիցուք $X=C[0,1]$, $f(\lambda)\equiv 0$ և $(Tx)(t)=\int\limits_0^t x(s)\,ds$: Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ $\sigma_p(T)=\emptyset$, բայց $\sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)=\{0\}\neq\emptyset$: ▶

Գլուխ 2
ԿՈՄՈՒՏԱՏԻՎ ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

§ 2.1. Իդեալներ և հոմոմորֆիզմներ

Այսուհետև կենթադրենք, որ A բանախյան հանրահաշիվը կոմուտատիվ է՝

$$xy = yx \quad (\forall x, y \in A) :$$

Դիցուք $J \subset A$ իդեալ է՝ $AJ \subset J$ (քանի որ A–ն կոմուտատիվ է, ուստի $AJ \subset J$ և $JA \subset J$ առնչությունները տեղի ունեն միաժամանակ): Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ $\overline{J}$–ը ևս կլինի իդեալ:

Նկատենք, որ եթե $J \subset A$ իդեալը սեփական է, ապա

$$J \cap A^{-1} = \emptyset : \tag{2.1.1}$$

Իրոք, եթե ենթադրենք հակառակը՝ $\exists b \in A^{-1} \cap J$, ապա $\forall a \in A$ համար կունենանք

$$a = ab^{-1} \cdot b \in ab^{-1} \cdot J \subset AJ \subset J,$$

ուստի $A = J$ և հետևաբար J իդեալը սեփական չէ:

Լեմմա 2.1.1: *Եթե $J \subset A$ սեփական իդեալ է, ապա $\overline{J}$–ը ևս կլինի սեփական իդեալ:*

Ապացույց: Ունենք $\{0\} \neq J \subset \overline{J}$, ուստի $\overline{J} \neq \{0\}$, և մնում է համոզվել, որ $\overline{J} \neq A$: Դրա համար նկատենք, որ

$$\overline{J} \cap A^{-1} = \emptyset :$$

Իսկապես, վերցնենք $\forall a \in A^{-1}$ և ցույց տանք, որ $a \notin \overline{J}$: Քանի որ A^{-1}–ը բաց է, ուստի $\exists \delta > 0$, որ

$$B(a, \delta) \subset A^{-1} :$$

Ունենք $A^{-1} \cap J = \emptyset$, ուստի

$$B(a,\delta) \cap J = \emptyset :$$

Ստացվեց, որ գոյություն ունի a–ի այնպիսի $B(a,\delta)$ շրջակայք, որը չի պարունակում J–ի կետեր, ուստի $a \notin \overline{J}$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.1.1: *Ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝*

ա) ցանկացած $J \subset A$ սեփական իդեալ պարունակվում է գոնե մի մաքսիմալ իդեալում,

բ) ցանկացած $J \subset A$ մաքսիմալ իդեալ փակ է:

Ապացույց:

ա) Դիցուք $J \subset A$ սեփական իդեալ է: $\mathcal{P}$–ով նշանակենք A հանրահաշվի այն բոլոր սեփական իդեալների ընտանիքը, որոնք պարունակում են J–ն: $\mathcal{P}$ ընտանիքը ըստ պարունակման մասնակի կարգավորված բազմություն է (կասենք $J_1 \leqslant J_2$, եթե $J_1 \subset J_2$): Դիցուք $Q = \{J_\alpha\}$ $\mathcal{P}$–ում կամայական գծորեն կարգավորված ենթաընտանիք է: Նշանակենք

$$I = \bigcup_{\alpha} J_\alpha :$$

Օգտվելով նրանից, որ Q–ն գծորեն կարգավորված է, հեշտությամբ նկատում ենք, որ I–ն կլինի A–ի իդեալ: Քանի որ J_α–երից ոչ մեկը չի պարունակում A հանրահաշվի e միավորը, ուստի $e \notin I$, և հետևաբար I–ն կլինի սեփական իդեալ և կհանդիսանա Q–ի համար վերին եզր: Ըստ Ցորնի լեմմայի՝ $\mathcal{P}$–ում կա մաքսիմալ էլեմենտ, որն էլ հենց կհանդիսանա J–ն պարունակող մաքսիմալ իդեալ:

բ)-ն անմիջապես բխում է 2.1.1 լեմմայից:
Թեորեմն ապացուցված է:

$\mathcal{M}_A$–ով կնշանակենք A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվի բոլոր ոչ 0–ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալների բազմությունը: Ինչպես գիտենք՝

$$\mathcal{M}_A \subset \mathcal{P}(A) = \{\varphi \in A^* : \ \|\varphi\| = \varphi(e) = 1\} :$$

Հետագայում մենք ցույց կտանք, որ $\mathcal{M}_A$–ի կետերը $\mathcal{P}(A)$–ի գագաթային կետեր են:

Խնդիր 1: Ցույց տալ, որ $\mathcal{M}_A$-ն A^*-ում գծորեն անկախ վեկտորական համակարգ է:

$\mathcal{M}_A$–ին անվանում են մաքսիմալ իդեալների տարածություն (այն երբեմն նշանակում են նաև Δ–ով): $\mathcal{M}_A$–ն, իհարկե, գծային տարածություն չէ, սակայն հետագայում մենք կտեսնենք, թե ինչպես կարելի է $\mathcal{M}_A$–ում մտցնել տոպոլոգիա, որից հետո արդարացված կլինի $\mathcal{M}_A$–ին տարածություն անվանելը: Թե ինչու $\mathcal{M}_A$–ն կոչվում է հենց մաքսիմալ իդեալների տարածություն, պարզ է դառնում հետևյալ թեորեմից:

Թեորեմ 2.1.2: *Ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝*

1) A հանրահաշվի յուրաքանչյուր m մաքսիմալ իդեալ որևէ $\varphi \in \mathcal{M}_A$ հոմոմորֆիզմի միջուկ է ($m = \ker(\varphi)$),

2) $\forall \varphi \in \mathcal{M}_A$ հոմոմորֆիզմի $\ker(\varphi)$ միջուկը A հանրահաշվի մաքսիմալ իդեալ է,

3) $A^{-1} = \{a \in A : \varphi(a) \neq 0, \forall \varphi \in \mathcal{M}_A\}$,

4) որպեսզի $a \in A^{-1}$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ a–ն չպատկանի A–ի ոչ մի սեփական իդեալ,

5) $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \mathcal{M}_A\}$:

Ապացույց:

1) Դիցուք $x \in A \setminus m$: Նշանակենք

$$J = \{ax + y : a \in A, y \in m\} :$$

Ակնհայտորեն J–ն իդեալ է և պարունակում է m–ը: Քանի որ $x \in J \setminus m$, ուստի $m \neq J$, իսկ m–ի մաքսիմալության պատճառով $J = A$: Հետևաբար $\exists a \in A$, $\exists y \in m$, որ

$$ax + y = e :$$

Ըստ նախորդ թեորեմի՝ m–ը փակ է, ուստի A/m ֆակտորը բանախյան հանրահաշիվ է: Դիտարկենք

$$\pi_m : A \to A/m$$

ֆակտոր–արտապատկերումը (որը ամեն մի $x \in A$ էլեմենտին համապատասխանեցնում է $x + m$ հարակից դասը)։ Կունենանք

$$\pi_m(e) = \pi_m(ax + y) = \pi_m(ax) + \pi_m(y) =$$

$$= \pi_m(a)\pi_m(x) + \pi_m(y) = \pi_m(a)\pi_m(x)$$

(քանի որ $y \in m$, ուստի $\pi_m(y)$–ը A/m–ի 0–ն է), և քանի որ, A–ի կոմուտատիվության շնորհիվ, $\pi_m(a)\pi_m(x) = \pi_m(x)\pi_m(a)$, իսկ $\pi_m(e)$–ն A/m–ի միավորն է, ուստի ստացվում է, որ $\pi_m(x)$–ը A/m–ում հակադարձելի է։ Քանի որ A/m–ի բոլոր ոչ զրոյական էլեմենտներն ունեն $\pi_m(x)$ տեսքը, որտեղ $x \in A \setminus m$, ուստի ստացվեց, որ A/m–ի բոլոր ոչ զրոյական էլեմենտները հակադարձելի են։ Ըստ Գելֆանդ–Մազուրի թեորեմի՝ գոյություն ունի $j : A/m \to \mathbb{C}$ իզոմորֆիզմ։ Վերցնենք

$$\varphi = j \circ \pi = j\,(\pi(\cdot)) :$$

Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ φ–ն կլինի մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ և $m = \ker(\varphi)$։

2) Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$։ Նշանակենք

$$m = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) :$$

Դեշտ է տեսնել, որ m–ը A–ի իդեալ է։ Ցույց տանք, որ m–ը մաքսիմալ է։ Դրա համար ցույց տանք, որ եթե J–ն m–ը պարունակող և m–ից տարբեր իդեալ է, ապա $J = A$։ Իրոք, քանի որ $m \subset J$ և $m \neq J$, ուստի $\exists x_0 \in J \setminus m$։ Քանի որ $x_0 \notin m = \ker(\varphi)$, ուստի $\varphi(x_0) \neq 0$։ Դիտարկենք

$$y = -\frac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)}\,x_0 + e$$

էլեմենտը։ Կունենանք

$$\varphi(y) = -\frac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)}\,\varphi(x_0) + \varphi(e) = 0,$$

ուստի $y \in \ker(\varphi) = m \subset J$: Քանի որ նաև $\dfrac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)}\, x_0 \in J$, ուստի կունենանք

$$e = y + \frac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)}\, x_0 \in J$$

և (2.1.1)–ից կբխի, որ $J = A$:

3) Ըստ 1.4.1 լեմմայի, $\forall a \in A^{-1}$ և $\forall \varphi \in \mathcal{M}_A$ համար $\varphi(a) \neq 0$: Այժմ հակառակը՝ դիցուք $a \in A$ այնպիսին է, որ $\varphi(a) \neq 0$ $(\forall \varphi \in \mathcal{M}_A)$: Ցույց տանք, որ $a \in A^{-1}$: Ենթադրենք հակառակը՝ $a \notin A^{-1}$: Դիտարկենք

$$J = \{ax : \ x \in A\}$$

բազմությունը: Հեշտ է տեսնել, որ J–ն A-ի իդեալ է: Քանի որ $\varphi(a) \neq 0$ $(\forall \varphi \in \mathcal{M}_A)$, ուստի $a \neq 0$ և հետևաբար $J \neq \{0\}$: Քանի որ $a \notin A^{-1}$, ուստի $e \notin J$, և հետևաբար J–ն A–ի սեփական իդեալ է: Ըստ 2.1.1 թեորեմի՝ J-ն պարունակվում է մի ինչ-որ $m \subset A$ մաքսիմալ իդեալում: Ըստ 1) պնդման՝ $\exists \varphi \in \mathcal{M}_A$, այնպես, որ

$$m = \ker(\varphi) :$$

Այդ դեպքում, քանի որ $a \in J \subset m$, կունենանք

$$\varphi(a) = 0$$

ինչը կհակասի մեր ենթադրությանը:

4) Եթե $a \in A^{-1}$, ապա (2.1.1)-ից կբխի, որ a-ն չի պատկանում A-ի ոչ մի սեփական իդեալի: Այժմ հակառակը՝ դիցուք a-ն չի պատկանում A-ի ոչ մի սեփական իդեալի, ցույց տանք, որ $a \in A^{-1}$: Դրա համար, օգտվելով 3) պնդումից, ցույց տանք, որ $\forall \varphi \in \mathcal{M}_A$ համար $\varphi(a) \neq 0$: Իրոք, դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$ կամայական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ է: Ըստ 2) պնդման՝ $m = \ker(\varphi)$ կորիզը հանդիսանում է A-ի մաքսիմալ իդեալ: Քանի որ m-ը սեփական իդեալ է, ուստի $a \notin m$: Այսպիսով՝ $a \notin \ker(\varphi)$, ուստի $\varphi(a) \neq 0$:

5) $\lambda \in \sigma(a)$ նշանակում է, որ $\lambda e - a \notin A^{-1}$: Վերջինս, ըստ 3) պնդման, համարժեք է

$$\lambda e - a \notin \{x \in A : \ \varphi(x) \neq 0 \ (\forall \varphi \in \mathcal{M}_A)\}$$

առնչությանը, կամ որ նույնն է՝

$$\lambda e - a \in \{x \in A : \ \exists \varphi \in \mathcal{M}_A \ \ s.t. \ \varphi(x) = 0\}$$

առնչությանը: Վերջինս նշանակում է, որ $\exists \varphi \in \mathcal{M}_A$, այնպես, որ $\varphi(\lambda e - a) = 0$, ինչը $\varphi(e) = 1$ առնչության շնորհիվ կարելի է գրել $\lambda = \varphi(a)$ տեսքով:

Այսպիսով, $\lambda \in \sigma(a)$ համարժեք է նրան, որ $\exists \varphi \in \mathcal{M}_A$ այնպես, որ $\lambda = \varphi(a)$, ինչն էլ նշանակում է, որ

$$\lambda \in \{\varphi(a) : \ \varphi \in \mathcal{M}_A\} :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակ 1: Դիցուք K-ն կոմպակտ մետրիկական (կամ հաուսդորֆ–յան) տարածություն է: Դիտարկենք K-ի վրա որոշված բոլոր ան–ընդհատ կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիաների $C(K)$ հանրահաշիվը: Յուրաքանչյուր $x_0 \in K$ կետ ծնում է $\varphi_{x_0} : C(K) \to \mathbb{C}$ ֆունկցիոնալ՝ հետևյալ բանաձևով.

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0) \quad (f \in C(K)) :$$

Դիցուք $A = C(K)$: Ակնհայտ է, որ $\forall x_0 \in K$ համար $\varphi_{x_0} \in A^*$ (φ_{x_0}-ին հաճախ անվանում են Դիրակի ֆունկցիոնալ): Բացի այդ, քանի որ $f_0(x) \equiv 1$ ֆունկցիան A-ից է (այն հանդիսանում է A-ի միավորը) և այդ ֆունկցիայի վրա $\varphi_{x_0}(f_0) = 1 \neq 0$, ուստի $\varphi_{x_0} \in \mathcal{M}_A$: Այսպիսով՝

$$\{\varphi_x : \ x \in K\} \subset \mathcal{M}_{C(K)} :$$

Ցույց տանք, որ

$$\mathcal{M}_{C(K)} = \{\varphi_x : \ x \in K\} : \tag{2.1.2}$$

Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_{C(K)}$ կամայական ոչ 0-ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ է, ցույց տանք, որ φ-ն ունի φ_x տեսքը: Ենթադրենք հակառակը՝

$$\varphi \neq \varphi_x \quad (\forall x \in K) :$$

Սա նշանակում է, որ $\forall x \in K$ համար $\exists g_x \in C(K)$ այնպես, որ

$$\varphi(g_x) \neq \varphi_x(g_x),$$

այսինքն՝

$$\varphi(g_x) \neq g_x(x) \quad (\forall x \in K) :$$

Քանի որ $f_0(x) \equiv 1$ ֆունկցիան $C(K)$-ի միավորն է, ուստի

$$\varphi(f_0) = 1 :$$

Կամայական $x \in K$ ֆիքսված x-ի համար f_x-ով նշանակենք հե-տևյալ ֆունկցիան՝

$$f_x(y) = g_x(y) - \varphi(g_x)\, f_0(y) \quad (y \in K) :$$

Կունենանք $f_x \in C(K)$, ընդ որում

$$\varphi(f_x) = \varphi\left(g_x - \varphi(g_x) f_0\right) = \varphi(g_x) - \varphi(g_x)\varphi(f_0) =$$

$$= \varphi(g_x) - \varphi(g_x) = 0$$

և

$$f_x(x) = g_x(x) - \varphi(g_x) f_0(x) = g_x(x) - \varphi(g_x) \neq 0 :$$

f_x-ի անընդհատության շնորհիվ $\forall x \in K$ համար գոյություն ունի $U_x \subset K$ բաց շրջակայք, որ

$$f_x(y) \neq 0 \quad (y \in U_x) :$$

Բայց $\{U_x\}_{x \in K}$ ընտանիքը ծածկում է K կոմպակտը, ուստի այդ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ: Այլ կերպ ասած՝ գոյություն ունեն այնպիսի $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ կետեր, որ $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ և

$$f_{x_i}(y) \neq 0 \quad (y \in U_{x_i}) :$$

Վերցնենք

$$h = f_{x_1}\overline{f}_{x_1} + f_{x_2}\overline{f}_{x_2} + \cdots + f_{x_n}\overline{f}_{x_n} :$$

Այդ դեպքում կունենանք $h \in C(K)$ և

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(f_{x_i}\right) \varphi\left(\overline{f}_{x_i}\right) = 0 :$$

Մյուս կողմից՝

$$h = \left|f_{x_1}\right|^2 + \left|f_{x_2}\right|^2 + \cdots + \left|f_{x_n}\right|^2,$$

ուստի h-ը K-ի ոչ մի կետում 0 չի դառնում և հետևաբար՝ $h \in A^{-1}$: Վերջինս բերում է հակասության՝ նախորդ թեորեմի 3) պնդման հետ:

Սրանով իսկ (2.1.2)-ն ապացուցվեց: Քանի որ

$$\ker\left(\varphi_{x_0}\right) = \left\{f \in C(K) : \; f(x_0) = 0\right\},$$

ուստի (2.1.2)-ից և նախորդ թեորեմի 1), 2) պնդումներից կբխի, որ $C(K)$-ի մաքսիմալ իդեալները հանդիսանում են

$$J_{\{x_0\}} = \left\{f \in C(K) : \; f(x_0) = 0\right\} \quad (x_0 \in K)$$

բազմությունները և միայն նրանք:

Ըստ Ուրիսոնի լեմմայի՝ $C(K)$-ն անջատում է K-ի կետերը, այսինքն՝ $\forall x, y \in K$, $x \neq y$ կետերի համար $\exists f \in C(K)$ այնպես, որ $f(x) \neq f(y)$ (այն դեպքում, երբ K-ն հանդիսանում է մետրիկական տարածություն, որպես այդպիսի ֆունկցիա կարող է ծառայել $f(t) = \rho(t, y)$, $t \in K$ ֆունկցիան): Հետևաբար ամեն մի $x \in K$ կետին համապատասխանեցնելով $\varphi_x \in \mathcal{M}_{C(K)}$ ֆունկցիոնալը՝ կստանանք փոխմիարժեք (բիեկտիվ) արտապատկերում K-ից $\mathcal{M}_{C(K)}$-ի վրա: Դա թույլ է տալիս համարել, որ

$$M_{C(K)} = K : \tag{2.1.3}$$

Խնդիր 2: Դիցուք $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, իսկ $A(T)$-ն դիսկ հանրահաշիվն է: Ապացուցել, որ

$$\mathcal{M}_{A(T)} = \overline{D(0,1)} : \tag{2.1.4}$$

Դիտողություն 2.1.1: (2.1.4)-ը համեմատելով (2.1.3)-ից բխող

$$\mathcal{M}_{C(T)} = T$$

հավասարության հետ՝ նկատում ենք, որ ենթահանրահաշվին անցնելիս մաքսիմալ իդեալների տարածությունը կարող է փոխվել: ►

Սահմանում 2.1.1: Դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է, և $F = \{x_\alpha\} \subset A \setminus \{e\}$ էլեմենտների գծորեն անկախ համակարգ է: Կասենք F-ը A-ի ծնիչ է, եթե $F \cup \{e\}$-ով ծնված մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվը համընկնում է A-ի հետ:

Դիտողություն 2.1.2: Նկատենք, որ $\forall F \subset A$ էլեմենտների ընտանիքի համար F-ի էլեմենտներից բազմանդամների բազմության փակումը հանդիսանում է F-ը պարունակող մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվ: Ուստի ցանկացած $F \subset A \setminus \{e\}$ գծորեն անկախ համակարգի համար գոյություն ունի $B \subset A$ փակ ենթահանրահաշիվ, որի համար F-ը հանդիսանում է ծնիչ: ►

Օրինակ 3: $W = W_n$-ով նշանակենք այն բոլոր $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ֆունկցիաների դասը, որոնք ներկայացվում են

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x}$$

տեսքով, որտեղ $\sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m| < \infty$: W-ում ներմուծենք նորմ՝ $\forall f \in W$ համար սահմանելով

$$\|f\| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m| :$$

Հեշտ է տեսնել, որ W-ն կհանդիսանա կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ (գործողությունները հասկացվում են կետային իմաստով, միավորը $e(t) \equiv 1$ ֆունկցիան է): Յուրաքանչյուր $x \in \mathbb{R}^n$

համար $f \mapsto f(x)$ արտապատկերումը հանդիսանում է ոչ 0-ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ: Ցույց տանք, որ ճիշտ է նաև հակառակը, այսինքն $\forall\varphi \in \mathcal{M}_W$ համար $\exists y \in \mathbb{R}^n$, որ

$$\varphi(f) = f(y) \quad (f \in W) : \tag{2.1.5}$$

$r = 1, 2, \dots, n$ համար նշանակենք $g_r(x) = \exp(i\, x_r)$, որտեղ x_r-ը x կետի r-րդ կոորդինատն է: Ակնհայտ է, որ

$$g_r, \frac{1}{g_r} \in W,$$

և

$$\|g_r\| = \left\| \frac{1}{g_r} \right\| = 1 :$$

Քանի որ $\varphi \in \mathcal{M}_A$, ուստի $\|\varphi\| \leqslant 1$ և կունենանք՝

$$|\varphi\,(g_r)| \leqslant 1,$$

$$\left| \frac{1}{\varphi\,(g_r)} \right| = \left| \varphi \left(\frac{1}{g_r} \right) \right| \leqslant 1$$

(քանի որ $g_r \in W^{-1} \Rightarrow \varphi(g_r) \neq 0$): Այստեղից կբխի, որ

$$|\varphi\,(g_r)| = 1 :$$

Հետևաբար $\exists y_r \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$, որ

$$\varphi(g_r) = \exp(i\, y_r) = g_r(y), \tag{2.1.6}$$

որտեղ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$: Դիցուք P-ն կամայական եռանկյունաչափական բազմանդամ է (դա նշանակում է, որ P-ն հանդիսանում է g_r, $\dfrac{1}{g_r}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ ֆունկցիաների ամբողջ աստիճանների վերջավոր գծային կոմբինացիա): Այդ դեպքում φ-ի գծայնությունից, մուլտիպլիկատիվությունից և (2.1.6)-ից կբխի, որ

$$\varphi(P) = P(y) : \tag{2.1.7}$$

W-ում նորմի սահմանումից պարզ երևում է, որ եռանկյունաչափական բազմանդամները W-ում ամենուրեք խիտ են, ուստի (2.1.7)-ից և φ-ի անընդհատությունից կբխի, որ

$$\varphi(f) = f(y) \quad (\forall f \in W)\,,$$

ինչը հենց (2.1.5)-ն է:

Նշենք, որ եթե $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$ այնպիսին են, որ $y_i - \tilde{y}_i$ հանդիսանում են 2π-ի պատիկներ, ապա $f \mapsto f(y)$ և $f \mapsto f(\tilde{y})$ ֆունկցիոնալները կլինեն նույնը: Քանի որ (2.1.5)-ի աջ մասում գրված է $f \mapsto f(y)$ Դիրակի ֆունկցիոնալը, ուստի ինչպես (2.1.2)-ը գրեցինք (2.1.3) տեսքով, այնպես էլ (2.1.5)-ը կարելի է գրել

$$\mathcal{M}_W = [0, 2\pi]^n \tag{2.1.8}$$

տեսքով:

(2.1.5)-ից բխում է, որ եթե $f \in W$ այնպիսին է, որ $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ապա $\dfrac{1}{f} \in W$: Սա Վիների հայտնի թեորեմն է (հիմնավորումը բխում է (2.1.5)-ից և 2.1.2 թեորեմի 3) պնդումից): ▶

Դիտողություն 2.1.3: $\left\{ g_r, \frac{1}{g_r} \,:\, 1 \leqslant r \leqslant n \right\}$ ընտանիքը հանդիսանում է W Վիների հանրահաշվի ծնիչ: ▶

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ $C^n[a,b]$-ն

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| f^{(k)}(t) \right|$$

նորմի նկատմամբ հանդիսանում է բանախյան հանրահաշիվ և ցույց տալ, որ

$$\mathcal{M}_{C^n[a,b]} = [a, b] : \blacktriangleright$$

§ 2.2. Գելֆանդի ձևափոխությունը

Դիցուք A-ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $\mathcal{M}_A$-ն A-ի ոչ 0-ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալների բազ–

մությունն է (մաքսիմալ իդեալների տարածությունը):

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathcal{M}_A)$$

բանաձևը յուրաքանչյուր $a \in A$ էլեմենտին համապատասխանեցնում է $\hat{a} : \mathcal{M}_A \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան, որին անվանում են a էլեմենտի Գելֆանդի ձևափոխություն: Նշանակենք

$$\hat{A} = \{\hat{a} : \ a \in A\} :$$

$\hat{A}$-ը հանդիսանում է $a \mapsto \hat{a}$ արտապատկերման պատկերը: Այդ արտապատկերմանը ևս հաճախ անվանում են Գելֆանդի ձևափոխություն:

A-ում դիտարկենք թույլ * տոպոլոգիա: Հիշենք, որ այն որոշվում է

$$U(\varphi_0;\, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \\ = \{\varphi \in A^* : \ |\varphi(x_k) - \varphi_0(x_k)| < \varepsilon \ \ (1 \leqslant k \leqslant n)\}$$

շրջակայքերի համակարգով, որտեղ $\varphi_0 \in A^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, և $\varepsilon > 0$ կամայական են: Դիտարկենք A^*-ի թույլ * տոպոլոգիայով $\mathcal{M}_A$-ի վրա մակածված տոպոլոգիան: Վերջինս կորոշվի

$$V(\varphi_0;\, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \\ = \{\varphi \in \mathcal{M}_A : \ |\varphi(x_k) - \varphi_0(x_k)| < \varepsilon \ \ (1 \leqslant k \leqslant n)\}$$

շրջակայքերի համակարգով, որտեղ $\varphi_0 \in \mathcal{M}_A$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ և $\varepsilon > 0$ կամայական են: Սա այն ամենաթույլ տոպոլոգիան է, ըստ որի բոլոր $\hat{a} : \mathcal{M}_A \to \mathbb{C}$ ֆունկցիաները անընդհատ են: Այս տոպոլոգիային անվանում են գելֆանդյան տոպոլոգիա: $\mathcal{M}_A$-ն, որը դիտարկվում է գելֆանդյան տոպոլոգիայի նկատմամբ, կոչվում է մաքսիմալ իդեալների տարածություն կամ A հանրահաշվի սպեկտր:

Լեմմա 2.2.1: *$\mathcal{M}_A$-ն A^*-ում թույլ * փակ է:*

Ապացույց: Դիցուք φ_0-ն պատկանում է $\mathcal{M}_A$-ի թույլ * փակմանը: Մենք պետք է ապացուցենք, որ

$$\varphi_0(xy) = \varphi_0(x)\varphi_0(y) \quad (x,\, y \in A) \tag{2.2.1}$$

և
$$\varphi_0(e) = 1 : \tag{2.2.2}$$
Ֆիքսենք $x, y \in A$ և $\varepsilon > 0$: Նշանակենք
$$W = \{\varphi \in A^* : \ |\varphi(z_i) - \varphi_0(z_i)| < \varepsilon \text{ երբ } 1 \leqslant i \leqslant 4\}\,,$$
որտեղ $z_1 = e$, $z_2 = x$, $z_3 = y$, $z_4 = xy$: Այդ դեպքում W-ն կհանդիսանա φ_0 կետի թույլ * շրջակայք, ուստի փակման սահմանումից կբխի, որ $\exists \varphi \in W \cap \mathcal{M}_A$: Այդ φ-ի համար կունենանք
$$|1 - \varphi_0(e)| = |\varphi(e) - \varphi_0(e)| < \varepsilon,$$
որտեղից կբխի (2.2.2)-ը: Ունենք
$$\begin{aligned} &\varphi_0(xy) - \varphi_0(x)\varphi_0(y) = \\ &\ = [\varphi_0(xy) - \varphi(xy)] + [\varphi(x)\varphi(y) - \varphi_0(x)\varphi_0(y)] = \\ &\ = [\varphi_0(xy) - \varphi(xy)] + [\varphi(y) - \varphi_0(y)]\,\varphi(x) + [\varphi(x) - \varphi_0(x)]\,\varphi_0(y) \end{aligned}$$
և $\varphi \in W$ առնչությունից կբխի, որ
$$|\varphi_0(xy) - \varphi_0(x)\varphi_0(y)| < (1 + \|x\| + |\varphi_0(y)|)\,\varepsilon,$$
որտեղից էլ կբխի (2.2.1)-ը:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.2.1: *Դիցուք A-ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, $\mathcal{M}_A$-ն A-ի մաքսիմալ իդեալների տարածությունն է, իսկ R-ը A-ի բոլոր մաքսիմալ իդեալների հատումն է: Այդ դեպքում՝*

1) $\mathcal{M}_A$ տարածությունը հաուսդորֆյան է և կոմպակտ,

2) Գելֆանդի $x \mapsto \hat{x}$ ձևափոխությունը հոմոմորֆիզմ է A-ից $\hat{A}$-ի վրա (վերջինս $C(\mathcal{M}_A)$-ի ենթահանրահաշիվ է), ընդ որում այդ հոմոմորֆիզմի միջուկը համընկնում է R-ի հետ: Հետևաբար, Գելֆանդի ձևափոխությունը իզոմորֆիզմ կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ $R = \{0\}$;

3) $\forall x \in A$ *համար* $\hat{x}$*-ի պատկերը* ($\hat{x}(\mathcal{M}_A)$*-ն) համընկնում է* x *էլեմենտի* $\sigma(x)$ *սպեկտրի հետ: Այդ պատճառով*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leqslant \|x\|\,, \tag{2.2.3}$$

որտեղ

$$\|\hat{x}\|_\infty = \max_{\varphi \in \mathcal{M}_A} |\hat{x}(\varphi)| :$$

4) $R = \mathrm{Rad}(A) = \{x \in A : \ \rho(x) = 0\}$*:* [4]

Ապացույց:

1) Թույլ * տոպոլոգիան հաուսդորֆյան է: Իրոք, դիցուք $\varphi_i \in A^*$ $(i = 1, 2)$ և $\varphi_1 \neq \varphi_2$: Ուստի $\exists x \in A$, որ

$$\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x) :$$

Վերցնենք

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| :$$

Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ ֆունկցիոնալների $U(\varphi_1, x, \varepsilon)$ և $U(\varphi_2, x, \varepsilon)$ շրջակայքերը չեն հատվի:

Այստեղից բխում է, որ $\mathcal{M}_A$-ի տոպոլոգիան, որն ինդուկցված է A^*-ից, ևս հաուսդորֆյան է:

Դիցուք $S(A^*)$-ը A^*-ի միավոր սֆերան է: Ունենք

$$\mathcal{M}_A \subset S(A^*) \subset \overline{B}(A^*),$$

որտեղ

$$\overline{B}(A^*) = \{\varphi \in A^* : \ \|\varphi\| \leqslant 1\}$$

A^*-ի միավոր գունդն է: Ըստ Բանախ-Ալաօգլուի թեորեմի՝ $\overline{B}(A^*)$-ը թույլ * կոմպակտ է, ուստի նախորդ լեմմայից կբխի, որ $\mathcal{M}_A$-ն ևս թույլ * կոմպակտ է:

2) Դիցուք $x \in A$, $y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ և $\varphi \in \mathcal{M}_A$: Այդ դեպքում՝

$$(\alpha x)\hat{}(\varphi) = \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = (\alpha\hat{x})\,(\varphi),$$

[4] Քանի որ իդեալների հատումը իդեալ է, ուստի R-ը իդեալ է: Քանի որ $R = \mathrm{Rad}(A)$, ուստի ստացվում է, որ $\mathrm{Rad}(A)$ իդեալ է:

$$(x+y)\hat{}(\varphi)=\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)=\hat{x}(\varphi)+\hat{y}(\varphi)=(\hat{x}+\hat{y})(\varphi),$$

և

$$(xy)\hat{}(\varphi)=\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)=\hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi)=(\hat{x}\hat{y})(\varphi):$$

Հետևաբար $x\mapsto\hat{x}$ արտապատկերումը հոմոմորֆիզմ է: Այդ հոմոմորֆիզմի պատկերն ակնհայտորեն $\hat{A}$-ն է: Իսկ կորիզն իրենից ներկայացնում է $\{x\in A:\ \varphi(x)=0\ \ (\forall\varphi\in\mathcal{M}_A)\}$ բազմությունը: Վերջինս կարելի է գրել

$$\bigcap_{\varphi\in\mathcal{M}_A}\ker(\varphi)$$

տեսքով: Իսկ սա, համաձայն 2.1.2 թեորեմի 1) և 2) պնդումների, համընկնում է R-ի հետ:

3) Ունենք

$$\hat{x}(\mathcal{M}_A)=\{\hat{x}(\varphi):\ \varphi\in\mathcal{M}_A\}=\{\varphi(x):\ \varphi\in\mathcal{M}_A\}=\sigma(x),$$

որտեղ վերջին քայլը բխում է 2.1.2 թեորեմի 5) պնդումից: Հետևաբար

$$\|\hat{x}\|_\infty=\rho(x)\leqslant\|x\|:$$

4) Ինչպես 2)-ի ապացույցի ընթացքում տեսանք՝

$$R=\bigcap_{\varphi\in\mathcal{M}_A}\ker(\varphi):$$

Ուստի $x\in R$ նշանակում է, որ

$$\varphi(x)=0\quad(\forall\varphi\in\mathcal{M}_A),$$

կամ որ նույնն է՝

$$\hat{x}(\mathcal{M}_A)=\{0\}:$$

Ըստ 3)-ի՝ վերջինս համարժեք է

$$\sigma(x)=\{0\}$$

առնչությանը: Իսկ սա էլ համարժեք է

$$\rho(x)=0,$$

կամ որ նույնն է՝ $x \in \mathrm{Rad}(A)$ առնչությանը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.2.1: A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվը կոչվում է կիսապարզ, եթե $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$:

Թեորեմ 2.2.2: *Դիցուք a էլեմենտը A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվի ծնիչն է: Այդ դեպքում $\varphi \mapsto \varphi(a)$ $(\varphi \in \mathcal{M}_A)$ արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է $\mathcal{M}_A$-ի և $\sigma(a)$-ի միջև:*

Ապացույց: Քանի որ $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \mathcal{M}_A\}$, ուստի $\varphi \to \varphi(a)$ արտապատկերումն անընդհատ է A տոպոլոգիայում: Հետևաբար, բավական է ցույց տալ, որ այն ինեկտիվ է: Ենթադրենք, թե $\exists \varphi,\ \psi \in \in \mathcal{M}_A$, որ $\varphi(a) = \psi(a)$ և դիցուք $B = \{x \in A : \varphi(x) = \psi(x)\}$: Քանի որ $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_A$, ուստի B-ն A-ի փակ ենթահանրահաշիվ է, որը պարունակում է a-ն: Հետևաբար $B = A$, այսինքն՝ $\varphi = \psi$:

Թեորեմ 2.2.3: *Դիցուք a էլեմենտը A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվի ծնիչն է: Այդ դեպքում $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ կապակցված է:*

Ապացույց: Ենթադրենք, որ $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ ունի ոչ դատարկ սահմանափակ W կոմպոնենտ և $\xi_0 \in W$: Դիցուք B-ն A–ում $\{e, a\}$-ն պարունակող մինիմալ ենթահանրահաշիվն է: Քանի որ $\partial W \subset \sigma(a)$, ուստի սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմից բխում է, որ $\forall p$ բազմանդամի համար

$$|p(\xi_0)| \leqslant \max\{|p(\xi)| : \xi \in \partial W\} \leqslant \max\{|p(\xi)| : \xi \in \sigma(a)\} =$$

$$= \max\{|\lambda| : \lambda \in p(\sigma(a))\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(a))\} \leqslant \|p(a)\| :$$

Վերցնենք $b \in B$, այդ դեպքում $\exists p$ բազմանդամ, որ $b = p(a)$: $\varphi_0 : B \to \mathbb{C}$ հոմոմորֆիզմը սահմանենք

$$\varphi_0(b) = p(\xi_0)$$

բանաձևով (որտեղ $b = p(a)$): Վերն արված դատողություններից բխում է, որ եթե ինչ-որ p_1, p_2 բազմանդամների համար $p_1(a) = p_2(a)$, ապա $p_1(\xi_0) = p_2(\xi_0)$: Ուստի φ_0-ի սահմանումը կոռեկտ է: Քանի որ $|\varphi_0(b)| = |p(\xi_0)| \leqslant \|p(a)\| = \|b\|$, ուստի φ_0-ն սահմանափակ է և $\|\varphi_0\| \leqslant 1$: Ըստ Հան-Բանախի թեորեմի՝

φ_0-ն ունի նորմը պահպանող φ շարունակություն A–ի վրա: Բայց $\varphi_0(e) = 1$, հետևաբար $\varphi \in \mathcal{M}_A$: Եթե $p(z) = z$, ապա $p(a) = a$ և $\varphi(a) = \varphi_0(a) = p(\xi_0) = \xi_0$: Հետևաբար, $\xi_0 \in \sigma(a)$, ինչը հակասություն է:

Թեորեմ 2.2.4: *Դիցուք K-ն ոչ դատարկ կոմպակտ է $\mathbb{C}$–ում, որի լրացումը կապակցված է: Այդ դեպքում գոյություն ունի միավորով և մեկ a ծնիչով A կոմպլեքս կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ, այնպիսին, որ $\sigma(a) = K$:*

Ապացույց: Դիցուք $a(z) = z$ $(z \in K)$, իսկ A-ն $C(K)$-ում e-ն և a-ն պարունակող մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվն է: Պարզ է, որ $K \subset \sigma_A(a)$: Եթե $\lambda \notin K$, ապա $\inf\{|\lambda - a(z)| : z \in K\} = M > 0$ և հետևաբար $\|(\lambda e - a)f\|_\infty \geqslant M\|f\|_\infty$ $(f \in A)$: Այստեղից բխում է, որ $(\lambda e - a)$-ն A–ում զրոյի տոպոլոգիական բաժանարար չէ և հետևաբար $\partial\sigma_A(a) \subset K$: Դիցուք $U = \operatorname{int}(\sigma_A(a))$, $V = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$: Այդ դեպքում U, V չհատվող բաց բազմություններ են և

$$\mathbb{C} \setminus K \subset \mathbb{C} \setminus \partial\sigma_A(a) = U \cup V \quad \text{և}$$

և $(\mathbb{C}\setminus K) \cap V \neq \emptyset$: Քանի որ $\mathbb{C}\setminus K$ կապակցված է, ուստի $\mathbb{C}\setminus K \subset V$: Այստեղից բխում է, որ $\sigma_A(a) \subset K$, և հետևաբար՝ $\sigma_A(a) = K$:

§ 2.3. Ինվոլյուցիաներ

Դիցուք X-ը կոմպլեքս գծային պարածություն է, իսկ A–ն կոմպլեքս հանրահաշիվ է:

Սահմանում 2.3.1: X–ից X գործող $x \mapsto x^*$ արտապատկերումը կոչվում է գծային ինվոլյուցիա (կամ՝ ինվոլյուցիա) X–ի վրա, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) $(x + y)^* = x^* + y^*$,

2) $(\lambda x^*) = \overline{\lambda} x^*$,

3) $(x^*)^* = x$:

$h \in X$ էլեմենտը կանվանենք ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) * ինվոլյուցիայի նկատմամբ, եթե $h^* = h$: X–ի բոլոր ինքնահամալուծ տարրերի բազմությունը նշանակենք $\operatorname{sym}(X)$:

Պնդում 2.3.1: *Դիցուք $*$-ը գծային ինվոլյուցիա է X–ի վրա: Այդ դեպքում* $\mathrm{sym}(X)$*-ը իրական գծային ենթատարածություն է X–ում և*

$$X = \mathrm{sym}(X) \oplus i\ \mathrm{sym}(X)\ :$$

Ապացույց: Հեշտ է ստուգել, որ $\mathrm{sym}(X)$-ը X-ի իրական ենթա–տարածություն է: Դիցուք $x \in \mathrm{sym}(X) \cap i\ \mathrm{sym}(X)$: Այդ դեպքում $x = iy$, որտեղ $y = y^*$ և $x = x^* = (iy)^* = -iy^* = -iy = -x$, ուստի $x = 0$, և հետևաբար, $\exists\,\mathrm{sym}(X) \oplus i\ \mathrm{sym}(X)$: $\forall x \in X$ համար $\dfrac{x+x^*}{2}, \dfrac{x-x^*}{2i} \in \mathrm{sym}(X)$ և

$$x = \frac{x+x^*}{2} + i\,\frac{x-x^*}{2i},$$

հետևաբար՝ $X = \mathrm{sym}(X) \oplus i\ \mathrm{sym}(X)$:
Պնդումն ապացուցված է:

Պնդում 2.3.2: *Դիցուք Y-ը իրական ենթատարածություն է X–ում և $X = Y \oplus iY$: Այդ դեպքում $h + ik \mapsto h - ik$ $(h, k \in Y)$ արտապատկերումը գծային ինվոլյուցիա է X–ի վրա, ընդ որում* $\mathrm{sym}(X) = Y$*:*

Ապացույցն ակնհայտ է:

Սահմանում 2.3.2: Հանրահաշվական ինվոլյուցիա (կամ՝ ինվոլյու–ցիա) A–ի վրա կանվանենք այնպիսի $*$ գծային ինվոլյուցիան, որի համար տեղի ունի նաև հետևյալ պայմանը (աքսիոմը).

$$(xy)^* = y^*x^* \quad (x, y \in A)\ :$$

Հանրահաշիվը, որում կա ինվոլյուցիա, կոչվում է *սարդանիշ* կամ *ինվոլյուտիվ* հանրահաշիվ:

Տրված $x, y \in A$ համար $\dfrac{xy+yx}{2}$ և $\dfrac{xy-yx}{2i}$ էլեմենտներին կանվանենք x, y տարրերի համապատասխանաբար *իրական* և *կեղծ* ժորդանյան արտադրյալներ:

Եթե A–ն սարդանիշ հանրահաշիվ է, ապա հեշտ է տեսնել, որ $\mathrm{sym}(A)$ փակ է իրական և կեղծ ժորդանյան արտադրյալի նկատմամբ:

Պնդում 2.3.3: *Դիցուք Y-ը A–ում իրական գծային ենթատարածություն է, որը փակ է իրական և կեղծ ժորդանյան արտադրյալների նկատմամբ և $A = Y \oplus iY$: Այդ դեպքում $h + ik \mapsto h - ik$ $(h, k \in Y)$ արտապատկերումը ինվոլյուցիա է A–ի վրա, ընդ որում* $\mathrm{sym}(A) = Y$*:*

Ապացույց: Ըստ 2.3.2 պնդման՝ բավական է ապացուցել, որ $(ab)^* = b^*a^*$ $(a, b \in A)$:

Դիցուք $a = h+ik$, $b = p+iq$, որտեղ $h, k, p, q \in Y$: Այդ դեպքում

$$ab + b^*a^* = (h + ik)(p + iq) + (p - iq)(h - ik) =$$

$$= (hp + ph) - (kq + qk) + i(kp - pk) + i(hq - qh) \in Y :$$

Նման ձևով $\frac{1}{i}(ab - b^*a^*) \in Y$: Քանի որ $ab = \frac{1}{2}(ab + b^*a^*) + i\frac{1}{2i}(ab - b^*a^*)$, ուստի

$$(ab)^* = \frac{1}{2}(ab + b^*a^*) - i\frac{1}{2i}(ab - b^*a^*) = b^*a^* :$$

Պնդումն ապացուցված է:

Սահմանում 2.3.3: Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ հանրահաշիվ է, և $\varphi : A \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալ է: φ^* գծային ֆունկցիոնալը սահմանենք

$$\varphi^*(a) = \overline{\varphi(a^*)} \quad (a \in A)$$

բանաձևով: Այդ դեպքում $\varphi \mapsto \varphi^*$ արտապատկերումը գծային ինվոլյուցիա է A-ի A' հանրահաշվական համալուծ տարածությունում: $\varphi : A \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալը կանվանենք *ինքնահամալուծ*, եթե $\varphi = \varphi^*$ (այսինքն՝ $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ $(\forall a \in A)$):

Պարզ է, որ ինքնահամալուծ ֆունկցիոնալը ընդունում է իրական արժեքներ $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա և հակառակը՝ եթե φ_0-ն իրական գծային ֆունկցիոնալ է $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա, ապա այն

$$\varphi(a) = \varphi_0\left(\frac{a + a^*}{2}\right) + i\varphi_0\left(\frac{a - a^*}{2i}\right) \quad (a \in A) \tag{2.3.1}$$

բանաձևով ծնում է ինքնահամալուծ φ գծային ֆունկցիոնալ A–ի վրա:

A բանախյան հանրահաշվի վրա որոշված բոլոր ինքնահամալուծ *անընդհատ* գծային ֆունկցիոնալների բազմությունը կնշանակենք $\mathrm{sym}(A^*)$:

Դիտողություն 2.3.1: Դիցուք $\mathcal{H}(A)$–ն նախկինում դիտարկված հերմիտյան էլեմենտների բազմություն է: Այդ դեպքում դժվար չէ տեսնել, որ

$$\mathcal{H}(A) \subset \mathrm{sym}(A),$$

սակայն հնարավոր է, որ $\mathcal{H}(A) \neq \mathrm{sym}(A)$: ►

Սահմանում 2.3.4: A ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվը կոչվում է B^* հանրահաշիվ, եթե

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad (\forall x \in A) : \tag{2.3.2}$$

Նկատենք, որ $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leqslant \|x\| \cdot \|x^*\|$ գնահատականից բխում է, որ $\|x\| \leqslant \|x^*\|$: Բայց $x^{**} = x$, ուստի վերը ստացվածից կբխի, որ

$$\|x^*\| \leqslant \|(x^*)^*\| = \|x^{**}\| = \|x\|,$$

հետևաբար B^* հանրահաշվում

$$\|x^*\| = \|x\| \quad (\forall x \in A) : \tag{2.3.3}$$

(2.3.3)–ից բխում է, որ B^* հանրահաշվի ինվոլյուցիան անընդհատ է:

Թեորեմ 2.3.1: *Դիցուք A–ն միավորով B^* հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում $\mathcal{H}(A) = \mathrm{sym}(A)$:*

Ապացույց: Դիցուք $h \in A$, $h^* = h$ և $t \in \mathbb{R}$: Քանի որ

$$\|e + t^2h^2\| = \|(e + ith)(e - ith)\| = \|e + ith\|^2,$$

ուստի

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \{\|e + ith\| - 1\} = \lim_{t \to +0} \left\{\sqrt{\|e + ith\|} - 1\right\} = 0 :$$

Հետևաբար, $V(h) \subset \mathbb{R}$:

Հակառակը, եթե $h \in \mathcal{H}(A)$ և $h = p + iq$, որտեղ $p = p^*$, $q = q^*$, ապա $V(h) = \{\varphi(p) + i\varphi(q) : \varphi \in \mathcal{P}(A)\}$: Քանի որ h, p, q հերմիտյան են, ապա $\forall\varphi \in \mathcal{P}(A)$ համար $\varphi(q) = 0 \Rightarrow h \in \mathrm{sym}(A)$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Վիդավ–Պալմերի թեորեմը: *Եթե A բանախյան հանրահաշվում տրված $*$ ինվոլյուցիան այնպիսին է, որ*

$$\mathcal{H}(A) = \mathrm{sym}(A),$$

ապա A–ն B^* հանրահաշիվ է:

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Օրինակ 1: $C(K)$–ում $f \mapsto \overline{f}$ արտապատկերումը կլինի ինվոլյուցիա ($f^* \stackrel{def}{=} \overline{f}$): Ակնհայտ է, որ $C(K)$–ն B^*–հանրահաշիվ է:

Օրինակ 2: Դիտարկենք H հիլբերտյան տարածության վրա որոշված $BL(H)$ գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշիվը: Դիցուք $*$–ը $A \in BL(H)$ օպերատորից նրա հերմիտյան համալուծին անցման գործողությունն է: Այդ դեպքում $BL(H)$–ը կլինի B^*–հանրահաշիվ: Սա մենք գիտենք ֆունկցիոնալ անալիզի դասընթացից, բայց ապացուցենք անկախ ճանապարհով: Նախ տանք այսպիսի՝

Սահմանում 2.3.5: Դիցուք X, Y, Z միևնույն թվային դաշտով (իրական կամ կոմպլեքս) գծային տարածություններ են, իսկ $B : X \times Y \to Z$: Յուրաքանչյուր $x \in X$ և $y \in Y$ էլեմենտներին համապատասխան՝ կառուցենք

$$B_x : Y \longrightarrow Z \quad \text{և} \quad B^y : X \longrightarrow Z$$

արտապատկերումներ՝ վերցնելով

$$B_x(y) = B(x, y) \quad (y \in Y)\,,$$

և

$$B^y(x) = B(x, y) \quad (x \in X)\,:$$

ա) B արտապատկերումը կոչվում է բիգծային, եթե $\forall x \in X$ և $\forall y \in Y$ համար B_x, B^y արտապատկերումները գծային են:

բ) B արտապատկերումը կոչվում է կիսագծային (полуторалинейный) եթե $\forall y \in Y$ համար B^y արտապատկերումը գծային է, իսկ B_x–ը $\forall x \in X$ համար համալուծ–գծային է, այսինքն՝

$$B_x\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) = \overline{\lambda}_1 B_x(y_1) + \overline{\lambda}_2 B_x(y_2),$$

($\forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall \lambda_1, \lambda_2$ սկալյարների համար)։ Կիսագծային ֆունկ–ցիոնալի օրինակ է սկալյար արտադրյալը։

Լեմմա 2.3.1: *Եթե $f : H \times H \to \mathbb{C}$ կիսագծային ֆունկցիոնալը սահմանափակ է այն իմաստով, որ*

$$\|f\| = \sup\{|f(x,y)| :\ \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty,$$

ապա գոյություն ունի միակ $S : H \to H$ արտապատկերում, որ

$$f(x,y) = (x, Sy) \quad (\forall x, y \in H):$$

Ընդ որում՝ $S \in BL(H)$ և

$$\|S\| = \|f\|:$$

Ապացույց: Հեշտ է տեսնել, որ $|f(x,y)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ ($\forall x, y \in H$), ուստի ցանկացած ֆիքսած $y \in H$ համար

$$x \mapsto f(x,y)$$

արտապատկերումը հանդիսանում է գծային սահմանափակ ֆունկ–ցիոնալ H–ում, ընդ որում այդ ֆունկցիոնալի նորմը չի գերազանցում $\|f\| \cdot \|y\|$–ը։ Ըստ Ռիսի թեորեմի՝ գոյություն ունի միակ $Sy \in H$, որ

$$f(x,y) = (x, Sy) \quad (x \in H),$$

ընդ որում

$$\|Sy\| \leqslant \|f\| \cdot \|y\|: \tag{2.3.4}$$

Հեշտ է տեսնել. որ S–ն ադիտիվ է։ Եթե $\alpha \in \mathbb{C}$, ապա

$$(x, S(\alpha y)) = f(x, \alpha y) = \overline{\alpha} f(x,y) = \overline{\alpha}(x, Sy) = (x, \alpha Sy),$$

$\forall x, y \in H$ համար: Ուստի S–ը գծային է: (2.3.4)–ից կբխի, որ $S \in BL(H)$ և

$$\|S\| \leqslant \|f\| :$$

Բացի այդ, ունենք

$$|f(x,y)| = |(x, Sy)| \leqslant \|x\| \, \|Sy\| \leqslant \|x\| \cdot \|S\| \cdot \|y\|,$$

և հետևաբար նաև $\|f\| \leqslant \|S\|$:
Լեմման ապացուցված է:

Եթե $T \in BL(H)$, ապա $f(x,y) = (Tx, y)$ ձևը հանդիսանում է կիսագծային սահմանափակ ֆունկցիոնալ, ուստի ըստ նախորդ լեմմայի՝ գոյություն ունի միակ $T^* : H \to H$ արտապատկերում, որ

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad (x, y \in H), \tag{2.3.5}$$

ընդ որում $T^* \in BL(H)$ և

$$\|T^*\| = \|T\| : \tag{2.3.6}$$

T^*–ը կոչվում է T սահմանափակ օպերատորի հերմիտյան համալուծ: Ցույց տանք, որ $T \mapsto T^*$ արտապատկերումը $BL(H)$–ում ինվոլյուցիա է, այսինքն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$(T+S)^* = T^* + S^*,$$

$$(\alpha T)^* = \overline{\lambda} T^*,$$

$$(ST)^* = T^* S^*,$$

$$T^{**} = T$$

($\forall T, S \in BL(H)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$): Սրանցից առաջինն ակնհայտ է, իսկ մյուսները բխում են

$$(\alpha Tx, y) = \alpha (Tx, y) = \alpha \left(x, T^* y\right) = \left(x, \overline{\alpha} T^* y\right),$$

$$(STx, y) = (Tx, S^*y) = (x, T^* S^* y)\,,$$

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, T^{**}x)} = (T^{**}x, y)$$

հավասարություններից: Քանի որ $\forall x \in H$ համար

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \leqslant \|T^*T\| \cdot \|x\|^2,$$

ուստի $\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\|$: Մյուս կողմից, (2.3.6)–ից բխում է, որ

$$\|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \; \|T\| = \|T\|^2 \,,$$

ուստի $\forall T \in BL(H)$ համար

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \, :$$

Այսպիսով, ապացուցվեց, որ $BL(H)$–ը B^*–հանրահաշիվ է: ►

Թեորեմ 2.3.2: *Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, և $x \in A$: Այդ դեպքում՝*
1) $x + x^*$, $i(x - x^*)$, xx^* էլեմենտները սիմետրիկ են,
2) x էլեմենտը միակ ձևով ներկայացվում է $x = u + iv$ տեսքով, որտեղ u–ն և v–ն A–ի սիմետրիկ էլեմենտներ են,
3) e միավորը և 0–ն սիմետրիկ են,
4) $x \in A^{-1}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x^* \in A^{-1}$, ընդ որում $(x^*)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^*$,
5) $\lambda \in \sigma(x)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$:

Ապացույց: 1) պնդումն ակնհայտ է:
2) Վերցնենք $u = \frac{1}{2}\,(x + x^*)$, $v = \frac{1}{2i}\,(x - x^*) = \frac{i}{2}\,(x^* - x)$: Այդ դեպքում կունենանք $u, v \in \mathrm{sym}(A)$ և $x = u + iv$: Ենթադրենք թե նաև $x = u' + iv'$, որտեղ u', $v' \in \mathrm{sym}(A)$: Նշանակենք $w = v' - v$: Ունենք $w \in \mathrm{sym}(A)$: Քանի որ

$$iw = i(v' - v) = iv' - iv = (x - u') - (x - u) = u - u',$$

ուստի նաև $iw \in \mathrm{sym}(A)$, և հետևաբար

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw,$$

որտեղից կստանանք, որ $w = 0$: Այստեղից կբխի, որ $v = v'$ և հետևաբար՝ նաև $u = u'$:

3) Ունենք $0^* = (0+0)^* = 0^* + 0^* \Rightarrow 0^* = 0$: Ունենք $e^* = ee^*$, ուստի 1)–ից կբխի, որ $e^* = (e^*)^* = e$:
4)–ը բխում է 3)–ից և $(xy)^* = y^*x^*$ հավասարությունից:
5)–ը ստանալու համար 4)–ը կկիրառենք $(\lambda e - x)$–ի վրա:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2.3.3: *Եթե A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվը կիսապարզ է, ապա A–ի վրա ցանկացած ինվոլյուցիա անընդհատ է:*

Ապացույց: A–ն իրական թվերի դաշտի նկատմամբ բանախյան տարածություն է, իսկ $*$–ը A–ից A իրականորեն գծային: Ուստի $*$–ի անընդհատությունը ցույց տալու համար՝ փակ գրաֆիկի մասին թեորեմի շնորհիվ բավական է ցույց տալ, որ $*$–ի գրաֆիկը փակ է: Դիցուք

$$x_n \to x, \quad x_n^* \to y:$$

Պետք է ցույց տալ, որ $y = x^*$: Վերցնենք $\forall \psi \in \mathcal{M}_A$ և դիտարկենք $\varphi(z) = \overline{\psi(z^*)}$ $(z \in A)$ բանաձևով որոշվող ֆունկցիոնալը: Ինվոլյուցիայի հատկություններից կբխի, որ $\varphi \in \mathcal{M}_A$: Ուստի φ–ն անընդհատ է, և կունենանք

$$\overline{\psi(x^*)} = \varphi(x) = \lim \varphi(x_n) = \lim \overline{\psi\left(x_n^*\right)} = \overline{\psi(y)},$$

$$\psi\left(x^* - y\right) = 0,$$

այսինքն՝ $x^* - y \in \ker(\psi)$: Քանի որ ψ–ն կամայական էր, ուստի ստանում ենք

$$x^* - y \in \bigcap_{\psi \in \mathcal{M}_A} \ker(\psi) = \mathrm{Rad}(A) = \{0\},$$

և հետևաբար $y = x^*$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.3.6: Դիցուք K–ն հաուսդորֆյան կոմպակտ է: $A \subset C(K)$ կոչվում է հավասարաչափ հանրահաշիվ, եթե՝
1) A–ն $C(K)$–ի փակ ենթահանրահաշիվ է,
2) A–ն անջատում է K–ի կետերը,
3) $e \in A$ (e–ով նշանակված է $C(K)$–ի միավորը):

Օրինակ, $A(T)$ դիսկ հանրահաշիվը $C(T)$–ում հավասարաչափ ենթահանրահաշիվ է:

Սահմանում 2.3.7: $C(K)$–ի A ենթահանրահաշիվը կոչվում է սիմետրիկ, եթե $\forall f \in A$ համար $\overline{f} \in A$:

Ստոն–Վայերշտրասի թեորեմը: *Եթե հավասարաչափ հանրահաշիվը սիմետրիկ է, ապա այն համընկնում է $C(K)$–ի հետ:*

Սա մենք ապացուցել ենք մաթ. անալիզի դասընթացում: ▶

Լեմմա 2.3.2: *Դիցուք A–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, և*

$$r = \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}, \quad s = \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|^2} :$$

Այդ դեպքում

$$s^2 \leqslant r \leqslant s :$$

Ապացույց: $\forall x \in A$ համար ունենք $\|\hat{x}\|_\infty \geqslant s\|x\|$, ուստի

$$\|x^2\| \geqslant \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \geqslant s^2\|x\|^2 :$$

Հետևաբար՝ $s^2 \leqslant r$:

Քանի որ $\forall x \in A$ համար $\|x^2\| \geqslant r\|x\|^2$, ուստի ըստ n–ի ինդուկցիայով կստանանք, որ

$$\|x^m\| \geqslant r^{m-1}\|x\|^m \quad (m = 2^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots) :$$

Ստացված առնչությունից հանենք m–րդ աստիճանի արմատ և այնուհետև անցնենք սահմանի, երբ $m \to \infty$: Օգտվելով սպեկտրալ շառավղի բանաձևից՝ կունենանք

$$\rho(x) \geqslant r\|x\|,$$

և քանի որ $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$, ուստի կստանանք

$$\|\hat{x}\|_\infty \geqslant r\|x\| \quad (x \in A),$$

որտեղից էլ բխում է, որ $r \leqslant s$:

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.3.4: *Դիցուք A–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում՝*

1) Գելֆանդի ձևափոխությունը իզոմետրիա կլինի (այսինքն՝ $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$ $(\forall x \in A)$) այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\left\|x^2\right\| = \|x\|^2 \quad (\forall x \in A),$$

2) որպեսզի A–ն լինի կիսապարզ և միաժամանակ $\hat{A}$–ը լինի փակ $C(\mathcal{M}_A)$–ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\exists K > 0$, այնպես, որ

$$\|x\|^2 \leqslant K \left\|x^2\right\| \quad (\forall x \in A):$$

Ապացույց: 1) Նախորդ լեմմայի նշանակումներով՝ Գելֆանդի ձևափոխությունը իզոմետրիա կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ $s = 1$ (չէ՞ որ, ըստ (2.2.3)-ի, միշտ $\|\hat{x}\|_\infty \leqslant \|x\|$), ինչը, ըստ այդ լեմմայի, համարժեք է $r = 1$ պայմանին: Քանի որ միշտ $\|x^2\| \leqslant \|x\|^2$, ուստի $r = 1$ պայմանը համարժեք է թեորեմի պայմանին:

2) Նշված $K > 0$ թվի գոյությունը նշանակում է, որ $r > 0$, ինչը, ըստ այդ լեմմայի, համարժեք է $s > 0$ պայմանին: Եթե $s > 0$, ապա $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է և ունի անընդհատ հակադարձ: Ուստի այդպիսի իրավիճակում $\hat{A}$ հանրահաշիվը լրիվ է (և հետևաբար փակ է) $C(\mathcal{M}_A)$–ում: [5]

Այժմ հակառակը, դիցուք $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է և $\hat{A}$ հանրահաշիվը փակ է $C(\mathcal{M}_A)$–ում: Այդ դեպքում հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմից կբխի, որ $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերման հակադարձը սահմանափակ է: Հետևաբար այդ օպերատորի նորմը՝

$$0 < \sup_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|x\|}{\|\hat{x}\|_\infty} < \infty,$$

ինչը համարժեք է $s > 0$ առնչությանը: Նախորդ լեմմայից կբխի, որ $r > 0$:

Թեորեմն ապացուցված է:

[5] Ըստ 2.2.1 թեորեմի՝ A–ն կիսապարզ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է:

Թեորեմ 2.3.5 (Գելֆանդ–Նայմարկի կոմուտատիվ թեորեմը): *Դիցուք A–ն կոմուտատիվ B^* հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում Գելֆանդի ձևափոխությունը հանդիսանում է իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ A–ի և $C(\mathcal{M}_A)$–ի միջև, ընդ որում*

$$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} \quad (x \in A,\ \varphi \in \mathcal{M}_A), \tag{2.3.7}$$

կամ որ նույնն է՝

$$(x^*)\hat{} = \overline{\hat{x}} \quad (x \in A) : \tag{2.3.8}$$

Մասնավորապես, $x \in A$ էլեմենտը սիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\hat{x}$–ը իրական ֆունկցիա է:

Ապացույց: Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$ և $u \in \mathrm{sym}(A)$: Նախ ցույց տանք, որ $\varphi(u)$–ն իրական թիվ է: Դիցուք $\varphi(u) = \alpha + i\beta$, որտեղ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: Վերցնենք կամայական $t \in \mathbb{R}$ և դիտարկենք $z = u + ite$ էլեմենտը: Հեշտ է տեսնել, որ

$$zz^* = u^2 + t^2 e,$$

$$\varphi(z) = \alpha + i(\beta + t),$$

ուստի

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\varphi(z)|^2 \leqslant \|z\|^2 = \|zz^*\| \leqslant \|u\|^2 + t^2,$$

կամ՝

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leqslant \|u\|^2 \quad (-\infty < t < \infty),$$

ինչը հնարավոր է միայն $\beta = 0$ դեպքում: Վերջինս էլ նշանակում է, որ $\varphi(u)$–ն իրական է:

$\forall x \in A$ կարելի է ներկայացնել $x = u + iv$ տեսքով, որտեղ $u = u^*$, $v = v^*$: Ընդ որում՝ $x^* = u - iv$: Ըստ վերն ապացուցվածի՝ $\hat{u}$, $\hat{v}$ ֆունկցիաները իրական են, որտեղից էլ կբխի (2.3.8)–ը:

Վերն ապացուցվածից բխում է, որ $\hat{A} \subset C(\mathcal{M}_A)$ սիմետրիկ հանրահաշիվ է, այսինքն եթե $f \in \hat{A}$, ապա նաև $\overline{f} \in \hat{A}$:

Եթե $x \in A$ և $y = xx^*$, ապա $y = y^*$, ուստի $\|y^2\| = \|y\|^2$: Այստեղից ըստ n–ի ինդուկցիայով ստացվում է, որ

$$\|y^m\| = \|y\|^m \quad (m = 2^n,\ n = 1, 2, \ldots) :$$

Ստացված հավասարությունից հանենք m–րդ աստիճանի արմատ և այնուհետև անցնենք սահմանի, երբ $m \to \infty$: Օգտվելով սպեկտրալ շառավղի բանաձևից՝ կունենանք

$$\rho(y) = \|y\|,$$

և քանի որ $\rho(y) = \|\hat{y}\|_\infty$, ուստի կստանանք

$$\|\hat{y}\|_\infty = \|y\| :$$

Քանի որ $y = xx^*$, ուստի (2.3.8)–ից բխում է, որ $\hat{y} = |\hat{x}|^2$: Հետևաբար

$$\|\hat{x}\|_\infty^2 = \|\hat{y}\|_\infty = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^2 ,$$

կամ $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$: Այսպիսով, $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը իզոմետրիա է: Հետևաբար $\hat{A}$–ն կլինի փակ $C(\mathcal{M}_A)$–ում:

Այսպիսով, $\hat{A} \subset C(\mathcal{M}_A)$ փակ ենթահանրահաշիվ է: Ակնհայտ է, որ $\hat{A}$–ը անջատում է $\mathcal{M}_A$–ի կետերը: $C(\mathcal{M}_A)$–ի միավորը՝ նույնաբար 1 ֆունկցիան է, հանդիսանում է e–ի Գելֆանդի ձևափոխությունը, ուստի և պատկանում է $\hat{A}$–ին: Հետևաբար $\hat{A}$–ը հավասարաչափ հանրահաշիվ է: Քանի որ $\hat{A}$–ը նաև սիմետրիկ է, ուստի Ստոն–Վայերշտրասի թեորեմից կբխի, որ $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 2.4. Ինվոլյուցիայի անընդհատությունը

Թեորեմ 2.4.1: *Դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է: Հետևյալ պայմաններն իրար համարժեք են.*
1) $*$ ինվոլյուցիան անընդհատ է A–ի վրա,
2) $\mathrm{sym}(A^*)$-ն անջատում է A–ի կետերը,
3) $\mathrm{sym}(A)$-ն A–ի փակ ենթատարածություն է:

Ապացույցը տանենք $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ սխեմայով:
$1) \Rightarrow 2)$ Դիցուք *-ը անընդհատ ինվոլյուցիա է A–ի վրա և $h \in \mathrm{sym}(A) \setminus \{0\}$: Ըստ Հան–Բանախի թեորեմի գոյություն ունի $\mathrm{sym}(A)$-ի վրա որոշված այնպիսի φ_0 իրականորեն գծային անընդհատ ֆունկցիոնալ, որ $\varphi_0(h) = 1$: Դիտարկենք φ_0–ով ծնված և

$*$-ի նկատմամբ ինքնահամալուծ φ կոմպլեքս գծային ֆունկցիոնալը (տես՝ (2.3.1)-ը): Քանի որ $*$ ինվոլյուցիան անընդհատ է, ուստի $\varphi \in \mathrm{sym}(A^*)$, $\varphi(h) = 1$: Քանի որ $A = \mathrm{sym}(A) \oplus i\,\mathrm{sym}(A)$ և $\mathrm{sym}(A^*)$–ի էլեմենտները $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա ընդունում են իրական արժեքներ, ուստի այստեղից բխում է, որ $\mathrm{sym}(A^*)$-ն անջատում է A–ի կետերը:
2) $\Rightarrow$ 3) Դիցուք $\mathrm{sym}(A^*)$-ն անջատում է A–ի կետերը և $\{h_n\} \subset \mathrm{sym}(A)$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h + ik$, որտեղ $h, k \in \mathrm{sym}(A)$: $\forall\varphi \in \mathrm{sym}(A^*)$ համար ունենք

$$i\varphi(k) = \varphi(ik) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty}(h_n - h)\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi(h_n - h):$$

Քանի որ φ-ն $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա ընդունում է իրական արժեքներ, ուստի $\varphi(k) = 0 \ \ (\forall\varphi \in \mathrm{sym}(A^*))$, որտեղից $k = 0$: Այսպիսով՝ $\mathrm{sym}(A)$-ն փակ է A–ում:
3) $\Rightarrow$ 1) Դիցուք $\mathrm{sym}(A)$-ն փակ է A–ում և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^* = b$: Այդ դեպքում

$$a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + a_n^*) \in \mathrm{sym}(A),$$

$$i(a - b) = \lim_{n\to\infty}(i(a_n - a_n^*)) \in \mathrm{sym}(A):$$

Հետևաբար, $a + b = a^* + b^*$, $a - b = -a^* + b^*$, որտեղից $b = a^*$: Մնում է կիրառել փակ գրաֆիկի մասին թեորեմը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Ինչպես ցույց ենք տվել, կիսապարզ կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվում բոլոր ինվոլյուցիաներն անընդհատ են: Սակայն ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ նորմավորված հանրահաշ– վում ինվոլյուցիան լինի անընդհատ: Դա հասկանալու համար դի– տարկենք երկու օրինակ:

1) Դիցուք A-ն այնպիսի անվերջ չափանի կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվ է, որ $A^2 = \{0\}$: Դիցուք $\{e_n\}_1^\infty \subset A$ գծորեն անկախ և նորմավորված վեկտորական համակարգ է: Դիտարկենք $\{e_\lambda\}$ հանրահաշվական բազիսը A–ում, որը պարունակում է $\{e_n\}$–ը: $\{e_\lambda\}$

բազիսի էլեմենտների վրա ինվոլյուցիան սահմանենք

$$e_{2n}^* = ne_{2n-1}, \;\; e_{2n-1}^* = \frac{1}{n}e_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$e_\mu^* = e_\mu \quad (\forall e_\mu \in \{e_\lambda\} \setminus \{e_n\}_1^\infty)$$

բանաձևերով: Քանի որ $\{e_\lambda\}$-ն A-ի բազիս է, ուստի $\{e_\lambda\}$-ի վրա ընդունած արժեքներով ինվոլյուցիան միարժեքորեն կսահմանվի A–ի վրա: Այս ինվոլյուցիան խզվող է A–ի վրա:

2) Դիցուք A նորմավորված հանրահաշվում ունենք երկու՝ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ հանրահաշվական նորմեր և $* : A \to A$ ինվոլյուցիան անընդհատ է $\|\cdot\|_1$ նորմով: Քանի որ $*$–ը իրականորեն գծային օպերատոր է, ուստի նրա անընդհատությունը նշանակում է, որ $\exists k > 0$, այնպես, որ

$$\|x^*\|_1 \leqslant k\|x\|_1 \quad (\forall x \in A) :$$

Կառուցենք

$$B = (A, \|\cdot\|_1) \oplus (A, \|\cdot\|_2)$$

ուղիղ գումարը: Ըստ սահմանման՝

$$B = \{(a,b) : \, a, b \in A\} ,$$

ընդ որում $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in B$ և $\lambda \in \mathbb{C}$ համար ըստ սահմանման

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) ,$$

$$\lambda(a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1) ,$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ B–ն կլինի կոմպլեքս հանրահաշիվ: $(a,b) \in B$ համար սահմանենք

$$\|(a,b)\| = \max\{\|a\|_1, \|b\|_2\} ,$$

$$(a,b)^* = (b^*, a^*) :$$

Այդ դեպքում B-ն կդառնա ինվոլյուտիվ նորմավորված հանրահա–շիվ:

Դիցուք $\|\cdot\|_1$ և $\|\cdot\|_2$ նորմերը իրար համարժեք չեն (անվերջ չափանի հանրահաշիվների համար այդպիսի նորմեր ընտրելը պրակտիկորեն միշտ հնարավոր է) և $\{a_n\}_1^\infty \subset A$ այնպիսին է, որ

$$\|a_n\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{և} \quad \|a_n\|_2 \longrightarrow 1:$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$\|(0,a_n)^*\| = \|a_n^*\|_1 \longrightarrow 0,$$

բայց

$$\|[(0,a_n)^*]^*\| = \|(0,a_n)\| = \|a_n\|_2 \longrightarrow 1,$$

ուստի $*: B \to B$ ինվոլյուցիան անընդհատ չէ:

Կապարենք մի կարևոր դիտողություն համարժեք նորմերի մասին: Դիցուք A հանրահաշիվը լրիվ է $\|\cdot\|_1$ և $\|\cdot\|_2$ նորմերից յուրաքանչյուրի նկատմամբ և $\exists k > 0$, որ

$$\|x\|_1 \leqslant k\|x\|_2 \quad (\forall x \in A): \tag{2.4.1}$$

Այդ դեպքում $\exists k_1 > 0$, որ

$$\|x\|_2 \leqslant k_1\|x\|_1 \quad (\forall x \in A): \tag{2.4.2}$$

Իրոք, (2.4.1)–ը ցույց է տալիս, որ I միավոր օպերատորը, եթե նրան դիտարկենք որպես $(A, \|\cdot\|_1)$ պարածությունը $(A, \|\cdot\|_2)$ պարածության մեջ արտապատկերող օպերատոր, անընդհատ է, որտեղից և հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմից կբխի, որ այդ օպերատորը կլինի անընդհատ նաև որպես $(A, \|\cdot\|_2)$ պարածությանը $(A, \|\cdot\|_1)$–ի մեջ արտապատկերող օպերատոր: Այստեղից էլ կբխի (2.4.2)–ը:

§ 2.5. Մոդուլի գաղափարը

Դիցուք A–ն կոմպլեքս հանրահաշիվ է, իսկ X–ը՝ կոմպլեքս գծա–յին պարածություն: X–ը կոչվում է ձախ A մոդուլ, եթե գոյու–թյուն ունի $A \times X \to X$ արտապատկերում, որը $\forall (a,x)$ զույգին

համապատասխանեցնում է $ax \in X$ էլեմենտը, այնպես, որ բավարարվում են հետևյալ պայմանները (ձախ մոդուլի աքսիոմները).
LM1. $\forall a \in A$ ֆիքսած a–ի համար $x \mapsto ax$ արտապատկերումը գծային է,
LM2. $\forall x \in X$ ֆիքսված x–ի համար $a \mapsto ax$ արտապատկերումը գծային է,
LM3. $(a_1 a_2)x = a_1(a_2 x)$ $(\forall a_1, a_2 \in A, \forall x \in X)$:

Եթե A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ X–ը բանախյան տարածություն, ապա ձախ A մոդուլի աքսիոմներին ավելացվում է նաև հետևյալը.
LM4. $\exists k > 0$ այնպես, որ $\|ax\| \leqslant k\|a\| \cdot \|x\|$ $(\forall a \in A, \forall x \in X)$:

Եթե X-ը հիլբերտյան տարածություն է, իսկ A-ն՝ ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ, ապա դրվում է

$$(ax, y) = (x, a^* y)$$

լրացուցիչ պայմանը:

Նման ձևով սահմանվում է աջ A մոդուլը: Այս դեպքում արդեն պահանջվում է, որ գոյություն ունենա $X \times A \to X$ արտապատկերում, այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները (աջ մոդուլի աքսիոմները).
RM1. $\forall a \in A$ ֆիքսված a–ի համար $x \mapsto xa$ արտապատկերումը գծային է,
RM2. $\forall x \in X$ ֆիքսված x–ի համար $a \mapsto xa$ արտապատկերումը գծային է,
RM3. $x(a_1 a_2) = (xa_1)a_2$ $(\forall a_1, a_2 \in A, \forall x \in X)$:

X–ը կոչվում է A բիմոդուլ, եթե այն միաժամանակ հանդիսանում է ձախ A մոդուլ և աջ A մոդուլ: Այդ դեպքում դրվում է նաև

$$(ax)b = a(xb) \quad (a,\, b \in A,\ x \in X)$$

պայմանը:

Օրինակ, A–ն կլինի A բիմոդուլ:

§ 2.6. Կիրառություններ ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվներում

Սահմանում 2.6.1: Դիցուք S-ը A բանախյան հանրահաշվի ենթաբազմություն է:

$$\Gamma(S) = \{x \in A : \; xs = sx \;\; (\forall s \in S)\}$$

բազմությունը կոչվում է S-ի կոմուտանտ (ցենտրալիզատոր):

Սահմանում 2.6.2: Կասենք $S \subset A$ բազմությունը կոմուտատիվ է, եթե $\forall x, y \in S$ համար $xy = yx$:

Լեմմա 2.6.1 (կոմուտանտի հատկությունները)**:** *Դիցուք $S \subset A$ կամայական ենթաբազմություն է: Այդ դեպքում՝*
1) $\Gamma(S)$-ը A-ում միավորով փակ ենթահանրահաշիվ է,
2) $S \subset \Gamma(\Gamma(S))$,
3) եթե $S \subset T$, ապա $\Gamma(S) \supset \Gamma(T)$,
4) եթե S-ը կոմուտատիվ է, ապա կոմուտատիվ է նաև $\Gamma(\Gamma(S))$-ը:

Ապացույց: 1) Դիցուք $x, y \in \Gamma(S)$, իսկ $s \in S$: Ունենք $xs = sx$, $ys = sy$, ուստի ակնհայտորեն

$$(\lambda x)s = s(\lambda x), \quad (x+y)s = s(x+y), \quad (xy)s = s(xy),$$

և, հետևաբար, $\Gamma(S)$-ը A-ի ենթահանրահաշիվ է: Ակնհայտորեն՝ $e \in \Gamma(S)$: Քանի որ A-ում բազմապատկման գործողությունն անընդհատ է, ուստի $\Gamma(S)$-ը փակ է:
2) Դիցուք $s \in S$: Այդ դեպքում $\forall x \in \Gamma(S)$ համար $xs = sx$, ինչը նշանակում է, որ $s \in \Gamma(\Gamma(S))$:
3)-ը ակնհայտ է:
4) Նկատենք, որ եթե որևէ $E \subset A$ համար $\Gamma(E) \subset E$, ապա $\Gamma(E)$-ն կոմուտատիվ է, ինչը բխում է $\Gamma(E)$-ի սահմանումից:

Դիցուք S-ը կոմուտատիվ է: Այդ դեպքում $S \subset \Gamma(S)$ և ըստ 3)-ի

$$\Gamma\left(\Gamma(S)\right) \subset \Gamma(S),$$

իսկ այստեղից, վերն ասվածի հիման վրա, ստանում ենք $\Gamma\left(\Gamma(S)\right)$-ի կոմուտատիվությունը:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.6.1: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $S \subset A$ կոմուտատիվ բազմություն է, և $B = \Gamma(\Gamma(S))$: Այդ դեպքում B–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, $S \subset B$ և $\forall x \in B$ համար*

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) : \tag{2.6.1}$$

Ապացույց: Լեմմա 2.6.1-ից բխում է, որ B–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է և $S \subset B$: Թեորեմի պնդումը համարժեք է

$$B^{-1} = A^{-1} \cap B \tag{2.6.2}$$

հավասարությանը: Իսկապես, դիցուք $\forall x \in B$ համար տեղի ունի (2.6.1)–ը: Եթե $b \in B^{-1}$, ապա $0 \notin \sigma_B(b)$ և (2.6.1)–ից կբխի, որ $0 \notin \sigma_A(b)$, կամ որ նույնն է՝ $b \in A^{-1}$: Քանի որ $B^{-1} \subset B$, ուստի $b \in B$ և հետևաբար $b \in A^{-1} \cap B$: Այսպիսով, $B^{-1} \subset A^{-1} \cap B$ (սա պարզ էր նաև A^{-1}, B^{-1}–ի սահմանումներից): Մյուս կողմից նկատենք, որ $A^{-1} \cap B \subset B^{-1}$: Իրոք, դիցուք $b \in A^{-1} \cap B$: Այդ դեպքում $0 \notin \sigma_A(b)$ և (2.6.1) պայմանից կբխի, որ $0 \notin \sigma_B(b)$, ուստի $b \in B^{-1}$: Հետևաբար տեղի ունի (2.6.2)–ը:

Հակառակը, եթե (2.6.2)–ը տեղի ունի, ապա որևէ $x \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$ համար $\lambda e - x \notin B^{-1}$ պայմանը համարժեք է

$$\lambda e - x \notin A^{-1} \cap B$$

պայմանին, ինչը $x \in B$ շնորհիվ համարժեք է $\lambda e - x \notin A^{-1}$ պայմանին: Հետևաբար տեղի ունի (2.6.1)–ը:

Ցույց տանք (2.6.2)–ը: Ակնհայտորեն միշտ տեղի ունի

$$B^{-1} \subset A^{-1} \cap B$$

ներդրումը, ցույց տանք, որ նաև

$$A^{-1} \cap B \subset B^{-1} :$$

Դիցուք $x \in A^{-1} \cap B$: Քանի որ $x \in B$, ուստի

$$xy = yx \quad (\forall y \in \Gamma(S)) :$$

Այստեղից կբխի, որ

$$yx^{-1} = x^{-1}y \quad (\forall y \in \Gamma(S)),$$

այսինքն՝ $x^{-1} \in B$: Սա էլ նշանակում է, որ $x \in B^{-1}$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2.6.2: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x, y \in A$ և $xy = yx$: Այդ դեպքում՝*

$$\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y) \quad \text{և} \quad \sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y):$$

Ապացույց: Նշանակենք $S = \{x, y\}$, $B = \Gamma(\Gamma(S))$: Ըստ պայմանի՝ S–ը կոմուտատիվ է, ուստի 2.6.1 լեմմայի համաձայն B–ն կլինի կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ: Ունենք $x+y, xy \in B$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ բավական է ցույց տալ, որ

$$\sigma_B(x+y) \subset \sigma_B(x) + \sigma_B(y), \quad \sigma_B(xy) \subset \sigma_B(x)\sigma_B(y):$$

Քանի որ B հանրահաշիվը կոմուտատիվ է, ուստի ցանկացած $z \in B$ էլեմենտի $\sigma_B(z)$ սպեկտրը համընկնում է $\hat{z}$ Գելֆանդի ձևափոխության ընդունած արժեքների բազմության (պատկերի) հետ: Ուստի թեորեմի պնդումը բխում է

$$(x+y)\hat{} = \hat{x} + \hat{y}, \quad (xy)\hat{} = \hat{x}\hat{y}$$

հավասարություններից:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.6.3: Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ հանրահաշիվ է: $x \in A$ էլեմենտը կոչվում է նորմալ, եթե $xx^* = x^*x$: $S \subset A$ բազմությունը կոչվում է նորմալ, եթե S–ը կոմուտատիվ է և $\forall x \in S$ համար $x^* \in S$:

Օգտվելով Ցորնի լեմմայից՝ հեշտությամբ համոզվում ենք, որ ամեն մի նորմալ ենթաբազմություն պարունակվում է մի ինչ–որ մաքսիմալ նորմալ ենթաբազմության մեջ:

Թեորեմ 2.6.3: *Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $B \subset A$ մաքսիմալ նորմալ ենթաբազմություն է: Այդ*

դեպքում՝
1) B–ն A–ում միավորով փակ կոմուտատիվ ենթահանրահաշիվ է,
2) $\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \quad (\forall x \in B)$:

Ապացույց: Նախ ապացուցենք B–ին պատկանելու հետևյալ հայտանիշը. *եթե $x \in A$ նորմալ է և ցանկացած $y \in B$ համար $xy = yx$, ապա $x \in B$:*

Իրոք, դիցուք $x \in A$ էլեմենտը բավարարում է վերը նշված պայմաններին: Քանի որ $\forall y \in B \Rightarrow y^* \in B$, ուստի

$$xy^* = y^*x \quad (\forall y \in B)$$

որտեղից՝

$$(xy^*)^* = (y^*x)^* \quad (\forall y \in B),$$

$$yx^* = x^*y \quad (\forall y \in B):$$

Հետևաբար $B \cup \{x, x^*\}$ բազմությունը կլինի նորմալ: Քանի որ B–ն մաքսիմալ է, ուստի $B = B \cup \{x, x^*\}$, և հետևաբար $x \in B$:

Եթե օգտվենք նշված հայտանիշից, ապա պարզ կդառնա, որ $\forall x, y \in B$ և $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ համար $x + y, xy, \lambda x \in B$ և $e \in B$ (չէ՞ որ $e = e^*$): Ուստի B–ն միավորով կոմուտատիվ հանրահաշիվ է:

Այժմ ցույց տանք, որ B–ն փակ է՝ $\overline{B} \subset B$: Իրոք, դիցուք $x \in \overline{B}$ և $\{x_n\}_1^\infty \subset B$, $x_n \to x$:

$$x_n y = y x_n \quad (y \in B)$$

հավասարությունից և արտադրյալի անընդհատությունից կբխի, որ

$$xy = yx \quad (y \in B):$$

Քանի որ $\forall y \in B$ համար $y^* \in B$, ուստի նաև $xy^* = y^*x$, և կունենանք

$$x^*y = (y^*x)^* = (xy^*)^* = yx^*:$$

Մասնավորապես (վերցնելով $y = x_n$) կստանանք

$$x^*x_n = x_nx^* \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

որտեղից և արտադրյալի անընդհատությունից կբխի, որ $x^*x = xx^*$: Հետևաբար, վերը B–ին պատկանալու համար մեր ապացուցված հայտանիշից կբխի, որ $x \in B$:

2) Ինչպես 2.6.1 թեորեմի ապացույցի ընթացքում տեսանք,

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \quad (\forall x \in B) \tag{2.6.3}$$

պնդումը համարժեք է

$$B^{-1} = A^{-1} \cap B$$

հավասարությանը: Քանի որ միշտ $B^{-1} \subset A^{-1} \cap B$, ուստի (2.6.3)–ը համարժեք է

$$A^{-1} \cap B \subset B^{-1} \tag{2.6.4}$$

առնչությանը:

Ցույց տանք (2.6.4)–ը: Դիցուք $x \in A^{-1} \cap B$: Քանի որ $x \in B$, ուստի x–ը նորմալ է, և հետևաբար x^{-1}–ը ևս նորմալ է: Քանի որ

$$xy = yx \quad (\forall y \in B),$$

ուստի

$$x^{-1}y = yx^{-1} \quad (\forall y \in B)$$

և վերը B–ին պատկանելու համար մեր ապացուցած հայտանիշից կբխի, որ $x^{-1} \in B$, հետևաբար $x \in B^{-1}$:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 2.7. Կիրառություններ B^*–հանրահաշիվներում

Սահմանում 2.7.1: Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $x \in A$: Կասենք (ինվոլյուցիայի նկատմամբ) $x \geqslant 0$, եթե $x = x^*$ և $\sigma(x) \subset [0, \infty)$:

Թեորեմ 2.7.1: *Դիցուք A–ն B^* հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում՝*

1) սիմետրիկ էլեմենտներն ունեն իրական սպեկտր,

2) եթե $x \in A$ էլեմենտը նորմալ է, ապա $\rho(x) = \|x\|$,

3) եթե $y \in A$, ապա $\rho(yy^*) = \|y\|^2$,

4) եթե $u, v \geqslant 0$, ապա $u + v \geqslant 0 \ \ (u, v \in A)$,
5) եթե $y \in A$, ապա $yy^* \geqslant 0$,
6) եթե $y \in A$, ապա $e + yy^* \in A^{-1}$:

Ապացույց: Յանկացած $x \in A$ նորմալ էլեմենտ պարունակվում է մի ինչ–որ $B \subset A$ մաքսիմալ նորմալ բազմության մեջ: Այդ դեպքում B–ն կոմուտատիվ B^*–հանրահաշիվ է և հետևաբար Գելֆանդի ձևափոխությունը, համաձայն Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի, B–ն իզոմորֆ–իզոմետրիկ կերպով արտապատկերում է $\hat{B} = C(\mathcal{M}_B)$ հանրահաշվի վրա: Ինչպես գիտենք՝

$$\sigma_B(z) = \hat{z}(\mathcal{M}_B) \quad (z \in B) : \tag{2.7.1}$$

Բայց քանի որ B–ն մաքսիմալ նորմալ բազմություն է, ուստի $\sigma_A(z) = \sigma_B(z)$ և հետևաբար՝

$$\sigma_A(z) = \hat{z}(\mathcal{M}_B) \quad (z \in B) : \tag{2.7.2}$$

1) Եթե $x = x^*$, ապա ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝ $\hat{x}$–ը $\mathcal{M}_B$–ի վրա իրական արժեքանի ֆունկցիա է, և (2.7.2)–ից կբխի, որ

$$\sigma(x) = \sigma_A(x) \subset \mathbb{R} :$$

2) Եթե x–ը նորմալ է, ապա (2.7.2)–ից բխում է, որ $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$: Քանի որ B–ն և $\hat{B}$–ը իզոմետրիկորեն իզոմորֆ են, ուստի

$$\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|,$$

և հետևաբար՝ $\rho(x) = \|x\|$:

3) Եթե $y \in A$, ապա $x = yy^*$ էլեմենտը սիմետրիկ է, և 2)–ից կբխի, որ

$$\rho(yy^*) = \|yy^*\| = \|y\|^2$$

(վերջին քայլը բխում է նրանից, որ A–ն B^*-հանրահաշիվ է):
4) Դիցուք $u, v \in A$ և $u, v \geqslant 0$: Նշանակենք $\alpha = \|u\|$, $\beta = \|v\|$, $w = u + v$, $\gamma = \alpha + \beta$: Այդ դեպքում $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$: Նկատենք, որ

$$\sigma(\alpha e - u) \subset [0, \alpha] :$$

Իրոք,

$$\lambda e - (\alpha e - u) = -\left[(\alpha - \lambda)e - u\right],$$

և քանի որ $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$, ուստի $\alpha - \lambda \notin [0, \alpha]$ դեպքում $\lambda e - (\alpha e - u) \in A^{-1}$ և հետևաբար՝

$$\sigma(\alpha e - u) \subset \{\lambda : \ \alpha - \lambda \in [0, \alpha]\} = [0, \alpha] :$$

Այստեղից կբխի, որ

$$\rho(\alpha e - u) \leqslant \alpha,$$

և օգտվելով 2)–ից բխող $\rho(\alpha e - u) = \|\alpha e - u\|$ առնչությունից՝ կստանանք

$$\|\alpha e - u\| \leqslant \alpha :$$

Ճիշտ նույն ձևով ցույց կտանք, որ

$$\|\beta e - v\| \leqslant \beta :$$

Հետևաբար

$$\|\gamma e - w\| \leqslant \|\alpha e - u\| + \|\beta e - v\| \leqslant \alpha + \beta = \gamma,$$

$$\|\gamma e - w\| \leqslant \gamma : \tag{2.7.3}$$

Քանի որ $w = w^*$, ուստի 1)–ից բխում է, որ

$$\sigma(\gamma e - w) \subset \mathbb{R}$$

(չէ՞ որ կունենանք $(\gamma e - w)^* = \gamma e - w$): (2.7.3)–ից կբխի, որ

$$\sigma(\gamma e - w) \subset [-\gamma, \gamma] : \tag{2.7.4}$$

Բայց սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմից բխում է, որ

$$\sigma(w) = \gamma - \sigma(\gamma e - w),$$

ուստի (2.7.4)–ից կստանանք $\sigma(w) \subset [0, 2\gamma]$, և հետևաբար՝ $w \geqslant 0$:
5) Նշանակենք $x = yy^*$: Այդ դեպքում $x^* = x$: Դիցուք B–ն նույնն է, ինչ–որ ապացույցի սկզբում էր: Այդ դեպքում, ինչպես

1)–ն ապացուցելիս պետանք, $\hat{x}$–ը $\mathcal{M}_B$–ի վրա իրական ֆունկցիա է: (2.7.2)–ի շնորհիվ մեզ մնում է ցույց տալ, որ $\mathcal{M}_B$-ի վրա $\hat{x} \geqslant 0$:

Քանի որ $\hat{B} = C(\mathcal{M}_B)$, ուստի $\exists z \in B$, որ

$$\hat{z} = |\hat{x}| - \hat{x} : \tag{2.7.5}$$

Այդ դեպքում $\hat{z}$–ը կլինի իրական, ուստի ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝ $z = z^*$: Նշանակենք $w = zy$ և w–ն ներկայացնենք

$$w = u + iv$$

տեսքով, որտեղ u, v սիմետրիկ են: Այդ դեպքում

$$ww^* = zyy^*z^* = zxz = z^2x \tag{2.7.6}$$

(օգտվեցինք նրանից, որ $z, x \in B$ շնորհիվ $zx = xz$), և հետևաբար

$$\begin{aligned} w^*w = (u - iv)(u + iv) = 2u^2 + 2v^2 - (u + iv)(u - iv) = \\ = 2u^2 + 2v^2 - ww^* = 2u^2 + 2v^2 - z^2x : \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Քանի որ $u = u^*$, ուստի $\sigma(u) \subset \mathbb{R}$: Այստեղից և սպեկտրների արտապատկերման թեորեմից կբխի, որ $u^2 \geqslant 0$: Ճիշտ նույն ձևով ցույց կտանք, որ $v^2 \geqslant 0$: (2.7.5)–ից պարզ է, որ $\mathcal{M}_B$-ի վրա $\hat{z}^2\hat{x} \leqslant 0$: Իրոք, քանի որ $\hat{x}$–ը իրական է, ուստի

$$\hat{z}^2\hat{x} = (|\hat{x}| - \hat{x})^2\,\hat{x} = \left(|\hat{x}|^2 - 2\,|\hat{x}|\,\hat{x} + \hat{x}^2\right)\hat{x} =$$

$$= \left(2\hat{x}^2 - 2\,|\hat{x}|\,\hat{x}\right)\hat{x} = 2\hat{x}^2\,(\hat{x} - |\hat{x}|) \leqslant 0 :$$

Այստեղից, $z^2x \in B$ պայմանից և (2.7.2)–ից կբխի, որ $-z^2x \geqslant 0$: Հետևաբար (2.7.7)–ից և 4) պնդումից կբխի, որ $w^*w \geqslant 0$: Ըստ 1.8.3 լեմմայի՝

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\},$$

ուստի

$$\sigma(ww^*) \subset \sigma(w^*w) \cup \{0\},$$

որտեղից և $ww^* \geqslant 0$ առնչությունից կբխի, որ $ww^* \geqslant 0$: (2.7.6)–ից և (2.7.1)–ից կբխի, որ $\hat{z}^2\hat{x} \geqslant 0$: Բայց քիչ առաջ պեսանք, որ նաև $\hat{z}^2\hat{x} \leqslant 0$, ուստի $\hat{z}^2\hat{x} = 0$: Ինչպես վերը պեսանք՝ $\hat{z}^2\hat{x} = 2\hat{x}^2\left(\hat{x} - |\hat{x}|\right)$, ուստի $\mathcal{M}_B$–ի վրա

$$2\hat{x}^2\left(\hat{x} - |\hat{x}|\right) = 0 : \tag{2.7.8}$$

Հետևաբար $\mathcal{M}_B$–ի վրա

$$\hat{x} = |\hat{x}| \tag{2.7.9}$$

((2.7.8)–ից բխում է, որ $\mathcal{M}_B$–ի յուրաքանչյուր կետում $2\hat{x}^2$ կամ $\hat{x} - |\hat{x}|$ արտադրիչներից գոնե մեկը 0 է, սակայն պարզ է, որ եթե որևէ կետում 0 է դառնում առաջին արտադրիչը, ապա երկրորդը ևս այդ կետում կդառնա 0):

(2.7.9)–ից կբխի, որ $\hat{x} \geqslant 0$, որտեղից և (2.7.2)–ից կստանանք $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$:

6) Ունենք

$$\sigma\left(e + yy^*\right) = 1 + \sigma\left(yy^*\right) :$$

Ըստ 5)–ի՝ $\sigma\left(yy^*\right) \subset [0, +\infty)$, ուստի $\sigma\left(e + yy^*\right) \subset [1, +\infty)$, և հետևաբար՝ $0 \notin \sigma\left(e + yy^*\right)$: Սա էլ հենց նշանակում է, որ $e + yy^* \in A^{-1}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2.7.2: *Դիցուք A–ն B^*-հանրահաշիվ է, իսկ $B \subset A$ այնպիսի փակ ենթահանրահաշիվ է, որ $e \in B$, և $\forall x \in B$ համար $x^* \in B$: Այդ դեպքում*

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \quad (\forall x \in B) :$$

Ապացույց: Ինչպես 2.6.3 թեորեմի 2) կետի ապացույցի ընթացքում նշվեց, բավական է ցույց տալ, որ

$$A^{-1} \cap B \subset B^{-1} :$$

Ցույց տանք վերջինս: Դիցուք $x \in A^{-1} \cap B$: Այդ դեպքում կունենանք նաև, որ $x^* \in A^{-1} \cap B$ և հետևաբար՝

$$xx^* \in A^{-1} \cap B :$$

Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $\sigma_A(xx^*) \subset (0,\infty)$: Ուստի $\sigma_A(xx^*)$-ի լրացումը $\mathbb{C}$–ում կլինի կապակցված և 1.8.4 հետևանքից կբխի, որ $\sigma_B(xx^*) = \sigma_A(xx^*)$: Ապացվեց, որ $\sigma_B(xx^*) \subset (0,\infty)$, և հետևաբար $0 \notin \sigma_B(xx^*)$, ինչը նշանակում է, որ $xx^* \in B^{-1}$:

Ունենք

$$x^{-1} = x^*(x^*)^{-1}x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1},$$

ուստի կստանանք $x^{-1} \in B$, և հետևաբար՝ $x \in B^{-1}$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Գլուխ 3

ԳԾԱՅԻՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ՀԻԼԲԵՐՏՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

§ 3.1. Նախնական տեղեկություններ

Թեորեմ 3.1.1: *Դիցուք $\{x_n\}$–ը H հիլբերտյան տարածությունում վեկտորների զույգ առ զույգ օրթոգոնալ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում հետևյալ երեք պնդումներն իրար համարժեք են՝*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *շարքը H–ի նորմով զուգամետ է,*

2) $\forall y \in H$ *համար* $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y)$ *շարքը զուգամետ է,*

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$*:*

Ապացույցը տանենք $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ սխեմայով:
$1) \Rightarrow 2)$ Սա անմիջապես բխում է սկալյար արտադրյալի անընդհատությունից:
$2) \Rightarrow 3)$ Սահմանենք $\Lambda_n \in H^*$ ֆունկցիոնալները

$$\Lambda_n y = \sum_{i=1}^{n}(y, x_i) \quad (y \in H, \ \ n = 1, 2, \ldots)$$

բանաձևերով: 2) պայմանից բխում է, որ $\forall y \in H$ համար $\{\Lambda_n y\}$ թվային հաջորդականությունը զուգամետ է և հետևաբար սահմանափակ է: Ըստ Բանախ–Շտեյնհաուսի թեորեմի՝ $\{\|\Lambda_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Բայց $\Lambda_n y = \left(y, \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$, ուստի

$$\|\Lambda_n\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

հետևաբար,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty :$$

3) $\Rightarrow$ 1) Ունենք

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+m} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i, \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \right) =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{k=n+1}^{n+m} (x_i, x_k) = \sum_{i=n+1}^{n+m} \|x_i\|^2 \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

ուստի $\sum_{i=1}^{n} x_i$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և հետևաբար՝ զուգամետ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.2: *Եթե H–ը կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է*[6]*, $\overline{\mathcal{D}}_T = H$ և $T : \mathcal{D}_T \to H$ գծային օպերատորն այնպիսին է, որ*

$$(Tx, x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_T),$$

ապա $T = 0$:

Ապացույց: $\forall x, y \in \mathcal{D}_T$ և $\alpha \in \mathbb{C}$ համար ունենք

$$(T(x + \alpha y), x + \alpha y) = 0,$$

$$(Tx, x) + \overline{\alpha}(Tx, y) + \alpha(Ty, x) + |\alpha|^2(Ty, y) = 0,$$

որը, օգտվելով

$$(Tx, x) = (Ty, y) = 0$$

հավասարությունից, կարող ենք գրել

$$\overline{\alpha}(Tx, y) + \alpha(Ty, x) = 0$$

[6]Այսուհետև մենք կդիտարկենք միայն կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն–ները:

պարզեցված տեսքով: Վերցնելով $\alpha = 1$ և $\alpha = i$, կունենանք

$$\begin{cases} \quad (Tx,\, y) + (Ty,\, x) = 0, \\ -(Tx,\, y) + (Ty,\, x) = 0, \end{cases}$$

որտեղից կստանանք

$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x, y \in \mathcal{D}_T) :$$

Սկալյար արտադրյալի անընդհատությունից և $\overline{\mathcal{D}}_T = H$ պայմանից կբխի, որ

$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}_T, \ \ \forall y \in H) :$$

Այստեղ ֆիքսելով x–ը և վերցնելով $y = Tx$, կստանանք $Tx = 0$ ($\forall x \in \mathcal{D}_T$): Ուստի $T = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 3.1.1 (Միակության թեորեմ): *Եթե H կոմպլեքս հիլ–բերտյան տարածության վրա որոշված S և T գծային օպերա–տորներն այնպիսին են, որ*

$$(Sx, x) = (Tx, x) \quad (x \in H),$$

ապա $S = T$:

Ապացուցելու համար նախորդ թեորեմը կկիրառենք $S - T$ օպերա–տորի վրա: ►

$T \in BL(H)$ համար կնշանակենք

$$\ker(T) = \{x \in H : \ Tx = 0\}, \quad \mathrm{Im}(T) = T(H) :$$

Լեմմա 3.1.1: $\forall T \in BL(H)$ *համար*

$$\ker(T^*) = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp} \quad \text{և} \quad \ker(T) = [\mathrm{Im}(T^*)]^{\perp} :$$

Ապացույց: Հետևյալ չորս պնդումներից յուրաքանչյուրն ակնհայ–տորեն համարժեք է իր հաջորդին և (կամ) նախորդին.

$$T^* y = 0,$$

$$(x, T^*y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x \in H)\,,$$

$$y \in [\mathrm{Im}(T)]^{\perp} :$$

Հետևաբար՝

$$\ker(T^*) = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp} :$$

Քանի որ $T^{**} = T$, ուստի թեորեմի երկրորդ պնդումը բխում է առաջինից, եթե նրանում T–ն փոխարինենք T^*–ով:
Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 3.1.1: $T \in BL(H)$ օպերատորը կոչվում է՝
ա) նորմալ, եթե $TT^* = T^*T$,
բ) ինքնահամալուծ (կամ հերմիտյան, սիմետրիկ), եթե $T^* = T$,
գ) ունիտար, եթե $T^*T = I = TT^*$, որտեղ I–ն նույնական արտապատկերումն է H տարածությունում,
դ) պրոյեկտոր, եթե $T^2 = T$:

Պարզ է, որ ինքնահամալուծ և ունիտար օպերատորները նորմալ են:

Թեորեմ 3.1.3: *Դիցուք $T \in BL(H)$: Այդ դեպքում՝*
1) T–ն նորմալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (\forall x \in H)\,;$$

2) Եթե T օպերատորը նորմալ է, ապա $\ker(T) = \ker(T^*) = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp}$;
3) Եթե T–ն նորմալ է, և որևէ $x \in H$ ու $\alpha \in \mathbb{C}$ համար $Tx = \alpha x$, ապա $T^*x = \overline{\alpha}x$;
4) Եթե T օպերատորը նորմալ է, իսկ α–ն և β–ն T օպերատորի՝ իրարից տարբեր սեփական արժեքներ են, ապա դրանց համապատասխան սեփական ենթատարածությունները օրթոգոնալ են:

Ապացույց: 1)–ն անմիջապես բխում է

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x)$$

$$\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x)$$

հավասարություններից և 3.1.1 հետևանքից:
2) պնդումը բխում է 1) պնդումից և 3.1.1 լեմմայից:
3) Եթե T–ն նորմալ է, ապա $T - \alpha I$ օպերատորը ևս նորմալ է, ուստի 2)–ից կբխի, որ

$$\ker(T - \alpha I) = \ker\left(T^* - \overline{\alpha} I\right),$$

որտեղից էլ կբխի 3)–ը:
4) Դիցուք $Tx = \alpha x$, $Ty = \beta y$, օգտվելով 3)–ից, կունենանք

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = \left(x, \overline{\beta} y\right) = \beta(x, y),$$

$$(\alpha - \beta)(x, y) = 0,$$

և քանի որ $\alpha \neq \beta$, ուստի $x \perp y$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.4: *Եթե $U \in BL(H)$, ապա հետևյալ երեք պայմանները համարժեք են՝*
1) U-ն ունիտար օպերատոր է,
2) $\operatorname{Im}(U) = H$ և $(Ux, Uy) = (x, y)$ $(\forall x, y \in H)$,
3) $\operatorname{Im}(U) = H$ և $\|Ux\| = \|x\|$ $(\forall x \in H)$:

Ապացույցը տանենք 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) սխեմայով:
1) $\Rightarrow$ 2): Քանի որ $UU^* = I$, ուստի $\operatorname{Im}(U) = H$: Ունենք նաև, որ $U^*U = I$, ուստի

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y):$$

2) $\Rightarrow$ 3): Սա ակնհայտ է:
3) $\Rightarrow$ 1): $\forall x \in H$ համար

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x),$$

ուստի 3.1.1 հետևանքից կբխի, որ $U^*U = I$: Բայց 3)–ից բխում է, որ U–ն $BL(H)$ բանախյան հանրահաշվի հակադարձելի էլեմենտ է՝ $U^{-1}U = UU^{-1} = I$, ուստի $U^*U = I$ առնչությունից կբխի, որ $U^* = U^{-1}$ և և հետևաբար՝

$$U^*U = UU^* = I\ :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.5: *Դիցուք $P \in BL(H)$ պրոյեկտոր է: Այդ դեպքում հետևյալ չորս պնդումներն իրար համարժեք են՝*
1) P–ն ինքնահամալուծ է;
2) P–ն նորմալ է;
3) $\mathrm{Im}(P) = [\ker(P)]^{\perp}$, [7]
4) $(Px, x) = \|Px\|^2 \quad (\forall x \in H)$:

Ապացույցը կապարենք $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$ սխեմայով:
$1) \Rightarrow 2)$ պնդումն ակնհայտ է:
$2) \Rightarrow 3)$: 3.1.3 թեորեմի 2–րդ պնդումից կբխի, որ

$$\ker(P) = [\mathrm{Im}(P)]^{\perp}\ :$$

Քանի որ P–ն պրոյեկտոր է, ուստի $\mathrm{Im}(P) = \ker(I-P)$, և հետևաբար $\mathrm{Im}(P)$–ն փակ է: Ուստի $\mathrm{Im}(P) = [\ker(P)]^{\perp}$:
$3) \Rightarrow 4)$: Վերցնենք կամայական $x \in H$ վեկտոր և այն ներկայացնենք

$$x = y + z$$

տեսքով, որտեղ $z \in \mathrm{Im}(P)$, $y \in \ker(P)$: Կունենանք $z = Ph$, որտեղ $h \in H$: Հետևաբար

$$Pz = P^2h = Ph = z\ :$$

Քանի որ $z \perp y$, ուստի $Py = 0$ պայմանից կբխի, որ

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (Py + Pz, Py + Pz) = (Pz, Pz) = (Pz, z) =$$

$$= (P(x-y), x-y) = (Px - Py, x-y) = (Px, x) - (Px, y) =$$

[7] $\mathrm{Im}(P) = [\ker(P)]^{\perp}$ պայմանի հետ կապված հաճախ ասում են, որ P–ն օրթոպրոյեկտոր է:

$$= (Px, x) - (Py + Pz, y) = (Px, x) - (z, y) = (Px, x) :$$

4) $\Rightarrow$ 1): $\forall x \in H$ համար

$$(P^*x, x) = \overline{(x, P^*x)} = \overline{(Px, x)} = \overline{\|Px\|^2} = \|Px\|^2 = (Px, x),$$

ուստի 3.1.1 հետևանքից կբխի, որ $P^* = P$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.6: *Դիցուք $S, T \in BL(H)$, ընդ որում S–ը ինքնահամալուծ է: Այդ դեպքում որպեսզի $ST = 0$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\mathrm{Im}(S) \perp \mathrm{Im}(T) :$$

Ապացույցը բխում է $(Sx, Ty) = (x, STy)$ հավասարությունից:
Թեորեմն ապացուցված է:

Խնդիր: Դիցուք X–ը բանախյան փարածություն է, $S(X)$–ը X–ի միավոր սֆերան է, իսկ $\mathcal{F} = \{U\}$ իզոմետրիկ օպերատորների խումբ է: Կասենք $\mathcal{F}$–ը գործում է տրանզիտիվ $S(X)$–ի վրա, եթե $\forall x, y \in S(X)$ համար $\exists U \in \mathcal{F}$, որ $Ux = y$:

Հայտնի է (տես՝ [13]), որ եթե X–ը վերջավոր չափանի է և գոյություն ունի $S(X)$–ի վրա տրանզիտիվ գործող $\mathcal{F}$ իզոմետրիկ օպերատորների խումբ, ապա X–ը հիլբերտյան փարածություն է (սա ոչ տրիվիալ, նուրբ արդյունք է): Հարցը կայանում է նրանում, թե արդյո՞ք անվերջ չափանի դեպքում ևս սա ճիշտ է (պատասխանը հայտնի չէ): ►

§ 3.2. Թեորեմ տեղափոխելիության մասին

Այս ենթավերնագրի տակ ևս կհամարենք, որ H–ը կոմպլեքս հիլբերտյան փարածություն է:

Թեորեմ 3.2.1 (Ֆուգլիդ–Պուտնամ–Ռոզենբլյում): *Դիցուք $M, N, T \in BL(H)$, ընդ որում M և N օպերատորները նորմալ են: Այդ դեպքում, եթե*

$$MT = TN, \tag{3.2.1}$$

ապա

$$M^*T = TN^* : \tag{3.2.2}$$

Ապացույց: Դիցուք $S \in BL(H)$ կամայական օպերատոր է: Վերցնենք $V = S - S^*$ և դիտարկենք

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n \tag{3.2.3}$$

օպերատորը: Այդ դեպքում $V^* = -V$, և հետևաբար՝

$$Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1} : \tag{3.2.4}$$

Հետևաբար, Q–ն ունիտար է: Այսպիսով՝

$$\|\exp(S - S^*)\| = 1 \quad (\forall S \in BL(H)) : \tag{3.2.5}$$

(3.2.1)–ից ըստ k–ի ինդուկցիայով կստանանք, որ

$$M^k T = T N^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) :$$

Հետևաբար

$$\exp(M) T = T \exp(N), \tag{3.2.6}$$

կամ՝

$$T = \exp(-M) T \exp(N) : \tag{3.2.7}$$

Նշանակենք $U_1 = \exp(M^* - M)$, $U_2 = \exp(N - N^*)$: Քանի որ M–ը և N–ը նորմալ են, ուստի

$$\exp(M^*) \exp(-M) = \exp(M^* - M),$$

$$\exp(N) \exp(-N^*) = \exp(N - N^*),$$

որտեղից և (3.2.7)-ից կունենանք

$$\exp(M^*) T \exp(-N^*) = U_1 T U_2 : \tag{3.2.8}$$

(3.2.5)–ից բխում է, որ $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, որտեղից և (3.2.8)–ից կստանանք

$$\|\exp(M^*) T \exp(-N^*)\| \leqslant \|T\| \tag{3.2.9}$$

անհավասարությունը: Նշանակենք

$$f(\lambda) = \exp(\lambda M^*)\, T\, \exp(-\lambda N^*) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

(սա հիշեցնում է § 1.8-ում ապացուցված՝ Լեպաժի թեորեմում դի– տարկված օժանդակ ֆունկցիան): M և N օպերատորների հետ մեկ– տեղ $\overline{\lambda} M$ և $\overline{\lambda} N$ օպերատորները ևս նորմալ են, ու բավարարում են

$$\left(\overline{\lambda} M\right) T = T\left(\overline{\lambda} N\right)$$

պայմանին, ուստի (3.2.9)–ում M–ը և N–ը կարելի է փոխարինել համապատասխանաբար $\overline{\lambda} M$–ով և $\overline{\lambda} N$–ով, և արդյունքում կստանանք, որ

$$\|f(\lambda)\| \leqslant \|T\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) : \tag{3.2.10}$$

Բայց f–ը $\mathbb{C}$–ում՝ ամբողջ (ուժեղ անալիտիկ) $BL(H)$ արժեքանի ֆունկցիա է, ուստի (3.2.10)–ից և Լիուվիլի թեորեմից կբխի, որ f–ը հաստատուն է՝

$$f(\lambda) = f(0) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) :$$

Հետևաբար

$$f'(\lambda) = 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) : \tag{3.2.11}$$

Բայց հեշտ է տեսնել, որ

$$f'(\lambda) = \exp(\lambda M^*)\,(M^* T - T N^*)\, \exp(-\lambda N^*),$$

ուստի (3.2.11)–ում վերցնելով $\lambda = 0$, կստանանք

$$M^* T - T N^* = 0,$$

որտեղից էլ կստացվի (3.2.2)–ը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.2.1: Վերանայելով 3.2.1 թեորեմի ապացույցը՝ նկատում ենք, որ այդ ապացույցում օգտագործվում են $BL(H)$–ի միայն այն հատկությունները, որոնք նշանակում են, որ այն B^*-հանրահաշիվ է: Ուստի 3.2.1 թեորեմի ապացույցը կարելի է բառացիորեն անցկացնել B^*-հանրահաշիվների համար: Այս հան–գամանքը, սակայն, ըստ էության չի բերում 3.2.1 թեորեմի ընդ–հանրացման, քանի որ, ինչպես մենք հետագայում կտեսնենք, ցանկացած B^*-հանրահաշիվ կարելի է ինվոլյուցիան պահպանող իզոմետրիկական իզոմորֆիզմի ($*$ – իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ) միջոցով արտապատկերել մի ինչ–որ H հիլբերտյան տարածության վրա որոշված $BL(H)$ գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշվի ինչ–որ փակ ենթահանրահաշվի վրա: Նշենք, որ 3.2.1 թեորեմն ունի ընդհանրացում կամայական կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվների համար: ►

§ 3.3. Միավորի վերլուծությունը

Սահմանում 3.3.1: Դիցուք Ω–ն ինչ–որ բազմություն է, իսկ $\mathfrak{M}$–ը Ω–ի ենթաբազմությունների ընտանիք է՝ $\mathfrak{M} \subset 2^{\Omega}$: $\mathfrak{M}$–ը կոչվում է σ–հանրահաշիվ, եթե տեղի ունեն հետևյալ 3 պայմանները.

1) $\Omega \in \mathfrak{M}$,

2) եթե $w \in \mathfrak{M}$, ապա $\Omega \setminus w \in \mathfrak{M}$,

3) եթե $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$, ապա $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} w_i \in \mathfrak{M}$:

Եթե $\mathfrak{M}$–ը σ–հանրահաշիվ է, ապա $(\Omega, \mathfrak{M})$ զույգը կոչվում է չա–փելի տարածություն:

Սահմանում 3.3.2: Դիցուք $(\Omega, \mathfrak{M})$–ը չափելի տարածություն է, X–ը բանախյան տարածություն է, իսկ $m : \mathfrak{M} \longrightarrow X$: m–ը կոչվում է X արժեքանի (վեկտորական) չափ՝ $\mathfrak{M}$–ի վրա, եթե այն $\mathfrak{M}$–ի վրա σ–ադիտիվ է, այսինքն՝ $\forall \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ հաշվելի թվով զույգ առ զույգ չհատվող բազմությունների համար $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(w_n)$ շարքը X–ի նորմով զուգամիտում է $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} w_n\right)$ վեկտորին՝

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} w_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(w_n) :$$

Դիշենք, որ եթե քիչ առաջ տրված սահմանման մեջ ամենուրեք X–ը փոխարինենք $[0,\infty]$–ով, ապա ստացվում է ոչ բացասական չափի սահմանումը:[8]

Սահմանում 3.3.3: Դիցուք $(\Omega,\mathfrak{M})$–ը չափելի տարածություն է, իսկ H–ը հիլբերտյան տարածություն է: Այդ դեպքում $E:\mathfrak{M}\longrightarrow BL(H)$ արտապատկերումը կոչվում է ($\mathfrak{M}$–ի վրա) միավորի վերլուծություն, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝
1) $E(\emptyset)=0$, $E(\Omega)=I$,
2) $\forall w\in\mathfrak{M}$ համար $E(w)$–ն օրթոպրոյեկտոր է,
3) $E\left(w'\cap w''\right)=E\left(w'\right)E\left(w''\right)\quad(\forall w',w''\in\mathfrak{M})$,
4) եթե $w'\cap w''=\emptyset$, ապա $E\left(w'\cup w''\right)=E\left(w'\right)+E\left(w''\right)$,
5) $\forall x,y\in H$ համար

$$E_{x,y}(w)=(E(w)x,y)$$

բանաձևով որոշվող ֆունկցիան հանդիսանում է կոմպլեքս չափ՝ $\mathfrak{M}$–ի վրա:

Դիցուք X–ը կոմպակտ կամ լոկալ կոմպակտ հաուսդորֆյան տարածություն է: Ինչպես գիտենք, $\mathcal{B}(X)$ բորելյան բազմությունների դասը սահմանվում է որպես բաց բազմությունները պարունակող մինիմալ σ–հանրահաշիվ (կամ որ նույնն է՝ կոմպակտ բազմությունները պարունակող մինիմալ σ–հանրահաշիվ): $\mathcal{B}(X)$–ի վրա տրված չափերը կոչվում են բորելյան չափեր: Դիցուք $m:\mathcal{B}(X)\to\mathbb{C}$ կոմպլեքս բորելյան չափ է: $|m|:\mathcal{B}(X)\to[0,\infty)$ չափը սահմանենք

$$|m|(E)=\sup\sum_{i=1}^{\infty}\left|m\left(E_i\right)\right|$$

բանաձևով, որտեղ ճշգրիտ վերին եզրը վերցվում է ըստ բոլոր հնարավոր $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}(X)$ զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի ընտանիքների, որոնց համար

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=E:$$

[8] Չափի տեսության հետ կապված տես [12], [19], [22], [28] գրքերը:

Ապացուցվում է, որ $|m|$–ը $\mathcal{B}(X)$–ի վրա ոչ բացասական վերջավոր չափ է: Այն կոչվում է m չափի լրիվ վարիացիա: Երբեմն լրիվ վարիացիա են անվանում նաև

$$|m|(X)$$

վերջավոր թիվը (հեշտ է տեսնել, որ $|m|(X) \geqslant |m(X)|$, սակայն պարտադիր չէ, որ $|m|(X) = |m(X)|$):

$\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ չափը կոչվում է ռեգուլյար, եթե այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.
1) $\forall E \in \mathcal{B}(X)$ համար

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : \ E \subset V, \ V - \text{բաց է}\},$$

2) $\forall E \in \mathcal{B}(X)$ համար

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E, \ K - \text{ն կոմպակտ է}\} :$$

$m : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ կոմպլեքս չափը կոչվում է ռեգուլյար, եթե ռեգուլյար է նրա $|m|$ լրիվ վարիացիան:

Այժմ դիցուք 3.3.3 սահմանման մեջ $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(X)$: Այդ դեպքում 3.3.3 սահմանման 5) պայմանի մեջ սովորաբար ավելացնում են այն պահանջը, որ $\forall x, y \in H$ համար $E_{x,y}$–ը լինի ռեգուլյար բորելյան չափ:

Բերենք 3.3.3 սահմանման 1)-5) պայմաններից բխող որոշ պարզ հետևանքներ:

Քանի որ $E(w)$ օպերատորներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է օրթոպրոյեկտոր, ուստի

$$E_{x,x}(w) = (E(w)x, x) = \|E(w)x\|^2 \quad (x \in H) :$$

Հետևաբար $E_{x,x}$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը կլինի $\mathfrak{M}$–ի վրա ոչ բացասական չափ և նրա լրիվ վարիացիան հավասար կլինի՝

$$\|E_{x,x}\| = E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2 :$$

3)–րդ պայմանից բխում է, որ ցանկացած երկու $E(w)$ պրոյեկտորներ տեղափոխելի են:

1) և 3) պայմաններից բխում է, որ $w' \cap w'' = \emptyset$ դեպքում $E(w')$ և $E(w'')$ օպերատորների պատկերները օրթոգոնալ են: 4) պայմանի համաձայն E ֆունկցիան վերջավոր ադիտիվ է: Հարց է ծագում՝ կլինի՞ արդյոք E ֆունկցիան հաշվելի ադիտիվ, այսինքն՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(w_n\right) \tag{3.3.1}$$

շարքը կզուգամիտի $E(w)$–ին ըստ $BL(H)$–ի նորմի, եթե w–ն հանդիսանում է $w_n \in \mathfrak{M}$ հաշվելի թվով զույգ առ զույգ չհատվող բազմությունների միավորում: Նշանակենք

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(w_k\right) :$$

Ունենք

$$S_{n+m} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} E\left(w_k\right) :$$

Քանի որ $E(w_k)$–երը զույգ առ զույգ օրթոգոնալ օրթոպրոյեկտորներ են, ուստի $(S_{n+m} - S_n)$–ը կլինի օրթոպրոյեկտոր: Հետևաբար

$$\|S_{n+m} - S_n\| = 0$$

կամ

$$\|S_{n+m} - S_n\| = 1 :$$

Ուստի (3.3.1) շարքի մասնակի գումարները կկազմեն $BL(H)$–ում ֆունդամենտալ հաջորդականություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $\exists N$ բնական թիվ, որ

$$S_n = S_N \quad (n \geqslant N) :$$ [9]

Ուսումնասիրությունից հանելով այդպիսի տրիվյալ դեպքերը, կունենանք, որ E ֆունկցիան երբեք նշված իմաստով σ–ադիտիվ չի լինում:

[9] Սա նշանակում է, որ սկսած որոշ համարից (3.3.1) շարքի անդամները դառնում են 0–ական: Դա բխում է նաև $E(w_n) \to 0$ զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանից և նրանից, որ $E(w_n)$–ը օրթոպրոյեկտոր է:

Լեմմա 3.3.1: *Եթե $E : \mathfrak{M} \to BL(H)$ միավորի վերլուծություն է և $x \in H$, ապա*

$$w \longmapsto E(w)x$$

ֆունկցիան հանդիսանում է $\mathfrak{M}$–ի վրա σ–ադիտիվ H արժեքանի չափ:

Ապացույց: Դիցուք $w_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \dots)$ զույգ առ զույգ չեն հատվում և

$$w = \bigcup_{n=1}^{\infty} w_n :$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$\operatorname{Im}[E(w_n)] \perp \operatorname{Im}[E(w_m)] \quad (n \neq m),$$

ուստի

$$E(w_n)x \perp E(w_m)x \quad (n \neq m) :$$

Ըստ միավորի վերլուծության սահմանման 5) պայմանի՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (E(w_n)x, y) = (E(w)x, y) \quad (\forall x, y \in H),$$

և քանի որ $\{E(w_n)\}_{n=1}^{\infty}$–ը օրթոգոնալ համակարգ է, ուստի 3.1.1 թեորեմից կբխի, որ H–ի նորմով՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(w_n)x = E(w)x :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 3.3.2: *Դիցուք $E : \mathfrak{M} \to BL(H)$ միավորի վերլուծություն է: Այդ դեպքում եթե $w_n \in \mathfrak{M}$, $E(w_n) = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ և $w = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, ապա $E(w) = 0$:*

Ապացույց: Քանի որ $E(w_n) = 0$, ուստի $E_{x,x}(w_n) = 0$, $\forall x \in H$ համար: Քանի որ $E_{x,x}$ չափերից յուրաքանչյուրը σ–ադիտիվ է, ուստի $E_{x,x}(w) = 0$, $\forall x \in H$: Բայց

$$\|E(w)x\|^2 = E_{x,x}(w),$$

ուստի

$$E(w)x = 0, \quad \forall x \in H$$

և հետևաբար $E(w) = 0$:
Լեմման ապացուցված է:

Այժմ դիցուք $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$–ն չափով պարածություն է (μ–ն $\mathfrak{M}$–ի վրա σ-ադիտիվ ոչ բացասական չափ է): $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան կոչվում է էապես սահմանափակ (μ–ի նկատմամբ), եթե $\exists N \in \mathfrak{M}$, այնպես, որ $\mu(N) = 0$ և f–ը $\Omega \setminus N$–ի վրա սահմանափակ է: Այդ դեպքում

$$\inf_{\substack{N \in \mathfrak{M} \\ \mu(N)=0}} \sup_{s \in \Omega \setminus N} |f(s)|$$

մեծությունը կոչվում է $|f(\cdot)|$–ի էապես ճշգրիտ վերին եզր և նշանակվում է

$$\underset{\mu}{vrai} \sup_{s \in \Omega} |f(s)|$$

կամ

$$\sup ess |f(s)|$$

սիմվոլով: եթե f–ը էապես սահմանափակ չէ, համարում են, որ

$$\underset{\mu}{vrai} \sup_{s \in \Omega} |f(s)| = \infty :$$

$L^\infty(\Omega)$–ով կնանակենք բոլոր չափելի էապես սահմանափակ ֆունկ– ցիաների դասը (հաճախ էապես սահմանափակության սահմանման մեջ մտցվում է ֆունկցիայի չափելիության պահանջը): $L^\infty(\Omega)$–ն

$$\|f\|_\infty = \underset{\mu}{vrai} \sup_{s \in \Omega} |f(s)|$$

նորմի նկատմամբ հանդիսանում է կոմուտատիվ B^*–հանրահաշիվ (միավորը $f(s) \equiv 1$ ֆունկցիան է): Ուստի ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝

$$\widehat{L^\infty(\Omega)} = C\left(\mathcal{M}_{L^\infty(\Omega)}\right) :$$

Այս արդյունքը պարզաբանում է նաև, թե ինչու անընդհատ ֆունկ–ցիաների տարածությունում նորմը հաճախ գրում են $\|\cdot\|_\infty$ սիմվոլով:

Նկատենք, որ եթե $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան չափելի է և գոյություն ունի այնպիսի $r \in [1, \infty)$ թիվ, որ

$$\|f\|_r = \left(\int\limits_\Omega |f|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

ապա

$$\|f\|_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty :$$

Իրոք, եթե $0 < \|f\|_\infty < \alpha$, ապա $p > r$ համար

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f|^r \cdot |f|^{p-r} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_\infty^{\frac{p-r}{p}} \cdot \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty < \alpha,$$

ուստի բավականաչափ մեծ p–երի համար $\|f\|_p < \alpha$: Մյուս կողմից, եթե $\|f\|_\infty > \beta$, ապա $\exists \Omega_1 \subset \Omega$ դրական չափի բազմություն, որ $|f(x)|>\beta_1>\beta$ $(x \in \Omega_1)$, ուստի

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int\limits_{\Omega_1} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \beta_1 \left[\mu\left(\Omega_1\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

և հետևաբար, բավականաչափ մեծ p–երի համար $\|f\|_p > \beta$:

Ապացուցված պնդումը պարզ է դարձնում $L^\infty(\Omega)$ և $\|f\|_\infty$ նշանակումները:

§ 3.4. $L^\infty(E)$ հանրահաշիվը

Դիցուք $(\Omega, \mathfrak{M})$–ը չափելի տարածություն է, H–ը հիլբերտյան տարածություն է, և $E : \mathfrak{M} \to BL(H)$ միավորի վերլուծություն է: $\mathbb{C}$-ի սեպարաբելության շնորհիվ գոյություն ունի բաց շրջանների $\{D_i\}_{i=1}^\infty$ հաշվելի ընտանիք, որը հանդիսանում է $\mathbb{C}$–ի բազա: Դիցուք $f : \Omega \to \mathbb{C}$ չափելի ֆունկցիա է: V–ով նշանակենք $E\left(f^{-1}(D_i)\right) = 0$ պայմանին բավարարող բոլոր D_i շրջանների միավորումը: 3.3.2 լեմմայից կբխի, որ $E\left(f^{-1}(V)\right) = 0$: Հեշտ է տեսնել, որ V–ն այդ հատկությամբ օժտված ամենալայն բաց բազմությունն է:

$\mathbb{C} \setminus V$ բազմությունը կոչվում է f–ի էական արժեքների բազմություն: $\mathbb{C} \setminus V$–ն այն ամենափոքր փակ բազմությունն է, որը պարունակում է $f(p)$ արժեքները համարյա բոլոր $p \in \Omega$ համար: Վերջինս նշանակում է, որ

$$f^{-1}(V) = \{p \in \Omega : \ f(p) \notin \mathbb{C} \setminus V\} \subset w,$$

որտեղ $w \in \mathfrak{M}$ և $E(w) = 0$:

Կասենք, որ f ֆունկցիան էապես սահմանափակ է, եթե նրա էական արժեքների բազմությունը սահմանափակ է (և հետևաբար՝ կոմպակտ է): Այդ դեպքում

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus V\} = \max\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus V\}$$

մեծությունը կոչվում է f–ի էապես վերին եզր:

Դիցուք B–ն բոլոր $f : \Omega \to \mathbb{C}$ սահմանափակ չափելի ֆունկցիաների հանրահաշիվն է՝

$$\|f\| = \sup\{|f(p)| : \ p \in \Omega\}$$

նորմով: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ B–ն հանդիսանում է բանախյան հանրահաշիվ, և

$$N = \{f \in B : \ \|f\|_\infty = 0\}$$

բազմությունը B–ի իդեալ է, ընդ որում այդ իդեալը (համաձայն 3.3.2 լեմմայի) փակ է: Հետևաբար B/N ֆակտոր–հանրահաշիվը հանդիսանում է բանախյան հանրահաշիվ: Այն սովորաբար նշանակվում է $L^\infty(E)$–ով:

$[f] = f + N$ էլեմենտի (հարակից դասի) նորմը $L^\infty(E)$–ում հավասար է $\|f\|_\infty$, իսկ $\sigma([f])$ սպեկտրը համընկնում է f ֆունկցիայի էական արժեքների բազմության հետ: Նշանակումներում մենք չենք պարբերի f ֆունկցիան և այն պարունակող $[f]$ դասը՝ ինչպես դա ընդունված է ֆունկցիաների պեսությունում:

Սահմանում 3.4.1: $s : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան կոչվում է պարզ[10], եթե նրա ընդունած արժեքների բազմությունը վերջավոր է: Դիցուք s պարզ ֆունկցիան ընդունում է $w_1, w_2, \ldots, w_n$ արժեքները ($w_i \neq w_j$, $i \neq j$): Այդ դեպքում s–ը կգրվի

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{A_i}(x)$$

տեսքով, որտեղ $A_i = s^{-1}(\{w_i\})$: Պարզ է, որ $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ և s–ը կլինի չափելի այն և միայն այն դեպքում, երբ չափելի են բոլոր A_i բազմությունները:

Լեմմա 3.4.1: *Պարզ ֆունկցիաները ամենուրեք խիտ են $L^\infty(E)$–ում:*

Ապացույց: Դիցուք $f \in L^\infty(E)$ և K–ն f–ի էական արժեքների բազմությունն է: Վերցնենք $\forall n \in \mathbb{N}$ բնական թիվ և $\mathbb{C}$ հարթության վրա դիտարկենք $\dfrac{1}{2^n}$ կողով քառակուսային ցանցը: Նշանակենք

$$\Delta_{mk}^{(n)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \frac{m}{2^n} \leqslant \operatorname{Re} z < \frac{m+1}{2^n}, \ \frac{k}{2^n} \leqslant \operatorname{Im} z < \frac{k+1}{2^n} \right\} :$$
$$(m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Նշանակենք $I_n = \left\{ (m,k) : \Delta_{mk}^{(n)} \cap K \neq 0 \right\}$: Քանի որ K–ն կոմպակտ է, ուստի I_n–ը վերջավոր բազմություն է: $\forall (m,k) \in I_n$ զույգի համար ընտրենք մեկական

$$\xi_{mk}^{(n)} \in \Delta_{mk}^{(n)} \cap K$$

[10]Երբեմն պարզ անվանում են նաև այն ֆունկցիաներին, որոնց ընդունած արժեքների բազմությունը հաշվելի է, իսկ միայն վերջավոր թվով արժեքներ ընդունող ֆունկցիաներին անվանում են աստիճանաձև:

կետ և սահմանենք

$$s_n(x) = \sum_{(m,k)\in I_n} \xi_{mk}^{(n)} \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x);$$

որտեղ $A_{mk}^{(n)} = f^{-1}\left(\Delta_{mk}^{(n)} \cap K\right)$: Ակնհայտ է, որ s_n–ը պարզ ֆունկցիա է: Պարզ է, որ $s_n \in L^\infty(E)$: Քանի որ $f^{-1}(K) = \bigcup\limits_{(m,k)\in I_n} A_{mk}^{(n)}$, և $A_{mk}^{(n)}$–երը չեն հատվում, ուստի

$$\sum_{(m,k)\in I_n} \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) = 1 \quad \left(x \in f^{-1}(K)\right),$$

և հետևաբար

$$|f(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{(m,k)\in I_n} \left(f(x) - \xi_{mk}^{(n)}\right) \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(m,k)\in I_n} \left|f(x) - \xi_{mk}^{(n)}\right| \cdot \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) :$$

Նկատենք, որ $x \in A_{mk}^{(n)}$ դեպքում $f(x), \xi_{mk}^{(n)} \in \Delta_{mk}^{(n)}$, ուստի $\left|f(x) - \xi_{mk}^{(n)}\right|$–ը չի գերազանցում $\Delta_{mk}^{(n)}$–ի անկյունագծի երկարությունից, որը հավասար է $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$: Հետևաբար

$$\left|f(x) - \xi_{mk}^{(n)}\right| \cdot \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) \quad \left(x \in A_{mk}^{(n)}\right) :$$

Այս գնահատականը ճիշտ է նաև $x \notin A_{mk}^{(n)}$ դեպքում, քանի որ այդպիսի x–երի համար անհավասարության երկու կողմն էլ դառնում են զրո: Հետևաբար

$$|f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \sum_{(m,k)\in I_n} \chi_{A_{mk}^{(n)}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

$$|f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \quad \left(x \in f^{-1}(K)\right),$$

որտեղից կբխի, որ

$$\sup_{x \in f^{-1}(K)} |f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $s_n(x) = 0$ $(x \notin f^{-1}(K))$, ստանում ենք

$$\|f - s_n\|_\infty \leqslant \sup_{f^{-1}(K)} |f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

որտեղից էլ կբխի, որ $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty(E)} f$:

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 3.4.1: *Ցանկացած E միավորի տրոհման համար*

$$(\Psi(f)x, y) = \int\limits_\Omega f\, dE_{x,y} \quad (f \in L^\infty(E), \;\; x, y \in H) \qquad (3.4.1)$$

բանաձևով որոշվում է $\Psi : L^\infty(E) \to A$ իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $L^\infty(E)$–ի և $BL(H)$–ի որոշակի A փակ նորմալ ենթահանրահաշվի միջև: Այդ Ψ իզոմորֆիզմը բավարարում է

$$\Psi\left(\overline{f}\right) = \Psi(f)^* \quad (f \in L^\infty(E)) \qquad (3.4.2)$$

և

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int\limits_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \quad (x \in H, \; f \in L^\infty(E)) \qquad (3.4.3)$$

պայմաններին:

Բացի դրանից, $Q \in BL(H)$ օպերատորը բոլոր $E(w)$ օպերատորների հետ տեղափոխելի կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ Q–ն տեղափոխելի է բոլոր $\Psi(f)$ օպերատորների հետ:

Դիտողություն 3.4.1: (3.4.1) բանաձևը հաճախ գրում են

$$\Psi(f) = \int\limits_{\Omega} f\,dE \tag{3.4.4}$$

տեսքով: ►

Ապացույց: Դիտարկենք Ω–ի կամայական $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ տրոհում $w_i \in \mathfrak{M}$ բազմությունների: Դիցուք

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{w_i}$$

պարզ ֆունկցիա է: $\Psi(s) \in BL(H)$ օպերատորը սահմանենք

$$\Psi(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(w_i) \tag{3.4.5}$$

բանաձևով: Քանի որ $E(w_i)$ օպերատորներից յուրաքանչյուրը ինքնահամալուծ է, ուստի

$$\Psi(s)^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i E(w_i) = \Psi\left(\overline{s}\right) : \tag{3.4.6}$$

Եթե $\{w_1', w_2', \ldots, w_m'\}$–ը նույն տիպի մեկ այլ տրոհում է, և $t = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_i \chi_{w_j'}$, ապա

$$\Psi(s)\Psi(t) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(w_i) E\left(w_j'\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E\left(w_i \cap w_j'\right) :$$

Քանի որ st –ն պարզ ֆունկցիա է, որը $w_i \cap w_j'$–ի վրա ընդունում է $\alpha_i \beta_j$ արժեքը, ուստի այստեղից բխում է, որ

$$\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(st) : \tag{3.4.7}$$

Հեշտ է նաև պեսնել, որ

$$\Psi(\alpha s + \beta t) = \alpha\Psi(s) + \beta\Psi(t) : \tag{3.4.8}$$

Եթե $x, y \in H$, ապա (3.4.5) բանաձևի համաձայն՝

$$(\Psi(s)x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(E(w_i)x, y\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{x,y}(w_i) = \int\limits_{\Omega} s\, dE_{x,y} : \tag{3.4.9}$$

(3.4.6) և (3.4.7) բանաձևերից բխում է, որ

$$\Psi(s)^*\Psi(s) = \Psi\left(\overline{s}\right)\Psi(s) = \Psi\left(\overline{s}s\right) = \Psi\left(|s|^2\right) : \tag{3.4.10}$$

Հետևաբար (3.4.9)–ից կբխի, որ

$$\|\Psi(s)x\|^2 = (\Psi(s)^*\Psi(s)x, x) = \\ = \left(\Psi\left(|s|^2\right)x, x\right) = \int\limits_{\Omega} |s|^2 dE_{x,x} : \tag{3.4.11}$$

Այսպեղից, հաշվի առնելով, որ $E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$, սպանում ենք

$$\|\Psi(s)x\| \leqslant \|s\|_\infty \cdot \|x\| : \tag{3.4.12}$$

Մյուս կողմից, քանի որ $E(w_i)$ պրոյեկպորների պապկերներն իրար օրթոգոնալ են, ուսպի $x \in \operatorname{Im}\left(E(w_j)\right)$ համար կունենանք

$$\Psi(s)x = \alpha_j E(w_j)x = \alpha_j x : \tag{3.4.13}$$

Եթե j–ն ընպրենք այնպես, որ $|\alpha_j| = \|s\|_\infty$, ապա (3.4.12)–ից և (3.4.13)–ից կսպանանք, որ

$$\|\Psi(s)x\| = \|s\|_\infty : \tag{3.4.14}$$

Այժմ դիցուք $f \in L^\infty(E)$: Ըստ նախորդ լեմմայի՝ $\exists\{s_k\}_1^\infty$ պարզ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը $L^\infty(E)$–ի նորմով զուգամիտում է f–ին: Համաձայն (3.4.14) առնչության, $\{\Psi(s_k)\}$–ն կլինի $BL(H)$–ում ֆունդամենտալ հաջորդականություն, ուստի այն կզուգամիտի որոշակի օպերատորի, որն էլ մենք կնշանակենք $\Psi(f)$–ով: Հեշտ է տեսնել, որ $\Psi(f)$–ը կախված չէ $\{s_k\}$ հաջորդականության ընտրությունից: (3.4.14)–ից ակնհայտորեն ստացվում է ավելի ընդհանուր՝

$$\|\Psi(f)\| = \|f\|_\infty \quad (f \in L^\infty(E)) \tag{3.4.15}$$

բանաձևը: (3.4.9)–ում s–ը փոխարինելով s_k–ով և անցնելով սահմանի, երբ $k \to \infty$ ու օգտվելով $E_{x,y}$ չափի վերջավոր լինելուց՝ կստանանք (3.4.1)–ը: (3.4.2) և (3.4.3) բանաձևերը բխում են (3.4.6)–ից և (3.4.11)–ից: $f, g \in L^\infty(E)$ ֆունկցիաները մոտարկելով s և t պարզ ֆունկցիաներով՝ նկատում ենք, որ (3.4.7) և (3.4.8) բանաձևերը ուժի մեջ են մնում դրանց մեջ s և t պարզ ֆունկցիաները f և g կամայական չափելի սահմանափակ ֆունկցիաներով փոխարինելիս:

Նշանակենք $A = \Psi(L^\infty(E))$: Այդ դեպքում Ψ–ն կլինի իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $L^\infty(E)$–ի և A–ի միջև: Քանի որ $L^\infty(E)$–ն լրիվ է, ուստի A–ն կլինի փակ $BL(H)$–ում:

Որ A–ն կլինի նորմալ, բխում է (3.4.2)–ից և (3.4.7)–ից:

Վերջապես, եթե Q–ն տեղափոխելի է բոլոր $E(w)$ օպերատորների հետ, ապա այն տեղափոխելի կլինի բոլոր $\Psi(s)$ օպերատորների հետ, որտեղ s–ը պարզ ֆունկցիա է, և վերը կիրառված մոտարկման պրոցեսը ցույց է տալիս, որ Q–ն տեղափոխելի է A հանրահաշվի ցանկացած էլեմենտի հետ (հակառակն ակնհայտ է, քանի որ $E(w) \in A$):

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 3.5. Սպեկտրալ թեորեմը

Սպեկտրալ թեորեմի հիմնական պնդումը կայանում է նրանում, որ հիլբերտյան տարածությունում գործող ցանկացած T սահմանափակ նորմալ օպերատոր (ինչ-որ կանոնական ձևով) ծնում է նրա $\sigma(T)$ սպեկտրի բորելյան ենթաբազմությունների վրա E միավորի վերլուծություն և որ T օպերատորը E-ի միջոցով կարելի է վերականգնել նախորդ ենթավերնագրում նկարագրված փիպի ինտեգրման պրոցեսով: Նորմալ օպերատորների տեսության արդյունքների մեծամասնությունը հիմնված է այդ փաստի վրա:

Հավանաբար, ավելորդ չէ նշել, որ խոսելով T օպերատորի $\sigma(T)$ սպեկտրի մասին՝ մենք միշտ նկատի ունենք ամբողջ $BL(H)$ հանրահաշիվը: Այլ կերպ ասած, $\lambda \in \sigma(T)$ նշանակում է, որ $T - \lambda I$ օպերատորը չունի հակադարձ $BL(H)$-ում: Դրա հետ մեկտեղ մենք գործ կունենանք նաև $BL(H)$ հանրահաշվի այնպիսի A փակ ենթահանրահաշիվների հետ, որոնք օժտված են հետևյալ լրացուցիչ հատկությամբ. $I \in A$, և $S \in A \Rightarrow S^* \in A$ (այդպիսի հանրահաշիվներին երբեմն անվանում են $*$-հանրահաշիվներ): Քանի որ $BL(H)$-ը B^*-հանրահաշիվ է, ուստի այդպիսի իրավիճակում $\forall T \in A$ օպերատորի համար $\sigma(T) = \sigma_A(T)$ (տես թեորեմ 2.7.2-ը):

Այսպիսով, T օպերատորն ունի նույն սպեկտրը $BL(H)$-ի բոլոր $*$-հանրահաշիվներում, որոնք պարունակում են այդ օպերատորը:

Սպեկտրալ թեորեմը (թեորեմ 3.5.3, տես՝ վարը) մենք կստանանք որպես հետևյալ արդյունքի մասնավոր դեպք: Այս արդյունքում խոսքը գնում է ոչ թե առանձին օպերատորի, այլ նորմալ օպերատորների հանրահաշվի մասին:

Թեորեմ 3.5.1: *Դիցուք A-ն $BL(H)$-ի ինչ-որ փակ նորմալ ենթահանրահաշիվ է, որը պարունակում է I միավոր օպերատորը, իսկ $\mathcal{M}_A$-ն A հանրահաշվի մաքսիմալ իդեալների տարածությունն է: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝*

ա) $\mathcal{M}_A$ տարածության բորելյան ենթաբազմությունների վրա գոյություն ունի միակ E միավորի վերլուծություն, որ

$$T = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE \quad (\forall T \in A), \tag{3.5.1}$$

որտեղ $\hat{T}$-ը T օպերատորի Գելֆանդի ձևափոխությունն է՝ A

հանրահաշվի նկատմամբ: (3.5.1)-ի պակ հասկացվում է, որ

$$(Tx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE_{x,y} \quad (x, y \in H,\ \ T \in A), \tag{3.5.2}$$

բ) $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ ոչ դատարկ բաց բազմության համար $E(w) \neq 0$,
գ) $S \in BL(H)$ օպերատորը այն և միայն այն դեպքում կլինի տեղափոխելի A-ի բոլոր T օպերատորների հետ, երբ այն տեղափոխելի է ցանկացած $E(w)$ պրոյեկտորի հետ:

Ապացույց: Քանի որ $BL(H)$-ը B^*-հանրահաշիվ է, ուստի տրված A հանրահաշիվը կլինի կոմուտատիվ B^*-հանրահաշիվ: Այստեղից, ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի 2.3.5 թեորեմի, բխում է, որ $T \mapsto \hat{T}$ արտապատկերումը հանդիսանում է իզոմետրիկական $*$-իզոմորֆիզմ A-ի և $C(\mathcal{M}_A)$-ի միջև:

Դա բերում է E միավորի վերլուծության միակության թափանցիկ ապացույցի: Ենթադրենք, թե E-ն բավարարում է (3.5.2) պայմանին: Քանի որ $\hat{T}$-ը սպառում է ամբողջ $C(\mathcal{M}_A)$ տարածությունը, ուստի $E_{x,y}$ կոմպլեքս բորելյան չափերի ռեգուլյարությունից բխում է, որ $E_{x,y}$ չափերը միարժեքորեն որոշվում են (3.5.2) պայմանով: Ավելի խիստ լինելու համար նշենք, որ այս ասվածը հանդիսանում է հաուսդորֆյան կոմպակտի վրա որոշված բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում գծային սահմանափակ ֆունկցիոնալի ընդհանուր տեսքի մասին Ռիսի թեորեմի միակության մասի հետևանք (տես՝ [28], թեորեմ 6.19): Քանի որ ըստ սահմանման՝

$$(E(w)x, y) = E_{x,y}(w), \tag{3.5.3}$$

ուստի $E(w)$ պրոյեկտորներից յուրաքանչյուրը նույնպես միարժեքորեն որոշվում է (3.5.2) պայմանով:

Բերված միակության ապացույցը հուշում է E-ի գոյության այսպիսի ապացույց: Եթե $x, y \in H$, ապա ըստ Գելֆալդ-Նայմարկի թեորեմի՝

$$\hat{T} \longmapsto (Tx, y) \tag{3.5.4}$$

արտապատկերումը $C(\mathcal{M}_A)$-ում գծային սահմանափակ ֆունկցիոնալ է, ընդ որում $\|\hat{T}\|_\infty = \|T\|$ հավասարությունից բխում է, որ այդ ֆունկցիոնալի նորմը չի գերազանցում $\|x\| \cdot \|y\|$-ը: Ըստ Ռիսի թեորեմի (որի մասին վերը խոսվեց) $\mathcal{M}_A$-ի վրա գոյություն ունի միակ $\mu_{x,y}$ ռեգուլյար կոմպլեքս բորելյան չափ, որ

$$(Tx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{x,y} \quad (x, y \in H,\ T \in A) : \tag{3.5.5}$$

Ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմի՝ $(T^*)\hat{} = \overline{\hat{T}}$: Ուստի եթե $\hat{T}$ ֆունկցիան իրական է, ապա T-ն ինքնահամալուծ է: Այդ դեպքում (Tx, y) և (Ty, x) թվերը իրար համալուծ կոմպլեքս թվեր են, ուստի

$$(Tx, y) = \overline{(Ty, x)} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\overline{\mu}_{y,x},$$

որտեղից և (3.5.5)-ից կբխի, որ

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\overline{\mu}_{y,x},$$

եթե $\hat{T}$-ը իրական է: Ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմի՝ $\hat{T}$-ը սպառում է ամբողջ $C(\mathcal{M}_A)$-ն, երբ T-ն սպառում է A-ն: Ուստի վերը գրված հավասարությունից կբխի, որ $\forall f \in C(\mathcal{M}_A)$ իրական ֆունկցիայի համար

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\overline{\mu}_{y,x} :$$

Այստեղից կբխի, որ $\forall f \in C(\mathcal{M}_A)$ համար

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\overline{\mu}_{y,x},$$

որտեղից և Ռիսի թեորեմում միակությունից կբխի, որ

$$\mu_{x,y} = \overline{\mu}_{y,x} \quad (x, y \in H) : \tag{3.5.6}$$

Ֆիքսած $T \in A$ համար (3.5.5)-ի ձախ մասը հանդիսանում է ըստ x-ի գծային և ըստ y-ի՝ համալուծ գծային ֆունկցիոնալ: Այստեղից և Ռիսի թեորեմի միակության պնդումից կբխի, որ $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ բորել–յան բազմության համար $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}(w)$ արտապատկերումը կլի–նի ըստ x-ի գծային և ըստ y-ի՝ համալուծ գծային: Իրոք, (3.5.5)-ից բխում է, որ $\forall x_1, x_2 \in H$ և $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ համար

$$\int_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \int_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\left(\alpha_1 \mu_{x_1,y} + \alpha_2 \mu_{x_2,y}\right) \quad (T \in A),$$

և քանի որ $\hat{T}$-ը ապառում է $C(\mathcal{M}_A)$-ն, ուստի Ռիսի թեորեմի միա–կության պնդումից կբխի, որ

$$\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \alpha_1 \mu_{x_1,y} + \alpha_2 \mu_{x_2,y} :$$

Նույն ձևով ցույց կտանք, որ

$$\mu_{x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2} = \overline{\beta}_1 \mu_{x,y_1} + \overline{\beta}_2 \mu_{x,y_2} :$$

Քանի որ $x, y \in H$ համար $\hat{T} \mapsto (Tx, y)$ ֆունկցիոնալի նորմը մի կողմից չի գերազանցում, ինչպես վերը տեսանք, $\|x\| \cdot \|y\|$-ը, մյուս կողմից, ըստ Ռիսի թեորեմի, հավասար է $\|\mu_{x,y}\|$, ուստի

$$\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

որտեղից էլ կբխի, որ կամայական $f : \mathcal{M}_A \to \mathbb{C}$ սահմանափակ բորելյան ֆունկցիայի համար

$$\int_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} \tag{3.5.7}$$

ինտեգրալը ևս կհանդիսանա H-ում սահմանափակ կիսագծային ձև, ուստի ըստ 2.3.1 լեմմայի՝ գոյություն ունի միակ $\Phi(f) \in BL(H)$, որ

$$(\Phi(f)x, y) = \int_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} \quad (x, y \in H) : \tag{3.5.8}$$

(3.5.5), (3.5.8) առնչություններից բխում է, որ

$$\Phi\left(\hat{T}\right) = T \quad (T \in A) : \tag{3.5.9}$$

Հետևաբար Φ արտապատկերումը հանդիսանում է $C(\mathcal{M}_A)$-ն A-ի վրա արտապատկերող $\hat{T} \mapsto T$ արտապատկերման ընդլայնում:

Եթե f ֆունկցիան իրական է, ապա (3.5.6)-ից կբխի, որ

$$(\Phi(f)x, y) = \overline{(\Phi(f)y, x)} = (x, \Phi(f)y) \quad (x, y \in H),$$

ինչը նշանակում է, որ $\Phi(f)$ օպերատորն ինքնահամալուծ է:

Այժմ մենք ցույց կտանք, որ ցանկացած f, g սահմանափակ բոռելյան ֆունկցիաների համար տեղի ունի

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) \tag{3.5.10}$$

հավասարությունը:

Եթե $S, T \in A$, ապա $(ST)\hat{} = \hat{S}\hat{T}$, և (3.5.5)-ից կբխի, որ

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{S}\hat{T}\, d\mu_{x,y} = (STx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{S}\, d\mu_{Tx,y} : \tag{3.5.11}$$

Քանի որ $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$, ուստի այստեղից բխում է, որ

$$\hat{T}\, d\mu_{x,y} = d\mu_{Tx,y} \quad (\forall x, y \in H, \ \ \forall T \in A) : \tag{3.5.12}$$

Հետևաբար (3.5.11)-ում ինտեգրալները հավասար կմնան նաև $\hat{S}$-ը f-ով փոխարինելիս: Ուստի

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} f\hat{T}\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{Tx,y} = (\Phi(f)Tx, y) =$$

$$= (Tx, z) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{x,z}, \tag{3.5.13}$$

որտեղ $z = \Phi(f)^* y$: Վերը կատարվածին նման դատողությունները ցույց են տալիս, որ (3.5.13)-ում առաջին և վերջին ինտեգրալները կմնան հավասար, եթե $\hat{T}$-ը փոխարինվի g-ով: Հետևաբար՝

$$(\Phi(fg)x, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} fg\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} g\, d\mu_{x,z} =$$

$$= (\Phi(g)x, z) = (\Phi(f)\Phi(g)x, y)\,, \quad (3.5.14)$$

և սրանով իսկ (3.5.10)-ն ապացուցված է:

Այժմ մենք պատրաստ ենք սահմանել E-ն: Եթե $w \subset \mathcal{M}_A$ կամայական բորելյան բազմություն է, ապա կսահմանենք $E(w) = \Phi(\chi_w)$:

(3.5.10) բանաձևի համաձայն՝ $E\,(w \cap w') = E(w)E(w')$: Սա $w = w'$ դեպքում նշանակում է, որ $E(w)$-ն պրոյեկտոր է: Քանի որ իրական f-երի համար $\Phi(f)$-ը ինքնահամալուծ է, ուստի բոլոր $E(w)$ պրոյեկտորները կլինեն ինքնահամալուծ: Պարզ է, որ $E(\varnothing) = \Phi(0) = 0$: $E(\mathcal{M}_A) = I$ հավասարությունը բխում է (3.5.9)-ից: (3.5.8)-ում վերցնելով $f = \chi_w$, կստանանք, որ

$$(E(w)x, y) = \mu_{x,y}(w), \quad (3.5.15)$$

որտեղից կստացվի, որ E ֆունկցիան վերջավոր ադիտիվ է: Այսպիսով, E-ն միավորի վերլուծություն է:

Քանի որ (3.5.2) բանաձևը բխում է (3.5.5)-ից և (3.5.15)-ից, ուստի ա) պնդման ապացույցն ավարտված է:

Այժմ ենթադրենք, թե $w \subset \mathcal{M}_A$ բաց բազմություն է և $E(w) = 0$: Եթե $T \in A$ և $\hat{T}$ ֆունկցիայի կրիչը ընկած է w-ի մեջ, ապա (3.5.1)-ից կբխի, որ $T = 0$: Հետևաբար $\hat{T} = 0$: Բայց $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$, ուստի ըստ Ուրիսոնի լեմմայի՝ $w = \varnothing$: Սրանով իսկ բ) պնդումը ևս ապացուցված է:

գ) պնդումն ապացուցելու համար ընտրենք կամայական $S \in BL(H)$; $x, y \in H$ և նշանակենք $z = S^* y$: Այդ դեպքում $\forall T \in A$ օպերատորի և $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ բորելյան բազմության համար կստանանք.

$$(STx, y) = (Tx, z) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE_{x,z}, \quad (3.5.16)$$

$$(TSx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE_{Sx,y}, \tag{3.5.17}$$

$$(SE(w)x, y) = (E(w)x, z) = E_{x,z}(w), \tag{3.5.18}$$

$$(E(w)Sx, y) = E_{Sx,y}(w)\ : \tag{3.5.19}$$

Եթե $ST = TS \quad (\forall T \in A)$, ապա (3.5.16), (3.5.17)-ից և Ռիսի թեո– րեմի միակության մասից կբխի, որ

$$E_{x,z} = E_{Sx,y} \quad (\forall x, y \in H),$$

որտեղից և (3.5.18), (3.5.19)-ից կբխի, որ ցանկացած $w \subset \mathcal{M}_A$ բո– րելյան բազմության համար $SE(w) = E(w)S$:

Եթե $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ բորելյան բազմության համար $SE(w) = E(w)S$, ապա (3.5.18), (3.5.19)-ից կբխի, որ

$$E_{x,z} = E_{Sx,y} \quad (\forall x, y \in H),$$

որտեղից և (3.5.16), (3.5.17)-ից կբխի, որ $ST = TS \ (\forall T \in A)$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.5.2: *Դիցուք A-ն կոմուտատիվ B^*-հանրահաշիվ է, որը պարունակում է այնպիսի x էլեմենտ, որ x-ից և x^*-ից երկու փոփոխականի բազմանդամներն ամենուրեք խիտ են A-ում: Այդ դեպքում*

$$(\Psi f)\hat{} = f \circ \hat{x} \tag{3.5.20}$$

բանաձևով որոշվում է Ψ իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $C(\sigma(x))$ և A հանրահաշիվների միջև, ընդ որում

$$\Psi \overline{f} = (\Psi f)^* \quad (f \in C(\sigma(x)))\ : \tag{3.5.21}$$

Բացի այդ, եթե $f(\lambda) = \lambda \ (\lambda \in \sigma(x))$, ապա $\Psi f = x$:

Ապացույց: $\hat{x}$-ը $\mathcal{M}_A$-ի վրա անընդհատ ֆունկցիա է և նրա պատկերը $\sigma(x)$-ն է: Ցույց տանք, որ $\hat{x} : \mathcal{M}_A \to \sigma(x)$ հոմեոմորֆիզմ է: Իրոք, դիցուք $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_A$ և $\hat{x}(\varphi_1) = \hat{x}(\varphi_2)$, այսինքն՝ $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$: Այստեղից և Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմից կբխի, որ $\varphi_1(x^*) = \varphi_2(x^*)$: Քանի որ φ_1, φ_2-ը հոմոմորֆիզմներ են, ուստի վերը ստացվածից կբխի, որ կամայական $P(x, x^*)$ բազմանդամի համար

$$\varphi_1\left(P(x, x^*)\right) = \varphi_2\left(P(x, x^*)\right):$$

Քանի որ $P(x, x^*)$ բազմանդամները ամենուրեք խիտ են A-ում, իսկ φ_1, φ_2-ն անընդհատ են, ուստի կստանանք, որ

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y) \quad (\forall y \in A)$$

և հետևաբար՝ $\varphi_1 = \varphi_2$: Ստացվածը ցույց է տալիս, որ $\hat{x} : \mathcal{M}_A \to \sigma(x)$ արտապատկերումը փոխմիարժեք (հակադարձելի) է: Քանի որ կոմպակտի վրա անընդհատ հակադարձելի ֆունկցիայի հակադարձը ևս անընդհատ է, ուստի $\hat{x} : \mathcal{M}_A \to \sigma(x)$ կլինի հոմեոմորֆիզմ:

Հետևաբար $f \mapsto f \circ \hat{x}$ արտապատկերումը կհաստատի իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $C(\sigma(x))$-ի և $C(\mathcal{M}_A)$-ի միջև, որը պահպանում է կոմպլեքս համալուծությունը:

Հետևաբար $\forall f \in C(\sigma(x))$ համար, ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմի, գոյություն ունի միակ $y \in A$ էլեմենտ, որ $f \circ \hat{x} = \hat{y}$: Այդ y-ը կնշանակենք Ψf-ով: Պարզ է, որ $\|\Psi f\| = \|f\|_\infty$: (3.5.21)-ը բխում է Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմից:

Եթե $f(\lambda) = \lambda$, ապա $f \circ \hat{x} = \hat{x}$, և (3.5.20)-ից կստացվի, որ $\Psi f = x$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.5.3: *Եթե $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատոր է, ապա N օպերատորի $\sigma(N)$ սպեկտրի բորելյան ենթաբազմությունների վրա գոյություն ունի միակ E միավորի վերլուծություն, որ*

$$N = \int\limits_{\sigma(N)} \lambda \, dE(\lambda) : \tag{3.5.22}$$

Բացի դրանից, $S \in BL(H)$ օպերատորը այն և միայն այն դեպքում կլինի տեղափոխելի N-ի հետ, երբ այն տեղափոխելի է ցանկացած $E(w)$ պրոյեկտորի հետ:

Ապացույց: A-ով նշանակենք $BL(H)$-ի այն մինիմալ փակ ենթա– հանրահաշիվը, որը պարունակում է I, N, N^* օպերատորները: Հեշտ է պեսնել, որ A-ն իրենից ներկայացնում է N-ից և N^*-ից բոլոր հնարավոր

$$p(N,N^*) = \sum_{m,k=0}^{n} \alpha_{mk} N^m (N^*)^k \tag{3.5.23}$$

երկու փոփոխականի բազմանդամների դասի փակումը: Հետևաբար A-ն կլինի $BL(H)$-ի նորմալ ենթահանրահաշիվ և նրա համար կի– րառելի է թեորեմ 3.5.1-ը, համաձայն որի $\mathcal{M}_A$-ի բորելյան բազմու– թյունների վրա գոյություն ունի միակ E միավորի վերլուծություն, որ

$$Q = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{Q}\, dE \quad (\forall Q \in A)\ : \tag{3.5.24}$$

Օգտվելով նախորդ թեորեմից՝ A հանրահաշվի $\mathcal{M}_A$ մաքսիմալ իդեալների տարածությունը նույնացնենք $\sigma(N)$-ի հետ: Այդ դեպքում $\hat{N}$-ը կնույնացվի $f(\lambda) \equiv \lambda$ ֆունկցիայի հետ, և (3.5.1)-ից բխող

$$N = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{N}\, dE$$

հավասարությունը կգրվի

$$N = \int\limits_{\sigma(N)} \lambda\, dE(\lambda)$$

տեսքով: Սրանով իսկ $E(\lambda)$-ի գոյությունը հիմնավորվեց: Այժմ ցույց տանք նրա միակությունը:

3.4.1 թեորեմից բխում է, որ եթե տեղի ունի (3.5.22)-ը, ապա կամայական $p(x,y)$ երկու փոփոխականի բազմանդամի համար

$$p(N,N^*) = \int\limits_{\sigma(N)} p\left(\lambda, \overline{\lambda}\right)\, dE(\lambda)\ : \tag{3.5.25}$$

Բայց ըստ Ստոն-Վայերշտրասի թեորեմի՝ $p\left(\lambda, \overline{\lambda}\right)$ բազմանդամներն ամենուրեք խիտ են $C(\sigma(N))$-ում: Հետևաբար $\forall f \in C(\sigma(N))$ ֆունկցիայի համար

$$\int\limits_{\sigma(N)} f\left(\lambda\right) dE(\lambda)$$

ինտեգրալը միարժեքորեն որոշվում է $p(N, N^*)$ տեսքի բազմանդամների միջոցով (հանդիսանում է նրանց սահման), ուստի այդ ինտեգրալը միարժեքորեն որոշվում է N-ի միջոցով: Օգտվելով Ռիսի թեորեմում միակությունից՝ նմանատիպ ձևով, ինչպես 3.5.1 թեորեմի ապացույցում, ցույց կտանք, որ E-ն միարժեքորեն որոշվում է N-ի միջոցով:

Եթե $SN = NS$, ապա ըստ 3.2.1 թեորեմի՝ $SN^* = N^*S$: Հետևաբար S-ը տեղափոխելի է $\forall Q \in A$ օպերատորի հետ, ուստի ըստ 3.5.1 թեորեմի՝ S-ը տեղափոխելի է յուրաքանչյուր $E(w)$ օպերատորի հետ, որտեղ w-ն $\sigma(N)$-ի բորելյան ենթաբազմություն է: Հակառակը, եթե S-ը $\forall w \in \sigma(N)$ բորելյան բազմության համար տեղափոխելի է $E(w)$-ի հետ, ապա ըստ 3.5.1 թեորեմի՝ S-ը կլինի տեղափոխելի A-ի բոլոր օպերատորների և, մասնավորապես, նաև N-ի հետ:

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 3.6. Ֆունկցիոնալ հաշիվ նորմալ օպերատորների համար

Դիցուք H–ը հիլբերտյան տարածություն է, $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատոր է, իսկ E–ն նրա սպեկտրալ վերլուծությունն է: Դիցուք $f : \sigma(N) \to \mathbb{C}$ սահմանափակ բորելյան ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$\Psi(f) = \int\limits_{\sigma(N)} f\, dE \tag{3.6.1}$$

օպերատորն ընդունված է նշանակել $f(N)$–ով:

Օգտագործելով այդ նշանակումը՝ մի օպերատորի դեպքի համար 3.4.1, 3.5.1, 3.5.3 թեորեմների տվածը կարելի է ձևակերպել այսպես.

Թեորեմ 3.6.1: *$f \mapsto f(N)$ արտապատկերումը հանդիսանում է հոմոմորֆիզմ $\sigma(N)$–ի վրա որոշված բոլոր սահմանափակ բորելյան ֆունկցիաների հանրահաշվից $BL(H)$ հանրահաշվի մեջ: Այդ արտապատկերումը $f(\lambda) = 1$ ֆունկցիան տանում է I միավոր օպերատորին, $f(\lambda) = \lambda$ ֆունկցիան տանում է N օպերատորին և բավարարում է*

$$\overline{f}(N) = f(N)^*, \tag{3.6.2}$$

$$\|f(N)\| \leqslant \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(N)\} \tag{3.6.3}$$

պայմաններին: Ընդ որում՝
1) եթե $f \in C(\sigma(N))$, ապա (3.6.3)–ում տեղի ունի հավասարություն,
2) եթե $f_n \rightrightarrows f$, $x \in \sigma(N)$, ապա $\|f_n(N) - f(N)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
3) եթե $S \in BL(H)$ և $SN = NS$, ապա ցանկացած f սահմանափակ բորելյան ֆունկցիայի համար $Sf(N) = f(N)S$,
4) $f(N)$ օպերատորը պատկանում է $BL(H)$–ում $E(w)$ պրոյեկտորների դասի գծային թաղանթի փակմանը,
5) եթե $S \in BL(H)$ և ցանկացած $w \subset \sigma(N)$ բորելյան բազմության համար $SE(w) = E(w)S$, ապա $SN = NS$:

Ապացույց: 3.4.1, 3.5.1, 3.5.3 թեորեմներից բխում է, որ ապացուցման կարիք ունեն միայն (3.6.3) առնչությունը և 1), 2), 4) պնդումները:

(3.6.3)–ն ապացուցելու համար օգտվենք

$$\|f(N)x\|^2 = \int\limits_{\sigma(N)} |f|^2 dE_{x,x}$$

հավասարությունից (տես՝ (3.4.3)-ը): Այս հավասարությունից կբխի, որ

$$\|f(N)x\|^2 \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)|^2 \cdot \int\limits_{\sigma(N)} dE_{x,x} =$$

$$= \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)|^2 \cdot E_{x,x}((\sigma(N))),$$

և քանի որ $E_{x,x}(\sigma(N)) = (E(\sigma(N))x, x) = (x, x) = \|x\|^2$, ուստի կստանանք

$$\|f(N)x\|^2 \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)|^2 \cdot \|x\|^2,$$

որտեղից՝

$$\|f(N)x\| \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)| \cdot \|x\| \quad (x \in H) :$$

Այստեղից էլ բխում է (3.6.3)–ը:

1)–ն ապացուցելու համար օգտվենք (3.4.15) առնչությունից (ինչը նշանակում է, որ $\Psi : L^\infty(E) \to BL(H)$ արտապատկերումը իզոմետրիկ է), համաձայն որի՝

$$\|f(N)\| = \|f\|_{L^\infty(E)} :$$

Մնում է ցույց տալ, որ

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \|f\|_{C(\sigma(N))} = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(N)\} :$$

K–ով նշանակենք f–ի էական արժեքների բազմությունը: Նշանակենք $V = \mathbb{C} \setminus K$: Ունենք

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \sup_{\lambda\in K} |\lambda| :$$

Ցույց տանք, որ $K = f(\sigma(N))$: Ակնհայտ է, որ $K \subset f(\sigma(N))$: Ցույց տանք, որ նաև $f(\sigma(N)) \subset K$: Սա նշանակում է, որ

$$f(\sigma(N)) \cap V = \varnothing$$

կամ որ նույնն է՝

$$f^{-1}(V) = \varnothing : \tag{3.6.4}$$

Ցույց տանք (3.6.4)–ը: Քանի որ $f \in C(\sigma(N))$ և V–ն բաց է, ուստի $f^{-1}(V)$–ն ևս կլինի բաց: Ըստ V–ի սահմանման՝ $E\left(f^{-1}(V)\right) = 0$: Քանի որ $\forall w \subset \sigma(N)$ ոչ դատարկ բաց բազմության համար $E(w) \neq 0$, ուստի այստեղից կբխի (3.6.4)–ը: Դրանով իսկ 1)–ը

հիմնավորվեց:
2)–ը բխում է (3.6.3)–ից, քանի որ կունենանք

$$\|f_n(N)-f(N)\|\leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)}|f_n(\lambda)-f(\lambda)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0:$$

4)–ը բխում է $f(N)$–ի սահմանումից (տես՝ 3.4.1 թեորեմի ապացույ–ցը):
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.6.2: *Եթե $N\in BL(H)$ օպերատորը նորմալ է, ապա*

$$\|N\|=\sup\{|(Nx,x)|:\ x\in H,\ \|x\|\leqslant 1\}:$$

Ապացույց: Քանի որ $\|x\|\leqslant 1$ համար

$$|(Nx,x)|\leqslant\|Nx\|\cdot\|x\|\leqslant\|N\|\cdot\|x\|\leqslant\|N\|,$$

ուստի բավական է ցույց տալ, որ $\forall\varepsilon>0$ համար $\exists x_0\in H$, որ $\|x_0\|=1$ և

$$|(Nx_0,x_0)|\geqslant\|N\|-\varepsilon:$$

Դիցուք A–ն 3.5.3 թեորեմի ապացույցի ժամանակ դիտարկված հանրահաշիվն է, և $\hat{N}$–ը N–ի Գելֆանդի ձևափոխությունն է (A–ի նկատմամբ): Ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝ $\|N\|=\|\hat{N}\|_\infty=$ $=\rho(N)$: Դիցուք $\lambda_0\in\sigma(N)$ այնպիսին է, որ $|\lambda_0|=\rho(N)$: Այդ դեպքում կունենանք $|\lambda_0|=\|N\|$: Նշանակենք

$$w=\{\lambda\in\sigma(N):\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\}=\sigma(N)\cap D(\lambda_0,\varepsilon):$$

Այդ դեպքում $w\subset\sigma(N)$ կլինի ոչ դատարկ և բաց $\sigma(N)$–ում, ուստի N օպերատորի E սպեկտրալ վերլուծության համար կունենանք $E(w)\neq 0$: Հետևաբար $\exists x_o\in H$, որ $\|x_0\|=1$ և $E(w)x_0=x_0$:

Դիցուք

$$f(\lambda)=\begin{cases}\lambda-\lambda_0, & \lambda\in w,\\ 0, & \lambda\in\sigma(N)\setminus w:\end{cases}$$

Այդ դեպքում ակնհայտորեն

$$f(N)=(N-\lambda_0 I)E(w),$$

ուստի

$$f(N)x_0 = Nx_0 - \lambda_0 x_0$$

և կունենանք

$$|(Nx_0, x_0) - \lambda_0| = |(Nx_0, x_0) - \lambda_0(x_0, x_0)| =$$
$$= |(f(N)x_0, x_0)| \leqslant \|f(N)\| \leqslant \varepsilon,$$

քանի որ $|f(\lambda)| < \varepsilon \quad (\lambda \in \sigma(N))$: Քանի որ $|\lambda_0| = \|N\|$, ուստի կունենանք

$$|(Nx_0, x_0)| = |(Nx_0, x_0) - \lambda_0 - (-\lambda_0)| \geqslant$$

$$\geqslant \big||(Nx_0, x_0) - \lambda_0| - |-\lambda_0|\big| \geqslant |-\lambda_0| - |(Nx_0, x_0) - \lambda_0| \geqslant \|N\| - \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.6.3: *$N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորը հանդիսանում է՝*
ա) ինքնահամալուծ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sigma(N)$–ն ընկած է իրական առանցքի վրա,
բ) ունիտար այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sigma(N)$–ն ընկած է միավոր շրջանագծի վրա:

Ապացույց: Դիցուք A–ն և $\hat{N}$–ը նույնն են, ինչ որ 3.5.3 թեորեմի ապացույցի մեջ: Այդ դեպքում $\lambda \in \sigma(N)$ համար կունենանք $\hat{N}(\lambda) = \lambda$ և $(N^*)\hat{}(\lambda) = \overline{\lambda}$: Ուստի $N = N^*$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lambda = \overline{\lambda} \quad (\forall \lambda \in \sigma(N)),$$

և $NN^* = I$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lambda\overline{\lambda} = 1 \quad (\forall \lambda \in \sigma(N)) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 3.7. Ինվարիանտ ենթապարածություններ

Սահմանում 3.7.1: H հիլբերտյան (բանախյան) պարածության M փակ ենթապարածությունը կոչվում է ինվարիանտ $\Sigma \subset BL(H)$ օպերատորների ընտանիքի համար, եթե

$$T(M) \subset M \quad (\forall T \in \Sigma) :$$

Օրինակ, T օպերատորի ամեն մի սեփական ենթապարածություն ինվարիանտ է նրա համար: Դիցուք $\dim H < \infty$, իսկ $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատոր է: Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է հանրահաշվից, $\sigma(N)$–ն վերջավոր է և նրա կետերը N–ի սեփական արժեքներն են: Դիցուք $\sigma(N) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$: Այդ դեպքում կունենանք

$$\chi_{\{\lambda_1\}}(\lambda) + \chi_{\{\lambda_2\}}(\lambda) + \cdots + \chi_{\{\lambda_n\}}(\lambda) = 1 \quad (\forall \lambda \in \sigma(N)) : \quad (3.7.1)$$

Ըստ 3.6.1 թեորեմի՝ $f \mapsto f(N)$ արտապատկերման ժամանակ $f(\lambda) \equiv 1$ ֆունկցիային համապատասխանում է I միավոր օպերատորը, ուստի կստանանք

$$\chi_{\{\lambda_1\}}(N) + \chi_{\{\lambda_2\}}(N) + \cdots + \chi_{\{\lambda_n\}}(N) = I :$$

Նշանակենք $E_i = \chi_{\{\lambda_i\}}(N) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$: Քանի որ

$$\chi_{\{\lambda_i\}}(\lambda)\chi_{\{\lambda_j\}}(\lambda) = \begin{cases} \chi_{\{\lambda_i\}}(\lambda), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (\lambda \in \sigma(N)),$$

ուստի

$$E_i E_j = \begin{cases} E_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j : \end{cases}$$

Քանի որ $\chi_{\{\lambda_i\}}(\lambda)$ ֆունկցիաները իրական են, ուստի E_i օպերատորները ինքնահամալուծ են: Հետևաբար E_i օպերատորները հանդիսանում են զույգ առ զույգ օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատորներ: Նշանակենք

$$M_i = E_i(H) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) :$$

Քանի որ $E_1 + E_2 + \cdots + E_n = I$, ուստի

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n = H : \tag{3.7.2}$$

Դիցուք $f(\lambda) \equiv \lambda$ $(\lambda \in \sigma(N))$: (3.7.1)–ից կբխի, որ $(\lambda \in \sigma(N))$ համար

$$f(\lambda) = \lambda\chi_{\{\lambda_1\}}(\lambda) + \lambda\chi_{\{\lambda_2\}}(\lambda) + \cdots + \lambda\chi_{\{\lambda_n\}}(\lambda) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ վերջին հավասարությունը կարելի է գրել նաև

$$f(\lambda) = \lambda_1\chi_{\{\lambda_1\}}(\lambda) + \lambda_2\chi_{\{\lambda_2\}}(\lambda) + \cdots + \lambda_n\chi_{\{\lambda_n\}}(\lambda)$$

տեսքով: Այստեղից կբխի, որ

$$f(N) = \lambda_1\chi_{\{\lambda_1\}}(N) + \lambda_2\chi_{\{\lambda_2\}}(N) + \cdots + \lambda_n\chi_{\{\lambda_n\}}(N),$$

և հաշվի առնելով, որ (3.6.1 թեորեմի շնորհիվ) $f(N) = N$, կունենանք, որ

$$N = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_n E_n :$$

Այստեղից կբխի, որ E_i–ն λ_i սեփական արժեքին համապատասխան սեփական ենթատարածության վրա օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատորն է, իսկ M_i–ն λ_i–ին համապատասխան սեփական ենթատարածությունն է:

Հետևաբար (3.7.2)–ը ցույց է տալիս, որ H–ը ներկայացվում է N օպերատորի սեփական ենթատարածությունների ուղիղ գումարի տեսքով:

Սակայն $\dim H = \infty$ դեպքում N օպերատորը կարող է սեփական արժեքներ չունենալ:

Ցույց տանք, որ չնայած դրան՝ ցանկացած նորմալ օպերատոր ունի ոչ տրիվիալ (այսինքն՝ $\{0\}$–ից և H–ից տարբեր) ինվարիանտ ենթատարածություն: Մենք ցույց կտանք ավելին, որ (ոչ տրիվիալ) ինվարիանտ ենթատարածություն գոյություն ունի նաև 3.5.3 թեորեմի ապացույցում դիտարկված A նորմալ հանրահաշվի համար:

Իրոք, եթե $\mathcal{M}_A$–ն բաղկացած է մի կետից, ապա A հանրահաշիվը բաղկացած կլինի միավոր օպերատորի պատիկներից, ուստի այս դեպքում H–ի ցանկացած ենթատարածություն կլինի ինվարիանտ A–ի համար: Այժմ դիցուք $\mathcal{M}_A$–ն պարունակում է 1–ից ավելի թվով կետեր: Այդ դեպքում $\mathcal{M}_A$–ն ակնհայտորեն կարելի է ներկայացնել $\mathcal{M}_A = w \cup w'$ տեսքով, որտեղ w–ն և w'–ը ոչ դատարկ չհատվող բորելյան բազմություններ են (օրինակ, որպես w կարելի է վերցնել 1 կետից բաղկացած բազմություն): Դիցուք M–ը և M'–ը համապատասխանաբար $E(w)$ և $E(w')$ օպերատորների պատկերներն են: Քանի որ

$$TE(w) = E(w)T \quad (\forall T \in A),$$

ուստի $x \in M$ համար կունենանք

$$Tx = TE(w)x = E(w)Tx,$$

և հետևաբար՝ $Tx \in M$: Նույնը ճիշտ է նաև M'–ի համար:

Հետևաբար M–ը և M'–ը A–ի համար ինվարիանտ ենթապարածություններ են: Բացի այդ, $M' = M^{\perp}$ և

$$H = M \oplus M' : \tag{3.7.3}$$

Իրոք, $M' = M^{\perp}$ հավասարությունը բխում է

$$E(w)E(w') = E(w \cap w') = E(\emptyset) = 0,$$

$$E(w) + E(w') = E(w \cup w') = E(\mathcal{M}_A) = I$$

հավասարություններից:

w–ն և w'–ը կարելի է ընտրել այնպես, որ

$$M \neq \{0\}, \quad M' \neq \{0\} \tag{3.7.4}$$

Իրոք, քանի որ $\mathcal{M}_A$ պարածությունը պարունակում է գոնե երկու՝ φ և ψ իրարից տարբեր կետեր և քանի որ $\mathcal{M}_A$–ն հաուսդորֆյան է, ուստի φ և ψ կետերը ունեն չհատվող շրջակայքեր: Հետևաբար $\mathcal{M}_A$–ում գոյություն ունեն U և V ոչ դատարկ բաց չհատվող բազմություններ: Եթե վերցնենք $w = U$, ապա կունենանք, որ $w' = \mathcal{M}_A \setminus w \supset V$: Քանի որ w–ն բաց է, ուստի $E(w) \neq 0$: Նույն պատճառով նաև $E(V) \neq 0$, ուստի

$$E(w') = E(V) + E(w' \setminus V) \neq 0 :$$

Ապացվեց, որ
$$E(w) \neq 0, \quad E(w') \neq 0,$$
ուստի (3.7.4)–ը տեղի ունի:

(3.7.3)–ից և (3.7.4)–ից կբխի, որ նաև
$$M \neq H, \quad M' \neq H : \tag{3.7.5}$$

Այսպիսով, M–ը և M'–ը կլինեն ոչ տրիվիալ ինվարիանտ ենթատարածություններ A–ի համար:

Նմանատիպ դատողություններով կստանանք, որ $\mathcal{M}_A$ տարածության տրոհումը վերջավոր կամ հաշվելի թվով ոչ դատարկ չհատվող բորելյան բազմությունների ծնում է H տարածության վերլուծության իրար օրթոգոնալ վերջավոր կամ հաշվելի թվով ենթատարածությունների ուղիղ գումարի, ընդ որում այդ ենթատարածություններից յուրաքանչյուրը ինվարիանտ է A–ի համար:

Մինչ այժմ պարզ չէ, թե արդյոք ամեն մի $T \in BL(H)$ օպերատոր ունի ոչ տրիվիալ ինվարիանտ ենթատարածություն H անվերջ չափանի սեպարաբել հիլբերտյան տարածությունում:

§ 3.8. Նորմալ օպերատորների սեփական արժեքները

Թեորեմ 3.8.1: *Դիցուք E–ն $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունն է: Այդ դեպքում եթե $f \in C(\sigma(N))$ և $w_0 = f^{-1}(0)$, ապա*
$$\ker(f(N)) = \operatorname{Im}(E(w_0)) : \tag{3.8.1}$$

Ապացույց: Դիցուք
$$g(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in w_0, \\ 0, & \lambda \in \sigma(N) \setminus w_0 : \end{cases}$$

Այդ դեպքում $fg = 0$, և հետևաբար՝ $f(N)g(N) = 0$: Քանի որ $g(N) = E(w_0)$ (տես՝ 3.5.1 թեորեմի ապացույցը), ուստի այստեղից կբխի, որ
$$\operatorname{Im}(E(w_0)) \subset \ker(f(N)) : \tag{3.8.2}$$

Ցույց տանք, որ տեղի ունի նաև հակառակ ներդրումը: Նշանակենք $\tilde{w} = \sigma(N) \setminus w_0$: $\tilde{w}$–ը ներկայացնենք

$$\tilde{w} = \bigcup_{n=1}^{\infty} w_n \tag{3.8.3}$$

միավորման տեսքով, որտեղ w_n–երը զույգ առ զույգ չհատվող բորելյան բազմություններ են, որոնք գտնվում են w_0–ից դրական հեռավորության վրա: Դրա համար նախ նկատենք, որ

$$\tilde{w} = \sigma(N) \setminus w_0 = \sigma(N) \setminus f^{-1}(0) = f^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right),$$

և քանի որ f–ն անընդհատ է, իսկ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$–ն բաց է, ուստի այստեղից կբխի, որ $\tilde{w}$–ը բաց է $\sigma(N)$–ում: Հետևաբար

$$\rho(x, w_0) > 0 \quad (\forall x \in \tilde{w}) : \tag{3.8.4}$$

Վերցնենք

$$\begin{aligned}
& w_1 = \{x \in \tilde{w} : \ \rho(x, w_0) \geqslant 1\}, \\
& w_2 = \left\{x \in \tilde{w} : \ \frac{1}{2} \leqslant \rho(x, w_0) < 1\right\}, \\
& w_3 = \left\{x \in \tilde{w} : \ \frac{1}{3} \leqslant \rho(x, w_0) < \frac{1}{2}\right\}, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& w_n = \left\{x \in \tilde{w} : \ \frac{1}{n} \leqslant \rho(x, w_0) < \frac{1}{n-1}\right\} \quad (n \geqslant 2), \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Այդ դեպքում (3.8.4)–ից կբխի, որ (3.8.3)–ը տեղի ունի: Ակնհայտ է, որ w_n–երը զույգ առ զույգ չեն հատվում: Մնում է համոզվել, որ w_n–երը բորելյան բազմություններ են:

$\varphi(x) = \rho(x, w_0)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\sigma(N)$–ի վրա: Հետևաբար այն կլինի բորելյան ֆունկցիա: Այստեղից կբխի, որ իրական առանցքի ամեն մի բորելյան բազմության նախապատկերը $\sigma(N)$–ում բորելյան բազմություն է: Մասնավորապես,

$$\{x \in \sigma\,(N) : \ \rho\,(x,\, w_0) \geqslant 1\} = \varphi^{-1}\left([1,\, \infty)\right),$$

$$\left\{x \in \sigma(N): \frac{1}{n} \leqslant \rho(x, w_0) < \frac{1}{n-1}\right\} = \varphi^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)\right)$$
$$(n = 2, 3, \ldots)$$

բազմությունները կհանդիսանան $\sigma(N)$–ում բորելյան բազմություններ: Քանի որ $\tilde{w} \subset \sigma(N)$ ևս բորելյան է (ավելին, $\tilde{w}$–ը բաց է), ուստի

$$\omega_1 = \tilde{w} \cap \varphi^{-1}([1, \infty)),$$
$$\omega_2 = \tilde{w} \cap \varphi^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)\right) \quad (n \geqslant 2)$$

հավասարություններից կբխի, որ w_n–երը ևս $\sigma(N)$–ում բորելյան բազմություններ են:

Ակնհայտ է, որ

$$\rho(w_n, w_0) > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots): \tag{3.8.5}$$

Սահմանենք

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(\lambda)}, & \lambda \in w_n \\ 0, & \lambda \in \sigma(N) \setminus w_n: \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.8.6}$$

(3.8.5)-ի շնորհիվ
$$f(\lambda) \neq 0 \quad (\lambda \in \overline{w}_n),$$

ուստի $\dfrac{1}{f(\lambda)}$ ֆունկցիան կլինի որոշված և անընդհատ $\overline{w}_n$–ի վրա: Քանի որ $\overline{w}_n$–ը կոմպակտ է, ուստի $\dfrac{1}{f(\lambda)}$ ֆունկցիան կլինի սահմանափակ $\overline{w}_n$–ի վրա: Հետևաբար (3.8.6)-ից կբխի, որ f_n–երը սահմանափակ բորելյան ֆունկցիաներ են $\sigma(N)$–ի վրա:

Քանի որ

$$f_n(x)f(\lambda) = \chi_{w_n}(\lambda) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ուստի
$$f_n(N)f(N) = E(w_n) \quad (n = 1, 2, \ldots) : \tag{3.8.7}$$
Դիցուք $x \in \ker(f(N))$, այսինքն՝ $f(N)x = 0$: Այդ դեպքում (3.8.7)–ից կբխի, որ
$$E(w_n)x = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
և $w \mapsto E(w)x$ ֆունկցիայի σ–ադիտիվությունից կբխի, որ $E(\tilde{w})x = 0$: Բայց
$$E(\tilde{w}) + E(w_0) = E(\tilde{w} \cup w_0) = E(\sigma(N)) = I,$$
ուստի կունենանք՝
$$E(w_0)x = x :$$
Վերջինս էլ նշանակում է, որ $x \in \mathrm{Im}\,(E\,(w_0))$:

Այսպիսով, ապացուցվեց, որ
$$\ker(f(N)) \subset \mathrm{Im}(E(w_0)) : \tag{3.8.8}$$
(3.8.2)–ից և (3.8.8)–ից կբխի (3.8.1)–ը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.8.2: *Դիցուք E–ն $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունն է, $\lambda_0 \in \sigma(N)$ և $E_0 = E(\{\lambda_0\})$: Այդ դեպքում՝*
1) $\ker(N - \lambda_0 I) = \mathrm{Im}(E_0)$,
2) λ_0–ն հանդիսանում է N օպերատորի սեփական արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ $E_0 \neq 0$,
3) $\sigma(N)$ սպեկտրի ցանկացած մեկուսացված կետ հանդիսանում է N օպերատորի սեփական արժեք,
4) եթե $\sigma(N)$ բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի՝ $\sigma(N) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$, ապա $\forall x \in H$ վեկտոր միարժեքորեն ներկայացվում է
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \tag{3.8.9}$$
տեսքով, որտեղ $Nx_i = \lambda_i x_i$: Ընդ որում $x_i \perp x_j \quad (i \neq j)$:

Ապացույց: 1)–ը ապացուցելու համար նախորդ թեորեմում կվերցնենք $f(\lambda)=\lambda-\lambda_0$:
2)–ը անմիջապես բխում է 1)–ից:
3)–ը ապացուցելու համար նկատենք, որ եթե λ_0–ն $\sigma(N)$–ի մեկուսացված կետ է, ապա $\{\lambda_0\}$–ն կլինի բաց $\sigma(N)$–ում և հետևաբար՝ $E(\{\lambda_0\})\neq 0$: Ուստի 2)–ից կբխի, որ λ_0–ն N–ի սեփական արժեք է:
4) Նշանակենք $E_i=E(\{\lambda_i\})$ $(i=1,2,3,\ldots)$: $i\neq j$ դեպքում ունենք

$$E_iE_j=E(\{\lambda_i\})\,E(\{\lambda_j\})=E(\{\lambda_i\}\cap\{\lambda_j\})=E(\emptyset)=0,$$

որտեղից բխում է, որ $i\neq j$ դեպքում $\mathrm{Im}(E_i)\perp\mathrm{Im}(E_j)$: Քանի որ $w\mapsto E(w)x$ արտապատկերումը σ–ադիտիվ է, ուստի

$$\sum_{i=1}^{\infty}E_ix=\sum_{i=1}^{\infty}E(\{\lambda_i\})\,x=E(\sigma(N))x=x\quad(x\in H):$$

Նշանակենք $x_i=E_ix$: 1)–ից բխում է, որ E_i–ն λ_i սեփական արժեքին համապատասխան սեփական ենթատարածության վրա օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատորն է, ուստի $Nx_i=\lambda_ix_i$:

Այժմ ցույց տանք (3.8.9) ներկայացման միակությունը: Իրոք, դիցուք

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i,$$

որտեղ $Nx_i=\lambda_ix_i$: Այդ դեպքում կունենանք

$$E_jx=E_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}E_jx_i:$$

Քանի որ

$$E_jx_i=\begin{cases}x_j, & i=j\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

ուստի կստանանք

$$x_j=E_jx\quad(j=1,2,\ldots),$$

որտեղից էլ բխում է, որ x_j–երը միարժեքորեն որոշվում են x–ի մի–ջոցով:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 3.8.1: *Եթե $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորի սպեկ–տրը վերջավոր է կամ հաշվելի, ապա N–ի սեփական վեկտորներից կարելի է կազմել H տարածության օրթոնորմա–վորված բազիս:*

Ապացույց: Դիցուք $\sigma(N) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$: $\forall n \in \mathbb{N}$ համար $\ker(N - \lambda_n I)$–ի համար ընտրենք $\{e_{ni}\}_{i \in I_n}$ օրթոնորմավորված բազիս: Նշանակենք

$$M = \{e_{ni} : \; n \in \mathbb{N}, \; i \in I_n\} :$$

Նախորդ թեորեմի 4) կետից բխում է, որ M վեկտորական համա–կարգի գծային թաղանթն ամենուրեք խիտ է H-ում: Հետևաբար M–ը կլինի H–ի օրթոնորմավորված բազիս:
Հետևանքն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.8.3: *Որպեսզի $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորը լինի կոմպակտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հե–տևյալ երկու պայմանները՝*
ա) $\sigma(N)$–ը չունի ոչ 0–ական կուտակման կետ,
բ) եթե $\lambda \neq 0$, ապա $\dim\ker(N - \lambda I) < \infty$:

Ապացույց: Անհրաժեշտությունը կապված չէ նորմալության հետ. եթե $N \in BL(H)$ կամայական կոմպակտ օպերատոր է, ապա ա), բ) պնդումները տեղի ունեն:
Բավարարություն: ա)–ի շնորհիվ N օպերատորի $\sigma(N)$ սպեկտրի ոչ 0–ական կետերը կարելի է գրել

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

վերջավոր կամ անվերջ հաջորդականության տեսքով, ընդ որում կարելի է համարել, որ

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \cdots$$

և $\lambda_n \to 0$ (եթե սպեկտրը հաշվելի է)։ Սահմանենք

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda = \lambda_i \ \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ 0, & \lambda \in \sigma(N) \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} : \end{cases}$$

Նշանակենք $E_i = E\left(\{\lambda_i\}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots)$։ բ) պայմանից և նախորդ թեորեմի 1) կետից բխում է, որ $\dim \mathrm{Im}(E_i) < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots)$, որտեղից կբխի, որ E_i–ն կոմպակտ է։ Ունենք

$$f_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi\left\{\lambda_i\right\}(\lambda),$$

ուստի

$$f_n(N) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi\left\{\lambda_i\right\}(N) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i,$$

որտեղից կբխի, որ $f_n(N)$ օպերատորները կոմպակտ են։

Եթե $\sigma(N)$–ն անվերջ է, ապա

$$|\lambda - f_n(\lambda)| \leqslant |\lambda_{n+1}| \quad (\lambda \in \sigma(N))$$

գնահատականից կբխի, որ

$$\|N - f_n(N)\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ուստի N–ը կհանդիսանա $f_n(N)$ կոմպակտ օպերատորների հաջորդականության սահման ըստ $BL(H)$–ի նորմի և հետևաբար N–ը կլինի կոմպակտ։

Եթե $\sigma(N)$–ը վերջավոր է, ապա $\exists n \in \mathbb{N}$, որ

$$f_n(\lambda) \equiv \lambda$$

և կունենանք $f_n(N) = N$, որտեղից կբխի, որ N–ը կոմպակտ է։ Թեորեմն ապացուցված է։

Թեորեմ 3.8.4: *Դիցուք $N \in BL(H)$ կոմպակտ նորմալ օպերատոր է։ Այդ դեպքում՝*

ա) գոյություն ունի N օպերատորի այնպիսի λ սեփական արժեք, որ $|\lambda| = \|N\|$,
բ) եթե $0 \in \sigma(N)$, $f \in C(\sigma(N))$ և $f(0) = 0$, ապա $f(N)$ օպերատորը կոմպակտ է: [11]

Ապացույց: ա) Ինչպես գիտենք (տես՝ 2.7.1 թեորեմը), $\rho(N) = \|N\|$, ուստի $\exists\lambda \in \sigma(N)$, որ $|\lambda| = \|N\|$: Եթե $\|N\| > 0$, ապա ըստ 3.8.3 թեորեմի λ–ն կլինի $\sigma(N)$–ի մեկուսացված կետ, ուստի ըստ 3.8.2 թեորեմի 3) կետի՝ λ–ն կլինի N–ի սեփական արժեք (այստեղ կարելի էր չօգտվել 3.8.2 և 3.8.3 թեորեմներից, այլ օգտվել նրանից, որ կոմպակտ օպերատորի սպեկտրի ոչ 0–ական կետերը սեփական արժեքներ են): Եթե $\|N\| = 0$, ապա ա) պնդումն ակնհայտ է:
բ) Քանի որ $\sigma(N)$–ը վերջավոր է կամ հաշվելի, ուստի $\mathbb{C} \setminus \sigma(N)$ լրացումը կլինի կապակցված $\mathbb{C}$–ում: Հետևաբար, ըստ Մերգելյանի թեորեմի՝ գոյություն ունի $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ բազմանդամների հաջորդականություն, որը $\sigma(N)$–ի վրա հավասարաչափ ձգտում է f–ին: Կունենանք $g_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) = 0$, ուստի $p_n(z) = g_n(z) - g_n(0)$ հաջորդականությունը ևս $\sigma(N)$–ի վրա հավասարաչափ կձգտի f–ին, ընդ որում $p_n(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$: Ֆիքսենք $n \in \mathbb{N}$: Դիցուք

$$p_n(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z$$

($p_n(0) = 0$ պայմանից բխում է, որ ազատ անդամը 0 է): Այդ դեպքում կունենանք

$$p_n(N) = a_0 N^m + a_1 N^{m-1} + \cdots + a_{m-1} N,$$

որտեղից կբխի, որ $p_n(N)$–ը կոմպակտ է: Քանի որ $p_n(z) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} f(z)$, $z \in \sigma(N)$, ուստի

$$p_n(N) \xrightarrow[n\to\infty]{BL(H)} f(N),$$ [12]

[11] Եթե $0 \notin \sigma(N)$, ապա $\exists N^{-1} \in BL(H)$, որտեղից և N–ի կոմպակտությունից կբխի, որ $I = NN^{-1}$ միավոր օպերատորը կոմպակտ է և հետևաբար $\dim H < \infty$: Ուստի այդ դեպքում $\forall f \in C(\sigma(N))$ համար $f(N)$–ը կոմպակտ է:

[12] Նշենք, որ վերջավոր սպեկտրի դեպքում որպես $p_n(z)$ կարելի է վերցնել f-ի Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը. այդ դեպքում պարզապես կունենանք $p_n(z) = f(z)$ $(z \in \sigma(N))$, հետևաբար՝ $p_n(N) = f(N)$:

որտեղից կբխի, որ $f(N)$–ը կոմպակտ է:
Թեորեմն ապացուցված է:
Լրացում: *Եթե N–ը H անվերջ չափանի հիլբերտյան տարածությունում կոմպակտ նորմալ օպերատոր է, $f \in C(\sigma(N))$ և $f(N)$ օպերատորը կոմպակտ է, ապա $f(0) = 0$:*
Ապացույց: Քանի որ H–ը անվերջ չափանի է, և N–ը կոմպակտ է, ուստի $0 \in \sigma(N)$: $\sigma(N)$–ի վրա դիտարկենք $g(\lambda) = f(\lambda) - f(0)$ ֆունկցիան: Կունենանք $g \in C(\sigma(N))$ և $g(0) = 0$, ուստի ըստ նախորդ թեորեմի բ) կետի՝ $g(N) = f(N) - f(0)I$ օպերատորը կոմպակտ է: Քանի որ $f(N)$–ը ևս կոմպակտ է, ուստի կոմպակտ կլինի նաև

$$f(0)I = f(N) - g(N)$$

օպերատորը: Քանի որ $\dim H = \infty$, ուստի այստեղից կբխի, որ $f(0) = 0$: ►

§ 3.9. Դրական օպերատորներ և քառակուսի արմատներ

Թեորեմ 3.9.1: *Դիցուք $T \in BL(H)$: Այդ դեպքում հետևյալ երկու պայմանները իրար համարժեք են՝*
1) $(Tx, x) \geqslant 0$ $(x \in H)$,
2) $T = T^*$ և $\sigma(T) \subset [0, \infty)$:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ 1) $\Rightarrow$ 2): Քանի որ $(Tx, x) \geqslant 0$, ուստի $(Tx, x) = \overline{(Tx, x)} = (x, Tx) = (T^*x, x)$: Ստացվեց, որ

$$(Tx, x) = (T^*x, x) \quad (x \in H),$$

ուստի ըստ միակության թեորեմի (տես՝ 3.1.1 հետևանքը), կունենանք $T = T^*$:

$\sigma(T) \subset [0, \infty)$ ներդրումը ցույց տալու համար ապացուցենք, որ $\forall \lambda > 0$ թվի համար $-\lambda \notin \sigma(T)$, որտեղից կբխի (կօգտվենք 3.6.3 թեորեմի ա) կետից), որ $\sigma(T) \subset [0, \infty)$: Իրոք, $\forall x \in H$ համար 1)–ից բխում է, որ

$$\begin{aligned}\lambda \|x\|^2 = \lambda(x, x) \leqslant \lambda(x, x) + (Tx, x) = \\ = ((T + \lambda I)x, x) \leqslant \|(T + \lambda I)x\| \cdot \|x\|,\end{aligned}$$

$$\|(T+\lambda I)x\| \cdot \|x\| \geqslant \lambda \|x\|^2,$$

որը $x \neq 0$ դեպքում կրճատելով $\|x\|$–ով՝ կստանանք

$$\|(T+\lambda I)x\| \geqslant \lambda \|x\| : \tag{3.9.1}$$

Վերջինս ճիշտ է նաև $x = 0$ համար: (3.9.1)–ից բխում է, որ $-\lambda$ թիվը T օպերատորի համար ռեգուլյար փիպի կետ է, իսկ քանի որ ինքնահամալուծ օպերատորի համար ռեգուլյար փիպի կետերը համընկնում են ռեգուլյար կետերի հետ, ուստի $-\lambda$–ն կլինի T–ի ռեգուլյար կետ՝ $-\lambda \notin \sigma(T)$:

$-\lambda \notin \sigma(T)$ առնչությունը կարելի է հիմնավորել նաև հետևյալ կերպ (այդ հիմնավորումը ըստ էության կրկնում է այն փաստի ապացույցի դատողությունները, համաձայն որի ինքնահամալուծ օպերատորի համար ռեգուլյար փիպի կետերը համընկնում են կետերի հետ): Ինչպես գիտենք (տես՝ 3.1.1 լեմման),

$$[\mathrm{Im}(T+\lambda I)]^{\perp} = \ker\,(T+\lambda I)^*\,,$$

և քանի որ

$$(T+\lambda I)^* = T^* + \overline{\lambda} I = T + \lambda I,$$

ուստի

$$[\mathrm{Im}(T+\lambda I)]^{\perp} = \ker\,(T+\lambda I) :$$

Բայց (3.9.1)–ից բխում է, որ $\ker\,(T+\lambda I) = \{0\}$, ուստի կունենանք $[\mathrm{Im}(T+\lambda I)]^{\perp} = \{0\}$ և հետևաբար՝

$$\overline{\mathrm{Im}(T+\lambda I)} = H : \tag{3.9.2}$$

Ցույց տանք, որ

$$\mathrm{Im}(T+\lambda I) = H : \tag{3.9.3}$$

Դրա համար, շնորհիվ (3.9.2)–ի, բավական է ցույց տալ, որ $\mathrm{Im}(T+\lambda I)$–ն փակ է՝

$$\overline{\mathrm{Im}(T+\lambda I)} \subset \mathrm{Im}(T+\lambda I) : \tag{3.9.4}$$

Վերցնենք $\forall y \in \overline{\mathrm{Im}(T+\lambda I)}$: Այդ դեպքում $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականություն, որ

$$\mathrm{Im}(T+\lambda I)x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y : \tag{3.9.5}$$

(3.9.1)–ից կբխի, որ

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\,\|(T+\lambda I)x_n - (T+\lambda I)x_m\|\,,$$

որտեղից բխում է, որ x_n–ը ֆունդամենտալ է: Քանի որ H–ը լրիվ է, ուստի

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x : \tag{3.9.6}$$

(3.9.5)–ից և (3.9.6)–ից և $T+\lambda I$ օպերատորի անընդհատությունից (կամ՝ փակությունից) կբխի, որ

$$y = \lim_{n\to\infty}(T+\lambda I)x_n = (T+\lambda I)x,$$

և հետևաբար $y \in \mathrm{Im}(T+\lambda I)$:

(3.9.1)–ից և (3.9.3)–ից բխում է, որ $\exists (T+\lambda I)^{-1} \in BL(H)$, ուստի $-\lambda \notin \sigma(T)$:

Այժմ ցույց տանք, որ 2) $\Rightarrow$ 1):

Դիցուք E–ն T օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունն է: Այդ դեպքում

$$(Tx,x) = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda\, dE_{x,x}(\lambda) \quad (x\in H) : \tag{3.9.7}$$

Քանի որ $E_{x,x}$ չափերից յուրաքանչյուրը դրական է և $\lambda \in \sigma(T)$ համար $\lambda \geqslant 0$, ուստի (3.9.7)–ից կբխի, որ

$$(Tx,x) \geqslant 0 \quad (x\in H) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.9.2: *$\forall T \in BL(H)$ ոչ բացասական օպերատորի համար գոյություն ունի միակ $S \in BL(H)$ ոչ բացասական օպերատոր, որ $S^2 = T$: Ընդ որում, եթե T–ն հակադարձելի է, ապա հակադարձելի է նաև S–ը:* [13]

[13] Հակադարձելիությունը կարելի է հասկանալ թե՛ սովորական իմաստով, թե՛ $BL(H)$–ի իմաստով:

Ապացույց: Դիցուք $A \subset BL(H)$ որևէ փակ նորմալ ենթահանրահաշիվ է, որը պարունակում է I–ն և T–ն: Ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի 2.3.5 թեորեմի՝ $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$: Քանի որ $T \geqslant 0$, ուստի (ըստ նախորդ թեորեմի) $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ և քանի որ $\sigma(T) = \hat{T}(\mathcal{M}_A)$, ուստի $\hat{T} \geqslant 0$: Բայց ցանկացած ոչ բացասական անընդհատ ֆունկցիա ունի միակ ոչ բացասական անընդհատ արմատ: Հետևաբար գոյություն ունի միակ $S \in A$, որ $S^2 = T$ և $\hat{S} \geqslant 0$: Իսկ $\hat{S} \geqslant 0$ պայմանը համարժեք է $S \geqslant 0$ պայմանին:

Այժմ դիցուք A_0–ն դիտարկված A հանրահաշիվներից փոքրագույնն է. A_0–ն իրենից կներկայացնի T–ից բազմանդամների դասի փակումը: Այդ դեպքում ըստ վերն ասվածի, $\exists S_0 \in A_0$, որ $S_0^2 = T$ և $S_0 \geqslant 0$: Դիցուք $S \in BL(H)$ ևս այնպիսին է, որ $S^2 = T$ և $S \geqslant 0$: Ցույց տանք, որ $S = S_0$: A–ով նշանակենք I–ով և S–ով ծնված մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվը: Քանի որ $T = S^2$, ուստի $T \in A$: Հետևաբար $A_0 \subset A$, ուստի և $S_0 \in A$: Բայց A–ն նորմալ ենթահանրահաշիվ է, ուստի՝ ըստ վերն ասվածի T–ն A–ում ունի միակ ոչ բացասական արմատ: Հետևաբար $S = S_0$:

Այժմ դիցուք T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում S–ը ևս կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում, ընդ որում

$$S^{-1} = T^{-1}S :$$

Քանի որ $T^{-1}S \in BL(H)$, ուստի մնում է նկատել, որ

$$\left(T^{-1}S\right) S = ST^{-1}S = I :$$

Քանի որ $TS = TS$, ուստի $T^{-1}S = ST^{-1}$ և հետևաբար

$$ST^{-1}S = T^{-1}S^2 = T^{-1}T = I :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.9.3: *$\forall T \in BL(H)$ համար գոյություն ունի միակ $P \in BL(H)$ ոչ բացասական օպերատոր, որ*

$$\|Px\| = \|Tx\| \quad (x \in H) :$$

Այդ օպերատորը T^*T–ի ոչ բացասական քառակուսի արմատն է:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geqslant 0 \quad (x \in H), \tag{3.9.8}$$

ուստի $T^*T \geqslant 0$:

Եթե $P \in BL(H)$ և $P = P^*$, ապա

$$\left(P^2x, x\right) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \quad (x \in H): \tag{3.9.9}$$

(3.9.8)–ից և (3.9.9)–ից բխում է, որ $\|Px\| = \|Tx\|$ $(x \in H)$ հավասարությունը համարժեք է

$$\left(P^2x, x\right) = (T^*Tx, x) \quad (x \in H)$$

հավասարությանը, որն էլ, ըստ միակության թեորեմի, համարժեք է $P^2 = T^*T$ հավասարությանը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Այն փաստը, որ $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ թիվ ներկայացվում է $\lambda = \alpha|\lambda|$ տեսքով, որտեղ $|\alpha| = 1$, բերում է $T \in BL(H)$ օպերատորը $T = UP$ տեսքով ներկայացնելու խնդրին, որտեղ U–ն ունիտար օպերատոր է և $P \geqslant 0$: Եթե այդպիսի ֆակտորիզացիան հնարավոր է, ապա մենք UP–ն կանվանենք T օպերատորի բևեռային ներկայացում:

Քանի որ ունիտար օպերատորը իզոմետրիկ է, ուստի բևեռային ներկայացման մեջ P արտադրիչը, ինչպես ցույց է տալիս 3.9.3 թեորեմը, միարժեքորեն որոշվում է T–ի միջոցով:

Թեորեմ 3.9.4: *Դիցուք $T \in BL(H)$: Այդ դեպքում՝*
ա) եթե T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում, ապա այն ունի միակ $T = UP$ բևեռային ներկայացում,
բ) եթե T–ն նորմալ է, ապա այն ունի այնպիսի $T = UP$ բևեռային ներկայացում, որտեղ U, P, T օպերատորները տեղափոխելի են մեկը մյուսի հետ:

Ապացույց: ա) Եթե T–ն $BL(H)$–ում հակադարձելի է, ապա $BL(H)$–ում հակադարձելի կլինեն նաև T^* և T^*T օպերատորները, ուստի ըստ 3.9.2 թեորեմի՝ T^*T օպերատորի P ոչ բացասական քառակուսի արմատը ևս կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում: Վերցնենք

$U = TP^{-1}$: Այդ դեպքում U–ն կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում և կունենանք

$$U^*U = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I,$$

ուստի U–ն ունիտար օպերատոր է և $T = UP$: Քանի որ P–ն հակադարձելի է, ուստի $T = UP$ ներկայացումը միակն է (եթե $T = UP$, ապա $U = TP^{-1}$):

բ) Նշանակենք

$$p(\lambda) = |\lambda|,$$

$$u(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|\lambda|}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0 : \end{cases}$$

Այդ դեպքում $p(\lambda)$, $u(\lambda)$–ն կլինեն $\sigma(T)$–ի վրա սահմանափակ բորելյան ֆունկցիաներ: Դիցուք $P = p(T)$ և $U = u(T)$: Քանի որ $p \geqslant 0$, ուստի $P \geqslant 0$: Քանի որ $u\overline{u} = \overline{u}u = 1$, ուստի $UU^* = U^*U = I$: Քանի որ $\lambda = u(\lambda)p(\lambda)$, ուստի $T = UP$:

T, U, P օպերատորների տեղափոխելիությունը բխում է λ, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$ ֆունկցիաների տեղափոխելիությունից:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.9.1: Կամայական $T \in BL(H)$ օպերատոր պարտավոր չէ ունենալ բևեռային ներկայացում: Վարը մենք կբերենք օպերատորի օրինակ, որը չունի բևեռային ներկայացում: Սակայն եթե P–ն T^*T–ից ոչ բացասական քառակուսի արմատ է, ապա

$$\|Px\| = \|Tx\| \quad (x \in H),$$

և

$$VPx = Tx$$

բանաձևով որոշվում է V իզոմետրիա $\mathrm{Im}(P)$–ից $\mathrm{Im}(T)$–ի վրա՝

$$\|Vy\| = \|y\| \quad (y \in \mathrm{Im}(P)) :$$

V–ն անընդհատորեն միակ ձևով շարունակվում է $\overline{\mathrm{Im}(P)}$–ի վրա և արդյունքում կստանանք իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $\overline{\mathrm{Im}(P)}$–ի և $\overline{\mathrm{Im}(T)}$–ի միջև: Եթե նաև գոյություն ունի V_1 իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $[\mathrm{Im}(P)]^{\perp}$ և $[\mathrm{Im}(T)]^{\perp}$ ենթապարածությունների միջև, ապա $z = x + y$ $(x \in \overline{\mathrm{Im}(P)},\ y \in [\mathrm{Im}(P)]^{\perp})$ համար սահմանելով

$$Uz = Vx + V_1 y,$$

կստանանք, որ U-ն V-ի շարունակություն է և U–ն ունիտար է, ընդ որում

$$T = UP,$$

այսինքն T–ն թույլ է փալիս բևեռային ներկայացում: Այդպիսի V_1 օպերատոր գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\dim[\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = \dim[\mathrm{Im}(T)]^{\perp}: \tag{3.9.10}$$

Սակայն, չնայած, որ $\overline{\mathrm{Im}(P)}$ և $\overline{\mathrm{Im}(T)}$ ենթապարածությունների իզոմորֆ–իզոմետրիկ լինելու պատճառով

$$\dim \overline{\mathrm{Im}(P)} = \dim \overline{\mathrm{Im}(T)}, \tag{3.9.11}$$

կարող է պատահել, որ (3.9.10)–ը տեղի չունենա:

Նկատենք, որ $\dim H < \infty$ դեպքում

$$\overline{\mathrm{Im}(P)} \oplus [\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = H$$

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} \oplus [\mathrm{Im}(T)]^{\perp} = H$$

առնչություններից կբխի, որ

$$\dim[\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = \dim H - \dim \overline{\mathrm{Im}(P)},$$

$$\dim[\mathrm{Im}(T)]^{\perp} = \dim H - \dim \overline{\mathrm{Im}(T)},$$

որտեղից և (3.9.11)–ից կբխի (3.9.10)–ը: Հետևաբար $\dim H < \infty$ դեպքում $\forall T \in BL(H)$ օպերատոր թույլ է փալիս բևեռային ներկա–յացում:

Սակայն ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ $\dim H < \infty$: (3.9.10)–ը տեղի կունենա, մասնավորապես, այն դեպքում, երբ

$$[\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp}: \tag{3.9.12}$$

Համոզվենք, որ (3.9.12)–ը համարժեք է

$$\ker(T^*T) = \ker(TT^*) \tag{3.9.13}$$

հավասարությանը: Դրա համար նկատենք, որ հետևյալ առնչու– թյուններից յուրաքանչյուրը համարժեք է իր հաջորդին (նախորդին).

$$y \in [\mathrm{Im}(P)]^{\perp},$$

$$(Px, y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$(x, Py) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$Py = 0, \tag{3.9.14}$$

$$Ty = 0, \tag{3.9.15}$$

$$T^*Ty = 0,$$ [14]

և, մյուս կողմից, հետևյալ առնչություններից յուրաքանչյուրը հա– մարժեք է իր հաջորդին (նախորդին).

$$y \in [\mathrm{Im}(T)]^{\perp},$$

$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$(x, T^*y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$T^*y = 0,$$

$$TT^*y = 0:$$

Մասնավորապես, եթե T օպերատորը նորմալ է, ապա (3.9.13)-ը տեղի ունի:

Վերադառնալով ընդհանուր դեպքին՝ նկատենք, որ եթե սահմա– նենք

$$Vy = 0 \quad \left(y \in [\mathrm{Im}(T)]^{\perp}\right)$$

[14] (3.9.14)–ի և (3.9.15)–ի համարժեքությունը բխում է $\|Py\| = \|Ty\|$ հավասարությունից:

և V–ն շարունակենք ամբողջ H–ի վրա, ապա կստանանք

$$T = VP$$

ներկայացում: Այստեղ V–ն ունիտար չէ, այլ այսպես կոչված՝ մասնակի իզոմետրիկ օպերատոր է: Այսպիսով, ապացվեց, որ $\forall T \in BL(H)$ օպերատոր թույլ է տալիս $T = VP$ ֆակտորիզացիա, որտեղ P–ն ոչ բացասական օպերատոր է, իսկ V–ն մասնակի իզոմետրիկ օպերատոր է:

Այժմ բերենք սահմանափակ օպերատորների օրինակներ, որոնք թույլ չեն տալիս բևեռային ներկայացում: Դիցուք $H = \ell^2$, որտեղ $\ell^2 = L^2(\mathbb{Z}_+)$: Սահմանենք

$$(S_R f)(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n \geqslant 1, \end{cases}$$

$$(S_L f)(n) = f(n+1) \quad (n \geqslant 0) :$$

Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ

$$S_R^* = S_L, \quad S_L^* = S_R :$$

Հեշտ է նաև տեսնել, որ

$$(S_R S_L f)(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ f(n), & n \geqslant 1 \end{cases} ; \tag{3.9.16}$$

$$S_L S_R = I : \tag{3.9.17}$$

Նշանակենք

$$P_1 = S_R S_L, \quad P_2 = S_L S_R = I :$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$P_1^2 = S_L^* S_L, \quad P_2^2 = S_R^* S_R :$$

Ցույց տանք, որ S_L և S_R օպերատորները թույլ չեն տալիս բևեռային ներկայացում: Իրոք, եթե ենթադրենք, թե S_L–ը թույլ է տալիս

$$S_L = UP$$

բևեռային ներկայացում, որտեղ U–ն ունիտար է և $P \geqslant 0$, ապա կունենանք
$$\|S_L x\| = \|Px\| \quad (x \in H),$$
և 3.9.3 թեորեմից կբխի, որ $P = P_1$: Ուստի կունենանք
$$S_L = U S_L^* S_L,$$
$$S_L f = U S_L^* S_L f \quad \left(\forall f \in \ell^2\right),$$
և քանի որ $S_L(\ell^2) = \ell^2$, ուստի կստանանք, որ
$$U S_L^* = I,$$
$$S_L^* = U^{-1} = U^*,$$
$$S_L = U,$$
ինչը ցույց է տալիս, որ S_L–ն ունիտար է, իսկ դա հակասում է (3.9.16)–ին:

Այժմ ենթադրենք, թե S_R–ն է թույլ տալիս
$$S_R = UP$$
բևեռային ներկայացում, որտեղ U–ն ունիտար է և $P \geqslant 0$: Այդ դեպքում նորից կունենանք $P = P_2$, ուստի
$$S_R = U :$$
Ստացվեց, որ S_R–ը ունիտար է, ինչը հակասում է (3.9.16)–ին: ▶

Թեորեմ 3.9.5: *Դիցուք $M, N, T \in BL(H)$, ընդ որում M–ը և N–ը նորմալ են, իսկ T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Դիցուք*
$$M = TNT^{-1} : \tag{3.9.18}$$
Այդ դեպքում եթե $T = UP$–ն T օպերատորի բևեռային ներկա–յացումն է, ապա
$$M = UNU^{-1} : \tag{3.9.19}$$

Ապացույց: (3.9.18) պայմանը կարելի է գրել $MT = TN$ տեսքով: Այստեղից և Ֆուգլիդ–Պուտնամ–Ռոզենբլյումի թեորեմից բխում է, որ $M^*T = TN^*$: Հետևաբար

$$T^*M = (M^*T)^* = (TN^*)^* = NT^*,$$

ուստի, քանի որ $P^2 = T^*T$, կունենանք

$$NP^2 = NT^*T = T^*MT = T^*TN = P^2N :$$

Այստեղից կբխի, որ $\forall f \in C\left(\sigma\left(P^2\right)\right)$ համար N–ը տեղափոխելի է $f\left(P^2\right)$–ու հետ: Քանի որ $P^2 \geqslant 0$, ուստի $\sigma\left(P^2\right) \subset [0, \infty)$: Վերցնենք $f(\lambda) = \sqrt{\lambda} \geqslant 0$ $\left(\lambda \in \sigma\left(P^2\right)\right)$, այդ դեպքում կունենանք $f^2(\lambda) = \lambda$ և հետևաբար $f^2\left(P^2\right) = P^2$: Քանի որ P^2–ու ոչ բացասական քառակուսի արմատը միակն է, ուստի $f\left(P^2\right) = P$: Հետևաբար $Nf\left(P^2\right) = f\left(P^2\right)N$ հավասարությունից կբխի, որ $NP = PN$: Ուստի (3.9.18)–ից կբխի, որ

$$M = (UP)N(UP)^{-1} = UPNP^{-1}U^{-1} = \\ = UNPP^{-1}U^{-1} = UNU^{-1} :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.9.2: (3.9.18) առնչությամբ կապված M և N օպե–րատորները կոչվում են նման: Եթե U–ն ունիտար օպերատոր է և տեղի ունի (3.9.19)–ը, ապա M և N օպերատորները կոչվում են ունիտար համարժեք (իզոմորֆ): Այսպիսով, նախորդ թեորեմը ցույց է տալիս, որ եթե նորմալ օպերատորներն իրար նման են, ապա դրանք ունիտար համարժեք են: ▶

§ 3.10. Հակադարձելի օպերատորների խումբը

Թեորեմ 3.10.1: *Բոլոր $T \in BL(H)$ հակադարձելի ($BL(H)$–ում) օպերատորների $G = [BL(H)]^{-1}$ խումբը կապակցված է, և յուրաքանչյուր $T \in G$ օպերատոր ներկայացվում է երկու էքս–պոնենտների արտադրյալի տեսքով:*

(Էքսպոնենտի տակ, հասկանալի է, նկատի ունենք $\exp(S)$ *տեսքի օպերատոր, որտեղ $S \in BL(H)$):*

Ապացույց: Դիցուք $T \in G$ և $T = UP$–ն նրա բևեռային ներ–կայացումն է: Այստեղ U–ն ունիտար է, իսկ $P \geqslant 0$, ընդ որում P–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Հետևաբար $\sigma(P) \subset (0, \infty)$, ուստի $\sigma(P)$–ի վրա կարող ենք դիտարկել $\varphi(\lambda) = \ln \lambda$ ֆունկցիան: Կունենանք

$$\exp(\varphi(\lambda)) = \lambda \quad (\lambda \in \sigma(P)),$$

ուստի նշանակելով $S = \varphi(P)$, կստանանք

$$\exp(S) = P :$$

Քանի որ U–ն ունիտար է, ուստի $\sigma(U)$–ն ընկած է միավոր շրջանա–գծի վրա: Հետևաբար գոյություն ունի $f : \sigma(U) \to \mathbb{R}$ սահմանափակ բորելյան ֆունկցիա, որ

$$\exp\{i\, f(\lambda)\} = \lambda \quad (\lambda \in \sigma(U)) :$$

Իսկապես, որպես $f(\lambda)$ կարելի է վերցնել արգումենտի գլխավոր արժեքը (նկատենք, որ նշված հատկություններով օժտված f անընդհատ ֆունկցիա կարող է գոյություն չունենալ): Նշանակենք $Q = f(U)$: Այդ դեպքում $Q \in BL(H)$ ինքնահամալուծ օպերատոր է և $U = \exp(iQ)$: Հետևաբար՝

$$T = UP = \exp(iQ)\exp(S) :$$

Այստեղից բխում է, որ G խումբը կապակցված է: Իրոք, $r \in [0, 1]$ համար սահմանենք

$$T_r = \exp(irQ)\exp(rS) :$$

Այդ դեպքում $r \mapsto T_r$ կլինի անընդհատ արտապատկերում $[0, 1]$–ից G–ի մեջ, ընդ որում $T_0 = I$ և $T_1 = T$: Ստացվեց, որ G–ի ցանկացած T էլեմենտ կարելի է G–ին պատկանող անընդհատ կորով միացնել I միավոր օպերատորին: Այստեղից կբխի, որ G–ի ցանկացած երկու էլեմենտներ կարելի է միացնել իրար ամբողջությամբ G–ին պատկանող անընդհատ կորով: Հետևաբար G–ն կապակցված է: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.10.1: 1.15.5 թեորեմից բխում է, որ եթե A–ն վերջավոր չափանի բանախյան հանրահաշիվ է, ապա $\forall a \in A^{-1}$ էլեմենտ ներկայացվում է $a = \exp(b)$ տեսքով, որտեղ $b \in A$ ինչ–որ էլեմենտ է: Ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ $T \in G$ օպերատորը հանդիսանա էքսպոնենտ: Հարկ է նշել, որ ամեն մի էքսպոնենտ օժտված է քառակուսի արմատով. $\exp(S)$ օպերատորի համար $\exp\left(\frac{1}{2}S\right)$ օպերատորը հանդիսանում է քառակուսի արմատ: Վարը մենք կտեսնենք, որ պարտադիր չէ $T \in G$ օպերատորն ունենա քառակուսի արմատ:

Թեորեմ 3.10.2: *Դիցուք $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ այնպիսի բաց սահմանափակ բազմություն է, որ*

$$\Omega = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha^2 \in \mathcal{D}\right\} \tag{3.10.1}$$

բազմությունը կապակցված է և $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$: Դիցուք H–ը այն բոլոր $f \in H(\mathcal{D})$ ֆունկցիաների տարածությունն է, որոնց համար

$$\int\limits_{\mathcal{D}} |f|^2 dm_2 < \infty \tag{3.10.2}$$

(որտեղ m_2–ը $\mathbb{R}^2$–ում Լեբեգի չափն է): H–ում սկալյար արտադրյալը սահմանենք

$$(f, g) = \int\limits_{\mathcal{D}} f\overline{g}\, dm_2 \tag{3.10.3}$$

բանաձևով: Այդ դեպքում H–ը հիլբերտյան տարածություն է: $M \in BL(H)$ բազմապատկման օպերատորը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$(Mf)(z) = zf(z) \quad (f \in H,\ z \in \mathcal{D}) :$$

Այդ դեպքում M–ը հակադարձելի է $BL(H)$–ում, բայց չունի քառակուսի արմատ:

Ապացույց: Պարզ է, որ (3.10.3)–ը սկալյար արտադրյալ է H–ի վրա և H–ը $L^2(\mathcal{D})$–ի ենթապարածություն է: Դիցուք $z \in \mathcal{D}$ կամայական կետ է: $\Delta_{z_0} = D\left(z_0; \varepsilon_{z_0}\right)$ ընտրենք այնքան փոքր, որ $\overline{D}\left(z_0; 2\varepsilon_{z_0}\right) \subset \mathcal{D}$: Ըստ միջին արժեքի թեորեմի՝ $\forall f \in H$ համար

$$f(z) = \frac{1}{\pi\varepsilon_z^2} \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} f(t)\, dm_2 \quad (z \in D(z, \varepsilon_z)),$$

հետևաբար

$$|f(z)|^2 = \frac{1}{(\pi\varepsilon_z^2)^2} \left| \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} f(t)\, dm_2 \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\pi\varepsilon_z^2)^2} \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} 1^2 dm_2 \cdot \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} |f(t)|^2 dm_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon_z^2} \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} |f|^2 dm_2 \leqslant \frac{\|f\|^2}{\pi\varepsilon_z^2},$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{\|f\|}{\sqrt{\pi}\, \varepsilon_{z_0}} \quad \left(z \in \overline{D}\left(z_0, \varepsilon_{z_0}\right),\ f \in H\right): \tag{3.10.4}$$

Այժմ դիցուք $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է H–ում: (3.10.4)–ից կբխի, որ կամայական $z_o \in \mathcal{D}$ կետի համար

$$\sup_{z \in \overline{\Delta}_{z_0}} |f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{\|f_n - f_m\|}{\sqrt{\pi}\, \varepsilon_{z_0}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

ինչը ցույց է տալիս, որ $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը z_0 կետի Δ_{z_0} շրջակայքում (և Δ_{z_0}–ի փակման վրա) հավասարաչափ զուգամետ է: Ապացուցվեց, որ $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը $\mathcal{D}$–ի յուրաքանչյուր կետի շրջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է, ուստի այն հավասարաչափ զուգամետ կլինի $\mathcal{D}$–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա: Հետևաբար, ըստ Վայերշտրասի թեորեմի,

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad (z \in \mathcal{D}) \tag{3.10.5}$$

սահմանային ֆունկցիան պատկանում է $H(\mathcal{D})$–ին:

Մյուս կողմից, H–ում $\{f_n\}$ հաջորդականության ֆունդամենտա–լությունից բխում է, որ $\{f_n\}$–ը ֆունդամենտալ է նաև $L^2(\mathcal{D})$–ում, ուստի $\exists\varphi \in L^2(\mathcal{D})$, որ

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\mathcal{D})} \varphi : \tag{3.10.6}$$

(3.10.5)–ից և (3.10.6)–ից կբխի, որ $f = \varphi$ h.ա. $\mathcal{D}$–ում (չէ՞ որ L^2 նորմով զուգամետ յուրաքանչյուր $\{f_n\}$ հաջորդականություն պա–րունակում է համարյա ամենուրեք զուգամետ ենթահաջորդականու–թյուն, որի f սահմանային ֆունկցիան հանդիսանում է միաժամա–նակ $\{f_n\}$–ի սահմանը L^2 նորմով): Հետևաբար $f \in L^2(\mathcal{D})$ և

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\mathcal{D})} f : \tag{3.10.7}$$

Ստացվեց, որ $f \in H(\mathcal{D}) \cap L^2(\mathcal{D}) = H$, և (3.10.7)–ից կբխի, որ $f_n \xrightarrow{H} f$: Սրանով իսկ H–ի լրիվությունն ապացուցվեց:

Քանի որ $\mathcal{D}$–ն սահմանափակ է, ուստի $M \in BL(H)$: Բացի այդ, $\frac{1}{z}$ ֆունկցիան սահմանափակ է $\mathcal{D}$–ում, ուստի M–ի

$$\left(M^{-1}f\right)(z) = \frac{1}{z}f(z) \quad (f \in H)$$

հակադարձը կլինի $BL(H)$–ից:

Ցույց տանք, որ $\nexists Q \in BL(H)$, որ $Q^2 = M$: Ենթադրենք հակառակը: Ընտրենք որևէ $\alpha \in \Omega$ և նշանակենք $\lambda = \alpha^2$: Այդ դեպքում $\lambda \in \mathcal{D}$: Նշանակենք

$$M_\lambda = M - \lambda I, \quad S = Q - \alpha I, \quad T = Q + \alpha I : \tag{3.10.8}$$

Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ

$$ST = M_\lambda = TS : \tag{3.10.9}$$

Քանի որ մենք գործ ունենք հոլոմորֆ ֆունկցիաների հետ,

$$(M_\lambda g)(z) = (z-\lambda)g(z) \quad (z \in \mathcal{D},\ g \in H) \tag{3.10.10}$$

բանաձևը ցույց է տալիս, որ M_λ օպերատորը ինեկտիվ է և

$$\mathrm{Im}(M_\lambda) = \{f \in H : \ f(\lambda) = 0\} : \qquad (3.10.11)$$

Վերը մենք տեսանք, որ $f_n \xrightarrow{H} F$ նշանակում է, որ $f_n \xrightarrow{L^2} F$ և $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $\mathcal{D}$–ի ներսում: Ուստի (3.10.11)–ից կբխի, որ $\mathrm{Im}(M_\lambda)$–ն H–ում փակ ենթատարածություն է: Նկատենք նաև, որ $\mathrm{Im}(M_\lambda)$–ի կոչափը հավասար է 1–ի՝

$$\dim_{\mathrm{Im}(M_\lambda)} H = \dim H / \mathrm{Im}(M_\lambda) = \dim[\mathrm{Im}(M_\lambda)]^\perp = 1 : \ (3.10.12)$$

Իրոք, $\forall f \in H$ կարելի է գրել

$$f = f_1 + f_2$$

տեսքով, որտեղ $f_1 \in \mathrm{Im}(M_\lambda)$, $f_2 = const$ (կվերցնենք $f_1(z) = f(z) - f(\lambda)$, $f_2(z) = f(\lambda)$, $\forall z \in \mathcal{D}$):

M_λ–ի ինեկտիվությունից և (3.10.9)–ի առաջին հավասարությունից բխում է, որ T–ն ևս ինեկտիվ է, իսկ (3.10.9)–ի երկրորդ հավասարությունից բխում է, որ S–ը ևս ինեկտիվ է: Ունենք $\mathrm{Im}(M_\lambda) \neq H$ (չէ՞ որ $f(x) \equiv 1$ ֆունկցիան H–ից է և չի պատկանում $\mathrm{Im}(M_\lambda)$–ին), ուստի M_λ–ն $BL(H)$–ում հակադարձելի չէ: Այստեղից և (3.10.9)–ից կբխի, որ S և T օպերատորներից գոնե մեկը հակադարձելի չէ $BL(H)$–ում:

Ցույց տանք, որ S, T օպերատորներից ճիշտ մեկը հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Այդ նպատակով ենթադրենք, թե S–ը հակադարձելի չէ $BL(H)$–ում և ցույց տանք, որ այդ դեպքում T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Նախ նկատենք, որ $\mathrm{Im}\,(S)$-ը փակ է: Իրոք, եթե $f_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ և $Sf_n \xrightarrow{H} g$, ապա (3.10.9)-ի շնորհիվ $M_\lambda f_n = T\,(Sf_n) \to Tg$, որտեղից և $\mathrm{Im}\,(M_\lambda)$-ի փակությունից կբխի, որ գոյություն ունի այնպիսի $f \in H$ ֆունկցիա, որ

$$M_\lambda f = Tg : \qquad (3.10.13)$$

(3.10.9), (3.10.13)-ից կունենանք $TSf = Tg$, որտեղից և T-ի ինեկտիվությունից կբխի, որ $g = Sf \in \mathrm{Im}\,(S)$: Քանի որ S–ը ինեկտիվ է և հակադարձելի չէ, ուստի $\mathrm{Im}(S) \neq H$. հակառակ դեպքում, ըստ հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմի, S–ը կլիներ հակադարձելի: Հետևաբար

$$\dim\left[\mathrm{Im}\,(S)\right]^{\perp} \geqslant 1\,: \tag{3.10.14}$$

$M_\lambda = ST$ հավասարությունից բխում է, որ $\mathrm{Im}(M_\lambda) \subset \mathrm{Im}(S)$, ուստի $\left[\mathrm{Im}\,(S)\right]^{\perp} \subset \left[\mathrm{Im}\,(M_\lambda)\right]^{\perp}$, որտեղից և (3.10.12), (3.10.14)–ից կբխի, որ $\left[\mathrm{Im}\,(S)\right]^{\perp} = \left[\mathrm{Im}\,(M_\lambda)\right]^{\perp}$: Հետևաբար $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(M_\lambda)$: Ստացվածը ցույց է տալիս, որ S–ը H–ը փոխմիարժեք արտապատկերում է $\mathrm{Im}(M_\lambda)$–ի վրա: Բայց մյուս կողմից $M_\lambda = ST$ հավասարությունը ցույց է տալիս, որ S–ը $\mathrm{Im}(T)$–ն է փոխմիարժեք արտապատկերում $\mathrm{Im}(M_\lambda)$–ի վրա: Հետևաբար՝ $\mathrm{Im}(T) = H$, որտեղից, T–ի ինեկտիվությունից և հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմից բխում է, որ T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում:

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ $\forall \alpha \in \Omega$ համար $Q - \alpha I$ և $Q + \alpha I$ օպերատորներից ճիշտ մեկը հակադարձելի է: Նկատենք, որ $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ պայմանի շնորհիվ կունենանք, որ $0 \notin \overline{\Omega}$: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\sigma(Q) \cap \Omega \neq \Omega\,: \tag{3.10.15}$$

Իրոք, եթե $\alpha \in \sigma(Q) \cap \Omega$, ապա $Q - \alpha I$ օպերատորը $BL(H)$–ում հակադարձելի չէ, ուստի $Q + \alpha I$ օպերատորը կլինի $BL(H)$–ում հակադարձելի և հետևաբար $-\alpha \notin \sigma(Q)$, մինչդեռ $-\alpha$–ն ակնհայտորեն պատկանում է Ω–ին:

Քանի որ Ω–ն հանդիսանում է $\alpha \mapsto \alpha^2$ անընդհատ արտապատկերման դեպքում $\mathcal{D}$ բաց բազմության նախապատկերը, ուստի Ω–ն բաց է: Ցույց տանք, որ $\sigma(Q) \cap \Omega$–ն բաց է Ω–ում: Դրա համար վերցնենք $\forall \alpha \in \sigma(Q) \cap \Omega$ և ցույց տանք, որ $\exists\,\varepsilon > 0$, այնպես, որ $D(\alpha, \varepsilon) \subset \sigma(Q) \cap \Omega$: Իրոք, $\alpha \in \sigma(Q)$ նշանակում է, որ $Q - \alpha I$ օպերատորը $BL(H)$–ում հակադարձելի չէ: Հետևաբար $Q + \alpha I$ օպերատորը կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում՝ $Q + \alpha I \in G$: Քանի որ G–ն բաց է, ուստի $\exists\,\varepsilon > 0$, որ $\lambda \in D(\alpha, \varepsilon)$ համար $Q + \lambda I \in G$: Քանի որ Ω–ն բաց է և $\alpha \in \Omega$, ուստի ε–ը կարելի է ընտրել այնքան փոքր, որ

$$D(\alpha, \varepsilon) \subset \Omega\,: \tag{3.10.16}$$

Այդ դեպքում $\lambda \in D(\alpha,\varepsilon)$ համար $Q-\lambda I$ օպերատորը չի լինի հակադարձելի (չէ՞ որ այդպիսի λ–ները Ω–ից են և նրանց համար $Q+\lambda I \in G$), ինչը նշանակում է, որ $D(\alpha,\varepsilon)\subset\sigma(Q)$: Այստեղից և (3.10.16)–ից էլ կբխի, որ

$$D(\alpha,\varepsilon)\subset\sigma(Q)\cap\Omega\,:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\sigma(Q)$–ն կոմպակտ է, ուստի $\sigma(Q)\cap\Omega$–ն կլինի նաև փակ Ω–ում: Այստեղից և Ω–ի կապակցվածությունից կբխի, որ $\sigma(Q)\cap\Omega=\emptyset$ կամ $\sigma(Q)\cap\Omega=\Omega$: Ստացվածից և (3.10.15)–ից կբխի, որ $\sigma(Q)\cap\Omega=\emptyset$, ինչը հակասում է այն բանին, որ $\forall\alpha\in\Omega$ համար $Q\pm\alpha I$ օպերատորներից մեկը հակադարձելի չէ $BL(H)$–ում կամ որ նույնն է՝ $\pm\alpha$ թվերից մեկը պատկանում է $\sigma(Q)$–ին:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.10.2: Ինչպես ապացույցից պեսանք, H–ի լրիվու– թյան վերաբերյալ պնդումը ճիշտ է $\forall\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ բաց բազմության համար: ►

Գլուխ 4
B^*- ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 4.1. Քառակուսի արմատներ

Թեորեմ 4.1.1: *Դիցուք A–ն ինվոլյուցիվ բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$, $x = x^*$ և $\sigma(x) \subset (0, \infty)$: Այդ դեպքում $\exists y \in A$, որ $y = y^*$ և $y^2 = x$:*

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ A–ն կոմուտատիվ հանրահաշիվ է: Իրոք, հակառակ դեպքում A–ն կփոխարինենք x–ը պարունակող փակ նորմալ հանրահաշվով, որի արդյունքում x–ի սպեկտրը չի փոխվի:

Դիցուք $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$: Քանի որ Ω–ն միակապ է, ուստի $\exists f \in H(\Omega)$, որ $f^2(\lambda) = \lambda$ և $f(1) = 1$: Քանի որ $\sigma(x) \subset \Omega$, ուստի կարող ենք դիտարկել

$$y = \tilde{f}(x) \tag{4.1.1}$$

էլեմենտը: Կունենանք $y^2 = x$: Ցույց տանք, որ $y^* = y$:

Քանի որ Ω–ն միակապ է, ուստի ըստ Ռունգեի թեորեմի՝ $\exists \{P_n\}_1^\infty \subset H(\Omega)$ բազմանդամների հաջորդականություն, որը Ω–ի ներսում հավասարաչափ զուգամիտում է f–ին: Նշանակենք

$$Q_n(\lambda) = \frac{1}{2}\left(P_n(\lambda) + \overline{P_n\left(\overline{\lambda}\right)}\right):$$

Քանի որ $f\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{f(\lambda)}$, ուստի Q_n–երը ևս Ω–ի ներսում հավասարաչափ կզուգամիտեն f–ին: Q_n–երը իրական գործակիցներով բազմանդամներ են, ուստի

$$y_n = Q_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

էլեմենտները կլինեն հերմիտյան, քանի որ $x = x^*$: Կունենանք

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n:$$

Եթե ենթադրենք, թե ինվոլյուցիան անընդհատ է, ապա $y_n = y_n^*$ հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, կստանանք $y = y^*$: Ընդհանուր դեպքը բերվում է նշվածին հետևյալ կերպ:

Դիցուք R–ը A հանրահաշվի ռադիկալն է և $\pi : A \to A/R$ կանոնական արտապատկերումն է: A/R ֆակտոր–հանրահաշվի վրա

$$(\pi(a))^* = \pi(a^*) \quad (a \in A)$$

բանաձևով որոշվում է կոռեկտ սահմանված ինվոլյուցիա: Եթե $a \in A$ էլեմենտը հերմիտյան է, ապա $\pi(a)$–ն ևս կլինի հերմիտյան: Գելֆանդի ձևափոխության մասին պնդումը ցույց է տալիս, որ A/R հանրահաշիվը իզոմորֆ է $\hat{A}$–ին և հետևաբար, կիսապարզ է: Այստեղից կբխի, որ A/R–ում ցանկացած ինվոլյուցիա անընդհատ է և հետևաբար՝ $\pi(y)$–ը հերմիտյան է՝ $\pi(y) = \pi(y^*)$:

Ապացուցվածը ցույց է տալիս, որ $y - y^* \in \ker(\pi) = \mathrm{Rad}(A)$: y–ը ներկայացնենք $y = u + iv$ տեսքով, որտեղ $u = u^*$ և $v = v^*$: Ունենք $y - y^* = 2iv \in R$, ուստի $v \in R$: Քանի որ $x = y^2$, ուստի

$$x = u^2 - v^2 + 2iuv : \tag{4.1.2}$$

Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$ կամայական կոմպլեքս հոմոմորֆիզմ է: Քանի որ $v \in R$, ուստի $\varphi(v) = 0$: Հետևաբար

$$\varphi(x) = [\varphi(u)]^2 :$$

Ըստ ենթադրության՝ $0 \notin \sigma(x)$: Հետևաբար $\varphi(x) \neq 0$, ուստի և $\varphi(u) \neq 0$: Այստեղից և φ–ի կամայականությունից կբխի, որ $u \in A^{-1}$: Քանի որ $x = x^*$, ուստի (4.1.2)–ից կբխի, որ

$$uv = 0 :$$

Բայց $v = u^{-1}(uv)$, ուստի $v = 0$: Ստացվեց, որ $y = u$ և $u = u^*$, ուստի $y = y^*$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 4.1.1: Թեորեմի պայմաններում $\sigma(y) \subset (0, \infty)$: Իրոք, դա բխում է (4.1.1)–ից, $\sigma(x) \subset (0, \infty)$ պայմանից և սպեկտրների արտապատկերման թեորեմից: ▶

§ 4.2. Դրական ֆունկցիոնալներ

Դիցուք A-ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ A'–ը A–ի վրա որոշված բոլոր գծային ֆունկցիոնալների դասն է (A–ի հանրահաշվական համալուծը):

Սահմանում 4.2.1: $F \in A'$ ֆունկցիոնալը կոչվում է դրական (ոչ բացասական), եթե

$$F(xx^*) \geqslant 0 \quad (\forall x \in A) :$$

Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 4.2.1: *Դիցուք L_1, L_2–ը X բանախյան տարածության այնպիսի փակ ենթատարածություններ են, որ $X = L_1 + L_2$: Այդ դեպքում $\exists \gamma > 0$ թիվ, այնպես, որ $\forall x \in X$ վեկտոր կարելի է ներկայացնել $x = x_1 + x_2$ տեսքով, որտեղ $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ և*

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leqslant \gamma \, \|x\| :$$

Ապացույց: Նշանակենք $Y = L_1 \times L_2$: Y–ում գործողությունները սահմանենք կոմպոնենտ առ կոմպոնենտ: $(x_1, x_2) \in Y$ վեկտորի նորմը սահմանենք

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$$

բանաձևով: Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ Y–ը կդառնա բանախ–յան տարածություն: $\Lambda : Y \to X$ օպերատորը սահմանենք

$$\Lambda(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

բանաձևով: Այդ դեպքում Λ–ն կլինի գծային անընդհատ օպերատոր, որը Y–ն արտապատկերում է X–ի վրա: Ըստ բաց արտապատկեր–ման մասին թեորեմի՝ Λ արտապատկերումը բաց է: Ունենք

$$\Lambda\left(\overline{B}(0,1)\right) \supset \Lambda(B(0,1)),$$

և քանի որ $0 \in \Lambda(B(0,1))$ ու $\Lambda(B(0,1))$–ը բաց է, ուստի $\exists \varepsilon > 0$, այնպես որ

$$\Lambda(B(0,1)) \supset \overline{B}(0,\varepsilon) :$$

Կունենանք
$$\Lambda\left(\overline{B}(0,1)\right) \supset \overline{B}(0,\varepsilon):$$
Ուստի $\forall x \in \overline{B}(0,\varepsilon)$ համար $\exists (x_1,x_2) \in \overline{B}(0,1) \subset Y$, որ $x = \Lambda(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ և

$$\|(x_1,x_2)\| \leqslant 1,$$

այսինքն՝
$$\|x_1\| + \|x_2\| \leqslant 1:$$
Այժմ դիցուք $x \in X \setminus \{0\}$ կամայական վեկտոր է, այդ դեպքում $y = \frac{x}{\|x\|}\varepsilon \in \overline{B}(0,\varepsilon) \subset X$, ուստի $\exists (y_1,y_2) \in Y$, որ

$$y = y_1 + y_2$$

և
$$\|y_1\| + \|y_2\| \leqslant 1:$$
$(y_1,y_2) \in Y$ նշանակում է, որ $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$: Վերցնելով

$$x_1 = \frac{\|x\|}{\varepsilon}y_1, \quad x_2 = \frac{\|x\|}{\varepsilon}y_2,$$

կունենանք $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $x = x_1 + x_2$ և

$$\|x_1\| + \|x_2\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon}\left(\|y_1\| + \|y_2\|\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x\|: \tag{4.2.1}$$

Եթե $x = 0$, ապա վերցնելով $x_1 = x_2 = 0$, կունենանք, որ (4.2.1)–ը կրկին տեղի ունի: Մնում է վերցնել $\gamma = \frac{1}{\varepsilon}$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 4.2.1: *Դիցուք F–ը դրական ֆունկցիոնալ է: Այդ դեպքում՝*
1) $F(x^*) = \overline{F(x)} \quad (\forall x \in A)$,
2) $|F(xy^*)|^2 \leqslant F(xx^*)F(yy^*) \quad (\forall x,y \in A)$,
3) $|F(x)|^2 \leqslant F(e)F(xx^*) \leqslant F(e)^2\rho(xx^*) \quad (\forall x \in A)$,
4) եթե $x \in A$ նորմալ էլեմենտ է, ապա $|F(x)| \leqslant F(e)\rho(x)$,

5) F–ը հանդիսանում է A–ի վրա գծային սահմանափակ ֆունկ–ցիոնալ:

Բացի դրանից, եթե A–ն կոմուտատիվ է, ապա $\|F\| = F(e)$, և եթե A–ի ինվոլյուցիան բավարարում է $\|x^*\| \leqslant \beta\,\|x\|$ պայմանին, ապա $\|F\| \leqslant \beta^{\frac{1}{2}} F(e)$:

Ապացույց: Դիցուք $x, y \in A$: Նշանակենք

$$p = F(xx^*), \quad q = F(yy^*), \quad r = F(xy^*), \quad s = F(yx^*) : \quad (4.2.2)$$

Քանի որ $F\left[(x + \alpha y)\,(x^* + \overline{\alpha} y^*)\right\} \geqslant 0 \;\; (\forall \alpha \in \mathbb{C})$, ուստի

$$p + \overline{\alpha} r + \alpha s + |\alpha|^2 q \geqslant 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}) : \quad (4.2.3)$$

Այստեղ վերցնելով նախ $\alpha = 1$ և ապա $\alpha = i$, տեսնում ենք, որ $s + r$ և $i(s - r)$ թվերն իրական են: Կունենանք

$$\begin{cases} s + r = \overline{s + r} \\ i(s - r) = \overline{i(s - r)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{s} + \overline{r} = s + r \\ -\left(\overline{s} - \overline{r}\right) = s - r \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{s} + \overline{r} = s + r \\ \overline{s} - \overline{r} = r - s \end{cases}$$

և վերջին երկու առնչությունները գումարելով՝ կստանանք $\overline{s} = r$: $y = e$ դեպքում այդ առնչությունը տալիս է 1)–ը:

$r = 0$ դեպքում 2)–ն ակնհայտ է: Դիցուք $r \neq 0$: (4.2.3)–ում վերցնենք $\alpha = \dfrac{tr}{|r|}$, որտեղ $t \in \mathbb{R}$: Այդ դեպքում կստանանք

$$p + 2|r|t + qt^2 \geqslant 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

որտեղից կբխի, որ

$$|r|^2 \leqslant pq :$$

Սա էլ հենց 2)–ն է:

Քանի որ $ee^* = e$, ուստի 3)–ի առաջին մասը ստացվում է 2)–ում վերցնելով $y = e$: 3)–ի երկրորդ մասն ապացուցելու համար վերց–նենք որևէ $t > \rho(xx^*)$ թիվ: Կունենանք

$$\sigma\left(te - xx^*\right) \subset \left\{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z > 0\right\},$$

ուստի ըստ 4.1.1 թեորեմի՝ $\exists u \in A$, որ $u = u^*$ և $u^2 = te - xx^*$: Այդ պատճառով

$$tF(e) - F(xx^*) = F(u^2) = F(uu^*) \geqslant 0,$$

$$F(xx^*) \leqslant tF(e) \quad (\forall t > \rho(xx^*)),$$

որտեղից էլ կբխի, որ

$$F(xx^*) \leqslant F(e)\rho(xx^*) :$$

Սրանով 3)–ը ապացուցվեց:

Այժմ դիցուք x–ը նորմալ էլեմենտ է՝ $xx^* = x^*x$: Այդ դեպքում կունենանք $\sigma(xx^*) \subset \sigma(x)\sigma(x^*)$ (տես՝ 2.6.2 թեորեմը), ուստի

$$\rho(xx^*) \leqslant \rho(x)\rho(x^*) :$$

Բայց ակնհայտ է, որ $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\right\}$, ուստի $\rho(x^*) = \rho(x)$ և հետևաբար կունենանք

$$\rho(xx^*) \leqslant \rho(x)^2,$$

որտեղից և 3)–ից կբխի 4)–ը:

Եթե A հանրահաշիվը կոմուտատիվ է, ապա 4)–ը տեղի կունենա բոլոր $x \in A$ համար (բոլոր էլեմենտները կլինեն նորմալ), ուստի

$$|F(x)| \leqslant F(e)\|x\| \quad (\forall x \in A),$$

և հետևաբար F–ը սահմանափակ է ու $\|F\| \leqslant F(e)$: Մյուս կողմից $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |F(x)| \geqslant |F(e)| = F(e)$, ուստի $\|F\| = F(e)$: Եթե $\|x^*\| \leqslant \beta\|x\|$, ապա 3)–ից կբխի, որ

$$|F(x)| \leqslant F(e)\sqrt{\rho(xx^*)} \leqslant F(e)\sqrt{\|xx^*\|} \leqslant$$

$$\leqslant F(e)\sqrt{\|x\| \cdot \|x^*\|} \leqslant F(e)\beta^{\frac{1}{2}}\|x\|,$$

և սրանով իսկ 5)–ի հետ կապված երկու դեպքերի համար նշված պնդումները հիմնավորված են:

Մնաց ընդհանուր դեպքում ցույց տալ 5)–ը:

3)–ից բխում է, որ $F(e) \geqslant 0$, ընդ որում $F(e) = 0$ դեպքում կունենանք $F(x) = 0 \quad (\forall x \in A)$: Ուստի բավական է դիտարկել $F(e) > 0$ դեպքը: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ընդունել, որ

$$F(e) = 1 :$$

H–ով նշանակենք A–ի բոլոր սիմետրիկ էլեմենտների բազմությունը: H–ը և iH–ը իրական գծային պարածություններ են, ընդ որում, ըստ 2.3.1 պնդման, $A = H \oplus iH$: 4) պնդումից բխում է, որ H–ի վրա F–ի նեղացումը 1 նորմով գծային ֆունկցիոնալ է: Ուստի այն նորմը պահպանելով միարժեքորեն շարունակվում է $\overline{H}$–ի վրա և արդյունքում մենք ստանում ենք ինչ–որ $\Phi : \overline{H} \to \mathbb{R}$ գծային իրական ֆունկցիոնալ (1)–ի շնորհիվ H–ի վրա F–ը իրական էր), որի նորմը հավասար է 1–ի: Ցույց տանք, որ

$$\Phi(y) = 0 \quad \left(\forall y \in \overline{H} \cap i\overline{H}\right) : \tag{4.2.4}$$

Իրոք, դիցուք $y = \lim u_n = \lim(iv_n)$, որտեղ $u_n, v_n \in H$: Այդ դեպքում $u_n^2 \to y^2$, $v_n^2 \to -y^2$ և 3), 4)–ից կբխի, որ

$$|F(u_n)|^2 \leqslant F\left(u_n^2\right) \leqslant F\left(u_n^2 + v_n^2\right) \leqslant \left\|u_n^2 + v_n^2\right\| \to 0,$$

ուստի

$$\Phi(y) = \lim F(u_n) = 0 :$$

Ըստ 4.2.1 լեմմայի՝ $\exists \gamma > 0$ թիվ, այնպես որ $\forall x \in A$ էլեմենտ ներկայացվում է $x = x_1 + ix_2$ տեսքով, որտեղ $x_1, x_2 \in \overline{H}$ և

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leqslant \gamma \|x\| :$$

Դիցուք $x = u + iv$, որտեղ $u, v \in H$: Կունենանք՝

$$x_1 - u, \; x_2 - v \in \overline{H} :$$

Մյուս կողմից,

$$x = x_1 + ix_2 = u + iv,$$

ուստի

$$x_1 - u = i(x_2 - v),$$

և հետևաբար $x_1 - u, x_2 - v \in i\overline{H}$: (4.2.4)–ից կբխի, որ

$$\Phi(x_1 - u) = \Phi(x_2 - v) = 0,$$

ուստի $\Phi(u) = \Phi(x_1)$, $\Phi(v) = \Phi(x_2)$ և հետևաբար՝

$$F(x) = F(u + iv) = F(u) + iF(v) = \Phi(x_1) + i\Phi(x_2),$$

$$|F(x)| \leqslant |\Phi(x_1)| + |\Phi(x_2)| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \leqslant \gamma\|x\| :$$

Սա էլ ցույց է տալիս, որ F–ն սահմանափակ է:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 4.3. Դրական ֆունկցիոնալներ կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվներում

Լեմմա 4.3.1 (լեմմա եռյակի մասին): *Դիցուք X, Y, Z–ը գծային տարածություններ են, $A : X \to Y$ և $B : X \to Z$ գծային օպերատորներ են, ընդ որում $B(X) = Z$ և*

$$\ker(B) \subset \ker(A) : \tag{4.3.1}$$

Այդ դեպքում՝
1) $\exists C : Z \to Y$ գծային օպերատոր՝ այնպես, որ $A = CB$,
2) եթե X, Z–ը բանախյան տարածություններ են, Y–ը գծային նորմավորված տարածություն է, և A, B օպերատորները անընդհատ են, ապա 1) պնդման մեջ որպես C կարելի է վերցնել անընդհատ օպերատոր:

Ապացույց: 1) Վերցնենք կամայական $z \in Z$ էլեմենտ: Ըստ պայմանի՝ $\exists x \in X$, որ $z = Bx$: Սահմանենք

$$Cz = Ax : \tag{4.3.2}$$

Համոզվենք, որ C–ի սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն՝ (4.3.2)–ի ձախ մասը կախված չէ x–ի ընտրությունից: Իրոք, եթե նաև $z = Bx_1$, ապա կունենանք $Bx = Bx_1$, և հետևաբար $x - x_1 \in \ker(B)$: Այստեղից և (4.3.1)–ից կբխի, որ $x - x_1 \in \ker(A)$, ուստի $Ax = Ax_1$ և հետևաբար (4.3.2)–ի աջ մասը կախված չէ x–ի ընտրությունից:

Ակնհայտ է, որ C–ն կլինի գծային և $CB = A$:

2) Ցամոզվենք, որ դիտարկվող դեպքում վերը կառուցված C օպերատորը անընդհատ է: Դրա համար վերցնենք $\forall G \subset Y$ բաց բազմություն և ցույց տանք, որ $C^{-1}(G)$–ն բաց է: Ունենք

$$C^{-1}(G) = B\left(A^{-1}(G)\right) :$$

A–ի անընդհատության շնորհիվ $A^{-1}(G)$–ն բաց է: Այստեղից, B–ի անընդհատությունից և բաց արտապատկերման թեորեմից կբխի, որ $B\left(A^{-1}(G)\right)$–ն ևս կլինի բաց:

$CB = A$ հավասարությունը հաճախ գրում են աջից պատկերված դիագրամի տեսքով:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "C"'] & \end{tikzcd}$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 4.3.2: *Եթե μ–ն X–ի վրա այնպիսի կոմպլեքս չափ է, որ $|\mu|(X) = \mu(X)$, ապա μ–ն դրական չափ է:*

Ապացույց: Վերցնենք $\forall A \subset X$ չափելի բազմություն և ցույց տանք, որ $\mu(A) \geqslant 0$: Նշանակենք $B = X \setminus A$: Կունենանք $A \cap B = \varnothing$ և $A \cup B = X$, ուստի

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(X) :$$

Մյուս կողմից, ըստ չափի լրիվ վարիացիայի սահմանման,

$$|\mu(A)| + |\mu(B)| \leqslant |\mu|(X) :$$

Ուստի $\mu(X) = |\mu|(X)$ պայմանից կբխի, որ

$$\mu(X) = \mu(A) + \mu(B) \leqslant |\mu(A) + \mu(B)| \leqslant$$

$$\leqslant |\mu(A)| + |\mu(B)| \leqslant |\mu|(X) = \mu(X),$$

և հետևաբար՝

$$\mu(A) + \mu(B) = |\mu(A)| + |\mu(B)| :$$

Նշանակենք $z_1 = \mu(A)$, $z_2 = \mu(B)$: Կունենանք

$$z_1 + z_2 = |z_1| + |z_2| : \qquad (4.3.3)$$

Այստեղից բխում է, որ $(z_1 + z_2)$–ը իրական է, և հետևաբար՝ $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2 = 0$, որտեղից կբխի, որ $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$, այնպես, որ

$$z_1 = a + ic, \quad z_2 = b - ic :$$

Կունենանք

$$(a + ic) + (b - ic) = |a + ic| + |b - ic|;$$

$$a + b = |a + ic| + |b - ic| :$$

Այստեղից կբխի, որ $c = 0$, քանի որ հակառակ դեպքում կունենանք

$$a + b \leqslant |a| + |b| < |a + ic| + |b - ic| = a + b,$$

ինչը հակասություն է: Հետևաբար $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$: Ցույց տանք, որ $z_1 \geqslant 0$: Իրոք, հակառակ դեպքում կունենանք $z_1 < |z_1|$, ուստի

$$z_1 + z_2 < |z_1| + |z_2|,$$

ինչը կհակասի (4.3.3)–ին:

Այսպիսով $\mu(A) = z_1 \geqslant 0$:

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 4.3.1: *Դիցուք A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվում կա ինվոլյուցիա, որը բավարարում է*

$$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} \quad (x \in A,\ \varphi \in \mathcal{M}_A) \qquad (4.3.4)$$

սիմետրիկության պայմանին: K–ով նշանակենք $F(e) \leqslant 1$ պայմանին բավարարող բոլոր $F : A \to \mathbb{C}$ դրական ֆունկցիոնալների բազմությունը: Դիցուք M–ը $\mathcal{M}_A$–ի վրա որոշված *և $\mu(\mathcal{M}_A) \leqslant 1$ պայմանին բավարարող բոլոր μ դրական բորելյան չափերի բազմությունն է: Այդ դեպքում*

$$F(x) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{x}\, d\mu \tag{4.3.5}$$

բանաձևը հաստատում է փոխմիարժեք համապատասխանություն K-ի և M-ի միջև, որի դեպքում մի բազմության գագաթնային կետերին համապատասխանում են մյուս բազմության գագաթնային կետերը:

Մասնավորապես, K-ի գագաթնային կետերը մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալներն են (ներառյալ 0-ական ֆունկցիոնալը) և միայն դրանք:

Ապացույց: (4.3.5)-ից բխում է, որ $\mu \in M$ համար F-ը գծային ֆունկցիոնալ է: (4.3.4)-ի շնորհիվ $(xx^*)\hat{} = |\hat{x}|^2$, ուստի

$$F(xx^*) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} |\hat{x}|^2\, d\mu \geqslant 0 \quad (\forall x \in A):$$

Հետևաբար F-ը դրական ֆունկցիոնալ է: Ունենք

$$F(e) = \mu(\mathcal{M}_A) \leqslant 1,$$

ուստի $F \in K$:

Այժմ դիցուք $F \in K$ կամայական էլեմենտ է: Ըստ 4.2.1 թեորեմի 4) պնդման, ունենք

$$|F(x)| \leqslant F(e)\rho(x), \tag{4.3.6}$$

որտեղից կբխի, որ $\mathrm{Rad}(A) \subset \ker(F)$: Բայց ինչպես գիտենք, $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերման կորիզը $\mathrm{Rad}(A)$-ն է, ուստի ըստ 4.3.1 լեմմայի՝ $\exists \hat{F} : \hat{A} \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալ, որ

$$F(x) = \hat{F}(\hat{x}) \quad (\forall x \in A):$$

(4.3.6)-ից կբխի, որ

$$\left|\hat{F}(\hat{x})\right| = |F(x)| \leqslant F(e)\rho(x) = F(e)\,\|\hat{x}\|_\infty \quad (x \in A),$$

ինչը ցույց է տալիս, որ $\hat{F}$–ը $C(\mathcal{M}_A)$ տարածության $\hat{A}$ ենթատարածությունում սահմանափակ ֆունկցիոնալ է, որի նորմը չի գերազանցում $F(e)$–ն: Քանի որ

$$\hat{F}\,(\hat{e}) = F(e),$$

ուստի $\|\hat{F}\| = F(e)$: Ըստ Հան–Բանախի թեորեմի՝ $\hat{F}$–ը նորմը պահպանելով շարունակվում է ամբողջ $C(\mathcal{M}_A)$–ի վրա: Ըստ Ռիսի ներկայացման թեորեմի՝ $\mathcal{M}_A$–ի վրա գոյություն ունի μ կոմպլեքս բորելյան չափ, որ տեղի ունի (4.3.5)–ը, ընդ որում $\|\mu\| = F(e)$: Կունենանք

$$\|\mu\| = F(e) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{e}\, d\mu = \mu(\mathcal{M}_A),$$

ուստի 4.3.2 լեմմայից կբխի, որ μ–ն դրական չափ է: Քանի որ $F(e) \leqslant 1$, ուստի $\mu(\mathcal{M}_A) \leqslant 1$ և հետևաբար $\mu \in M$:

(4.3.4) պայմանի շնորհիվ $\hat{A}$ հանրահաշիվը ցանկացած ֆունկցիայի հետ միասին պարունակում է նրա համալուծը: Հեշտ է տեսնել, որ $\hat{A}$–ը պարունակում է հաստատուն ֆունկցիաները և բաժանում է $\mathcal{M}_A$–ի կետերը: Ըստ Ստոն–Վայերշտրասի թեորեմի՝ $\hat{A}$–ը ամենուրեք խիտ է $C(\mathcal{M}_A)$–ում: Այստեղից և Ռիսի ներկայացման թեորեմից կբխի, որ μ չափը F–ի միջոցով որոշվում է միարժեքորեն: Օգտվելով դրանից, հեշտ է տեսնել, որ $F \mapsto \mu$ արտապատկերման դեպքում K–ի գագաթնային կետերին համապատասխանում են M–ի գագաթնային կետեր և հակառակը:

0–ական չափը M–ի համար, ակնհայտորեն, գագաթնային կետ է: Դժվար չէ տեսնել, որ M–ի մյուս գագաթնային կետերը մի կետանոց կրիչով չափերն են, որոնց համար $\mu(\mathcal{M}_A) = 1$: Իրոք, պարզ է, որ մի կետանոց կրիչով միավոր չափերը M–ի համար գագաթնային կետեր են: Այժմ դիցուք $\mu \neq 0$ հանդիսանում M–ի գագաթնային կետ: Նախ ցույց տանք, որ $\mu(\mathcal{M}_A) = 1$: Ենթադրենք հակառակը, այդ դեպքում կունենանք $0 < \mu(\mathcal{M}_A) < 1$, ուստի $\exists k > 1$ թիվ, որ

$$k\mu(\mathcal{M}_A) < 1\,:$$

Վերցնենք

$$\mu_1 = \frac{1}{k}\,\mu, \quad \mu_2 = k\mu, \quad \alpha = \frac{k}{k+1}\ :$$

Այդ դեպքում կունենանք $\mu_1 \neq \mu_2$ և $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, ընդ որում $\mu_1, \mu_2 \in M$: Այստեղից կբխի, որ μ–ն M–ի համար զազաթնային կետ չէ, ինչը հակասություն է: Ուստի $\mu(\mathcal{M}_A) = 1$: Այժմ ցույց տանք, որ μ–ն մի կետանոց չափ է: Ենթադրենք հակառակը: Ցույց տանք, որ եթե $C_1 \subset \mathcal{M}_A$ և $\mu(C_1) > 0$, ապա $\mu(\mathcal{M}_A \setminus C_1) = 0$: Իրոք, հակառակ դեպքում կունենանք, որ $\exists C_1 \subset \mathcal{M}_A$, որ $\mu(C_1) > 0$ և $\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus C_1\right) > 0$: Նշանակենք $C_2 = \mathcal{M}_A \setminus C_1$ և $C \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_A)$ համար սահմանենք

$$\mu_1(C) = \mu\left(C \cap C_1\right), \quad \mu_2(C) = \mu\left(C \cap C_2\right):$$

Նշանակենք $\alpha = \mu(C_1)$, կունենանք $1 - \alpha = \mu(C_2)$ և

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 :$$

Պարզ է, որ $\mu_1, \mu_2 \in M$, ընդ որում $\mu_1 \neq \mu_2$, քանի որ $\mu_1(C_1) = \mu(C_1) > 0$ և $\mu_2(C_1) = \mu_2(\emptyset) = 0$: Ստացվածը ցույց է տալիս, որ μ–ն M–ի զազաթնային կետ չէ, ինչը հակասություն է:

Այսպիսով, եթե $\mu(C_1) > 0$, ապա $\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus C_1\right) = 0$ և հետևաբար՝ $\mu(C_1) = \mu(\mathcal{M}_A) - \mu(\mathcal{M}_A \setminus C_1) = 1$:

Վերցնենք $\forall x \in \mathcal{M}_A$ կետ: Ըստ մեր ենթադրության՝ $\{x\}$–ը չի հանդիսանում μ չափի կրիչ, հետևաբար

$$\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus \{x\}\right) > 0,$$

և վերն ասվածից կբխի, որ $\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus \{x\}\right) = \mu(\mathcal{M}_A) = 1$, ուստի

$$\mu\left(\{x\}\right) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{M}_A):$$

Քանի որ μ–ն ռեգուլյար է, ուստի $\forall x \in \mathcal{M}_A$ համար $\exists V_x$ շրջակայք, որ

$$\mu(V_x) < \mu\left(\{x\}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}:$$

Այստեղից կբխի, որ $\mu(V_x) \neq 1$, հետևաբար, ըստ վերն ասածի՝

$$\mu(V_x) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{M}_A): \tag{4.3.7}$$

Բայց $\mathcal{M}_A \subset \bigcup\limits_{x \in \mathcal{M}_A} V_x$, և քանի որ $\mathcal{M}_A$–ն կոմպակտ է, ուստի $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{M}_A$, որ

$$\mathcal{M}_A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} :$$

Այստեղից և (4.3.7)–ից կբխի, որ

$$1 = \mu(\mathcal{M}_A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu\left(V_{x_i}\right) = 0,$$

ինչը հակասություն է:

Ասվածից բխում է, որ K–ի գագաթնային կետերը ունեն (4.3.5) տեսքը, որտեղ $\mu = 0$ կամ μ–ն մի կետանոց կրիչով միավոր չափ է: Առաջին դեպքում կունենանք $F = 0$: Երկրորդ դեպքում, երբ μ–ն φ կրիչով միավոր չափն է, կունենանք

$$F(x) = \hat{\varphi} \quad (\forall x \in A),$$

կամ՝ $F(x) = \varphi(x) \quad (\forall x \in A)$, այսինքն՝ F–ը մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.3.2: *Դիցուք A–ն ինվոլյուցիայով կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, և K–ն $F(e) \leqslant 1$ պայմանին բավարարող բոլոր դրական ֆունկցիոնալների բազմությունն է: Այդ դեպքում $F \in K$ համար հետևյալ երեք պնդումներն իրար համարժեք են՝*

1) $F(xy) = F(x)F(y) \quad (\forall x, y \in A)$,

2) $F(xx^*) = F(x)F(x^*) \quad (\forall x \in A)$,

3) F–ը K–ի գագաթնային կետ է:

Ապացույցը տանենք $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ սխեմայով:

$1) \Rightarrow 2)$ ակնհայտ է:

$2) \Rightarrow 3)$: 2)–ում վերցնելով $x = e$, կստանանք

$$F(e) = F(e)^2,$$

ուստի $F(e) = 0$ կամ $F(e) = 1$: $F(e) = 0$ դեպքում 4.2.1 թեորեմի 3) պնդումից կբխի, որ $F = 0$, ուստի F–ն ակնհայտորեն կհանդիսանա K–ի զագաթնային կետ: Այժմ դիցուք $F(e) = 1$: Դիցուք $F = \alpha F_1 + (1-\alpha)F_2$, որտեղ $0 < \alpha < 1$ և $F_1, F_2 \in K$: Ցույց տանք, որ $F_1 = F$: Իրոք, ճիշտ նույն ձևով, ինչպես վերը, կհամոզվենք, որ $F_1(e) = F_2(e) = 1$: Համոզվենք, որ

$$\ker(F) \subset \ker(F_1) : \tag{4.3.8}$$

Իրոք, դիցուք $x \in \ker(F)$, այսինքն՝ $F(x) = 0$: Ըստ 4.2.1 թեորեմի 3) կստի՝

$$|F_1(x)|^2 \leqslant F_1(e)F_1(xx^*) = F_1(xx^*) = \frac{1}{\alpha}\,\alpha F_1(xx^*) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\alpha F_1(xx^*) + (1-\alpha)F_2(xx^*)\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} F(xx^*) = \frac{1}{\alpha} F(x)F(x^*) = 0,$$

ուստի $x \in \ker(F_1)$: (4.3.8)–ից և

$$F(e) = F_1(e) = 1 \tag{4.3.9}$$

հավասարությունից կբխի, որ $F = F_1$: Իրոք, վերցնենք $\forall x \in A$ և ցույց տանք, որ

$$F(x) = F_1(x) : \tag{4.3.10}$$

Ունենք $x - F(x)e \in \ker(F)$, ուստի (4.3.8)–ից կբխի, որ $x - F(x)e \in \ker(F_1)$, այսինքն՝

$$F_1(x - F(x)e) = 0,$$
$$F_1(x) - F(x)F_1(e) = 0,$$

որտեղից և (4.3.9)–ից կբխի (4.3.10)–ը:

Ապացուցվեց, որ $F = F_1$, հետևաբար F–ը K–ի համար զագաթնային կետ է:

3) $\Rightarrow$ 1): Նախ մենք կապացուցենք, որ տեղի ունի 1) պայմանի հետևյալ մասնավոր դեպքը.

$$F(xx^*y) = F(xx^*)F(y) \quad (x, y \in A) : \tag{4.3.11}$$

Դիցուք x–ն այնպիսին է, որ $\|xx^*\| < 1$: Ըստ 4.1.1 թեորեմի $\exists z \in A$, որ $z = z^*$ և $z^2 = e - xx^*$: Նշանակենք

$$\Phi(y) = F(xx^*y) \quad (y \in A) :$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$\Phi(yy^*) = F\left(xx^*yy^*\right) = F\left[(xy)(xy)^*\right] \geqslant 0 \tag{4.3.12}$$

և

$$\begin{aligned}(F - \Phi)(yy^*) = F\left[\left(e - xx^*\right)yy^*\right] = \\ = F\left(z^2yy^*\right) = F\left[(yz)(yz)^*\right] \geqslant 0 :\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Քանի որ

$$0 \leqslant \Phi(e) = F(xx^*) \leqslant F(e)\,\|xx^*\| < 1, \tag{4.3.14}$$

ուստի (4.3.12)–ից և (4.3.13)–ից կբխի, որ $\Phi, F - \Phi \in K$: Եթե $\Phi(e) = 0$, ապա $\Phi = 0$ և այդ դեպքում (4.3.11)–ը ակնհայտորեն տեղի ունի: Եթե $\Phi(e) > 0$, ապա (4.3.14)–ից կբխի, որ

$$F = \Phi(e) \cdot \frac{\Phi}{\Phi(e)} + (F - \Phi)(e)\frac{F - \Phi}{F(e) - \Phi(e)} :$$

Քանի որ F–ը K–ի զագաթնային կետ է, ուստի սպացվածից կբխի, որ

$$F = \frac{\Phi}{\Phi(e)},$$

$$\Phi = \Phi(e)F,$$

ինչը հենց (4.3.11)–ն է:

Սրանով իսկ $\|xx^*\| < 1$ դեպքում (4.3.11)–ը հիմնավորվեց: Ընդհանուր դեպքը ակնհայտորեն բերվում է այդ դեպքին (x–ի փոխարեն կդիտարկենք cx էլեմենտը, որտեղ c–ն ընտրված հաստատուն է):

Այժմ դիցուք $x, y \in A$ կամայական էլեմենտներ են: Ցույց տանք, որ

$$F(xy) = F(x)F(y) :$$

Վերցնենք որևէ $n \geqslant 3$ բնական թիվ: Նշանակենք $z_p = e + w^{-p}x$, որտեղ $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$: Համոզվենք, որ

$$x = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p z_p z_p^* : \tag{4.3.15}$$

Ունենք

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p z_p z_p^* = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p \left(e + w^{-p}x\right)\left(e + \overline{w}^{-p}x^*\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p \left(e + w^{-p}x\right)\left(e + w^{p}x^*\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{p=1}^{n} w^p\right)e + \left(\sum_{p=1}^{n} w^{2p}\right)x^* + \sum_{p=1}^{n} x + \left(\sum_{p=1}^{n} w^p\right)xx^*\right] =$$

$$= x + \left(\sum_{p=1}^{n} w^p\right)(e + xx^*) + \left(\sum_{p=1}^{n} w^{2p}\right)x^* : \tag{4.3.16}$$

Բայց $\forall k \in N$ համար

$$\sum_{p=1}^{n} w^{kp} = \frac{w^k\left(w^{nk} - 1\right)}{w - 1} = \frac{w^k\left(\left(w^n\right)^k - 1\right)}{w - 1} = \frac{w^k\left(1^k - 1\right)}{w - 1} = 0,$$

ուստի (4.3.16)–ից կբխի (4.3.15)–ը: (4.3.15)–ից և (4.3.11)–ից կբխի, որ

$$F(xy) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p F\left(z_p z_p^* y\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p F\left(z_p z_p^*\right) F\left(y\right) =$$

$$= F\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p z_p z_p^*\right) F\left(y\right) = F(x)F(y) \, :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 4.4. Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմը ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվների համար

Թեորեմ 4.4.1: *Եթե A–ն B^* հանրահաշիվ է և $z \in A$, ապա գոյություն ունի A–ի վրա որոշված այնպիսի F դրական ֆունկցիոնալ, որ*

$$F(e) = 1 \quad \text{և} \quad F(zz^*) = \|z\|^2 \, : \tag{4.4.1}$$

Ապացույց: A_r–ով նշանակենք A հանրահաշվի բոլոր սիմետրիկ էլեմենտների բազմությունը, իսկ P–ով՝ բոլոր ոչ բացասական էլեմենտների բազմությունը: Ինչպես գիտենք (տես՝ 2.7.1 թեորեմը), P–ն հանդիսանում է կոն, այսինքն եթե $x, y \in P$ և $c \geqslant 0$, ապա $cx, x+y \in P$: Ըստ վերը հիշատակված թեորեմի, $\forall x \in A$ համար $xx^* \in P$: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար բավական է կառուցել այնպիսի $f : A_r \to \mathbb{R}$ գծային ֆունկցիոնալ, որը բավարարի (4.4.1) պայմանին և

$$f(x) \geqslant 0 \quad (x \in P) \, : \tag{4.4.2}$$

Իրոք, եթե ենթադրենք, թե այդպիսի f ֆունկցիոնալն արդեն կառուցված է, ապա $\forall x \in A$ էլեմենտը ներկայացնելով $x = u + iv$ տեսքով, որտեղ $u, v \in A_r$, կսահմանենք

$$F(x) = f(u) + if(v) \, :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $F(ix) = iF(x)$, ուստի $F : A \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալ է: (4.4.2)–ից կբխի, որ F ֆունկցիոնալը դրական է, ուստի այն կբավարարի թեորեմի պահանջներին:

Դիցուք M_0–ն A_r–ի այն (իրական) ենթատարածությունն է, որը ծնված է e–ով և zz^*–ով: M_0–ի վրա f_0 ֆունկցիոնալը սահմանենք հետևյալ բանաձևով.

$$f_0\left(\alpha e + \beta zz^*\right) = \alpha + \beta \left\|zz^*\right\| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ f_0–ն M_0–ի վրա սահմանված է կոռեկտ նույնիսկ այն դեպքում, երբ e և zz^* վեկտորները գծորեն կախյալ են: Իրոք, դիցուք

$$\alpha_1 e + \beta_1 zz^* = \alpha_2 e + \beta_2 zz^*,$$

ցույց տանք, որ

$$\alpha_1 + \beta_1 \left\|zz^*\right\| = \alpha_2 + \beta_2 \left\|zz^*\right\| :$$

Նշանակենք $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta = \beta_1 - \beta_2$: Կունենանք $\alpha e + \beta zz^* = 0$: Պետք է ցույց տալ, որ

$$\alpha + \beta \left\|zz^*\right\| = 0 :$$

$\beta = 0$ դեպքում դա ակնհայտ է: Դիցուք $\beta \neq 0$, այդ դեպքում կունենանք $-\dfrac{\alpha}{\beta}e - zz^* = 0$, ուստի $-\dfrac{\alpha}{\beta} \in \sigma(zz^*)$: Քանի որ $\sigma(zz^*) \subset [0, \infty)$, ուստի այստեղից կբխի, որ $-\dfrac{\alpha}{\beta} \geqslant 0$: Հետևաբար $zz^* = -\dfrac{\alpha}{\beta}e$ հավասարությունից կբխի, որ

$$\alpha + \beta \left\|zz^*\right\| = \alpha + \beta \left\|-\frac{\alpha}{\beta}e\right\| = \alpha + \beta \cdot \frac{-\alpha}{\beta} = 0 :$$

Քանի որ zz^*–ը նորմալ էլեմենտ է, ուստի (տես՝ 2.7.1 թեորեմը) $\rho(zz^*) = \|zz^*\|$ և հետևաբար՝ $\|zz^*\| \in \sigma(zz^*)$: Այստեղից կբխի, որ $\alpha + \beta \left\|zz^*\right\| \in \sigma\left(\alpha e + \ \beta zz^*\right)$: Այլ կերպ ասած, եթե $x \in M_0$, ապա $f_0(x) \in \sigma(x)$, որտեղից կբխի, որ $f_0(x) \geqslant 0 \ \ (x \in P \cap M_0)$: Պարզ է նաև, որ f_0–ն կբավարարի (4.4.1) պայմաններին:

Այժմ դիցուք A_r–ի M_1 (իրական) ենթատարածության վրա որոշված f_1 գծային ֆունկցիոնալը հանդիսանում է f_0–ի շարունակություն և

$$f_1(x) \geqslant 0 \quad (x \in P \cap M_1):$$

Դիցուք $y \in A_r$ և $y \notin M_1$: Նշանակենք

$$E' = M_1 \cap (y - P), \quad E'' = M_1 \cap (y + P):$$

Եթե $x' \in E'$ և $x'' \in E''$, ապա $y - x' \in P$ և $x'' - y \in P$: Քանի որ P–ն կոն է, ուստի այստեղից կբխի, որ

$$x'' - x' = (y - x') + (x'' - y) \in P,$$

և հետևաբար՝ $f_1(x') \leqslant f_1(x'')$: Ուստի

$$\sup_{x' \in E'} f_1(x') \leqslant \inf_{x'' \in E''} f_1(x''),$$

և հետևաբար $\exists c \in \mathbb{R}$, որ

$$f_1(x') \leqslant c \leqslant f_1(x'') \quad (\forall x', x'' \in E): \tag{4.4.3}$$

Սահմանենք

$$f_2(x + \alpha y) = f_1(x) + \alpha c \quad (x \in M_1, \alpha \in \mathbb{R}):$$

Համոզվենք, որ f_2–ը սահմանված է կոռեկտ: Դիցուք $x + \alpha_1 y = x + \alpha_2 y$ ($x \in M_1$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$), ցույց տանք, որ $f_1(x) + \alpha_1 c = f_1(x) + \alpha_2 c$: Նշանակենք $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$: Կունենանք $\alpha y = 0$: Պետք է ցույց տալ, որ $\alpha c = 0$: Իրոք, քանի որ $y \notin M_1$, ուստի $y \neq 0$ և հետևաբար $\alpha = 0$: Դիցուք $x \in M_1$: Եթե $x + y \in P$, ապա $-x \in E'$, ուստի (4.4.3)–ից կբխի, որ $f_1(-x) \leqslant c$, որտեղից $f_1(x) \geqslant -c$: Հետևաբար $f_2(x + y) \geqslant 0$: Այժմ եթե $x - y \in P$, ապա $x \in E''$, ուստի (4.4.3)–ից կբխի, որ $f_1(x) \geqslant c$ և հետևաբար $f_2(x - y) \geqslant c - c = 0$: Դիտարկված երկու դեպքերից կբխի, որ

$$f_2(u) \geqslant 0 \quad (u \in P \cap M_2): \tag{4.4.4}$$

Իրոք, դիցուք $u = x + \alpha y$, որտեղ $x \in M_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha = 0$ դեպքում (4.4.4)–ն ակնհայտ է: Դիցուք $\alpha \neq 0$, այդ դեպքում կունենանք

$$f_2(u) = f_2(x + \alpha y) = |\alpha| f_2 \left(\frac{1}{|\alpha|} x + \frac{\alpha}{|\alpha|} y \right) : \tag{4.4.5}$$

Քանի որ $u \in P$ և P–ն կոն է, ուստի $\frac{1}{|\alpha|} u = \frac{1}{\alpha} x + \frac{\alpha}{|\alpha|} y \in P$: Քանի որ $\frac{1}{\alpha} x \in M_1$ և $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm 1$, ուստի վերը դիտարկված երկու դեպքերը ցույց են տալիս, որ

$$f_2 \left(\frac{1}{|\alpha|} x + \frac{\alpha}{|\alpha|} y \right) \geqslant 0,$$

որտեղից և (4.4.5)–ից կբխի (4.4.4)–ը:

Φ–ով նշանակենք այն բոլոր φ իրական գծային ֆունկցիոնալ–ների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրը որոշված է մի ինչ–որ $L \subset A_r$ ենթապարածության վրա (որը տարբեր φ–երի համար կարող է լինել տարբեր), հանդիսանում է f_0–ի շարունակություն և բավարարում է

$$\varphi(x) \geqslant 0 \quad (x \in P \cap L)$$

պայմանին: Φ–ում ներմուծենք մասնակի կարգավորվածության առնչություն հետևյալ կերպ՝ կասենք $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, եթե φ_2–ը φ_1–ի շարունակություն է: Ցույց տանք, որ Φ–ում ցանկացած Φ_0 գծորեն կարգավորված ենթաբազմությունն ունի վերին եզր: Իրոք, L_0–ով նշանակենք Φ_0–ին պատկանող բոլոր հնարավոր φ ֆունկցիոնալ–ների D_φ որոշման տիրույթների միավորումը՝

$$L_0 = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} D_\varphi :$$

Քանի որ D_φ որոշման տիրույթները ($\varphi \in \Phi_0$ համար) կազմում են ըստ $\subset$ առնչության գծորեն կարգավորված բազմություն, ուստի հեշտ է տեսնել, որ L_0–ն կլինի A_r–ի ենթապարածություն: $\varphi_0 : L_0 \to \mathbb{R}$ ֆունկցիոնալը սահմանենք հետևյալ կերպ: Դիցուք

$x \in L_0$ կամայական կետ է: Այդ դեպքում $\exists \varphi \in \Phi_0$, որ $x \in D_\varphi$: Սահմանենք

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ φ_0–ի սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն $\varphi_0(x)$–ը կախված չէ φ–ի ընտրությունից: Ուստի φ_0–ն կլինի Φ_0–ի վերին եզր:

Ըստ Ցորնի լեմմայի՝ Φ–ում կա մաքսիմալ էլեմենտ: Դիցուք f–ը Φ–ի մաքսիմալ էլեմենտ է: Այդ դեպքում $D_f = A_r$, քանի որ հակառակ դեպքում, ըստ վերն ասվածի, f–ը թույլ կտար շարունակություն ավելի լայն ենթատարածության վրա:

f ֆունկցիոնալը կբավարարի մեր պահանջներին:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.4.2: *Եթե A–ն B^*–հանրահաշիվ է, ապա ցանկացած $u \in A \setminus \{0\}$ էլեմենտի համար գոյություն ունեն այնպիսի H_u հիլբերտյան տարածություն և $T_u : A \to BL(H_u)$ հոմոմորֆիզմ, որ $T_u(e) = I$,*

$$T_u(x^*) = T_u(x)^* \quad (x \in A), \tag{4.4.6}$$

$$\|T_u(x)\| \leqslant \|x\| \quad (x \in A), \tag{4.4.7}$$

և $\|T_u(u)\| = \|u\|$:

Ապացույց: Ըստ 4.4.1 թեորեմի՝ $\exists F : A \to \mathbb{C}$ դրական ֆունկցիոնալ, այնպես, որ

$$F(e) = 1 \quad \text{և} \quad F(u^*u) = \|u\|^2 \tag{4.4.8}$$

(4.4.1 թեորեմում կվերցնենք $z = u^*$, և կօգտվենք նրանից, որ B^*–հանրահաշվում $\|x^*\| = \|x\|$): Նշանակենք

$$Y = \{y \in A : \ F(xy) = 0 \ \ (\forall x \in A)\} : \tag{4.4.9}$$

Ըստ 4.2.1 թեորեմի, F–ն անընդհատ է, ուստի Y–ը փակ է A–ում: $x \in A$ համար կնշանակենք

$$x' = x + Y : \tag{4.4.10}$$

Մենք պնդում ենք, որ

$$(a', b') = F(b^*a) \tag{4.4.11}$$

բանաձևը փալիս է սկալյար արտադրյալի A/Y–ի վրա:

Նախ համոզվենք, որ (a', b')–ը (4.4.11) բանաձևով սահմանված է կոռեկտ, այսինքն (4.4.11)–ի–ի աջ մասը կախված չէ a', b' դասերի a, b ներկայացուցիչների ընտրությունից: Դիցուք $a' = \tilde{a}+Y$, $b' = \tilde{b}+Y$: Կունենանք $a - \tilde{a} \in Y$, $b - \tilde{b} \in Y$ և

$$F\left(\tilde{b}^*\tilde{a}\right) - F\left(b^*a\right) = F\left(\left(\tilde{b} - b\right)^*\tilde{a}\right) - F\left(b^*\left(a - \tilde{a}\right)\right),$$

ուստի բավական է ցույց տալ, որ եթե a, b էլեմենտներից գոնե մեկը պատկանում է Y–ին, ապա $F(b^*a) = 0$: Եթե $a \in Y$, ապա (4.4.9)–ից անմիջապես կբխի, որ $F(b^*a) = 0$: Դիցուք $b \in Y$: Այդ դեպքում (4.4.9)–ց կբխի, որ $F(a^*b) = 0$, և օգտագործելով $F \geqslant 0$ պայմանը, կունենանք

$$F(b^*a) = F\left((a^*b)^*\right) = \overline{F(a^*b)} = 0:$$

Ակնհայտ է, որ (a', b')–ը գծային է ըստ a'–ի և համալուծ գծային է ըստ b'–ի: Բացի այդ, $F \geqslant 0$ պայմանից բխում է, որ

$$(a', a') = F(aa^*) \geqslant 0: \tag{4.4.12}$$

Ունենք նաև, որ

$$(a', b') = F(b^*a) = F\left((a^*b)^*\right) = \overline{F(a^*b)} = \overline{(b', a')}:$$

Եթե $(a', a') = 0$, ապա (4.4.12)–ից կբխի, որ $F(a^*a) = 0$: Այստեղից և 4.4.1 թեորեմից կբխի, որ $\forall x \in A$ համար

$$|F(xa)| \leqslant F(xx^*)F(a^*a) = 0,$$

ուստի $a \in Y$ և հետևաբար $a' = 0$:

Այսպիսով, A/Y–ը $\|a'\| = (F(a^*a))^{\frac{1}{2}}$ նորմով նախահիլբերտյան տարածություն է: Դիցուք H–ն այդ տարածության լրիվացումն է: $T(x) : A/Y \to A/Y$ օպերատորը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$T(x)a' = (xa)' \quad (a' \in A/Y): \tag{4.4.13}$$

Հեշտ է տեսնել, որ այս սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն՝ (4.4.13)–ի աջ մասը կախված չէ $a \in a'$–ի ներկայացուցչի ընտրությունից: Իրոք, (4.4.9)–ը ցույց է տալիս, որ Y–ը A–ում ձախ իդեալ է, այսինքն $y \in Y$ դեպքում $xy \in Y$ $(\forall x \in A)$: Ուստի եթե նաև $a' = \tilde{a} + Y$, ապա $y = a' - \tilde{a} \in Y$ և

$$xa - x\tilde{a} = xy$$

ներկայացումից կբխի, որ $xa - x\tilde{a} \in Y$ և հետևաբար՝ $(xa)' = (x\tilde{a})'$: Ակնհայտ է, որ $x \mapsto T(x)$ արտապատկերումը գծային է, և

$$T(x_1)T(x_2) = T(x_1x_2) \quad (x_1, x_2 \in A) : \tag{4.4.14}$$

(4.4.13)–ից բխում է, որ $T(e)$–ն A/Y–ի վրա միավոր օպերատորն է:

Ցույց տանք, որ

$$\|T(x)\| \leqslant \|x\| \quad (x \in A) : \tag{4.4.15}$$

Նախ նկատենք, որ

$$\left\|T(x)a'\right\|^2 = \left((xa)', (xa)'\right) = F\left(a^*x^*xa\right) : \tag{4.4.16}$$

Ֆիքսած $a \in A$ համար դիտարկենք $G(x) = F(a^*xa)$ ֆունկցիոնալը: Ակնհայտ է, որ $G \geqslant 0$, ուստի ըստ 4.2.1 թեորեմի՝

$$G(x^*x) \leqslant G(e)\|x\|^2,$$

և հետևաբար՝

$$\left\|T(x)a'\right\|^2 = G(x^*x) \leqslant F(a^*a)\|x\|^2 = \left\|a'\right\|^2 \|x\|^2,$$

որտեղից կբխի (4.4.15)–ը: Քանի որ (4.4.15)–ի շնորհիվ $T(x)$–ը անընդհատ է A/Y–ում, իսկ A/Y–ը ամենուրեք խիտ է H–ում, ուստի $T(x)$–ը անընդհատությունը պահպանելով միարժեքորեն շարունակվում է ամբողջ H–ի վրա: Այդպիսի շարունակումը չի փոխում $T(x)$–ի նորմը, ուստի (4.4.15)–ը կմնա ուժի մեջ նաև $T(x)$–ը շարունակելուց հետո: Քանի որ $\|e'\|^2 = F(e^*e) = F(e) = 1$, ուստի (4.4.8)–ից և (4.4.6)–ից կբխի, որ

$$\|u\|^2 = F(u^*u) = \left\|T(u)e'\right\|^2 \leqslant \|T(u)\|^2 \cdot \left\|e'\right\|^2 = \|T(u)\|^2 ,$$

որտեղից և (4.4.15)–ից կբխի, որ

$$\|T(u)\| = \|u\| :$$

Ունենք, որ $\forall a', b' \in A/Y$ համար

$$\left(T(x^*)a', b'\right) = \left((x^*a'), b'\right) = F\left(b^*x^*a\right) = F\left((xb)^*a\right) =$$

$$= \left(a', (xb)'\right) = \left(a', T(x)b'\right) = \left(T(x)^*a', b'\right),$$

ուստի

$$T(x^*)a' = (T(x))^* \, a' \quad (\forall a' \in A/Y) :$$

Այստեղից, $T(x^*)$, $(T(x))^*$ օպերատորների անընդհատությունից և A/Y–ի ամենուրեք խիտ լինելուց կբխի, որ

$$T(x^*)h = (T(x))^* \, h \quad (\forall h \in H),$$

ուստի $T(x^*) = (T(x))^*$:

Վերցնելով $H_u = H$, $T_u = T$, ակնհայտորեն կստանանք, որ բավարարվում են թեորեմի պահանջները:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 4.4.1: Դիցուք I–ն որևէ բազմություն է, իսկ $a_i \geqslant 0$ $(i \in I)$: Այդ դեպքում

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < \infty}} \sum_{i \in I_0} a_i = \sup_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I} \sum_{k=1}^{n} a_{i_k}$$

վերջավոր կամ անվերջ մեծությունը կոչվում է a_i թվերի գումար:

Պարզ է, որ եթե $\pi : I \to I$ բիեկտիվ արտապատկերում է, ապա $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{i\in I} a_{\pi(i)}$:

Կասենք $\sum\limits_{i\in I} a_i$ շարքը զուգամետ է, եթե $\sum\limits_{i\in I} a_i < \infty$:

Լեմմա 4.4.1: *Եթե $\sum\limits_{i\in I} a_i < \infty$, ապա 0–ից տարբեր a_i–երի թիվը վերջավոր է կամ հաշվելի:*

Ապացույց: Դիցուք $\sum\limits_{i\in I} a_i = A < +\infty$: Նշանակենք

$$I_0 = \{i \in I : \ a_i > 0\},$$
$$I_n = \left\{i \in I : \ a_i > \frac{1}{n}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots) :$$

Ունենք

$$I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n : \tag{4.4.17}$$

Նկատենք, որ յուրաքանչյուր I_n վերջավոր է: Իրոք, I_n–ը չի կարող պարունակել An–ից շատ թվով անդամներ, քանի որ հակառակ դեպքում կունենայինք

$$A = \sum_{i\in I} a_i \geqslant \sum_{i\in I_n} a_i \geqslant \sum_{i\in I_n} \frac{1}{n} > An \cdot \frac{1}{n} = A,$$

$$A > A,$$

ինչը հակասություն է:

Ուստի (4.4.17)–ից կբխի, որ I_0–ն վերջավոր է կամ հաշվելի: Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 4.4.2: Դիցուք ունենք բազմությունների ինչ–որ $\{X_i\}_{i\in I}$ ընտանիք: $\prod\limits_{i\in I} X_i$–ով կնշանակենք այն բոլոր $x = x_i$, $x : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ֆունկցիաների բազմությունը, որ $x_i \in X_i$ $(\forall i \in I)$: $\prod\limits_{i\in I} X_i$–ն կոչվում է X_i բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ:

Քանի որ $x : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ֆունկցիան որոշվում է իր x_i $(i \in I)$ արժեքներով, ուստի հաճախ խոսելով կամայական $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ էլեմենտի մասին, x–ի փոխարեն գրում են $\{x_i\}_{i\in I}$:

Եթե $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, ապա, $\{x_i\}_{i\in I}$-ի փոխարեն գրելով $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, հանգում ենք վերջավոր թվով բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի համար նախկինում մեզ հայտնի սահմանմանը:

$\pi_i : \prod\limits_{k\in I} X_k \to X_i$ արտապատկերումը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\pi_i\left(\{x_k\}\right) = x_i, \qquad \left(\{x_k\} \in \prod_k X_k\right):$$

π_i–ն կոչվում է X_i–ի վրա պրոյեկտող արտապատկերում: Փաստորեն, $x \in \prod\limits_k X_k$ էլեմենտը կարելի է գրել $\{\pi_k(x)\}_{k\in I}$ տեսքով:

Սահմանում 4.4.3: Դիցուք ունենք միևնույն (իրական կամ կոմպլեքս) թվային դաշտի վրա որոշված հիլբերտյան տարածությունների մի ինչ–որ $\{H_i\}_{i\in I}$ ընտանիք: Նշանակենք

$$\sum_{i\in I} \oplus H_i = \left\{x \in \prod_{i\in I} H_i : \sum_i \|\pi_i(x)\|^2 < \infty\right\}:$$

$\sum\limits_{i\in I} \oplus H_i$–ն կոչվում է H_i տարածությունների ուղիղ գումար:

Պարզ է, որ $\sum\limits_{i\in I} \oplus H_i$–ն կդառնա գծային տարածություն, եթե գումարումը և թվով բազմապատկումը սահմանենք

$$\{x_i\} + \{y_i\} = \{x_i + y_i\}, \quad \alpha\{x_i\} = \{\alpha x_i\}$$

բանաձևերով: Բացի այդ, $\sum\limits_{i\in I} \oplus H_i$–ում կարելի է սահմանել սկալյար արտադրյալ հետևյալ կերպ.

$$(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_i (x_i, y_i) : \tag{4.4.18}$$

Գրված շարքը բացարձակ զուգամետ է, քանի որ ըստ Շվարցի անհավասարության՝

$$\sum_i |(x_i, y_i)| \leqslant \sum_i \|x_i\| \cdot \|y_i\| \leqslant \left(\sum_i \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(4.4.1 լեմման լիովին հասկանալի է դարձնում այդ շարքի գումարի իմաստը): Հեշտ է տեսնել, որ սկալյար արտադրյալի բոլոր հատկությունները բավարարվում են: Համոզվենք, որ $\sum\limits_{i \in I} \oplus H_i$ տարածությունը լրիվ է, այսինքն՝ հանդիսանում է հիլբերտյան տարածություն: (4.4.18)–ը գրենք

$$(x, y) = \sum_i (\pi_i(x), \pi_i(y)) \quad \left(x, y \in \sum_{i \in I} \oplus H_i\right) \tag{4.4.19}$$

համարժեք տեսքով: Այստեղից կբխի, որ

$$\|x\|^2 = \sum_i \|\pi_i(x)\|^2 \quad \left(x \in \sum_{i \in I} \oplus H_i\right) : \tag{4.4.20}$$

Դիցուք $\{x_n\} \subset \sum\limits_{i \in I} \oplus H_i$ ֆունդամենտալ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում (4.4.20)–ից կբխի, որ $\{\pi_i(x_n)\}$–ը ևս կլինի ֆունդամենտալ (H_i–ում), ուստի H_i–ի լրիվությունից կբխի, որ գոյություն ունի

$$h_i = \lim_{n \to \infty} \pi_i(x_n) \quad (i \in I)$$

սահմանը: Դիցուք $x = \{h_i\}$: Այդ դեպքում $h_i = \pi_i(x)$, և (4.4.20)–ից կբխի, որ $\forall I_0 \subset I$ վերջավոր ենթաբազմության համար

$$\sum_{i \in I_0} \|\pi_i(x_n) - \pi_i(x_m)\|^2 \leqslant \|x_n - x_m\|^2 : \tag{4.4.21}$$

Վերցնենք $\forall \varepsilon > 0$ թիվ և N–ը ընտրենք այնպես, որ

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad (n, m > N) :$$

(4.4.21)–ից կբխի, որ

$$\sum_{i \in I_0} \|\pi_i(x_n) - \pi_i(x_m)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad (n, m > N),$$

որտեղ անցնելով սահմանի, երբ $m \to \infty$, կստանանք

$$\sum_{i \in I_0} \|\pi_i(x_n) - \pi_i(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad (n > N) :$$

Վերջինս տեղի ունի $\forall I_0 \subset I$ վերջավոր ենթաբազմության համար, որտեղից կբխի, որ

$$\sum_{i \in I} \|\pi_i(x_n) - \pi_i(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad (n > N),$$

$$\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon \quad (n > N),$$

ինչն էլ ցույց է տալիս, որ $x_n \to x$:

Թեորեմ 4.4.3 (Գելֆանդ–Նայմարկի ոչ կոմուտատիվ թեորեմը): *Յանկացած A B^*–հանրահաշվի համար գոյություն ունի H հիլբերտյան տարածություն, այնպես, որ A–ի և $BL(H)$–ի մի ինչ–որ փակ ենթահանրահաշվի միջև գոյություն ունի իզոմետրիկական $*$–իզոմորֆիզմ:*

Ապացույց: Դիցուք H–ը նախորդ թեորեմում կառուցված H_u $(u \in A)$ տարածությունների ուղիղ գումարն է: Դիցուք $S_u \in BL(H)$ $(u \in A)$ և

$$\|S_u\| \leqslant M \quad (u \in A) :$$

$S : H \to H$ օպերատորը սահմանենք հետևյալ կերպ: $\forall v \in H$ համար որպես Sv վերցնենք այն վեկտորը, որի համար

$$\pi_u(Sv) = S_u \pi_u(v) :$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $\sum\limits_{u \in A} \|\pi_u(Sv)\|^2 < \infty$ և հետևաբար՝ $S : H \to H$: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\|S\| = \sup_{u \in A} \|S_u\| : \tag{4.4.22}$$

Դիցուք $T_u(x)$–երը նախորդ թեորեմում կառուցված օպերատորներն են: Վերը նշված սխեմայով կառուցենք այնպիսի $T(x) \in BL(H)$ $(x \in A)$ օպերատորներ, որ

$$\pi_u(T(x)v) = T_u(x)\left(\pi_u(v)\right) \quad (v \in H) :$$

Քանի որ

$$\|T_u(x)\| \leqslant \|x\| = \|T_x(x)\|,$$

ուստի (4.4.22)–ից կբխի, որ

$$\|T(x)\| = \sup_{u\in A} \|T_u(x)\| = \|x\| :$$

Նախորդ թեորեմը կիրառելով H_u տարածությունների վրա՝ կստանանք, որ $x \mapsto T(x)$ արտապատկերումը բավարարում է թեորեմի բոլոր պահանջներին:
Թեորեմն ապացուցված է:

Գրականություն

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Том I – Харьков: 1977, том II – Харьков: 1978.
3. Бурбаки Н. Спектральная теория. – М.: Мир, 1972.
4. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964.
5. Гамелин Т. Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973.
6. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. – М.: Физматгиз, 1960.
7. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ, 1963.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966.
10. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. – М.: Мир, 1974.
11. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. – М.: ИЛ, 1961.
12. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
13. Любич Ю. И. Теория представлений групп в банаховом пространстве. – Харьков: Виша школа, 1985.
14. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. – М.: ИЛ, 1956.
15. Наймарк М. А. Нормированные кольца (изд. 2-е). – М.: Наука, 1968.
16. Рисс Ф., Секефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.

17. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1976.
18. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. – М.: Мир, 1968.
19. Халмош П. Теория меры. – М.: Мир, 1953.
20. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970.
21. Хейман У., Кеннеди Н. Субгармонические функции. т. 1. – М.: Мир, 1980.
22. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962.
23. Хьюитт Э., Росс К. А. Абстрактный гармонический анализ. т. 1. – М.: Наука, 1975; т. 2 – М.: Мир, 1975.
24. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971.
25. Эдвардс Э. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969.
26. Browder A. Introduction to Function Algebras. – New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969.
27. Rickart C. E. General Theory of Banach Algebras. – Princeton: D. van Nostrand, N. J., 1960.
28. Rudin W. Real And Complex Analysis. – New York: McGraw–Hill, 1987.

ԱՍԱՏՐՅԱՆ ՀԱՅԿ ԱԼԲԵՐՏԻ
ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ԻՇԽԱՆ ԳՎԻԴՈՆԻ
ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ ՄԱՐՏԻՆ ԻՍԱԿԻ
ՔԱՄԱԼՅԱՆ ԱՐՄԵՆ ՀՐԱՉԻԿԻ

ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ ԵՎ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ստորագրված է փպագրության 10.07.2008 թ.:
Չափսը՝ $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրապ. 13.5 մամուլ,
փպագր. 15.8 մամուլ=14.6 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 100: Պատվեր՝ 98:

ԵՊՀ հրապարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: